



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

José Vinícius Victorino Gomes

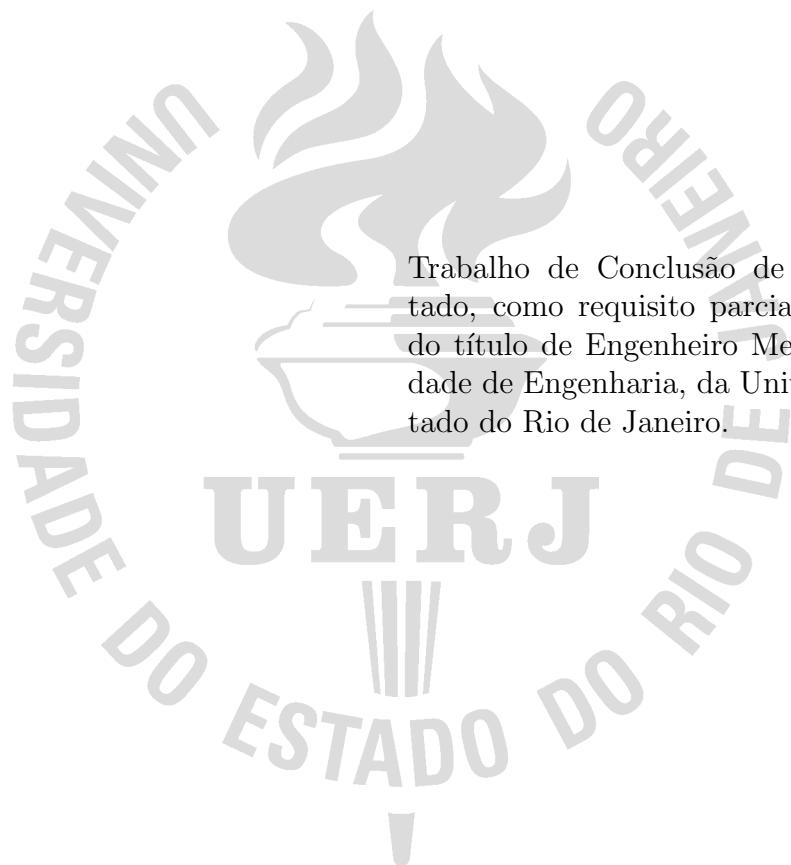
**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA
NUMÉRICA PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS
TERMOESTRUTURAIS BIDIMENSIONAIS VIA MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Rio de Janeiro

2020

José Vinícius Victorino Gomes

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA NUMÉRICA PARA
ANÁLISE DE PROBLEMAS TERMOESTRUTURAIS BIDIMENSIONAIS
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**



Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico, à Faculdade de Engenharia, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro

Coorientador: Prof. D.Sc. Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

2020

Ficha elaborada pelo autor através do
Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica da Rede Sirius - UERJ

V646

Victorino Gomes, José Vinícius

Desenvolvimento de uma ferramenta numérica para
análise de problemas termoestruturais bidimensionais
via método dos elementos finitos / José Vinícius
Victorino Gomes. - 2020.
111 f.

Orientador: Francisco José da Cunha Pires Soeiro
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade
de Engenharia, para obtenção do grau de bacharel em
Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos - Monografias. 2.
Python - Monografias. 3. Transferência de calor -
Monografias. 4. Mecânica dos sólidos - Monografias. I.
Soeiro, Francisco José da Cunha Pires. II.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade
de Engenharia. III. Título.

José Vinícius Victorino Gomes

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA NUMÉRICA PARA
ANÁLISE DE PROBLEMAS TERMOESTRUTURAIS BIDIMENSIONAIS
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico, à Faculdade de Engenharia, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 3 de Abril de 2020.

Banca Examinadora:

Francisco José da Cunha Pires Soeiro

Prof. Dr. Francisco José da Cunha Pires Soeiro (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Gustavo Rabello dos Anjos

Prof. D.Sc. Gustavo Rabello dos Anjos (Coorientador)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

José Geraldo Telles Ribeiro

Prof. D.Sc. José Geraldo Telles Ribeiro
Faculdade de Engenharia - UERJ

Marcelo Amorim Savi

Prof. D.Sc. Marcelo Amorim Savi
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2020

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Sergio Paulo e Vera Lúcia, gostaria de agradecer pelo constante apoio, dedicação e esforço que tiveram em me educar, sem vocês este trabalho não teria sido finalizado.

Aos todos os meus amigos da UERJ que fizeram parte da minha formação, por toda palavra de incentivo e motivação. Em especial, ao Matheus Santos de Souza, agradeço por ter sido um exemplo de resiliência e perseverança, tanto no aspecto acadêmico quanto no aspecto pessoal.

Agradeço a todos os professores da Universidade por dividirem seus conhecimentos, acadêmicos e profissionais. Em especial aos meus orientadores, professores Francisco Soeiro e Gustavo dos Anjos, pela orientação, apoio e confiança.

RESUMO

VICTORINO GOMES, José Vinícius. *Desenvolvimento de uma Ferramenta Numérica para Análise de Problemas Termoestruturais Bidimensionais via Método dos Elementos Finitos*. 2020. 109 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Este trabalho tem como objetivo elaborar uma ferramenta numérica aplicando o Método dos Elementos Finitos, implementado em linguagem *Python*, capaz de resolver problemas térmicos, estruturais e termoestruturais bidimensionais com o recurso de programas livres. Para a discretização do domínio, são utilizados elementos finitos triangulares lineares e o método de Galerkin. As equações governantes para os problemas térmicos e estruturais são provenientes da conservação de energia, equações de transferência e a partir da condição estática da conservação de momento linear, respectivamente. Os resultados dos códigos desenvolvidos, comparados com soluções analíticas e através de um *software* de simulação numérica comercialmente utilizado, mostraram que tanto o método quanto o modelo foram satisfatórios ao reproduzir o comportamento de um problema de engenharia em regime estacionário.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Python. Transferência de Calor. Mecânica dos Sólidos.

ABSTRACT

VICTORINO GOMES, José Vinícius. *Development of Numerical Tool for Analysis of Two-Dimensional Thermo-Structural Problems via Finite Element Method.* 2020. 109 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

This work aims to develop a numerical tool using the Finite Element Method, implemented in Python language, capable of solving two-dimensional thermal, structural and thermo-structural problems with the use of free programs. For domain discretization, linear triangular finite elements and the Galerkin method are used. The governing equations for thermal and structural problems come from energy conservation, transfer equations and from the static condition of the conservation of linear momentum, respectively. The results from the developed codes, compared with analytical solutions and through commercially used numerical simulation software, showed that both the method and the model were satisfactory in reproducing the behavior of an engineering problem in steady state.

Keywords: Finite Element Method. Python. Heat Transfer. Solid Mechanics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Convergência da solução de um elemento finito.	14
Figura 2 - Troca de calor entre o meio e uma superfície	17
Figura 3 - Força superficial T na área ΔA	19
Figura 4 - Elemento sob tensões e forças de corpo.	21
Figura 5 - Deformação de um elemento infinitesimal	22
Figura 6 - Conservação de energia em um VC	25
Figura 7 - Malha genérica definindo elemento, nó e contorno	35
Figura 8 - Elementos finitos 1D, 2D e 3D	36
Figura 9 - Barra axialmente carregada e sua discretização.	42
Figura 10 - Treliça plana.	45
Figura 11 - Esquema de funcionamento da matriz de conectividade.	46
Figura 12 - Elemento finito sujeito à força de superfície.	53
Figura 13 - Decomposição das forças de superfície.	54
Figura 14 - Condições de contorno para o problema térmico.	57
Figura 15 - Tela inicial do Gmsh.	63
Figura 16 - Código fonte da geometria.	64
Figura 17 - Exemplo do uso de condição de contorno.	65
Figura 18 - Exemplos de malhas no Gmsh.	67
Figura 19 - Área de trabalho do <i>Paraview</i>	71
Figura 20 - Simulação sob condição de temperatura no contorno.	73
Figura 21 - Simulação sob condição de fluxo de calor no lado direito.	75
Figura 22 - Simulação sob condição de fluxo de calor por convecção.	77
Figura 23 - Esquema do princípio da superposição.	78
Figura 24 - Perfil de temperatura T_A	79
Figura 25 - Simulação do problema de Poisson.	80
Figura 26 - Modelo do <i>patch test</i>	81
Figura 27 - Caso 1 do <i>patch test</i> de força.	84
Figura 28 - Malha da chapa com 526 elementos.	86
Figura 29 - Força peso - solução teórica X solução numérica.	87
Figura 30 - Simulação sob tensão constante.	88
Figura 31 - Chapa com furo - solução teórica X solução numérica.	89
Figura 32 - Tensão de Von Mises no <i>ANSYS</i> e no <i>híbrido.py</i>	90
Figura 33 - Tensão de Von Mises nos pontos selecionados.	90
Figura 34 - Malha refinada no <i>Ansys</i>	91
Figura 35 - Convergência da tensão de Von Mises na região do furo.	92
Figura 36 - Perfil de tensão de Von Mises.	93

Figura 37 - Perfil de deslocamento na direção x na malha com 13494 elementos.	93
Figura 38 - Perfil de deslocamento na direção y na malha com 13494 elementos.	93
Figura 39 - Malhas com diferentes concentradores de tensões.	94
Figura 40 - Distribuição de temperatura e de deslocamento nos nós com diferentes concentradores de tensões.	96
Figura 41 - Distribuição de tensões no furo e na chapa.	97
Figura 42 - Tensão de Von Mises em corte.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados das variáveis primária e secundária nos nós.	43
Tabela 2 - <i>Patch test</i> de deslocamento.	82
Tabela 3 - <i>Patch test</i> de deformação.	83
Tabela 4 - <i>Patch test</i> de força.	85
Tabela 5 - Tensão de Von Mises na malha com 10000 elementos.	90

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
1.1	Método dos Elementos Finitos	13
1.2	Mecânica dos Sólidos	14
1.3	Transferência de Calor	15
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	19
2.1	Mecânica dos Sólidos	19
2.2	Transferência de Calor	24
2.3	Método dos Elementos Finitos	28
2.3.1	<u>Forma Forte</u>	28
2.3.2	<u>Forma Fraca</u>	29
2.3.3	<u>Forma Variacional</u>	32
2.3.4	<u>MEF propriamente dito</u>	33
2.3.4.1	Discretização	34
2.3.4.2	Funções de aproximação local	36
2.3.4.3	Equações do elemento (Matriz de rigidez \mathbf{K})	40
2.3.4.4	Conectividade dos elementos	42
2.3.4.5	Solução das equações	46
2.3.4.6	Pós-processamento	48
2.4	MEF em problemas da mecânica dos sólidos	48
2.5	MEF em problemas de transferência de calor	56
3	ALGORITMO E METODOLOGIA	62
3.1	Gerador da malha	62
3.1.1	<u>Dados de entrada</u>	63
3.1.2	<u>Criação da malha</u>	66
3.2	Implementação do código em linguagem Python	68
3.3	Visualização dos resultados	70
4	RESULTADOS	72
4.1	Validações	72
4.1.1	<u>Equação de Calor sem geração de energia</u>	72
4.1.1.1	Sob condições de contorno de temperatura	72
4.1.1.2	Sob condições de contorno de fluxo de calor	74
4.1.1.3	Sob condições de fluxo de calor por convecção	76
4.1.2	<u>Equação de Calor com geração de calor</u>	76
4.1.2.1	Sob condições de contorno de temperatura	76
4.1.3	<u>Patch Test</u>	79

4.1.4	<u>Força de corpo</u>	85
4.1.5	<u>Chapa com furo circular</u>	86
4.1.6	<u>Tensões térmicas</u>	88
4.1.6.1	Numa chapa plana com gradiente de temperatura constante	89
4.1.6.2	Numa chapa furada com gradiente de temperatura variado	91
4.2	Estudo de caso	94
	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICE A – Relações de Integração	103
	APÊNDICE B – Cálculo Variacional	107

INTRODUÇÃO

Dentro da rotina de trabalho, projetistas e engenheiros se deparam com problemas técnicos, alguns mais complexos do que outros, que devem ser solucionados de maneira adequada. Para tais problemas, geralmente fazem o uso de fórmulas, tabelas e ferramentas matemáticas que foram obtidas com o passar de anos de estudos e experimentos realizados por matemáticos, físicos e engenheiros.

Em outras situações, é necessário utilizar métodos numéricos em problemas mais complexos, dos quais as soluções exatas são, às vezes, impossíveis de serem obtidas, exemplos de tais problemas podem ser encontrados no resfriamento de equipamentos eletrônicos ou na análise de tensões em estruturas de aviões. Atualmente, o método dos elementos finitos (MEF) é o procedimento numérico mais utilizado para a análise de tais problemas. Ele consiste basicamente da subdivisão do domínio do problema em partes mais simples chamados de elementos finitos, onde cada subdomínio é representado por um conjunto de equações que são elementos do problema original, seguido da recombinação do conjunto de equações de todos os subdomínios em um sistema global de equações para o cálculo final.

Alguns softwares conhecidos comercialmente, como *ANSYS Workbench* e *Autodesk Inventor*, possuem versões gratuitas e são ótimas escolhas para fins educacionais e científicos. No entanto, não são passíveis de extensões criadas pelos usuários, por possuírem seu código-fonte fechado. Tais modificações poderiam ser a implementação de novas técnicas e novos métodos que estão sendo desenvolvidas a todo momento, a fim de otimizar o software.

O propósito deste trabalho é desenvolver uma ferramenta numérica capaz de resolver problemas térmicos, estruturais e termoestruturais em um domínio bidimensional empregando o método dos elementos finitos e utilizando apenas programas livres, ou seja, programas com licenças gratuitas. A solução dos problemas térmicos é realizada através da equação de calor, sem e com geração de energia, oriunda das equações de transferência de calor e da conservação de energia. No caso de problemas estruturais, optou-se por utilizar o princípio do trabalho virtual, que também é baseado na conservação de energia. O MEF é implementado utilizando a linguagem de programação *Python* com a aproximação de Galerkin. Para o pré-processamento dos dados, o programa *GMSH* é empregado para criação do modelo, geração de malha e imposição das condições de contorno e o programa *Paraview* é utilizado para a visualização dos resultados, no pós-processamento.

A organização do trabalho é feita da seguinte maneira, no Capítulo 1 é apresentado uma breve revisão bibliográfica sobre o histórico do método dos elementos finitos, da mecânica dos sólidos e da transferência de calor. O Capítulo 2 é responsável por introduzir os conceitos base e desenvolvimento das equações governantes tanto da transferência de

calor quanto da mecânica dos sólidos. O MEF é abordado de forma geral, desde a definição dos modelos matemáticos até a sua aplicação nos dois ramos da engenharia. No Capítulo 3 são mostradas a metodologia, utilizada para a criação da ferramenta numérica, e partes importantes do algoritmo. Além disso, são apresentados alguns programas livres que foram úteis na criação da ferramenta e o Capítulo 4 expõe os resultados das validações utilizadas para a verificação dos códigos e apresenta um estudo de caso, analisando-o com base nas respostas obtidas pelo código criado.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para que este trabalho seja desenvolvido é necessário primeiramente que sejam bem compreendidos alguns aspectos do Método dos Elementos Finitos (MEF), da Mecânica dos Sólidos e da Transferência de Calor. Para tanto, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre esses tópicos.

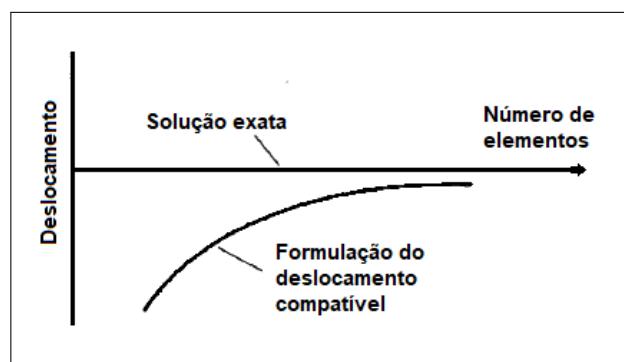
1.1 Método dos Elementos Finitos

Existem alguns problemas em diversas áreas do conhecimento como a mecânica, física, matemática, etc. em que não é possível resolvê-los em qualquer ponto do seu domínio, somente em alguns pontos (problemas discretos). Em outros casos, é possível obter sua solução em qualquer ponto pertencente ao seu domínio (problemas contínuos) através de funções matemáticas que descrevem o seu comportamento, porém estes são geralmente limitados por situações supersimplificadas. Com o intuito de superar esta dificuldade de problemas contínuos mais realistas, vários métodos de discretização foram criados, por engenheiros e matemáticos, como por exemplo os métodos das diferenças finitas, dos volumes finitos e dos elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005)

O MEF é um método numérico de aproximação para solução, na grande maioria, de problemas de engenharia. As áreas de aplicação incluem análise estrutural (deformações e tensões em automóveis, aviões, prédios ou pontes), transferência de calor, escoamento de fluidos, transporte de massa, fluxo magnético entre outros (CHANDRUPATLA et al., 2002) e (LOGAN, 2012). Brevemente falando no método, a região que define o meio contínuo do problema é discretizada em formas geométricas simples (linhas, triângulos, retângulos, cubos) chamadas de 'elementos finitos', que estão interconectados entre si em pontos específicos chamados de 'nós'. Nesses elementos são considerados adequadamente as propriedades do material e as relações governantes expressos em termos de incógnitas nas fronteiras do elemento. Em um processo de montagem, onde é considerado as condições de contorno e iniciais do problema, resulta num conjunto de equações que, posteriormente, deve ser solucionado para obter o comportamento aproximado do meio contínuo (CHANDRUPATLA et al., 2002).

Existem diversas maneiras de encontrar a matriz de rigidez (ou matriz de rigidez térmica, para problemas térmicos) do elemento, isto é, a relação entre as incógnitas nodais e as correspondentes forças ou cargas na forma de equações matriciais. Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), para problemas estruturais, onde o foco é conhecer os deslocamentos nodais, o uso do Princípio do Trabalho Virtual é extremamente poderosa

Figura 1 - Convergência da solução de um elemento finito.



Fonte: (LOGAN, 2012, p. 402)

e conveniente. No caso de problemas térmicos, diversos métodos são aplicáveis como, por exemplo, o método de Ritz (balanço integral de calor), o método de Rayleigh Ritz (variacional) e o método dos Resíduos Ponderados (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004).

Segundo Rugarli (2010) e Bathe (2014), o resultado da solução aproximada deve convergir para a solução exata se o modelo matemático for idealizado corretamente, se o elemento finito for compatível com o domínio e se a malha for bem refinada, isto é, quanto mais elementos estiver discretizando o meio contínuo, menor será a diferença entre a malha e a superfície real (Figura 1).

Além da escolha do tipo de elemento, a função de forma, que limita os infinitos graus de liberdade do real problema, são fatores que influenciam significativamente na convergência dos resultados e ficam a critério do responsável pela análise (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005).

1.2 Mecânica dos Sólidos

A mecânica dos sólidos, ou também chamado de mecânica dos corpos deformáveis, é um ramo da mecânica do contínuo do qual estuda o comportamento deformável dos sólidos. Ela estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro do corpo, a sua estabilidade, além de envolver métodos analíticos para a determinação da distribuição das deformações características e das tensões (POPOV, 2000), (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

A evolução histórica na mecânica dos materiais é uma fascinante mistura de teoria e experiência e a importância da união entre os desenvolvimentos teóricos e as propriedades dos materiais obtidas experimentalmente tornaram-se evidente à medida que se avançava

no estudo. Conceitos como tensão e deformação foram introduzidos e discutidos por Cauchy no inicio do século 19 e o desenvolvimento da cinemática, que segundo Avallone, Baumeister e Sadegh (2006) é o estudo do movimento dos corpos sem relacionar as forças ou a massa que causam o movimento deste, juntamente com as equações de campo são essencialmente devido aos trabalhos de Euler (CHANDRASEKHARAIAH; DEBNATH, 2014).

De acordo com Reddy (1984) e com Chandrasekharaih e Debnath (2014), as equações governantes do contínuo, que são válidas tanto para a mecânica dos sólidos quanto para a mecânica dos fluidos, são derivadas usando quatro princípios de conservação, são eles: de massa; de momento linear; de momento angular e; de energia. Tais princípios não levam em consideração variações geométricas ou comportamentos mecânicos do sólido e, por isso, são insuficientes para determinar a resposta do meio contínuo. Com isso deve-se utilizar relações de deformação-deslocamento (cinemáticas) e equações constitutivas (relações de tensão-deformação, por exemplo) que vão variar dependendo do material e das relações entre as deformações e os deslocamentos dentro do corpo (POPOV, 2000).

Dentro da mecânica dos sólidos existe um ramo chamado elasticidade, no qual se preocupa em determinar tensões e deslocamentos em um corpo sob a ação de cargas mecânicas ou térmicas, sendo que o corpo consegue retornar a sua configuração inicial depois que as cargas são removidas (BARBER, 2004). Especialmente, um corpo elástico é dito de comportamento linear quando a relação entre esforço e deformação é linear e diversos materiais de engenharia possuem este comportamento quando sujeitos à pequenas deformações (MARSDEN; HUGHES, 1994).

A teoria da elasticidade expande o conceito de mecânica dos sólidos, dando a ele maior formalismo matemático. O formalismo vem de ferramentas matemáticas, como tensores e equações diferenciais parciais. As premissas utilizadas são matemáticas, não físicas. Uma suposição típica é de que, após flexão, a parte plana permanece plana. Na teoria da elasticidade, essa suposição não é considerada diretamente, mas uma solução é proposta com base nos princípios básicos da mecânica newtoniana (equilíbrio), geometria euclidiana (cinemática) e lei de Hooke (constituição) (BARBER, 2004).

1.3 Transferência de Calor

Segundo Kreith e Bohn (2003), a transferência de calor pode ser definida como a transmissão de energia de uma região de alta temperatura para outra região de baixa temperatura. Isto é, sempre que houver uma diferença de temperatura dentro de um sistema ou que dois sistemas com diferentes temperaturas forem colocados em contato, haverá transferência de energia.

Calor é uma forma de energia em que pode ser transferida de um sistema ao outro devido à diferença de temperatura. A termodinâmica estuda a *quantidade* de calor transferido quando um sistema passa de um estado de equilíbrio para outro estado de equilíbrio, sem fazer referência em quanto tempo esse processo demora. Já a ciência da Transferência de Calor está interessada na *taxa* de transferência de calor, que é de grande interesse na engenharia (CENGEL; GHAJAR, 20012). A transferência de calor pode ocorrer de três modos distintos, como descreve Incropera et al. (2008):

- **Condução:** A condução pode ser interpretada como a transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas de uma substância por causa das interações entre as partículas. Simplificando, quando houver um gradiente de temperatura em um meio estacionário (pode ser entre sólidos e sólido-fluido), utilize-se o termo condução para se referir à transferência de calor através do meio. A equação que quantifica este processo de transferência de calor é conhecida como lei de Fourier. Para um caso unidimensional, a equação da taxa é apresentada como:

$$q''_{cond} = -k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

onde $T(x)$ (K ou $^{\circ}C$) é distribuição de temperatura na direção x , q''_{cond} ($\frac{W}{m^2}$) é a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área perpendicular à direção de transferência, k ($\frac{W}{mK}$) é uma propriedade de transporte chamada de condutividade térmica e é característica do material. O sinal de menos é uma consequência da segunda lei da termodinâmica em que o calor deve ser transferido na direção de decrescimento da temperatura.

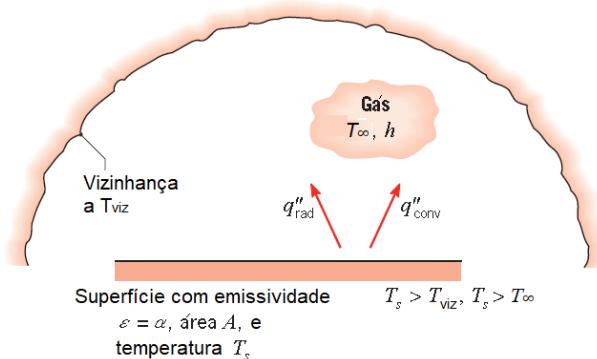
- **Radiação:** A radiação, ou mais corretamente radiação térmica, se dá pela emissão de energia atribuída a mudanças nas configurações eletrônicas dos átomos ou moléculas que constituem a matéria, independente do seu estado, que, por sua vez, se encontra a uma temperatura não-nula (acima de $0K$). A energia da radiação é conduzida por ondas eletromagnéticas (ou fôtons) e, diferentemente dos outros tipos de transferência, não requer um meio material para ocorrer a transferência.

A energia emitida pela matéria por unidade de área é conhecida como poder emissivo E . O limite superior para o poder emissivo é determinado pela lei de Stefan-Boltzmann (Equação 2)

$$E_b = \sigma T_s^4 \quad (2)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$) e T_s é a temperatura absoluta (em K) da superfície que é chamada de radiador ideal ou corpo negro.

Figura 2 - Troca de calor entre o meio e uma superfície



Fonte: (INCROPERA et al., 2008, p. 4)

O fluxo térmico emitido por uma superfície real é menor do que em um corpo negro à mesma temperatura e é descrito por

$$E = \epsilon\sigma T_s^4 \quad (3)$$

onde ϵ é conhecida por emissividade, uma propriedade radiante da superfície com valores na faixa de $0 \leq \epsilon \leq 1$. Além de emitir energia, a superfície também sofre incidência de radiação proveniente de uma fonte e este fenômeno é denominada de irradiação G . A superfície pode absorver, refletir e/ou transmitir, total ou parcialmente, a irradiação que incide nela. Através da propriedade radiante da superfície conhecida como absorvidade α , é possível calcular a taxa de energia absorvida por unidade de área, isto é,

$$G_{abs} = \alpha G \quad (4)$$

Considere o esquema da Figura 2 onde ocorre uma troca de radiação térmica entre uma pequena superfície a T_s e uma superfície bem maior a ponto de envolver totalmente a superfície menor, com temperatura $T_{viz} \neq T_s$. A taxa de transferência de calor líquida por radiação térmica saindo da menor superfície, sendo esta uma superfície cinza ($\alpha = \epsilon$), é

$$q''_{rad} = \frac{q}{A} - \epsilon E_n(T_s) - \alpha G = \epsilon\sigma(T_s^4 - T_{viz}^4) \quad (5)$$

Esta expressão demonstra a diferença entre a energia térmica emitida e absorvida devido a radiação.

- **Convecção:** Esse modo engloba dois mecanismos de transferência de energia, devido ao movimento molecular aleatório (difusão) e através do movimento global, ou macroscópico, do fluido. Alguns trabalhos como o de Kreith e Bohn (2003) não classificam a convecção como um processo de transferência de calor, pois este não depende somente da diferença de temperatura. Porém, o termo 'transmissão de calor por convecção' tornou-se aceito de forma mais abrangente.

A transferência de calor por convecção pode ser classificada segundo a natureza do escoamento do fluido. Quando o escoamento é induzido pela diferença de densidade dentro do fluido (forças de empuxo) causadas por variações da temperatura, chama-se de convecção livre (ou natural). Agora, quando existe fatores externos forçando a movimentação do fluido, como bombas e ventiladores, denomina-se à convecção forçada. Independentemente da natureza do processo, a taxa de transferência de calor por unidade de área é calculada a partir da lei do resfriamento de Newton (Equação 6), onde $T_s - T_\infty$ é diferença entre as temperaturas da superfície e do fluido, respectivamente, e a constante h ($\frac{W}{m^2 K}$) é chamada de coeficiente de transferência de calor por convecção.

$$q''_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (6)$$

Ao invés da obtenção do fluxo de calor, alguns problemas na engenharia exigem a determinação da distribuição de temperatura em um ponto qualquer da matéria, a fim de calcular alguns valores de interesse, como taxa local de transferência de calor, expansão térmica e tensão térmica em alguns pontos críticos (CENGEL; GHAJAR, 20012). Para tal tarefa, deve-se aplicar a conservação de energia em um volume de controle diferencial, identificar os processos de transferência de calor relevantes na questão e substitui-las nas equações de taxas apropriadas. Depois de aplicar as condições de contorno específica da questão, resultará numa equação diferencial tal qual a solução determina a distribuição de temperatura no meio (INCROPERA et al., 2008).

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo serão abordadas as definições e os fundamentos teóricos para o desenvolvimento das equações governantes no campo da Mecânica dos Sólidos e da Transferência de Calor e, em seguida, serão apresentados alguns fundamentos do MEF e sua aplicação na resolução das equações governantes.

2.1 Mecânica dos Sólidos

A condição estática da conservação do momento linear resulta em um equilíbrio de forças atuantes em um determinado ponto ou volume infinitesimal no corpo. Qualquer volume do corpo pode ser visto com um corpo livre. Qualquer corpo está sujeito aos diversos tipos de cargas (ou forças) e elas podem ser caracterizadas em *força de corpo*, distribuída no volume, ou *força de superfície*, distribuída na superfície deste. Elas também podem ser definidas em *interna* ou *externa*. Forças que agem dentro de um mesmo corpo livre definido em um volume aleatório são chamadas de internas, já as forças externas são aquelas provenientes de um volume fora do corpo livre (SLAUGHTER, 2012).

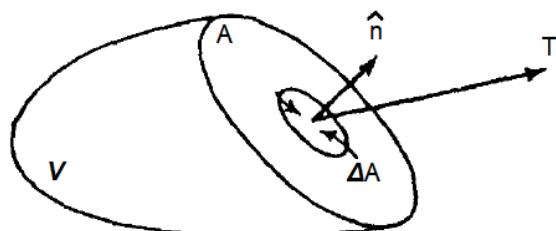
Na superfície, a força é a integral de área da densidade de força, denominada vetor tensão, \mathbf{t} . Essa densidade é um vetor definido através do limite no qual um elemento de área tende a zero.

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}}{\Delta A} \quad (7)$$

no qual \mathbf{T} é o vetor força de superfície resultante em uma área.

As tensões surgem como uma resposta do corpo às solicitações de carregamento. Elas são o meio pelo qual as forças externas são transmitidas de ponto a ponto no interior

Figura 3 - Força superficial \mathbf{T} na área ΔA .



Fonte: (MALVERN, 1969, p. 69)

do corpo (HIBBELER, 2010). O estado de tensões em um ponto no interior de um corpo pode ser descrito por meio de nove componentes de tensões arranjadas em um tensor σ_{ij} , onde os índices indicam componente na face i na direção j . A face é definida pelo vetor normal à ela, portanto a face i apresenta vetor normal nessa direção.

A forma completa das tensões em um ponto material é conhecida como o *tensor de tensão de Cauchy* e é expressa por

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \sigma_{ik} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} & \sigma_{jk} \\ \sigma_{ki} & \sigma_{kj} & \sigma_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pelo teorema de Cauchy, $\mathbf{t} = \hat{\sigma}\mathbf{n}$, o vetor tensão num ponto pode ser determinado para qualquer plano definido pelo vetor normal \mathbf{n} por meio do tensor tensão de Cauchy. O equilíbrio dos momentos em um elemento infinitesimal gera as seguintes relações

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (9)$$

e, com isso, o número de componentes independentes no tensor de tensões passa de nove para seis, podendo ser convenientemente representado por um vetor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^t \quad (10)$$

Num elemento infinitesimal, o somatório das forças agindo nas áreas deste gera, no limite, o equilíbrio do ponto. Para o caso bidimensional, o sistema de forças que atuam sobre um elemento infinitesimal é mostrado na Figura 4. Ela mostra as tensões atuando nas diversas faces de um elemento de volume $dx \cdot dy \cdot 1$ ao longo das coordenadas x e y . A soma de todas as forças na direção x , por exemplo, é dado por

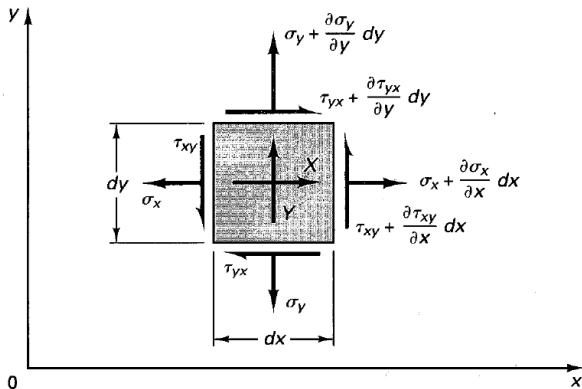
$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) (dy \times 1) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) (dx \times 1) + X(dx \times dy \times 1) = 0 \quad (11)$$

Simplificando esta equação e relembrando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, obtém-se uma equação básica do equilíbrio na direção x . Junto com a sua análoga para a direção y , a equação do equilíbrio tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

no qual X e Y são as componentes do vetor força de corpo por unidade de volume, \mathbf{b} , que agem distribuídas na massa do corpo. Em muitas aplicações práticas, o peso do corpo é a única força de massa. Seguindo a direção do eixo y e chamando de ρ a densidade do

Figura 4 - Elemento sob tensões e forças de corpo.



Fonte: (POPOV, 2000, p. 11)

sólido, pode-se expressar o vetor $\mathbf{b} = [0 \ -\rho g]^t$. As duas equações podem ser expressas, de forma resumida, pela expressão

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (13)$$

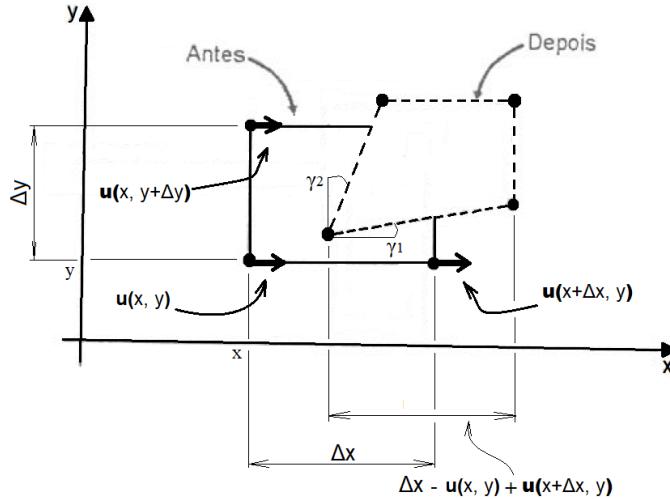
As equações 12 são aplicáveis para corpos elásticos, plásticos e viscoelásticos, já que não são utilizadas propriedades mecânicas de materiais. Além disso, elas não são o suficiente para determinar os esforços desconhecidos. Para este caso bidimensional, existem duas equações para obter os valores de σ_x , σ_y e τ_{xy} . Com isso, seria necessário complementar as equações do equilíbrio com as relações cinemáticas e com as propriedades mecânicas do material para a solução do problema (POPOV, 2000).

As relações cinemáticas, ou relações de compatibilidade, constroem a ligação entre as deformações específicas do corpo e os deslocamentos do ponto material. Para utilizar essas relações, a fim de resolver o problema mecânico, é necessário uma conexão entre essas variáveis e as variáveis da equação do equilíbrio e isso é feito a partir da constituição do material.

A Figura 5 mostra para um elemento bidimensional infinitesimal as componentes de deslocamento $\mathbf{u} = [u \ v]^t$ para os seus vértices. O efeito do campo de deslocamentos nas deformações é admitido ser, aproximadamente, linear. Esta hipótese é válida considerando que os deslocamentos e as deformações serão pequenas em relação a unidade (MALVERN, 1969).

Existem várias medidas de deformação como o tensor de deformação de Cauchy-Green e o tensor de deformação linear, por exemplo. Elas se baseiam nos vetores de deslocamento quando os corpos se deformam. Para o presente trabalho, será utilizado tensor de deformação linear descrito para formulação matemática do problema da elasticidade.

Figura 5 - Deformação de um elemento infinitesimal



Fonte: O autor, 2019

Segundo Malvern (1969), a extensão unitária, ou deformação linear, é definida como a razão entre a mudança no comprimento pelo comprimento inicial. Utilizando a Figura 5, a deformação na direção x é

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14)$$

e as deformações na outras direções são análogas a equação acima.

Essas deformações ocorrem quando um corpo sofre esforços de tração ou de compressão, seja por cargas externas ou variações na temperatura. Quando o corpo é distorcido, a deformação cisalhante pode ser entendida como $\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y$ que, segundo a Figura 5, é a diferença entre os ângulos antes e depois de deformado das faces do elemento. Matematicamente, a deformação cisalhante será

$$\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (15)$$

Essa notação, utilizando a letra grega gama, é conhecida como *deformação cisalhante de engenharia* e ela se relaciona com a deformação cisalhante com $\epsilon_{ij} = 1/2\gamma_{ij}$. O fator $1/2$ surge da definição de tensor de deformação infinitesimal que, por sua vez, surge quando os termos de alta ordem são desprezados do tensor de deformação de Green-St.

Venant. Dito isso, o tensor de formação linear pode ser definido por

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] \quad (16)$$

O tensor de formação possui seis componentes independentes e o vetor deslocamento apenas três componentes. Devido a isso, existem apenas três equações independentes que conectam as deformações com os deslocamentos (relações de compatibilidade) para o caso tridimensional. Reddy (1984) mostra como obter esta relação para o caso bidimensional, que é da forma

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

Até aqui, foram obtidas as equações do equilíbrio de um corpo deformável e as relações de deformação-deslocamento do mesmo. Só que ainda não foram relacionadas as tensões internas com as deformações sofridas, esta ligação é realizada através das equações constitutivas que caracterizam o comportamento de um material devido às cargas aplicadas.

Para o trabalho em questão, será considerado que o material utilizado na análise será homogêneo (mesmas propriedades em qualquer ponto do corpo), isotrópico (mesmas propriedades em qualquer direção) e *perfeitamente elástico*, isto é, que eles retomam a sua forma inicial quando as forças deixam de atuar.

Em um corpo idealmente elástico, assume-se de que obedece a lei de Hooke, no qual expressa uma relação linear entre tensão e deformação. Quando este está sob a ação do tensor tensão de Cauchy (equação 8), pode-se relacionar com o tensor de deformação linear através da relação conhecido como lei de Hooke generalizada

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\epsilon} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde $\hat{\mathbf{C}}$ é o tensor de rigidez de segunda ordem possuindo apenas, para materiais isotrópicos, dois coeficientes elásticos independentes. Da equação acima, o módulo de elasticidade (E) e (G) é a razão entre o incremento da tensão unitária e o incremento da deformação unitária dentro do limite elástico e o coeficiente de Poisson (ν) é a razão entre as deformações longitudinais e transversais do material.

As equações do equilíbrio (Equação 12), a condição de compatibilidade das deformações (Equação 16) e as relações entre tensões e deformações (Equação 18), juntamente com as condições de contorno do problema, fornecem um sistema de equações suficientes para a determinação do campo de tensões para um problema bidimensional.

As condições de contorno são restrições impostas às variáveis do problema no contorno do domínio de interesse. Em problemas mecânicos, as condições de contorno podem ser de deslocamentos especificados (condição de Dirichlet) e de tensões aplicadas (condição de Neumann) em alguma região do contorno, como apresentado a seguir:

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad , \quad x_i, y_i \in \Gamma_u \text{ (condição de Dirichlet)}$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_j \quad , \quad x_i, y_i \in \Gamma_t \text{ (condição de Neumann)}$$

no qual n_j é o vetor unitário normal a superfície do corpo, Γ_u e Γ_t representam a parte no contorno do domínio onde, respectivamente, os deslocamentos e as tensões são impostas.

2.2 Transferência de Calor

Como foi dito anteriormente na Seção 1.3, a termodinâmica não consegue sozinha prever a taxa na qual a transferência de calor irá ocorrer em termos do grau de desequilíbrio térmico. Para isso, utiliza-se as equações de transferência (Equações 1, 2, 5) juntamente com a primeira lei da termodinâmica para analisar um sistema. A primeira lei da termodinâmica, também conhecida como o princípio de conservação de energia, diz que durante um processo a energia não pode ser criada e nem destruída, porém pode ser transformada de uma forma para outra.

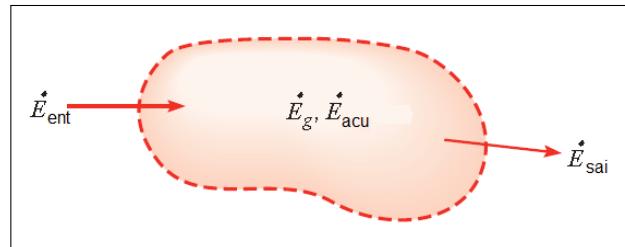
Resumidamente, este princípio demonstra que a energia total de um sistema é conservada e a energia deste só irá variar se houver saída ou entrada de energia. As únicas maneiras da energia atravessar os limites de um sistema fechado (sistema onde a massa é constante) é pela transferência de calor e pelo trabalho realizado no ou pelo sistema. Matematicamente, a 1^a lei pode ser representada como:

$$\Delta E_{acu}^{tot} = Q - W \tag{19}$$

onde ΔE_{acu}^{tot} é a variação da energia total acumulada (energia térmica mais a energia mecânica) no sistema, Q é a quantidade líquida de calor transferido para o sistema e W é a quantidade líquida de trabalho efetuado pelo sistema.

O termo *quantidade líquida* refere-se à variação de uma propriedade entre os seus estados inicial e final no sistema. A conservação de energia também pode ser utilizada em um volume de controle VC (ou sistema aberto), que é uma região onde ocorre a passagem de massa, consequentemente ocorre uma passagem de energia, demonstrando assim uma

Figura 6 - Conservação de energia em um VC



Fonte: (INCROPERA et al., 2008, p. 13)

outra forma da energia total do sistema variar.

Foi explicado no último parágrafo da Seção 1.3 que a determinação da distribuição de temperatura é um dos principais focos em problemas de engenharia e que é através da manipulação da conservação de energia que se chega numa equação onde é possível determinar as temperaturas em um domínio, chamada de equação da temperatura. Imagine um pequeno elemento de volume estacionário, fixo no espaço, por onde escoa um fluido (líquido ou gasoso). A taxa da variação de energia total (\dot{E}_{acu}) dentro de um VC deve ser igual à taxa das energias que entram no VC (\dot{E}_{ent}) menos a taxa das energias que saem do VC (\dot{E}_{sai}), mais a taxa da energia gerada dentro do VC (\dot{E}_g), como mostra a Figura 6.

Calor devido à condução e convecção podem estar entrando e saindo do elemento, trabalho pode ser realizado no fluido devido às forças viscosas e de pressão, além das forças externas como a da gravidade. Energia cinética devido ao movimento do fluido e energia interna, que constituí do somatório da energia cinética das moléculas mediante a translação, vibração e rotação destas (componente sensível) mais as energias de interação entre todas as moléculas (componentes latente, químico e nuclear), também podem ser levadas em consideração. A equação seguinte é a equação do balanço da energia total, em termos de taxa, considerando as variáveis descritas anteriormente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(u + \frac{v^2}{2}) = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} (u + \frac{v^2}{2}) - \nabla \cdot \mathbf{q}'' + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - \nabla \cdot P \mathbf{v} + \nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{v}) + \dot{Q} \quad (20)$$

onde \mathbf{u} é a energia interna por unidade de massa (ou específica), ρ é a densidade do fluido, \mathbf{v} é o vetor de velocidade, \mathbf{q}'' é o vetor do fluxo de calor, \mathbf{g} é vetor da aceleração gravitacional, P e τ é a pressão e a tensão cisalhante atuante no fluido, respectivamente, e \dot{Q} é a taxa de geração de calor. O lado esquerdo desta equação representa a taxa de armazenamento de energia cinética e interna no VC, o termo referente à energia potencial do fluido está no lado direito em termos de trabalho.

Além da conservação de energia, outra equação muito importante é utilizada para se chegar na equação da temperatura. A equação da energia cinética provém do produto

entre a equação de conservação da quantidade de movimento (Equação 21) escalarmente pela velocidade,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (21)$$

onde o termo D/Dt é um operador chamado derivada material que, quando aplicado a um campo escalar ou vetorial em movimento com velocidade \mathbf{v} , fornece a taxa de variação deste campo como função do tempo e do espaço. No caso da Equação 21, temos que:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \text{ sendo } \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (22)$$

Depois da devida multiplicação e de uma série de manipulações matemáticas, chega-se a equação da energia cinética na forma:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{\mathbf{v}}{\rho} \cdot \nabla P + \frac{\mathbf{v}}{\rho} \cdot (\nabla \cdot \tau) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (23)$$

Da diferença entre as equações da energia total e cinética, obtém-se a equação da energia interna. Porém antes, deve-se fazer algumas modificações na Equação 20 para facilitar a visualização do resultado. Colocando o primeiro termo do lado direito para o lado esquerdo e desmembrando os termos $\nabla \cdot P\mathbf{v}$ e $\nabla \cdot (\tau \cdot \mathbf{v})$, temos a seguinte expressão:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}'' + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) - [P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla P)] + [\tau : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tau] + \dot{Q} \quad (24)$$

A Equação 24 subtraída da Equação 23 gera a equação da energia interna (Equação 25)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}'' - P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \mathbf{v} : \tau + \dot{Q} \quad (25)$$

Supondo que pode-se considerar que as fórmulas da termodinâmica podem ser aplicadas em sistemas não equilibrados, obtém-se uma relação da energia interna com a temperatura e o volume específico como é mostrado abaixo:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT = \left[-P + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \right] dv + c_v dT, \quad (26)$$

onde v é o volume específico e c_v é o calor específico a volume constante. Com isso, pode-se reescrever a derivada material da energia interna na forma:

$$\frac{Du}{Dt} = \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \right] \frac{Dv}{Dt} + c_v \frac{DT}{Dt} \quad (27)$$

O termo Dv/Dt da equação acima pode ser reescrito na forma $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$, com a

utilização da equação da continuidade (Equação 28).

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (28)$$

Substituindo a Equação 27 na Equação 25 e rearranjando os termos, finalmente obtém-se a equação da temperatura (Equação 29)

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot \mathbf{q}'' - \frac{T}{\rho c_v} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho c_v} \tau : \nabla \mathbf{v} + \frac{\dot{Q}}{\rho c_v} \quad (29)$$

Perceba que ainda é necessário obter as expressões para os fluxos, que vão depender do tipo de fluido que é levado em consideração. Em fluidos newtonianos incompressíveis com viscosidade e condutividade térmica constante, levando em consideração a lei de Fourier, a equação da temperatura pode ser escrita como a Equação 30, onde μ é a viscosidade dinâmica, ϕ é a função dissipação e c é o calor específico do fluido. No caso dos líquidos e sólidos, $c_v = c_p = c$.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \frac{\mu \phi}{\rho c_v} \quad (30)$$

Se o escoamento for incompressível e o aquecimento viscoso for desprezível, o último termo do lado direito da Equação 30 será nulo. Para o caso nos sólidos, onde $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$ e a densidade geralmente é considerada constante, a Equação 29 se reduz a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_v} \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + \frac{\dot{Q}}{\rho c_v} \quad (31)$$

A Equação 31 é a equação geral da condução de calor, um ponto de partida para a maioria dos problemas de transferência de calor em sólidos e, dependendo do caso, ela pode ser simplificada. Se o material for homogêneo, a condutividade térmica será igual em todas as direções, com isso temos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho c_v} \quad (32)$$

onde α é uma propriedade do material chamada difusividade térmica, em que mede a capacidade do material de conduzir energia térmica com relação a sua capacidade de armazenar energia. Em condições de regime estacionário (independentes do tempo t), não ocorre uma variação na quantidade de energia armazenada no material, com isso a Equação 31 se reduz a

$$\nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T = -\dot{Q}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\dot{Q} \quad (33)$$

Se, além do regime estacionário, o material for homogêneo e isotrópico, sabe-se que $k_{xy} = k_{yx} = 0$ e $k_{xx} = k_{yy} = k$, a Equação 33 se torna a equação de Poisson para condução de calor (Equação 34).

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = -\dot{Q} \quad (34)$$

e em casos onde não ocorre geração de energia interna, $\dot{Q} = 0$, a Equação 34 fica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou simplesmente} \quad \nabla^2 T = 0 \quad (35)$$

na qual é conhecida como a equação de Laplace para condução de calor.

2.3 Método dos Elementos Finitos

Quando se deseja resolver algum problema de física ou de engenharia, se idealiza o real problema em um modelo físico para, posteriormente, formular um modelo matemático de forma que possa ser resolvido. Segundo Felippa (2003a), este modelo pode assumir três diferentes configurações: forma forte, forma fraca e forma variacional. Mesmo sendo distintas entre si, elas são equivalentes, isto é, a solução para uma delas representa a solução para outra. Outros autores, como (STASA, 1985), consideram as formas fraca e variacional como se fossem uma única forma, sendo obtidas através de métodos integrais.

2.3.1 Forma Forte

A forma forte (forma clássica ou diferencial) se dá pela representação do problema através do sistema de equações diferenciais, parciais ou ordinárias, no tempo e/ou no espaço, além da especificação das condições de contorno do problema.

Um exemplo disso é mostrado abaixo, onde são especificados valores da variável u no contorno do problema (problema de valor de contorno),

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = -f, \quad x \in \Omega = [0, 1] \\ u(1) = u_1, \quad \text{condição de contorno essencial} \\ a \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = -Q_o, \quad \text{condição de contorno natural} \end{cases} \quad (36)$$

onde u_1 e Q_o são constantes dadas, a e f são funções conhecidas de x suave (diferenciável) no domínio $[0,1]$. A função u é a variável dependente deste problema, onde ela poderia representar a temperatura ($u = T$) ou o deslocamento longitudinal ($u = d$) ao longo de uma barra.

2.3.2 Forma Fraca

A forma fraca se baseia na representação de um problema por meio de uma equação de integral ponderada (do inglês, *weighted integral equation*). Nesta expressão estão presentes a equação diferencial e uma função peso, w , que é uma função arbitrária, contudo deve obedecer alguns requisitos, como ser pelo menos diferenciável tantas vezes for a variável dependente e satisfazer as condições de contorno essenciais do problema na forma homogênea, isto é, $w(1) = 0$.

Segundo Reddy (1993), existem três passos para desenvolver a forma fraca de qualquer equação diferencial. Utilizando a mesma equação mostrada na forma forte, pode-se descrever os passos da seguinte forma:

Passo 1 - Deve-se mover todos os termos da equação para um lado, multiplicá-la pela função peso w , e integrar ao longo do domínio do problema $\Omega = [0, 1]$.

$$\int_0^1 w \left[\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + f \right] dx = 0 \quad (37)$$

Esta expressão é a integral ponderada equivalente à equação diferencial original (Equação 36).

Passo 2 - Distribuir a diferenciação entre a função aproximada e a função peso. No caso presente, a função u precisa ser diferenciável duas vezes, no mínimo, e quando houver esta distribuição a função de aproximação só precisará ser diferenciável uma vez. Com isso, a expressão da integral ponderada se tornará a forma fraca da equação diferencial.

Para tal processo, integra-se por partes o primeiro termo da Equação 37 para obter o seguinte:

$$\int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wf \right) dx - \left[w \cdot a \frac{du}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (38)$$

Além do "enfraquecimento" na condição de continuidade em u , a formulação fraca leva consigo as condições de contorno naturais do problema e, portanto, u necessita satisfazer apenas as condições de contorno essenciais. Essas características da

forma fraca desempenham um importante papel no desenvolvimento dos modelos de elemento finito de um problema.

Um importante ponto a ser destacado neste passo é a necessidade de identificar as condições de contorno (natural e essencial) associada com a equação diferencial. Depois de realizado a distribuição de diferenciação, explore todos os termos de contorno (onde é definido o valor da variável independente) na expressão da forma fraca, que envolvem tanto a variável dependente (u) quanto a função peso (w). Os coeficientes da função peso e das suas derivadas são denominadas variáveis secundárias que, no exemplo utilizado, torna a forma $a \frac{du}{dx}$ a variável secundária e a especificação da variável secundária no contorno do problema constitui a condição de contorno natural.

As variáveis secundárias sempre possuem um significado físico e, geralmente, também são quantidades de interesse do problema. Em problemas de deformação axial de uma barra, a variável secundária é a força axial F , já em problemas de transferência de calor ela é representada pelo calor, Q . Já a variável primária, expressa da mesma forma que a função peso aparecendo no termo de contorno, é a variável dependente do problema, no caso u , e a sua especificação no contorno representa a condição de contorno essencial.

A partir do que foi explanado até aqui e considerando um problema de transferência de calor, a expressão da Equação 38 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wf \right) dx - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^1 &= 0 \\ \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wf \right) dx - \left(w a \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=0} - \left(w a \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=1} &= 0 \\ \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wf \right) dx - (wQ)_{x=0} - (wQ)_{x=1} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Passo 3 - Neste último passo, é necessário impor as condições de contorno reais do problema. Como consequência, a função peso w deve desaparecer nos pontos onde as condições de contorno essenciais são especificadas, isto é, $w(a) = 0$ se $u(a) = u_a$, para qualquer valor de u_a . No exemplo em questão, a condição de contorno essencial é $u(1) = q$, então $w(1) = 0$. Levando isto em consideração e que

$$Q(0) = \left(a \frac{du}{dx} n_x \right) \Big|_{x=0} = \left(-a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = -Q_o \quad (40)$$

a Eq.5 se reduz a

$$\int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} a \frac{du}{dx} - wf \right) dx - w(0)Q_o = 0 \quad (41)$$

que é a forma fraca equivalente a equação diferencial original e a condição de contorno natural (Equação 36).

Em alguns problemas mais complexos, dos quais não são passíveis de solução por técnicas de integração, são necessários procedimentos aproximados de solução. O método dos resíduos ponderados é uma maneira de escrever a equação diferencial do problema numa equação de integral ponderada e resolvê-la no domínio da integral.

Neste método, a solução exata do problema é substituída pela sua aproximação \tilde{u} que é expressa como

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot N_j + N_0 \quad (42)$$

onde N_0 e N_j é a função de forma (ou de aproximação) determinada em termos de variáveis independentes e os coeficientes c_j são os parâmetros desconhecidos. Quando colocado na equação diferencial, esta deixa de ser igual à zero e gera um valor residual. Usando a Equação 36 como exemplo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(a \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) + f &\neq 0 \\ &= R \end{aligned} \quad (43)$$

O método busca valores dos coeficientes c_j para que a integral ponderada do resíduo seja zero no domínio do problema,

$$\int_{\Omega} w_j R \, dx = 0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

onde w_j são as funções de peso que, geralmente, são diferentes das funções de aproximação \tilde{u} . Certas escolhas para a função peso dão diferentes nomes para o método. Por exemplo, no **Método da Colocação** a função peso é arbitrada como sendo a função $\delta(x - x^j)$, onde $\delta(x)$ é a função *delta de Dirac*. Neste método, o resíduo R é igual a zero em diferentes pontos x^j do domínio da solução para obter n equações simultâneas para os parâmetros c_j . Com esta escolha, a integral fica na forma:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x^j) R \, dx \quad (45)$$

No **Método do Subdomínio**, a função peso leva um valor unitário, além disso o domínio do problema é dividido em n subdomínios e a integral do resíduo R sobre cada

subdomínio é igualada a zero, isto é,

$$\int_{\Omega_j} R \, dx = 0, \text{ sendo } \Omega = \sum_{j=1}^n \Omega_j \quad (46)$$

Como foi dito anteriormente, a escolha da função peso w_j geralmente é diferente da escolha da função de aproximação. Contudo, no **Método de Galerkin** ambas as funções são semelhantes, isto é, se \tilde{u} for uma função polinomial, w_j também será.

Outro método bem conhecido é o **Método dos Mínimos Quadrados**, onde os coeficientes são determinados pela minimização da integral do quadrado do resíduo,

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \int_{\Omega} R^2 \, dx = 0 \quad (47)$$

que também pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial c_j} R \, dx = 0 \quad (48)$$

onde percebe-se que $w_j = \frac{\partial R}{\partial c_j}$.

Todos estes métodos geram um sistema de n equações algébricas que deve ser resolvido ou por um método analítico, como a eliminação de Gauss, ou de maneira computacional, dependendo da quantidade de coeficientes a serem calculados.

Um ponto bem importante de ser falado é a escolha da função de forma. A expressão base do método dos resíduos ponderados é da forma da Equação 44, então a função de forma N_j , e consequentemente \tilde{u} , deve possuir derivadas não nulas de mesma ordem que a equação diferencial do problema. Além disso, em nenhum momento é levado em consideração as condições de contorno do problema, então \tilde{u} também deve satisfazer todas as condições do problema, isto é, N_0 deve atender todas as condições de contorno e N_j deve atender a forma homogênea de todas as condições de contorno do problema.

2.3.3 Forma Variacional

A representação do problema através da forma variacional se dá por um funcional no qual a sua minimização restabelece a forma forte (diferencial). O termo variacional se origina do ramo da matemática denominado *cálculo variacional* (ver apêndice B) que lida com a determinação de valores extremos ou estacionários de funcionais na forma de integrais (RAO, 2004). A base do problema variacional é encontrar uma função $\phi(x)$ tal

que faça o valor do funcional I estacionário.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \phi, \phi_x, \phi_{xx}, \dots) dx \quad (49)$$

Na Equação 49, F e I são funcionais, $\phi_x = \frac{d\phi}{dx}$ e $\phi_{xx} = \frac{d^2\phi}{dx^2}$. Em problemas de equilíbrio estático, a energia potencial Π desempenha o papel do funcional onde a variável dependente é o vetor deslocamento ($\mathbf{u} = [u \ v \ w]^t$), e suas componentes são funções das coordenadas x , y e z . Sendo ϕ definido no contorno do problema, isto é, $\phi(x_1) = \phi_1$ e $\phi(x_2) = \phi_2$ são as condições de contorno do problema.

Alguns princípios de energia, como o Princípio do Trabalho Virtual e o Princípio da Energia Potencial Mínima, são utilizados juntamente com o cálculo variacional com o intuito de gerar a equações de equilíbrio de corpos deformáveis, tendo assim uma segunda maneira de enfraquecer as equações governantes do problema. Por esta razão que, às vezes, ocorre essa confusão entre os termos forma fraca e forma variacional, como muitos autores o fazem.

Uma importante decisão a ser tomada a fim de melhorar a precisão da solução aproximada, além da escolha na quantidade de coeficientes n , é a escolha do tipo da função de forma. Geralmente, elas são funções polinomiais ou trigonométricas, porém não existe um procedimento padrão para a sua construção, além da necessidade de continuidade, da independência linear e das condições de contorno. O processo de seleção se torna ainda mais difícil, ou até impossível, quando o domínio é geometricamente complexo e/ou as condições de contorno são complicadas (REDDY, 1993).

Com o objetivo de superar estes obstáculos é que o MEF foi criado. Nele, o domínio é dividido em subdomínios que possuem formas geométricas simples pela qual a construção das funções de aproximação se tornem mais simples. A partir daqui, o Método dos Elementos Finitos será finalmente introduzido, descrevendo o procedimento geral para a geração do conjunto de equações, citando suas principais características, entre outros pontos de interesse.

2.3.4 MEF propriamente dito

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica na qual o domínio do problema é representado como um conjunto de pequenos domínios, chamados de elementos finitos, tal que seja possível construir sistematicamente as funções de aproximação necessárias, ou na solução de aproximação variacional ou solução de aproximação de residuais ponderados, sobre cada elemento.

Este método é aplicável em domínios com geometrias irregulares e em problemas com materiais não homogêneos e anisotrópicos. Além disso, o espaçamento das variáveis

na malha é facilmente manipulável, possibilitando o aumento da quantidade de nós em regiões onde o gradiente da variável primária é maior. Com isso, o MEF se difere dos outros métodos de solução aproximada, como o método das diferenças finitas.

Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), a resolução de problemas através do MEF segue um passo a passo padrão, como é descrito abaixo:

Passo 1 - Defina o problema em termos de equação diferencial, depois construa a forma integral do problema (forma fraca, variacional ou trabalho virtual);

Passo 2 - Defina a malha do problema (discretização). Isto envolve a descrição das posições dos nós e dos elementos no domínio, tal como a especificação das condições de contorno e dos parâmetros a serem usados na formulação;

Passo 3 - Selecione o tipo e a ordem do elemento finito a ser usado na análise (esta escolha depende de uma série de fatores, como a dimensão do domínio, número e posição dos pontos nodais, e este passo influencia diretamente o passo posterior);

Passo 4 - Calcule e monte as matrizes dos elementos. Aqui o procedimento, para obter as relações algébricas entre os coeficientes desconhecidos, é exatamente o mesmo que aqueles apresentados no método dos resíduos ponderados, só que aplicados em cada elemento;

Passo 5 - Resolva o conjunto resultante de equações algébricas lineares para os coeficientes;

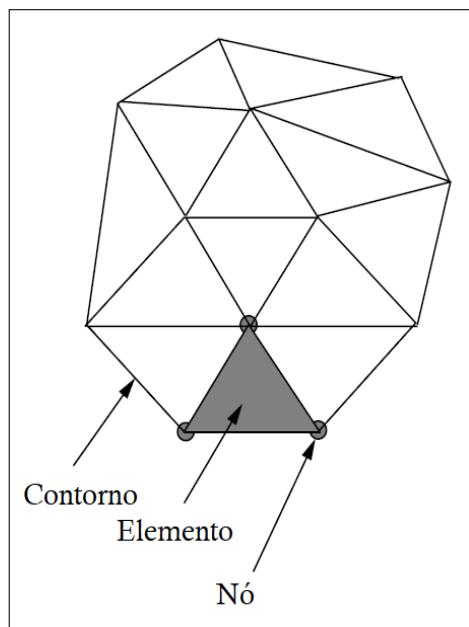
Passo 6 - Por último, produza os resultados para as variáveis nodais e dos elementos, ou de forma gráfica ou por uso de tabelas;

Com este passo a passo, pode-se dizer também que a possibilidade de dividir o domínio, com o objetivo de derivar sistematicamente as funções de aproximação, e a montagem dos elementos, que se baseia na continuidade da solução e no balanço do fluxo interno, são as características que fazem o MEF uma excelente ferramenta para ser implementada computacionalmente.

2.3.4.1 Discretização

Como já foi dito anteriormente, os subdomínios criados a fim de representar o domínio Ω do problema são chamados de *elementos finitos*. O conjunto destes elementos é denominado de *malha* ou *discretização* e será representado por $\bar{\Omega}$. Cada elemento finito possui uma determinada quantidade de pontos no seu contorno, e às vezes no seu interior dependendo do grau do polinômio de aproximação, que são chamados de *pontos nodais* ou

Figura 7 - Malha genérica definindo elemento, nó e contorno



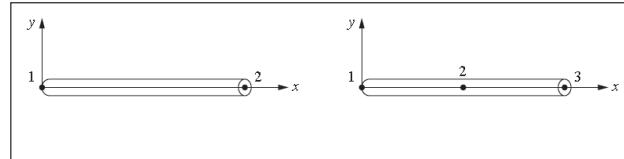
Fonte: (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004, p. 40)

simplesmente de *nós*. Além disso, qualquer elemento deve estar conectado com os outros através dos nós e dos contornos em comum (Figura 7). Os nós possuem um importante papel na construção das funções de aproximação sobre um elemento, como será visto mais a frente.

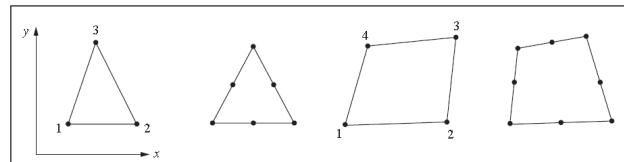
Nos problemas de valores de contorno, que foram utilizados como exemplos até agora, o formato dos elementos da malha vai depender do número de variáveis independentes no problema. Resumidamente, para problemas unidimensionais o domínio é um segmento de linha, reta ou não, consequentemente os seus elementos serão linhas interconectadas entre si com dois nós nas extremidades (8a). Já em problemas 2D, o domínio é um plano, e por isso, existem mais opções de escolha da forma do elemento, podem ser: triangular ou quadrangular com contornos retos; triangular ou quadrangular com contornos curvos e outros (8b). Da mesma maneira para problemas com domínio tridimensional, onde são utilizados corpos geométricos como o tetraedro e o hexaedro, com as faces e arestas distorcidas ou não (8c).

Nos casos onde se pode escolher o tipo de elemento finito a ser utilizado na análise, deve-se levar em consideração na composição física do corpo sob as condições de contorno e no quão próximo do comportamento real se deseja obter no resultado final. Além disso, o tamanho do elemento também influenciará na precisão do resultado aproximado. Em outras palavras, quanto menores forem os elementos, mais destes existirão na malha, fazendo com que o erro de aproximação diminua. Por outro lado, quanto mais elementos

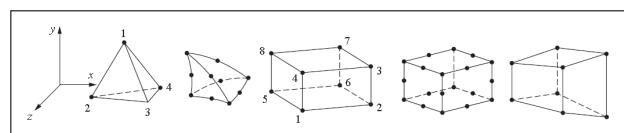
Figura 8 - Elementos finitos 1D, 2D e 3D



(a) Elementos de linha com dois e três nós



(b) Elementos bidimensionais típicos



(c) Elementos tridimensionais típicos

Fonte: (LOGAN, 2012, p. 10)

tiverem, mais equações serão utilizadas e, naturalmente, mais esforço computacional será exigido.

Com o intuito de facilitar o desenvolvimento das funções de aproximação que será apresentado mais a frente, será definido que $\bar{\Omega}^T = \cup^n \bar{\Omega}^e$ é o domínio fechado da malha inteira, onde $\bar{\Omega}^e = \Omega^e \cup \Gamma^e$ é o domínio do elemento e , Γ^e é o contorno fechado do elemento e e n é o número total de elementos na discretização $\bar{\Omega}^T$.

2.3.4.2 Funções de aproximação local

Para cada elemento finito no domínio $\bar{\Omega}^T$, deve-se definir o comportamento das variáveis dependentes e isto é alcançado através das funções de aproximação local (funções bases ou até de funções de interpolação) e das variáveis dependentes e, possivelmente, dos valores das suas derivadas nos nós dos elementos, geralmente denominados de *graus de liberdade*. A solução de aproximação do problema é construída pela combinação linear das funções de aproximação local, que são conhecidas, e dos graus de liberdade nodais, desconhecidos. Portanto, para cada variável dependente existe uma aproximação local sobre cada elemento da discretização com a sua própria função base e seu próprio grau de liberdade nodal.

As funções de aproximação podem ser funções polinomiais ou trigonométricas. As

do tipo polinomial são as mais usadas na análise de elemento finito, pois estas são mais fáceis de formular e calcular as equações nos elementos e também porque é possível melhorar a precisão dos resultados através do aumento da ordem do polinômio. A seguir são mostradas as funções de aproximação para os elementos finitos mais comuns. **Problemas unidimensionais:**

unidimensionais: Nos casos onde pode-se representar o domínio do problema real como a união de segmentos de linhas, onde existe apenas uma variável dependente (temperatura ou força axial, por exemplo) e pode-se considerar que seu valor varie linearmente dentro do elemento, utiliza-se uma função linear para representá-lo no domínio do elemento $\bar{\Omega}^e$. Sendo ϕ^e a variável do problema no elemento e , tem-se que:

$$\phi^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (50)$$

onde α_1 e α_2 são constantes a serem determinadas. Uma melhor aproximação para ϕ^e pode ser encontrada utilizando uma função quadrática, isto é:

$$\phi^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (51)$$

Na Equação 50 são necessários dois pontos (nós) para encontrar os valores dos coeficientes, então são utilizados os valores da variável dependente nos nós do elemento. Supondo que os valores de ϕ^e nos nós i e j são ϕ_i^e e ϕ_j^e , respectivamente, e substituindo-os na Equação 50 tem-se:

$$\phi_i^e = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \quad (52)$$

$$\phi_j^e = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \quad (53)$$

Da equação acima, encontra os seguintes resultados para os coeficientes

$$\alpha_1 = \frac{\phi_i^e x_j - \phi_j^e x_i}{x_j - x_i} \quad (54)$$

$$\alpha_2 = \frac{\phi_j^e - \phi_i^e}{x_j - x_i} \quad (55)$$

e substituindo os valores de α_1 e α_2 na Equação 50, obtém-se a função de aproximação para um elemento linear unidimensional da forma:

$$\phi^e(x) = \frac{\phi_i^e x_j - \phi_j^e x_i}{x_j - x_i} + \left(\frac{\phi_j^e - \phi_i^e}{x_j - x_i} \right) x = \phi_i^e \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) + \phi_j^e \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \quad (56)$$

ou

$$\phi = N_i \phi_i^e + N_j \phi_j^e = [N_i \ N_j] [\phi_i^e \ \phi_j^e]^t \quad (57)$$

onde N_i e N_j são as funções de forma local (também chamadas de funções bases ou até funções de interpolação), para este caso. O símbolo de $[]^t$ significa a transposta da matriz $[]$. A Equação 57 pode ser reescrita de forma mais compacta como

$$\phi = [\mathbf{N}]_{1 \times 2} [\boldsymbol{\phi}^e]_{2 \times 1} \quad (58)$$

onde

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} & \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \quad (59)$$

é a matriz linha da função de interpolação e

$$[\boldsymbol{\phi}^e] = \begin{bmatrix} \phi_i^e \\ \phi_j^e \end{bmatrix} \quad (60)$$

é a matriz coluna das variáveis dependentes.

Da mesma forma, podem ser obtidos os coeficientes da Equação 51. Neste caso, é adicionado mais um nó no elemento unidimensional, comumente localizado no ponto médio deste. Seguindo o procedimento realizado para a função linear, e considerando que o elemento possui comprimento genérico l , os coeficientes obtidos são:

$$\alpha_1 = \phi_i^e \quad (61)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{l} (-3\phi_i^e + 4\phi_j^e - \phi_k^e) \quad (62)$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{l^2} (\phi_i^e - 2\phi_j^e + \phi_k^e) \quad (63)$$

$$(64)$$

Substituindo-os na Equação 51 e colocando em evidência os valores da variável dependente nos nós, obtém-se:

$$\phi^e = \phi_i^e \left(1 - \frac{3x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}\right) + \phi_j^e \left(4\frac{x}{l} - 4\frac{x^2}{l^2}\right) + \phi_k^e \left(2\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right) \quad (65)$$

ou

$$\phi = N_i \phi_i^e + N_j \phi_j^e + N_k \phi_k^e \quad (66)$$

e escrevendo numa notação matricial, a Equação 66 se torna em

$$\phi = [\mathbf{N}]_{1 \times 3} [\boldsymbol{\phi}^e]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i^e \\ \phi_j^e \\ \phi_k^e \end{bmatrix} \quad (67)$$

Algumas observações podem ser tomadas, com relação à função de aproximação, a partir do que foi explicado até agora. O grau da função pode variar dentro do elemento, dependendo da quantidade de nós que for desejado. Além disso, o valor de cada função N vale 1 (um) no seu respectivo nó e 0 (zero) nos demais nós. Outro importante ponto é que as funções apresentam continuidade no interior do elemento, porém não nos nós do contorno. Isto é, possuem derivadas definidas nos limites do domínio.

Problemas bidimensionais: Quando as aproximações unidimensionais não são mais eficientes, elementos geométricos bidimensionais são necessários. O mais simples deles do qual pode ser empregado para representar superfícies irregulares é o triângulo, que é um dos elementos mais usados atualmente no MEF.

Considerando um elemento triangular simples, com nós apenas nos seus vértices, pode ser representado da seguinte maneira:

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (68)$$

onde o polinômio é linear em x e y e possui três coeficientes. Já que o elemento possui três nós, os coeficientes são determinados pelo sistema linear gerado pela Equação 68, onde são colocadas as coordenadas dos nós e o respectivo valor da variável dependente. Depois de uma série de manipulações matemáticas, encontra-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2)\phi_1^e + (x_3y_1 - x_1y_3)\phi_2^e + (x_1y_2 - x_2y_1)\phi_3^e] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)\phi_1^e + (y_3 - y_1)\phi_2^e + (y_1 - y_2)\phi_3^e] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)\phi_1^e + (x_1 - x_3)\phi_2^e + (x_2 - x_1)\phi_3^e] \end{aligned} \quad (69)$$

onde A é a área do elemento triangular.

$$2A = \det(A) = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

Substituindo estes coeficientes na Equação 68 e rearranjando os termos a fim de salientar as variáveis dependentes, obtém-se:

$$\phi^e = N_1\phi_1^e + N_2\phi_2^e + N_3\phi_3^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ \phi_3^e \end{bmatrix} \quad (70)$$

onde

$$N_q = \frac{1}{2A} (a_q + b_q x + c_q y), \quad q = 1, 2, 3$$

e

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad \begin{cases} \text{para } i = 1, j = 2 \text{ e } k = 3 \\ \text{para } i = 2, j = 3 \text{ e } k = 1 \\ \text{para } i = 3, j = 1 \text{ e } k = 2 \end{cases}$$

Outro elemento finito bidimensional utilizado como alternativa de subdivisão do domínio é o quadrilátero, que na sua forma mais simples possui quatro nós nos seus vértices. Consequentemente, o polinômio que o representa deve possuir quatro coeficientes (Equação 71). Os lados do elementos não precisam ser ortogonais, cada elemento pode ser único em formato e cada lado pode ter diferentes inclinações.

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (71)$$

Repare que, neste elemento, as derivadas da função de interpolação variam linearmente dentro do elemento, em contraste com o que acontece com o elemento triangular.

$$\frac{\partial \phi^e}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi^e}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x$$

O procedimento de obtenção dos coeficientes e, posteriormente, da forma matricial da Equação 71 é semelhante ao aplicado nos outros elementos finitos. Neste caso, terão quatro funções de interpolação no qual variam entre um (no seu devido nó) e zero (nos demais).

$$\phi^e = N_1 \phi_1^e + N_2 \phi_2^e + N_3 \phi_3^e + N_4 \phi_4^e == \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ \phi_3^e \\ \phi_4^e \end{bmatrix} = [\mathbf{N}]_{1 \times 4} [\boldsymbol{\phi}^e]_{4 \times 1} \quad (72)$$

Tanto nos elementos triangulares quanto no quadriláteros, pode-se adicionar nós nas laterais dos elementos (geralmente no ponto médio) e no centro destes.

2.3.4.3 Equações do elemento (Matriz de rigidez \mathbf{K})

Nos métodos clássicos de aproximação descritos neste trabalho, o objetivo era encontrar uma função aproximada \tilde{u} para a variável u sobre o domínio $\bar{\Omega}$ do problema não

discretizado. No caso do MEF, estes métodos são aplicados sobre o domínio discretizado $\bar{\Omega}^T$ com as funções de aproximação ϕ^e sendo válidas no domínio $\bar{\Omega}^e$ do elemento e .

Sobre o elemento, é construída a forma integral do problema que antes era apenas sobre o domínio $\bar{\Omega}$ e esta resulta em um sistema de equações algébricas para o elemento. Neste sistema, as incógnitas são os graus de liberdade nodais que são os valores das variáveis de interesse do problema. Com isso, pode-se escrever este sistema de forma matricial como:

$$[\mathbf{K}^e]\{\boldsymbol{\alpha}^e\} = \{\mathbf{F}^e\} \quad (73)$$

onde $[\mathbf{K}^e]$ é chamado de matriz dos coeficientes (ou matriz de rigidez para problemas da área estrutural, ou matriz de rigidez térmica para a área térmica), $\{\boldsymbol{\alpha}^e\}$ é o vetor dos graus de liberdade, $\{\mathbf{F}^e\}$ é vetor "fonte" (ou vetor das forças nodais nos problemas de mecânica estrutural), ambos no elemento e .

Levando em consideração de que a forma integral sobre o domínio discretizado $\bar{\Omega}^T$ pode ser escrito como a soma das integrais sobre cada elemento individualmente, pode-se obter a relação matricial válida para o domínio discretizado da seguinte forma

$$[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (74)$$

com

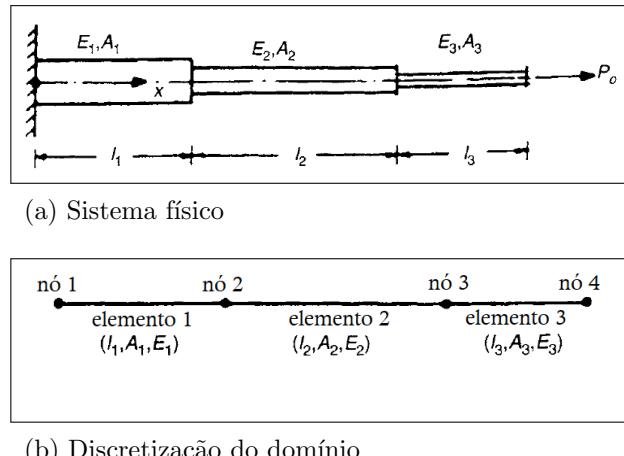
$$[\mathbf{K}] = \sum_1^n [\mathbf{K}^e] \text{ e } \{\mathbf{F}\} = \sum_1^n \{\mathbf{F}^e\}$$

Esta relação não é o suficiente para resolver a Equação 74, pois deve-se ainda impor as condições de contorno do problema. Isto significa que deve ser levado em consideração um outro vetor $\{\mathbf{Q}\}$ no lado direito da equação, chamado de *graus de liberdade nodais secundários*, onde alguns dos seus termos podem ser obtidos através das condições de contorno e o restante pelo balanço das variáveis secundárias nos nós em comum de vários elementos. Este balanço será mostrado mais a frente.

$$[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{Q}\} \quad (75)$$

A partir deste ponto, pode-se calcular o vetor $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ através da inversão da matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ que, por consequência, deve ser quadrada (mesmo número de linhas e de colunas) e inversível. Além disso, a quantidade de linhas e colunas é igual a quantidade de nós no elemento.

Figura 9 - Barra axialmente carregada e sua discretização.



Fonte: (RAO, 2004, p. 168)

2.3.4.4 Conectividade dos elementos

Nesta seção será detalhada o processo de montagem, ou soma, da matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ e dos vetores $\{\mathbf{F}\}$ e $\{\mathbf{Q}\}$ para o domínio discretizado $\bar{\Omega}^T$ (global). Para isso, considere o problema de uma barra carregada axialmente (9a), onde cada trecho da barra possui propriedades distintas entre si. A Figura 9b mostra a barra discretizada, evidenciando os seus nós.

A partir do sistema de equações geradas para o elemento e , através dos métodos tradicionais de aproximação, pode-se escrever o sistema de modo matricial como:

$$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{u}^e\} = \{\mathbf{F}^e\} + \{\mathbf{Q}^e\} \quad (76)$$

onde

$$[\mathbf{K}^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{u}^e\} = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}^e\} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{bmatrix} \text{ e } \{\mathbf{Q}^e\} = \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix} \quad (77)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez do elemento $[\mathbf{K}^e]$ possuem um significado físico na mecânica estrutural. k_{ij} é definido como a força aplicada no nó i necessária para gerar um deslocamento unitário no nó j , enquanto que os outros nós estão fixos (RAO, 2004). Cada elemento da Figura 9b terá sua matriz $[\mathbf{K}^e]$ diferente da outra, porém os elementos são originalmente conectados entre si. Consequentemente, quando uma força ou deslocamento é aplicado sobre um nó, deve-se considerá-lo nos elementos que possuem o nó em comum. Com isso, pode-se considerar as seguintes condições no momento da

Tabela 1 - Dados das variáveis primária e secundária nos nós.

nó 1	nó 2	nó 3	nó 4
$u_1^1 = U_1$	$u_2^1 = u_1^2 = U_2$	$u_2^2 = u_1^3 = U_3$	$u_2^3 = U_4$
$Q_1^1 = ?$	$Q_2^1 + Q_1^2 = 0$	$Q_2^2 + Q_1^3 = 0$	$Q_2^3 = P_0$

Fonte: O autor, 2019.

montagem dos elementos:

- Continuidade das varáveis primárias nos nós em comum: $u_n^e = u_1^{e+1}$

Isto é, o último valor nodal do elemento e é igual ao primeiro valor nodal do elemento adjacente $e + 1$. Por exemplo,

- Balanço das varáveis secundárias nos nós em comum:

$$Q_n^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0, & \text{se nenhuma fonte pontual externa for aplicada.} \\ Q_0, & \text{se alguma fonte pontual externa de magnetude } Q_0 \text{ for aplicada.} \end{cases}$$

Tendo estas considerações em mente e visualizando os elementos da 9b, pode-se encontrar as relações das varáveis primária e secundária nos nós do domínio discretizado $\bar{\Omega}^T$ (ver Tabela 1). Os termos U 's nesta tabela são as varáveis primárias globais do sistema que, neste caso, são os deslocamentos dos nós na direção x e $Q_1^1 = ?$ é a reação produzida pela força P_0 , que também é uma varável de interesse do problema. Para colocar em prática estas relações, deve-se adicionar a n -ésima (última) equação do elemento e com a primeira equação do elemento $e + 1$, resumindo:

$$\sum_{j=1}^n ([\mathbf{K}_{nj}^e] \{\mathbf{u}_j^e\}) = \{\mathbf{F}_n^e\} + \{\mathbf{Q}_n^e\} \quad (78)$$

mais

$$\sum_{j=1}^n ([\mathbf{K}_{1j}^{e+1}] \{\mathbf{u}_j^{e+1}\}) = \{\mathbf{F}_1^{e+1}\} + \{\mathbf{Q}_1^{e+1}\} \quad (79)$$

gerando a expressão

$$\sum_{j=1}^n ([\mathbf{K}_{nj}^e] \{\mathbf{u}_j^e\} + [\mathbf{K}_{1j}^{e+1}] \{\mathbf{u}_j^{e+1}\}) = \{\mathbf{F}_n^e\} + \{\mathbf{F}_1^{e+1}\} + (\{\mathbf{Q}_n^e\} + \{\mathbf{Q}_1^{e+1}\}) \quad (80)$$

onde $n = 2$ é a quantidade de nós no elemento. Expandindo a expressão acima, substituindo os devidos termos pelos da Tabela 1 e sabendo que $e = 3$, são obtidas as equações

do domínio $\bar{\Omega}^T$ (Equação 81).

$$\begin{aligned}
 k_{11}^1 U_1 + k_{12}^1 U_2 &= f_1^1 + Q_1^1 \text{ (nó 1)} \\
 k_{21}^1 U_1 + (k_{22}^1 + k_{11}^2) U_2 + k_{12}^2 U_3 &= f_2^1 + f_1^2 \text{ (nó 2)} \\
 k_{21}^2 U_2 + (k_{22}^2 + k_{11}^3) U_3 + k_{12}^3 U_4 &= f_2^2 + f_1^3 \text{ (nó 3)} \\
 k_{21}^3 U_3 + k_{22}^3 U_4 &= f_2^3 + P_0 \text{ (nó 4)}
 \end{aligned} \tag{81}$$

Estas são as equações dos elementos montados (conectados), onde possui a soma dos termos da matriz $[\mathbf{K}^e]$ e dos vetores $\{\mathbf{F}^e\}$ e $\{\mathbf{Q}^e\}$ para dois elementos com um nó em comum. Reescrevendo a Equação 81 na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{bmatrix} \longrightarrow \\
 \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{82}$$

Perceba que as condições de continuidade das variáveis primárias e o balanço das variáveis secundárias são nítidas na Equação 82. Além disso, nota-se uma simetria na matriz $[\mathbf{K}]$ que é herdada pelas matrizes de rigidez dos elementos.

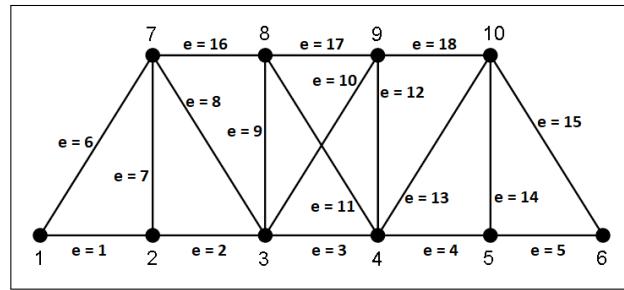
Neste exemplo, tanto elementos quanto os nós foram numerados em sequência, mas não seria um problema se forem enumerados aleatoriamente, o procedimento executado seria o mesmo. Em algumas situações, diversos elementos são conectados em um mesmo nó e, nestes casos, deve-se somar os coeficientes de todos os nós que estão conectados a ele. Por exemplo, em um problema de treliça plana (Figura 10), os elementos finitos são segmentos de retas lineares (dois nós). A equação referente ao nó 2, que leva em consideração as contribuições dos nós 1, 3 e 7, é da forma:

$$k_{21}^1 U_1 + (k_{22}^1 + k_{11}^2 + k_{11}^7) U_2 + k_{12}^2 U_3 + k_{12}^7 U_7 = f_2^1 + f_1^2 + f_1^7 \tag{83}$$

Pode ter sido complicado de ver a validade da Equação 83 apenas visualizando a treliça discretizada, mas existe uma correspondência entre os números dos nós dos elementos com os números dos nós globais. A relação pode ser expressa pela matriz $[IEN]$, que é chamada de *matriz de conectividade*, onde os seus coeficientes possuem o seguinte significado:

B_{ij} é o número do nó global referente ao nó j do elemento i .

Figura 10 - Treliça plana.



Fonte: (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005, p. 14)

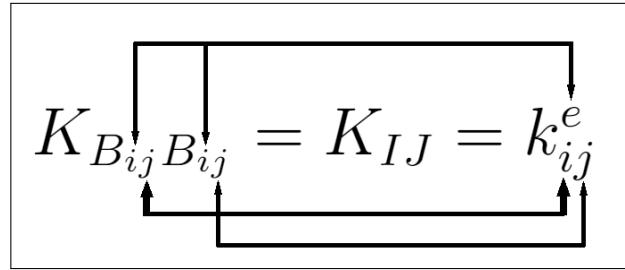
Por exemplo, as matrizes $[IEN]$ para as Figuras 9b e 10 são, respectivamente:

$$[IEN]_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } [IEN]_{18 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 1 & 7 \\ 2 & 7 \\ \vdots & \vdots \\ 8 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é muito importante em programas de cálculos de elementos finitos, principalmente quando o domínio discretizado possui diversos elementos. Nos programas, a matriz $[IEN]$ segue o esquema da Figura 11. A cada linha da matriz (cada elemento), i se mantém constante ($i \equiv e$) e o valor de j varia com relação a quantidade de colunas (quantidade de nós por elemento), gerando assim os nós globais I e J da matriz $[\mathbf{K}]$. A relação entre ij da matriz $[IEN]$ e ij e e da matriz $[\mathbf{K}^e]$ é realizada como mostra a figura, dando, por conseguinte, a relação entre os coeficientes da matriz local $[\mathbf{K}^e]$ e os coeficientes da matriz global $[\mathbf{K}]$.

A exemplo de verificação, utiliza-se a matriz de conectividade do exemplo da Figura

Figura 11 - Esquema de funcionamento da matriz de conectividade.



Fonte: O autor, 2019

9b. A primeira linha demonstra que:

$$\begin{aligned}
 K_{B_{11}B_{11}} &= K_{11}, \text{ sendo } i = e = 1 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 1 \text{ e } 2^0 \ j = 1 \rightarrow K_{11} = k_{11}^1 \\
 K_{B_{11}B_{12}} &= K_{12}, \text{ sendo } i = e = 1 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 1 \text{ e } 2^0 \ j = 2 \rightarrow K_{12} = k_{12}^1 \\
 K_{B_{12}B_{11}} &= K_{21}, \text{ sendo } i = e = 1 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 2 \text{ e } 2^0 \ j = 1 \rightarrow K_{21} = k_{21}^1 \\
 K_{B_{12}B_{12}} &= K_{22}, \text{ sendo } i = e = 1 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 2 \text{ e } 2^0 \ j = 2 \rightarrow K_{22} = k_{22}^1
 \end{aligned} \tag{84}$$

De modo semelhante, a segunda linha da matriz $[IEN]_{3 \times 2}$ demonstra que:

$$\begin{aligned}
 K_{B_{21}B_{21}} &= K_{22}, \text{ sendo } i = e = 2 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 1 \text{ e } 2^0 \ j = 1 \rightarrow K_{22} = k_{11}^2 \\
 K_{B_{21}B_{22}} &= K_{23}, \text{ sendo } i = e = 2 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 1 \text{ e } 2^0 \ j = 2 \rightarrow K_{23} = k_{12}^2 \\
 K_{B_{22}B_{21}} &= K_{32}, \text{ sendo } i = e = 2 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 2 \text{ e } 2^0 \ j = 1 \rightarrow K_{32} = k_{21}^2 \\
 K_{B_{22}B_{22}} &= K_{33}, \text{ sendo } i = e = 2 \text{ e } o \ 1^0 \ j = 2 \text{ e } 2^0 \ j = 2 \rightarrow K_{33} = k_{22}^2
 \end{aligned} \tag{85}$$

e é por isso que, na Equação 82, $K_{22} = k_{22}^1 + k_{11}^2$.

2.3.4.5 Solução das equações

Depois de aplicada as condições de contorno, deve-se resolver o sistema de equações. Existem diversos métodos de solução de sistemas lineares e eles são, geralmente, classificados em: métodos diretos - a solução é obtida através de um determinado número de operações aritméticas, modificando-se os coeficientes da matriz; e métodos iterativos - começa com uma aproximação inicial e que aplicando um algoritmo adequadamente escolhido leva a sucessivas aproximações da solução, terminando a iteração quando esta tender para um valor.

Dos métodos diretos, alguns são mais adequados para a solução de sistema linear à mão, como a regra de Cramer ou o método da substituição. Neste caso, a quantidade

de equações a serem resolvidas deve ser pequena a ponto de não dificultar a sua execução. Na solução de problemas práticos, as matrizes podem ser da ordem de 10.000 ou mais e, neste caso, outros métodos devem ser aplicados. Alguns destes métodos são: Eliminação Gaussiana, inversão da matriz dos coeficientes, método de Choleski, entre outros. O funcionamento destes métodos podem ser encontrados em livros de engenharia, matemática e física.

O procedimento utilizado para solução dos sistemas lineares deste trabalho será baseado no método 3 do trabalho do Rao (2004), na página 220. Chandrupatla et al. (2002) também explica este método e o denomina de *Penalty Approach*, disponível na página 69 do livro.

Para explicar o método, suponha que o sistema de equações seja da forma

$$[\mathbf{K}]_{n \times n} \{\mathbf{u}\}_{n \times 1} = \{\mathbf{F}\}_{n \times 1}$$

e as condições de contorno conhecidas sejam

$$u_{k1} = a_1 \text{ e } u_{k2} = a_2$$

Então, o método sugere que multiplique os termos na diagonal da matriz de rigidez global referente às linhas $k1$ e $k2$ por um número grande, por exemplo,

$$K_{k1 \ k1} = K_{k1 \ k1} \times 10^{10} \text{ e } K_{k2 \ k2} = K_{k2 \ k2} \times 10^{10}$$

Em seguida, faça com que os coeficientes do vetor de força global referente às linhas $k1$ e $k2$ sejam iguais ao produto entre o novo coeficiente da matriz de rigidez global e a condição de contorno conhecida.

$$F_{k1} = K_{k1 \ k1} \times a_1 \text{ e } F_{k2} = K_{k2 \ k2} \times a_2$$

Por fim, inverta a matriz $[\mathbf{K}]$ e multiplique pelo vetor $\{\mathbf{F}\}$ para encontrar os valores restantes de $\{\mathbf{u}\}$. Segundo Chandrupatla et al. (2002), o número a ser utilizado na multiplicação deve ser, no mínimo, da ordem de 10^4 do valor máximo presente na diagonal. Para o cálculo das variáveis secundárias (F) desconhecidas, operação do qual é realizada no pós-processamento, é realizada o produto entre a matriz de rigidez original $[\mathbf{K}]$ pelo vetor das variáveis primárias adquirido na etapa anterior.

2.3.4.6 Pós-processamento

Como foi dito anteriormente, após o cálculo dos valores das variáveis primárias nos nós (temperatura, deslocamento, por exemplo), pode-se calcular as variáveis secundárias. Estas podem ser obtidas através da relação resultante do cálculo da variável primária, proveniente do equilíbrio das forças internas, ou pela própria definição da variável secundária (por exemplo, $Q_a = AE \frac{du}{dx} \Big|_{x_a}$, substituindo u por U)

Além disto, se apresenta os resultados obtidos por meio de gráficos e/ou tabelas, apresentação da malha incluindo a numeração dos nós e elementos, condições de contorno e fontes externas aplicadas. Nas próximas seções será aplicada o método dos elementos finitos para problemas da mecânica estrutural e transferência de calor.

2.4 MEF em problemas da mecânica dos sólidos

Independente do tipo de problema a ser analisado, a solução deste busca encontrar a distribuição das tensões e as deformações dentro do corpo em estudo. Contudo, não existe uma única equação para a resolução de todos os casos, algumas suposições devem ser realizadas dependendo da espécie do problema. Neste trabalho, será feita a análise em corpos bidimensionais estaticamente equilibrados, sujeitos a um estado plano de tensões de diversas fontes.

A forma forte do problema em questão é a Equação 12, juntamente com a condição de tensão no contorno do domínio, isto é,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \text{ em } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \text{ em } S \end{cases} \quad (86)$$

e a obtenção da forma fraca é realizada segundo o procedimento mostrado na Seção 2.3.2 e é apresentada como

$$-\int_V \nabla w \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_V w \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_{S_t} w \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (87)$$

A função peso, w , pode ser assumida como sendo a variação do campo de deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$ e essa escolha será justificada mais a frente. Com isso, o divergente da função peso na primeira integração da Equação 87 se torna a variação do campo de deformações, $\nabla(\delta \mathbf{u}) = \delta(\nabla \mathbf{u}) = \delta \boldsymbol{\epsilon}$. Adicionalmente, substituindo o valor do campo de tensões no contorno, a forma fraca da Equação 86 chega-se a

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS = 0 \quad (88)$$

que também poderia ser obtida utilizando o princípio dos trabalhos virtuais.

Relembrando o conceito apresentado na Seção 2.3.4.1, a discretização do corpo de volume V será $\bar{\Omega}^T$ tal que $\bar{\Omega}^T = \bigcup_e \bar{\Omega}^e$, no qual $\bar{\Omega}^e = \Omega^e \cup \Gamma^e$ é o domínio do elemento e fechado por Γ^e (sendo uma linha ou superfície). A superfície S do corpo de volume V é discretizada como $S^T = \bigcup_e \Gamma^e$ e, consequentemente, pode-se dizer que:

$$\bar{\Omega}^T = \Omega^T + S^T = \left(\bigcup_e \Omega^e \right) + \left(\bigcup_e \Gamma^e \right)$$

Escrevendo a Equação 88 no domínio de $\bar{\Omega}^T$:

$$\int_{\bar{\Omega}^T} \delta \tilde{\epsilon} \cdot \sigma \, dV - \int_{\bar{\Omega}^T} \delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{S^T} \delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} \, dS = 0 \quad (89)$$

ou então

$$\sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\epsilon}^e \cdot \sigma \, dV - \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^{et} \cdot \mathbf{b} \, dV - \sum_e \int_{\Gamma^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^{et} \cdot \mathbf{t} \, dS = 0 \quad (90)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\epsilon}$ são as aproximações de \mathbf{u} , ϵ sobre o domínio $\bar{\Omega}^T$ e $\tilde{\mathbf{u}}^e$, $\tilde{\epsilon}^e$ é a aproximação local de \mathbf{u} , ϵ no domínio do elemento e .

Em seguida, escolhe-se o tipo e a ordem do elemento finito a ser utilizado. Será selecionado, entre aqueles citados na Seção 2.3.4.1, o elemento finito triangular linear (com nós nos vértices). Dito isso, pode-se definir a função de aproximação local $\tilde{\mathbf{u}}^e$.

Na Seção 2.3.4.2, onde foi apresentada as funções de aproximação para os elementos finitos mais utilizados no MEF, a variável dependente utilizada de exemplo possuía apenas um grau de liberdade por nó. Porém, no problema presente, o deslocamento dos nós no elemento é representado por duas funções ($u(x, y)$ e $v(x, y)$) referentes ao deslocamento do ponto nas direções x e y , respectivamente. Já que foi escolhido um elemento finito linear, as funções escolhidas para as componentes também deverão ser, isto é:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C_1 + C_2x + C_3y \\ v(x, y) &= C_4 + C_5y + C_6y \end{aligned}$$

Com isso, o elemento possuirá seis graus de liberdade (dois em cada nó) e a função de aproximação local será da forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \{u(x, y)\} \\ \{v(x, y)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = [H(x, y)]\{C\} \quad (91)$$

Tendo conhecimento dos deslocamentos nodais do elemento finito e as coordenadas dos seus nós, pode-se dizer que:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$

$$\{U^e\} = [A]\{C\} \longrightarrow \{C\} = [A]^{-1}\{U^e\} \quad (92)$$

onde os coeficientes da matriz $[A]$ são as coordenadas dos nós do elemento e o sobrescrito e nos coeficientes de $\{U^e\}$ foram omitidos a fins de simplicidade. Substituindo o resultado da Equação 92 na Equação 91, obtém-se a função de aproximação para o elemento e em função dos deslocamentos conhecidos dos nós. Isto é, se sabe-se como os nós do elemento se movem, qualquer ponto dentro dele pode ter seu deslocamento calculado. Então,

$$\tilde{\mathbf{u}}^e = [H(x, y)][A]^{-1}\{U^e\} \longrightarrow \tilde{\mathbf{u}}^e = [N(x, y)]\{U^e\} \quad (93)$$

onde $\{U^e\}$ é o vetor dos graus de liberdade nodais para o elemento e (deslocamento dos nós) e $[N(x, y)]$ é a matriz de forma local sendo

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \quad (94)$$

com as suas componentes

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [y_{23}(x - x_2) - x_{23}(y - y_2)] \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [y_{31}(x - x_3) - x_{31}(y - y_3)] \quad A_e = \frac{1}{2}(x_{32}y_{12} - x_{21}y_{23}) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2A_e} [y_{12}(x - x_1) - x_{12}(y - y_1)] \end{aligned}$$

, A_e é a área do elemento finito e , $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$. O termo $\delta\tilde{\mathbf{u}}^e$ na Equação 90 representa o vetor dos deslocamentos virtuais no elemento e e, baseado na definição de $\tilde{\mathbf{u}}^e$ na Equação 93, pode ser definido como:

$$\delta\tilde{\mathbf{u}}^e = [N(x, y)] \delta\{U^e\} \quad (95)$$

O tensor deformação (Equação 16) é uma matriz simétrica. Com isso, o número de termos independentes passa de nove para seis, para problemas tridimensionais ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$

e γ_{zx}). No caso bidimensional, passam a ser apenas três componentes, das quais são

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [\partial] \tilde{\mathbf{u}}^e \quad (96)$$

, com isso, pode-se escrever o vetor das deformações em função dos deslocamentos nodais do elemento finito (Equação 93)

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e = [\partial][N(x, y)]\{U^e\} = [B]\{U^e\} \quad (97)$$

e a sua deformação virtual como

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e = [B]\delta\{U^e\} \quad (98)$$

do qual a matriz $[B]$ é

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (99)$$

O tensor tensão (Equação 8) pode ser reduzido da mesma forma que o tensor deformação, tendo as três componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} . A partir da relação constitutiva entre a tensão e a deformação (lei de Hooke) discutida na Seção 2.1, pode-se expressar o vetor das tensões como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [D]\boldsymbol{\epsilon} \quad (100)$$

A mudança de temperatura em um corpo deformável causam deformações que, se este não estiver livre para se deformar, pode gerar tensões internas. Se a distribuição da variação de temperatura ΔT for conhecida, uma deformação inicial $\boldsymbol{\epsilon}_o$ pode ser considerada. Para o caso de estado plano de tensões em um material isotrópico, ela pode ser representada como:

$$\boldsymbol{\epsilon}_T = \begin{bmatrix} \alpha\Delta T & \alpha\Delta T & 0 \end{bmatrix}^t \quad (101)$$

do qual α é o coeficiente de dilatação térmica linear. Nenhuma deformação de cisalhamento é gerada pela variação de temperatura em materiais isotrópicos, apenas dilatação e contração. Adicionando este termo na Equação 100, obtém-se o campo de tensões internas

como

$$\boldsymbol{\sigma} = [D](\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_T) = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

A partir da equação acima, pode-se representar o vetor tensão em função dos deslocamentos nodais, utilizando a Equação 97, na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [D]([B]\{U^e\} - \boldsymbol{\epsilon}_T^e) \quad (103)$$

Por fim, faltam definir as expressões para a força de corpo \mathbf{b} , que para o trabalho presente será considerado apenas a força peso do objeto, e para a força de superfície \mathbf{t} . Utilizando o segundo termo da Equação 90 aplicado no domínio de um elemento qualquer e , tem-se:

$$\int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{b} \, dV = \int_{\bar{\Omega}^e} (\{b_x\} \delta\{u\} + \{b_y\} \delta\{v\}) \, dV \quad (104)$$

Usando a interpolação da Equação 95 e expandindo a integral acima, obtém-se:

$$\int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{b} \, dV = \int_{\bar{\Omega}^e} (b_x N_1 \delta u_1 + b_y N_1 \delta v_1 + \dots + b_x N_3 \delta u_3 + b_y N_3 \delta v_3) \, dV \quad (105)$$

Já que as forças e os deslocamentos virtuais são constantes, eles podem ser colocados para fora da integral. Além disso, pode-se escrever que $dV = t_e \, dA$, onde t_e é a espessura do elemento.

$$\int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{b} \, dV = t_e \left(b_x \delta u_1 \int_{\bar{\Gamma}^e} N_1 \, dA + \dots + b_x \delta u_3 \int_{\bar{\Gamma}^e} N_3 \, dA + b_y \delta v_3 \int_{\bar{\Gamma}^e} N_3 \, dA \right) \quad (106)$$

Sabendo que a função de forma N_i é definida como um plano sobre o elemento e , de valor unitário no nó i e nulo nos demais, a integral de área corresponde ao volume do tetraedro que é formado por este plano, isto é,

$$\int_{\bar{\Gamma}^e} N_i \, dA = \frac{1}{3} A_e \cdot 1 \left(\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura} \right)$$

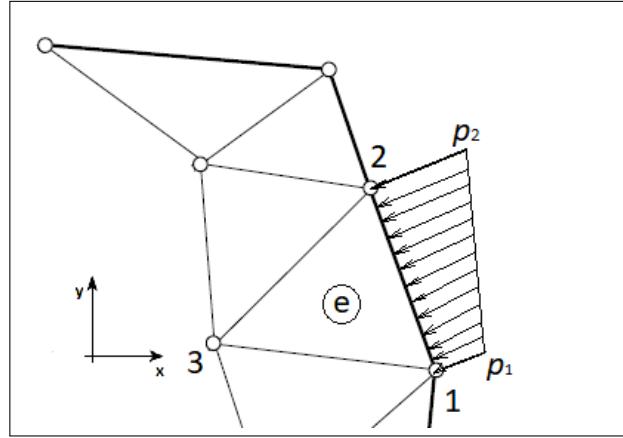
e a Equação 106 pode ser reescrita como

$$\int_{\bar{\Omega}^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{b} \, dV = \delta \{U^e\}^t \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^e \quad (107)$$

sendo

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}}^e = \frac{t_e A_e}{3} [b_x \ b_y \ b_x \ b_y \ b_x \ b_y]^t \quad (108)$$

Figura 12 - Elemento finito sujeito à força de superfície.



Fonte: O autor, 2019

Posteriormente, o vetor \mathbf{F}_b^e será adicionada no vetor de força global \mathbf{F} através da matriz de conectividade $[IEN]$, apresentado na Seção 2.3.4.3. Já que no trabalho presente é realizada a análise em equilíbrio estático, a origem desta força se dá apenas pela gravidade e, portanto, $b_x = 0$ e $b_y = -\rho g$. Além disso, ela será aplicada em todos os nós da malha, já que a força devida à gravidade age em cada parte do corpo.

Por outro lado, a força de superfície, como o nome já diz, ocorre no contorno do corpo e não no seu interior. Por este motivo, esta irá atuar apenas nos elementos que beiram o contorno do corpo.

Considere a Figura 12 onde o elemento e da malha sofre uma compressão $\mathbf{t} = [p_2 \ p_1]^t$ (força por unidade de área). O termo referente à força de superfície pode ser escrito como:

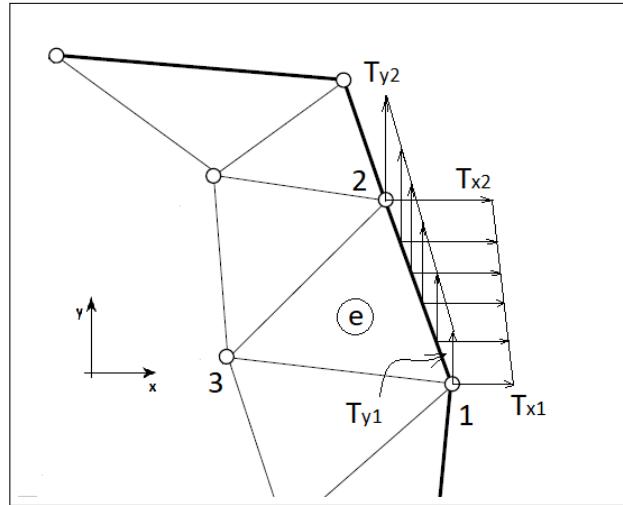
$$\int_{\Gamma^e} \delta \tilde{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{t} \, dS = \int_{\Gamma_{1-2}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_s^e \cdot \mathbf{t} \, dS \quad (109)$$

no qual

$$\mathbf{t} = \{p\} = \begin{bmatrix} \{p_x\} \\ \{p_y\} \end{bmatrix} \text{ e } \delta \tilde{\mathbf{u}}^e_s = [N_s] \delta \{U^e\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \vdots \\ \delta u_3 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} \quad (110)$$

onde $[N_s]$ é a matriz de forma local para o domínio Γ_{1-2} , com isso o valor de N_3 nessa matriz é zero. As componentes de $\{p\}$ devem conter os valores de p_1 e p_2 variando

Figura 13 - Decomposição das forças de superfície.



Fonte: O autor, 2019

linearmente entre ambos valores, com isso, deve-se fazer a decomposição destas forças (Figura 13). Fazendo $T_{xi} = -r p_i$ e $T_{yi} = -s p_i$ como sendo as componentes nas direções x e y , respectivamente, no nó i , onde

$$r = \frac{y_2 - y_1}{l_{1-2}}, s = \frac{x_1 - x_2}{l_{1-2}} \quad \text{e} \quad l_{1-2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

com o sinal negativo indicando que a pressão está comprimindo o elemento. Portanto, pode-se representar as componentes de $\{p\}$ como

$$\begin{aligned} \{p_x\} &= N_1 T_{x1} + N_2 T_{x2} \\ \{p_y\} &= N_1 T_{y1} + N_2 T_{y2} \end{aligned} \quad (111)$$

Substituindo os termos encontrados para \mathbf{t} e $\delta \tilde{\mathbf{u}}_s^e$ na integral, obtém a expressão:

$$\int_{\Gamma_{1-2}} \begin{bmatrix} N_1 \delta u_1 + N_2 \delta u_2 \\ N_1 \delta v_1 + N_2 \delta v_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} N_1 T_{x1} + N_2 T_{x2} \\ N_1 T_{y1} + N_2 T_{y2} \end{bmatrix} t_e dl \quad (112)$$

o desenvolvimento desta integral gerará, resumidamente, três integrais distintas, que são

$$\int_{\Gamma_{1-2}} N_1^2 dl = \int_{\Gamma_{1-2}} N_2^2 dl = \frac{1}{3} l_{1-2} \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{1-2}} N_1 N_2 dl = \frac{1}{6} l_{1-2} \quad (113)$$

e realizando todas as operações, encontra-se a expressão na forma matricial como

$$\int_{\Gamma_{1-2}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_s^e \cdot \mathbf{t} \, dS = \delta \{U^e\}^t \mathbf{F}_s^e \quad (114)$$

do qual \mathbf{F}_s^e é definido como

$$\mathbf{F}_s^e = \frac{t_e l_{1-2}}{6} \begin{bmatrix} 2T_{x1} + T_{x2} & 2T_{y1} + T_{y2} & T_{x1} + 2T_{x2} & T_{y1} + 2T_{y2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \quad (115)$$

Se houvessem forças de superfície sendo aplicadas em mais de um contorno do elemento, $\Gamma^e = \Gamma_{1-2} \cup \Gamma_{2-3}$ por exemplo, deveria ser calculado as integrais para ambas as regiões e somar as contribuições sobre cada nó.

Além das forças superficial e peso representadas na Equação 88, pode-se levar em consideração também cargas pontuais, que é um caso particular da força de superfície onde, idealmente, uma força é aplicada sobre um ponto. O termo da carga pontual pode ser considerado simplesmente como o vetor $\mathbf{P}_i = [P_{xi} \ P_{yi}]^t$, sendo aplicado no nó i . Com isso, o somatório dos trabalhos virtuais externos realizado por cargas pontuais é da forma

$$\sum_e \delta \{U^e\}^t \mathbf{P}_i^e = \begin{bmatrix} \delta u^e & \delta v^e \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} P_{xi}^e \\ P_{yi}^e \end{bmatrix} \quad (116)$$

Reescrevendo a Equação 90, utilizando as formas matriciais desenvolvidas até aqui e acrescentando o termo de carga pontual, no domínio do elemento $\bar{\Omega}^e$ tem-se:

$$\sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} (\delta \{U^e\}^t [B]^t) [D]([B]\{U^e\} - \boldsymbol{\epsilon}_T^e) t_e dA - \left(\sum_e \delta \{U^e\}^t \mathbf{F}_b^e + \sum_e \delta \{U^e\}^t \mathbf{F}_s^e + \sum_e \delta \{U^e\}^t \mathbf{P}_i^e \right) = 0 \quad (117)$$

O vetor $\delta \{U^e\}$ é um campo de deslocamentos arbitrário e independente das coordenadas x e y . Considerando que as suas componentes possuam valores unitários, pode-se escrever a expressão acima da forma

$$\sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} [B]^t [D]([B]\{U^e\} - \boldsymbol{\epsilon}_T^e) t_e dA - \left(\sum_e \mathbf{F}_b^e + \sum_e \mathbf{F}_s^e + \sum_e \mathbf{P}_i^e \right) = 0 \quad (118)$$

e a integral da Equação 118 pode ser desmembrada em duas, elas são:

$$\sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} [B]^t [D][B]\{U^e\} t_e dA \quad \text{e} \quad \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} -[B]^t [D]\boldsymbol{\epsilon}_T^e t_e dA \quad (119)$$

O integrando de ambas as integrais acima não estão em função das coordenadas,

portanto podem ser colocadas para fora da integral resultando em

$$\begin{aligned}\sum_e (t_e A_e [B]^t [D][B]) \{U^e\} &= \sum_e [\mathbf{K}^e] \{U^e\} \\ \sum_e t_e A_e [B]^t [D] \boldsymbol{\epsilon}_T^e &= \sum_e \mathbf{F}_T^e\end{aligned}$$

onde $[\mathbf{K}^e]$ é a matriz de rigidez do elemento. Substituindo estes termos na Equação 118 e passando os termos referente às forças para o lado direito, tem-se a seguinte expressão:

$$\sum_e [\mathbf{K}^e] \{U^e\} = \sum_e (\mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_s^e + \mathbf{P}_i^e + \mathbf{F}_T^e) \longrightarrow [\mathbf{K}] \{U\} = \{\mathbf{F}\} \quad (120)$$

do qual

$$[\mathbf{K}] = \sum_e [\mathbf{K}^e], \quad \{U\} = \sum_e \{U^e\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}\} = \sum_e \{\mathbf{F}^e\} = \sum_e (\mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_s^e + \mathbf{P}_i^e + \mathbf{F}_T^e)$$

que é o sistema de equações algébricas, na forma matricial, das matrizes dos elementos montados, onde $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez global do problema, $\{U\}$ é o vetor dos deslocamento nodais global e $\{\mathbf{F}\}$ é o vetor das forças externas aplicadas.

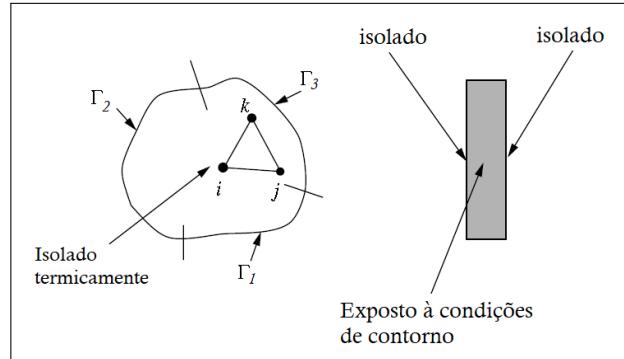
Antes de realizar o passo seguinte de solucionar a Equação 120, deve-se considerar as condições de contorno do problema. Os graus de liberdade nodais primários (deslocamentos) são impostos onde se sabe a posição dos apoios no corpo ($U_i = 0$) ou quando o problema fornece um deslocamento específico U_o . Já os graus de liberdade nodais secundários são levado em consideração no momento da montagem do vetor força global $\{\mathbf{F}\}$. Feito isso, segue o procedimento de solução descrito na Seção 2.3.4.5.

2.5 MEF em problemas de transferência de calor

Da mesma maneira que foi desenvolvida as equações matriciais para problemas de análise de tensões e deformações em objetos bidimensionais, nesta seção será aplicada o MEF para problemas de transferência de calor. Mais especificamente, será realizada a análise da distribuição de temperatura e do fluxo de calor "no plano".

A forma forte do problema é representada pela Equação 34 conhecida como a equação de Poisson e, para chegar nela, foi realizada uma série de suposições, simplificando até obter a equação da temperatura (Equação 29). A primeira delas é de que a transferência de calor ocorre apenas em sólidos. Outra suposição aplicada é de considerar o material homogêneo e isótropo, porém os parâmetros do material serão dependentes da temperatura. Por fim, foi considerado que a análise será realizada no regime estacionário, além de não considerar fluxo de calor na direção z (caracterizando um problema bidimensional).

Figura 14 - Condições de contorno para o problema térmico.



Fonte: O autor, 2019

Além da equação, condições de contorno devem ser dadas para definir um problema de valor de contorno. Já que a equação diferencial do problema é de segunda ordem, pelo menos duas condições de contorno precisam ser especificadas, elas podem ser:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T_0 \text{ em } \Gamma_1 \text{ (temperatura especificada)} \\ q &= q_0 \text{ em } \Gamma_2 \text{ (fluxo de calor especificado)} \\ q &= h(T(x, y) - T_\infty) \text{ em } \Gamma_3 \text{ (fluxo de calor por convecção especificado)} \end{aligned} \quad (121)$$

em que k , h e T_∞ são coeficientes já definidos na Seção 1.3. A partir deste ponto, pode-se iniciar o passo a passo para a obtenção da solução aproximada do campo de temperatura.

A forma fraca para este problema será obtida utilizando o método de Galerkin, descrito na Seção 2.3.2. Seja $T(x, y)$ a solução da Equação 34 e a sua aproximação \tilde{T}^e para um elemento e da malha seja da forma

$$\tilde{T}^e(x, y) = \sum_{j=1}^{nos} N_j(x, y) \theta_j^e, \quad (122)$$

a integral ponderada do resíduo no domínio do elemento será:

$$\int_{\Omega^e} w(x, y) \left[k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}^e}{\partial y^2} \right) + \dot{Q} \right] dV = 0 \quad (123)$$

onde $w(x, y)$ são as funções peso que devem obedecer as condições descritas na Seção 2.3.1. Utilizando o teorema do gradiente, o primeiro termo da Equação 123 pode ser escrito

como:

$$\int_{\Omega^e} w(x, y) k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}^e}{\partial x^2} \right) dV = - \int_{\Omega^e} \frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial x} dV + \oint_{\Gamma^e} w k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial x} n_x d\Gamma \quad (124)$$

do qual n_x é a componente do vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ na direção x . Realizando o mesmo procedimento no segundo termo e sabendo que $q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n}$, a Equação 123 fica na forma

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial y} \right] dV - \oint_{\Gamma^e} w k [q_x^e n_x + q_y^e n_y] d\Gamma + \int_{\Omega^e} w \dot{Q} dV = 0 \\ & - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial y} \right] dV - \oint_{\Gamma^e} w q^e d\Gamma + \int_{\Omega^e} w \dot{Q} dV = 0 \end{aligned} \quad (125)$$

Dado que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, então pode-se decompor o contorno do elemento Γ^e da mesma maneira. Com isso, a integral no domínio Γ_1^e deve ser zero, já que a temperatura nesta região é dada. Nas superfícies Γ_2^e e Γ_3^e , as condições de contorno dadas pela Equação 121 devem ser satisfeitas, isto é:

$$\oint_{\Gamma^e} w q d\Gamma = \int_{\Gamma_2^e} w q_0 d\Gamma + \int_{\Gamma_3^e} w h(T(x, y) - T_\infty) d\Gamma \quad (126)$$

Com isso, a forma fraca referente à Equação 34 e às condições de contorno (Equação 121) pode ser representada como

$$- \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial \tilde{T}^e}{\partial y} \right] dV - \int_{\Gamma_2^e} w q_0^e d\Gamma - \int_{\Gamma_3^e} w h(T^e(x, y) - T_\infty) d\Gamma + \int_{\Omega^e} w \dot{Q} dV = 0 \quad (127)$$

O passo relativo à discretização foi parcialmente realizado quando foi desenvolvida a forma fraca. Não se tem um corpo geométrico definido do problema, portanto considere que o domínio do problema seja, de modo geral, $\bar{\Omega}^T = \Omega^T + \Gamma^T$, onde $\Omega^T = \bigcup_e \Omega^e$ e $\Gamma^T = \bigcup_e \Gamma^e$.

O tipo de elemento e a sua ordem serão os mesmos que os aplicados na seção anterior, porém a variável do problema é um escalar (temperatura) e na seção anterior era um vetor (vetor deslocamento \mathbf{u}). Portanto, a aproximação da temperatura será uma função linear da forma

$$\tilde{T}^e(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y \quad (128)$$

Depois que se descobre os valores dos coeficientes C , tendo as temperaturas e as coordenadas em cada nó do elemento, posiciona-se os termos com o intuito de evidenciar

as variáveis dependentes e obtém-se a seguinte expressão:

$$\tilde{T}^e = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\theta_3 \quad (129)$$

ou na forma matricial

$$\tilde{T}^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = [N(x, y)]\{\theta^e\} \quad (130)$$

onde $\{\theta^e\}$ é o vetor das temperaturas nos nós do elemento e e $[N(x, y)]$ é o vetor de forma local sendo sua componente igual a

$$N_q = \frac{1}{2A}(a_q + b_qx + c_qy), \quad q = 1, 2, 3 \quad (131)$$

e

$$a_1 = x_jy_k - x_ky_j, \quad b_i = y_j - y_k \text{ e } c_i = x_k - x_j \quad \begin{cases} \text{para } i = 1, j = 2 \text{ e } k = 3 \\ \text{para } i = 2, j = 3 \text{ e } k = 1 \\ \text{para } i = 3, j = 1 \text{ e } k = 2 \end{cases} \quad (132)$$

Outra variável de interesse é o gradiente de temperatura, que será representada como um vetor.

$$\{g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = [B]\{\theta\} \quad (133)$$

Da mesma maneira que foi determinado a variável \tilde{T} , a função peso $w(x, y)$ será aproximada como

$$w(x, y) \approx \tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^{nos} N_i(x, y) \omega_i^e \quad (134)$$

Substituindo as Equações 122 e 134 na forma fraca do problema (Equação 127), tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1}^{no} \int_{\Omega^e} \left[\omega_i \frac{\partial N_i}{\partial x} k \theta_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial N_i}{\partial y} k \theta_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dV - \sum_{i=1}^{no} \int_{\Gamma_2^e} N_i \omega_i q_0 d\Gamma - \\ - \sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1}^{no} \int_{\Gamma_3^e} N_i \omega_i h(N_j \theta_j) d\Gamma + \sum_{i=1}^{no} \int_{\Gamma_3^e} N_i \omega_i h T_{\infty} d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{no} \int_{\Omega^e} N_i \omega_i \dot{Q} dV = 0 \end{aligned} \quad (135)$$

Passando as integrais contendo apenas a função de forma N_i para o lado direito da equação e sabendo que ω_i e θ_j são constantes, pode-se reescrever a Equação 135 na forma

$$\begin{aligned} l - \sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1}^{no} \left(\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dV + \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma \right) \omega_i \theta_j = \\ = \sum_{i=1}^{no} \left(- \int_{\Omega^e} N_i \dot{Q} dV - \int_{\Gamma_3^e} N_i h T_\infty d\Gamma + \int_{\Gamma_2^e} N_i q_0 d\Gamma \right) \omega_i \end{aligned} \quad (136)$$

Avaliando a primeira integral da Equação 136, tem-se que:

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dV = \int_A \frac{k}{(2A)^2} (b_i b_j + c_i c_j) t_e dA = \frac{k t_e}{4A} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (137)$$

Realizando o somatório da integral, obtém-se uma matriz 3x3 denominada por $[K_1^e]$.

$$[K_1^e] = \frac{k t_e}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (138)$$

onde t_e e A são a espessura e a área do elemento e . A segunda integral da Equação 136 é referente a convecção, portanto ela só ocorrerá no contorno do elemento que pertença a fronteira do domínio $\bar{\Omega}$, semelhante à força de superfície na seção anterior.

Supondo que um elemento e com nós 1, 2 e 3, numerados no sentido anti-horário, esteja sujeito a um fluxo de calor por convecção no lado 2 – 3 (no lado dos nós 2 e 3). Com isso, tem-se que

$$\int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j d\Gamma = \int_{l_{2-3}} h N_i N_j t_e dl = h t_e \int_{l_{2-3}} N_i N_j dl \quad (139)$$

Esta integral é semelhante àquela da Equação 113, contudo o somatório da integral irá gerar uma matriz 3x3 onde os coeficientes referentes ao nó 1 será nula, portanto:

$$\sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1}^{no} \int_{l_{2-3}} N_i N_j dl = \frac{h t_e l_{2-3}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [K_2^e] \quad (140)$$

onde l_{2-3} é a distância entre os nós 2 e 3.

Passando para os termos a direita da Equação 136, verifica-se que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^e} N_i \dot{Q} dV &= \dot{Q} t_e \int_{\Omega^e} N_i dA = \frac{\dot{Q} t_e A}{3} \\
 \int_{\Gamma_3^e} N_i h T_\infty d\Gamma &= h T_\infty t_e \int_{l_{2-3}} N_i dl = \frac{h t_e T_\infty l_{2-3}}{2} \\
 \int_{\Gamma_2^e} N_i q_0 d\Gamma &= q_0 t_e \int_{l_{1-2}} N_i dl = \frac{q_0 t_e l_{1-2}}{2}
 \end{aligned} \tag{141}$$

onde o domínio Γ_2^e pertence ao lado l_{1-2} do elemento e . Assim, a contribuição das integrais acima em cada nó geram vetores que são representados como

$$\{F_Q^e\} = \frac{\dot{Q} t_e A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{F_h^e\} = \frac{h t_e T_\infty l_{2-3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{F_q^e\} = \frac{q_0 t_e l_{1-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{142}$$

Substituindo os vetores e matrizes obtidos até aqui na Equação 136, obtém-se a seguinte relação:

$$([K_1^e] + [K_2^e]) \sum_{j=1}^{no} \theta_j = \{F_Q^e\} + \{F_h^e\} - \{F_q^e\} \longrightarrow [K^e] \{\theta^e\} = \{F^e\} \tag{143}$$

que é a forma matricial local das equações do elemento finito e , onde $\{\theta^e\}$ é o vetor das temperaturas nos nós, $[K^e]$ é a matriz de rigidez térmica e $\{F^e\}$ é o vetor das "forças". Para obter a forma global, deve-se utilizar a matriz de conectividade $[IEN]$ para levar em consideração a contribuição dos outros elementos para um mesmo nó.

Depois de obtida a matriz de rigidez térmica global, os passos a serem seguidos são os mesmos explanados para o problema estrutural da seção anterior.

3 ALGORITMO E METODOLOGIA

Existem três etapas que envolvem uma análise de elemento finito. A primeira delas é o pré-processamento que abrange a preparação dos dados como as condições de contorno, geração da malha e, consequentemente, a matriz de conectividade, as coordenadas dos nós e as informações do material. Em seguida, a etapa de processamento é onde ocorre a geração da matriz de rigidez (local e global) e dos vetores de força, a sua modificação e a obtenção dos valores das variáveis primárias nodais, além das variáveis secundárias como gradientes e tensões. A última etapa é a de pós-processamento, que consiste na apresentação dos resultados na forma de gráficos e tabelas demonstrando a distribuição da variável primária, até a disposição destas no próprio no domínio (CHANDRUPATLA et al., 2002).

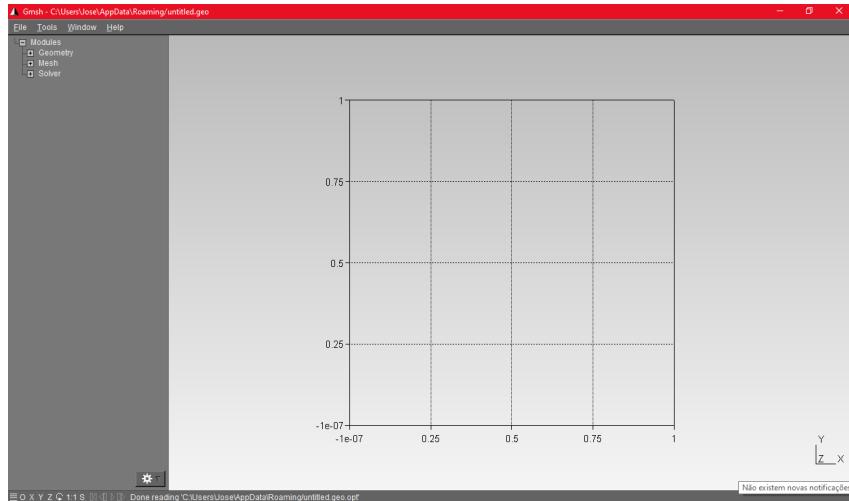
Para a realização da análise de elemento finito dos problemas apresentados neste trabalho, foram criados dois códigos separadamente para a solução de problemas estruturais e térmicos utilizando a linguagem de programação Python (*estrutural.py* e *termico.py*, respectivamente). Depois de serem validados, ambos foram devidamente unidos gerando um terceiro código (*híbrido.py*) que leva em consideração deformações e tensões térmicas. Python é uma linguagem de programação de alto nível (longe do código de máquina e mais próxima à linguagem humana), interpretada (o código fonte é interpretada por um programa "interpretador", que em seguida é executado pelo sistema operacional) e de *Script*. Devida à estas características, a linguagem Python se tornou uma poderosa ferramenta para criação de jogos, análise de dados, inteligência artificial, *Machine Learning* etc. (BRASIL, 2009). O ambiente de trabalho (IDE) utilizada foi o *Spyder* versão 3.6 da empresa *Anaconda*.

3.1 Gerador da malha

No pré-processamento, a geração de malha é um procedimento que pode ser realizado utilizando programas comercialmente disponíveis ou através de linhas de comando, dependendo da complexidade do domínio do problema. No presente trabalho foi utilizado o programa *Gmsh* versão 3.0.6. Ele é um gerador de malha de elementos finitos 3D com um sistema CAD (desenho assistido por computador, em português) e pós-processamento embutidos (GEUZAINÉ C. E REMACLE, 2009). Não é necessário realizar uma instalação, apenas a execução do download e a extração da pasta *GMSH* do arquivo .zip.

Depois de feito a extração, pode-se abrir o programa clicando em *gmsh.exe* e abrirá a tela inicial do programa (Figura 15). Inicialmente, deve-se criar o novo arquivo clicando em *File/New*. Depois de criar um nome para o arquivo, selecione a opção *Use '.geo'*

Figura 15 - Tela inicial do Gmsh.



Fonte: O autor, 2019

extension, gerando um arquivo de formato .geo responsável pela geometria do problema.

A criação do domínio é feita clicando em *Modules/Geometry/Elementary entities/Add*. Nela pode-se adicionar os vértices do domínio com o comando *Point* e uma posterior adição dos lados com *Straight line* ou utilizando o comando *Rectangle* para gerar um retângulo diretamente. No final deste passo, utiliza-se o comando *Plane surface* para indicar uma superfície fechada. As coordenadas dos pontos podem ser modificadas posteriormente clicando em *Modules/Geometry/Edit script*, onde irá abrir uma janela mostrando o código fonte da malha (Figura 16).

3.1.1 Dados de entrada

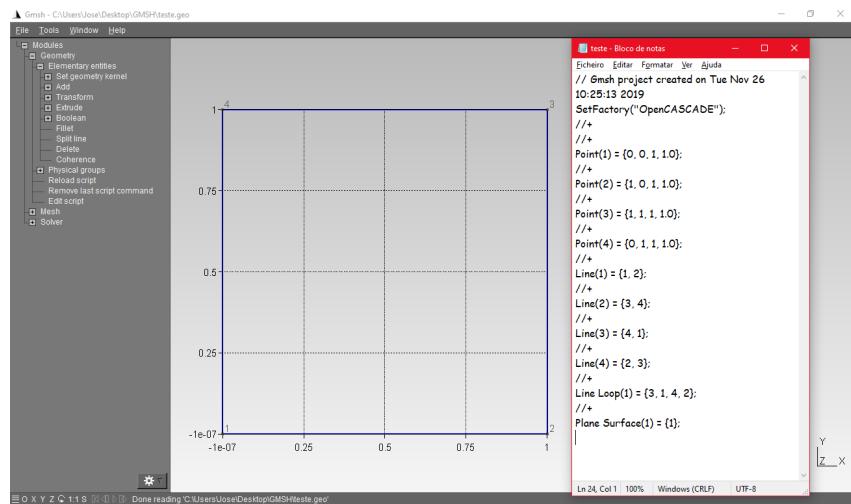
Depois de definido o domínio do problema, deve-se indicar suas condições de contorno e as propriedades do material, e esta etapa é realizada clicando em *Modules/Geometry/Physical groups/Add*. *Physical surface*, *Physical line* e *Physical point*, subcategorias de *Physical Groups* (P.G.), são comandos para identificar condições de contorno em elementos de superfície, de linha e de ponto, respectivamente. Para adicionar um dos tipos de P.G., o procedimento é o mesmo: selecione o tipo de P.G. desejado, adicione um rótulo no campo *Name*, clique nos elementos desejados e pressione a tecla *enter* para confirmar (Figura 17). Como exemplo, é exposto as linhas de comando do arquivo exemplo mostrando as informações dos nós, das linhas, das condições de contorno e das propriedades do material.

```

1 Point(1) = {0, 0, 1, 1.0};
2 Point(2) = {1, 0, 1, 1.0};

```

Figura 16 - Código fonte da geometria.



Fonte: O autor, 2019

```

3 Point(3) = {1, 1, 1, 1.0};
4 Point(4) = {0, 1, 1, 1.0};
5 Line(1) = {1, 2};
6 Line(2) = {3, 4};
7 Line(3) = {4, 1};
8 Line(4) = {2, 3};
9 Line Loop(1) = {3, 1, 4, 2};
10 Plane Surface(1) = {1};
11 Physical Point("fp 1000;1000") = {3};
12 Physical Line("fd 500;500") = {1};
13 Physical Surface("Prop: E = 200e+9 v = 0.3 ro = 7860") = {1};

```

Nesse código só aparecem algumas condições de contorno e propriedades do material para o problema estrutural. A seguir, são apresentadas todos os dados de entrada para os programas *termico.py* e *estrutural.py*.

T 100 Temperatura especificada no contorno do domínio, (P.G. de linha);

q -40 Fluxo de calor no contorno (P.G. de linha);

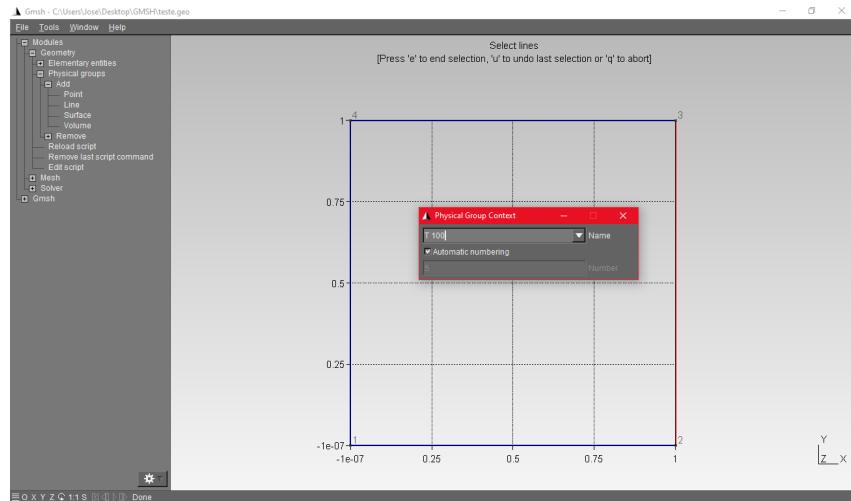
pontual 50 Fonte de calor pontual (P.G. de ponto);

uniforme 100 Fonte de calor uniforme (P.G. de superfície);

Prop: k = 5 Condutividade térmica do material, uma propriedade que é atribuída ao P.G. de superfície;

fp 300;400 Força pontual atuante no nó (P.G. de ponto), onde 300 e 400 são forças sendo aplicadas na direção positiva de *x* e *y*, respectivamente;

Figura 17 - Exemplo do uso de condição de contorno.



Fonte: O autor, 2019

fd 1000;2000 Tensões atuantes no contorno (P.G de linha), onde 1000 indica uma tensão normal ao plano do contorno e 2000 indica uma tensão de cisalhamento. Uma tensão normal positiva indica que está tracionando o corpo e o oposto indica compressão. Já uma tensão de cisalhamento positiva tenderá a rotacionar o elemento segundo a regra da mão direita (sentido anti-horário);

desloc 0;0 Condição de deslocamento no nó ou no contorno (P.G. de ponto ou de linha), onde ; separa os valores nas direções x e y destes deslocamentos. Quando não se deseja restringir o movimento em uma das direções, o seu valor deve ser omitido;

Prop: E = 200e9 v = 0.3 ro = 7850 Módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson ν e densidade ρ , respectivamente. Propriedades do material que são destinadas ao P.G. de superfície;

Para o programa *híbrido.py*, onde se calcula as tensões e deformações térmicas, são utilizados mais dois dados de entrada, além dos já citados. São eles:

Prop: Ti = 25 alfa = 12e-6 Temperatura inicial e coeficiente de dilatação térmica linear;

Repare que existe um espaçamento entre alguns caracteres, é de suma importância que estes sejam respeitados no momento em que são colocados.

3.1.2 Criação da malha

A geração de malha no Gmsh ocorre de modo rápido e simples. Clicando em *Modules/Mesh/2D*, gera-se uma malha no qual seus elementos não possuem uma posição padrão (18a). Para criar uma malha estruturada, deve-se ir em *Modules/Mesh/Define/-Transfinite/Surface*, selecionar o plano, selecionar os nós dos quais pertencem ao plano e terminar a seleção teclando *e*. Em seguida, selecione a opção *Line*, escolha a quantidade de nós que desejar, selecione os contornos, confirme a escolha com a tecla *e* e, por fim, atualize a malha clicando em *1D* e *2D* novamente.

Também é possível refinar a malha inteira ou apenas em parte dela. No caso da malha estando estruturada, só é possível refiná-la por inteira, aumentando o número de nós desejado no contorno, enquanto utiliza o comando *Transfinite/Line*. Para a malha não estruturada, pode-se refiná-la por inteira dando um duplo clique com o mouse e selecionando a opção *Global mesh size factor*, depois adicione qualquer valor no campo disponível. Quanto menor for o número escolhido, menor será o tamanho do elemento.

Caso queira refinar arestas específicas da malha, pode-se utilizar o comando *Transfinite/Line* sem a necessidade de definir a superfície (Figura 18c). Se o objetivo for aumentar o número de elementos próximo a um nó em especial, clique em *Modules/-Mesh/Define/Size at points*, depois adicione um valor no campo *Value* menor do que 1, confirme a seleção clicando na tecla *e* e atualize a malha (Figura 18d).

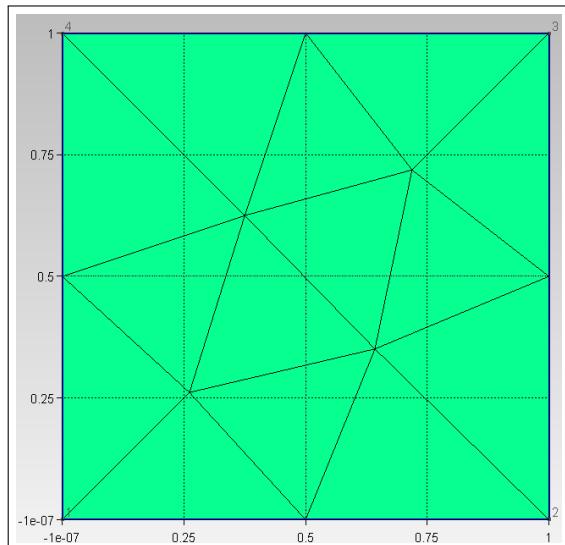
Depois de terminada a criação da malha, salve-a clicando em *Modules/Mesh/Save*. Quando a malha é salva, um arquivo de formato .msh é gerado com o mesmo nome do arquivo de formato .geo, ele é responsável por conter as informações da malha como as quantidades de nós e suas posições, quantidades de elementos, os rótulos das condições de contorno e com quais elementos estão associados, etc. Logo abaixo são apresentadas as linhas de comando do arquivo .msh referente ao código fonte de exemplo.

```

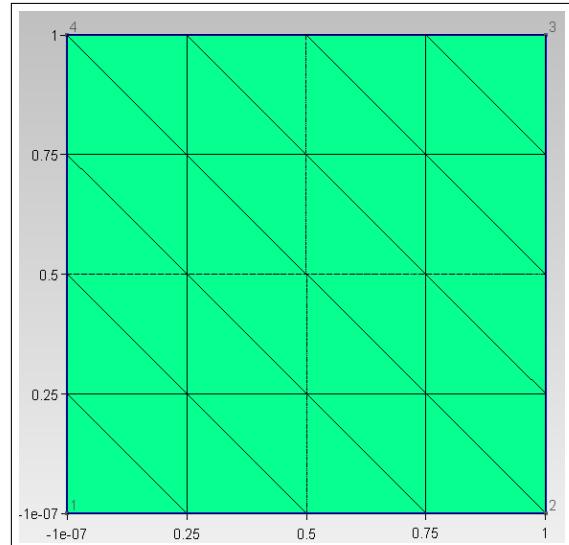
1 $MeshFormat
2 2.2 0 8
3 $EndMeshFormat
4 $PhysicalNames
5 5
6 0 1 "fp 1000;1000"
7 1 2 "q -40"
8 1 3 "fd 500;500"
9 1 4 "h 25 Ta 125"
10 2 5 "Prop: k = 10 E = 200e+9 v = 0.3 ro = 7860"
11 $EndPhysicalNames
12 $Nodes
13 12
14 1 0 0 1
15 2 1 0 1
16 3 1 1 1
17 4 0 1 1
18 5 0.5 0 1
19 6 0.5 1 1
20 7 0 0.5 1

```

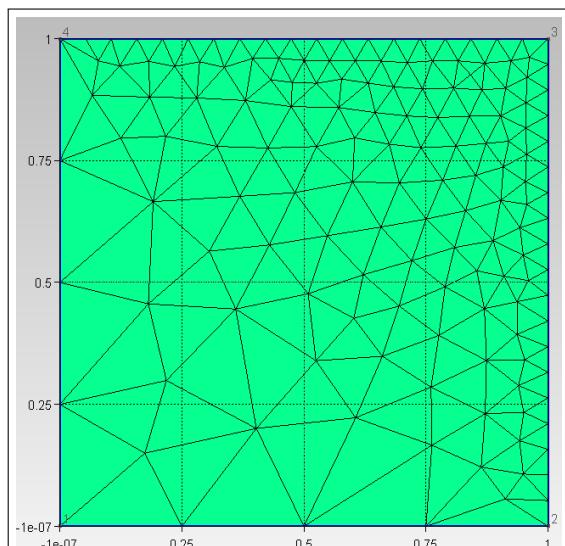
Figura 18 - Exemplos de malhas no Gmsh.



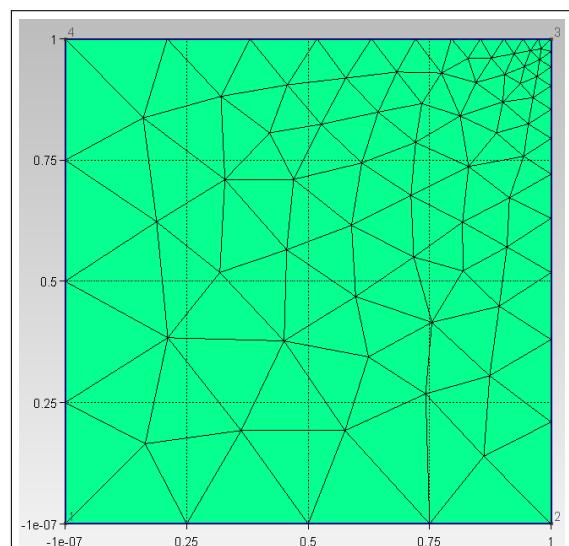
(a) Malha não estruturada.



(b) Malha estruturada.



(c) Malha com 20 nós definidos no lado direito e superior.



(d) Malha com fator 0.1 no nó de número 3.

Fonte: O autor, 2019

```

21 8 1 0.5 1
22 9 0.2613884839650146 0.2613884839650146 1
23 10 0.3750000000000001 0.625 1
24 11 0.6425230806608357 0.3508564139941691 1
25 12 0.7187500000000001 0.71875 1
26 $EndNodes
27 $Elements
28 23
29 1 15 2 1 3 3
30 2 1 2 3 1 1 5
31 3 1 2 3 1 5 2
32 4 1 2 4 2 3 6
33 5 1 2 4 2 6 4
34 6 1 2 2 3 4 7
35 7 1 2 2 3 7 1
36 8 1 2 2 4 2 8
37 9 1 2 2 4 8 3
38 10 2 2 5 1 2 8 11
39 11 2 2 5 1 4 10 6
40 12 2 2 5 1 4 7 10
41 13 2 2 5 1 2 11 5
42 14 2 2 5 1 3 6 12
43 15 2 2 5 1 3 12 8
44 16 2 2 5 1 1 5 9
45 17 2 2 5 1 1 9 7
46 18 2 2 5 1 8 12 11
47 19 2 2 5 1 7 9 10
48 20 2 2 5 1 9 11 10
49 21 2 2 5 1 6 10 12
50 22 2 2 5 1 10 11 12
51 23 2 2 5 1 5 11 9
52 $EndElements

```

3.2 Implementação do código em linguagem Python

Nesta seção será apresentada, de modo resumido, como ocorreu a criação dos programas e alguns de seus trechos. Os três códigos estão disponíveis por completo no site do *GitHub* clicando [aqui](#).

A etapa de pré-processamento não termina no momento em que a malha do problema é salva, deve-se retirar as informações necessárias do arquivo .msh e gerar listas contendo as coordenadas dos nós, quantidade de elementos triangulares e seus respectivos nós (isto é, matriz de conectividade IEN), quais elementos estão associados a quais condições de contorno, etc. O trecho abaixo é responsável pela identificação e armazenamento das condições de contorno, seus valores e uma *tag* referente à condição.

```

1 arquivo = open(r"c:\users\jose\desktop\GMSH\teste.msh")
2 lista = arquivo.readlines()
3 nomes = []
4 a = 0
5 for i in range(len(lista)):
6     termo = lista[i]
7     if termo == '$PhysicalNames\n':

```

```

8         a = 1
9     if termo == '$EndPhysicalNames\n':
10        a = 0
11    if a == 1:
12        nomes.append(lista[i])
13 nomes.pop(0)
14 nomes.pop(0)

```

O trecho seguinte tem o papel de armazenar a quantidade de nós que estão presentes, as coordenadas dos nós em listas e definir a espessura do domínio, que é constante.

```

1 nos = [] # lista que deve receber a lista da posicao dos nos
2 a = 0
3 for i in range(len(lista)):
4     termo = lista[i]
5     if termo == '$Nodes\n':
6         a = 1
7     if termo == '$EndNodes\n':
8         a = 0
9     if a == 1:
10        nos.append(lista[i])
11
12 nos.pop(0) #Retira '$Nodes\n'
13 nos.pop(0) #Retira quantidade de nós
14
15 xn = [] #lista de coordenadas dos nos em X
16 yn = [] #lista de coordenadas dos nos em Y
17 zn = []
18 Npts = len(xn) #Quantidade de pontos/nós na malha
19
20 for j in range(len(nos)):
21     linha = nos[j].split()
22     xn.append(float(linha[1]))
23     yn.append(float(linha[2]))
24     zn.append(float(linha[3]))
25 t = zn[0] #Espessura do elemento

```

Já o trecho abaixo é encarregado de criar a matriz de conectividade e armazenar em uma lista os nós, os elementos e as *tags* das condições de contorno, que serão utilizadas no momento da produção dos vetores de força e da imposição das condições.

```

1 Elem = []
2 b = 0
3 for i in range(len(lista)):
4     termo = lista[i]
5     if termo == '$Elements\n':
6         b = 1
7     if termo == '$EndElement\n':
8         b = 0
9     if b == 1:
10        Elem.append(lista[i])
11
12 Elem.pop(0) #Retida o $Elements
13 Elem.pop(0) #Retira o numero de elementos da lista
14 arquivo.close()
15 triang = []
16 for j in range(len(Elem)):
17     linha = Elem[j].split()
18     if linha[3] == local:

```

```

19         triang.append(linha)
20
21 elem=len(triang) #Quantidade de elementos na malha
22 IEN= np.zeros((len(triang),3), dtype = int)
23 for i in range(len(triang)):
24     termo = triang[i]
25     for n in range(3):
26         IEN[i][n] = termo[-n-1]
27
28 for j in range(len(IEN)): #Muda posicao das colunas de IEN
29     q = IEN[j][1] - 1
30     IEN[j][1] = IEN[j][0] - 1
31     IEN[j][0] = q
32     IEN[j][2] -= 1

```

Estes trechos apresentados estão presentes nos três programas criados. Porém, em *estrutural.py* e *hibrido.py*, é adicionada mais um *loop* responsável pela geração da matriz de conectividade para dois graus de liberdade, identificada no código como *ien*, facilitando a montagem da matriz de rigidez global.

Depois que o vetor força global é gerado, através das contribuições de cada elemento, a matriz de rigidez é criada. Em ambos os programas, o *loop* responsável pela sua criação é um pouco extenso, por isso só serão apresentados os trechos dos programas *estrutural.py* e *termico.py* onde ocorre a adição das matrizes locais na matriz global.

```

1 for i in range(6):
2     ii = int(ien[e][i])
3     for j in range(6):
4         jj = int(ien[e][j])
5         K[ii][jj] += k[i][j]

```

e

```

1 for i in range(3):
2     ii = int(IEN[e][i])
3     for j in range(3):
4         jj = int(IEN[e][j])
5         K[ii][jj] += ko[i][j]

```

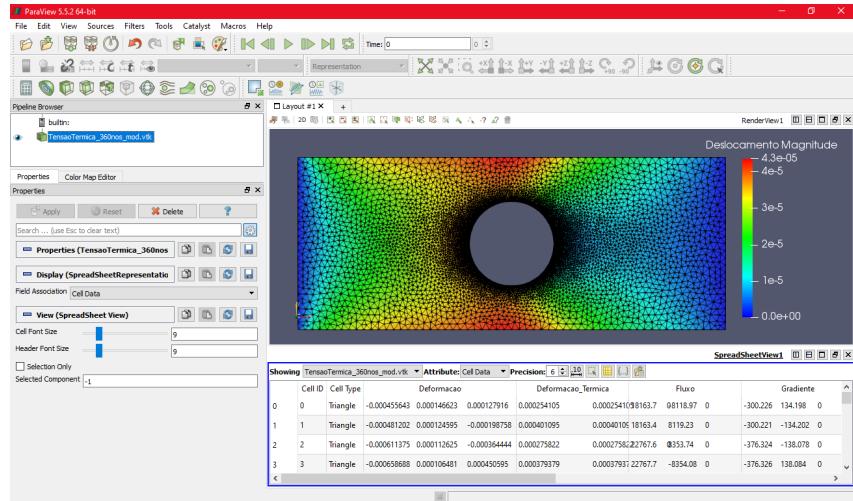
Como é explicado na Seção 2.3.4.4, a matriz de conectividade (tanto IEN quanto ien) cria um vínculo entre as linhas e colunas das matrizes local e global. Em seguida, ocorre a imposição das condições de contorno e a solução do sistema, como é descrito na Seção 2.3.4.5.

A partir deste ponto, onde é obtida a variável primária do problema, as variáveis secundárias (gradiente de temperatura e fluxo de calor para *termico.py*; tensões, deformações e deslocamentos nodais para *estrutural.py*; tensões e deformações térmica, além das anteriores citadas, para *hibrido.py*) são calculadas e armazenadas em listas.

3.3 Visualização dos resultados

Os resultados obtidos são apresentados de modo gráfico e através de tabelas pelo programa *Paraview* (INC.,). Ele é um software *open source*, multi-plataforma utili-

Figura 19 - Área de trabalho do *Paraview*.



Fonte: O autor, 2019

zado para análise e visualização de dados científicos, com uma interface gráfica simples e versátil.

Para o *Paraview* interpretar os dados de saída dos programas, foi criada uma linha de comando para que os arquivos *.py* gerassem um arquivo no qual fosse possível a leitura das informações. Na Figura 19, é mostrada a tela do programa mostrando uma prévia dos resultados obtidos como um exemplo do seu uso.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, os códigos desenvolvidos serão colocados à prova através da comparação com soluções analíticas e, quando não possível, procedimentos testes que garantam a convergência do resultado conforme o número de elementos aumenta.

4.1 Validações

Primeiramente, será verificado se o programa criado para solucionar problemas térmicos consegue obter a distribuição de temperatura em um objeto bidimensional sujeito à diversas condições de contorno. Isso é mesma coisa que resolver a equação de Laplace em uma região sólida e sem geração de calor.

4.1.1 Equação de Calor sem geração de energia

4.1.1.1 Sob condições de contorno de temperatura

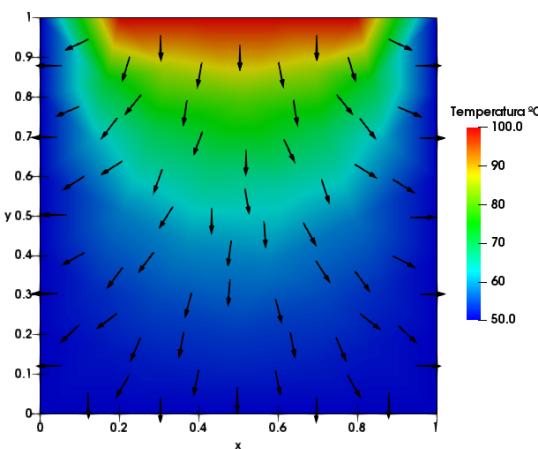
Existem soluções analíticas para alguns casos específicos, como o exemplo apresentado por (INCROPERA et al., 2008) na página 203, onde se utiliza do método de separação de variáveis para encontrar a distribuição de temperatura de uma placa retangular com três de seus lados a uma temperatura constante T_1 , enquanto que o lado restante é mantido a uma temperatura $T_2 \neq T_1$. Para uma placa de largura L e altura H , sob as seguintes condições: $T(0, y) = T(L, y) = T(x, 0) = T_1$ e $T(x, H) = T_2$, a solução é da forma:

$$T(x, y) = (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} + T_1 \quad (144)$$

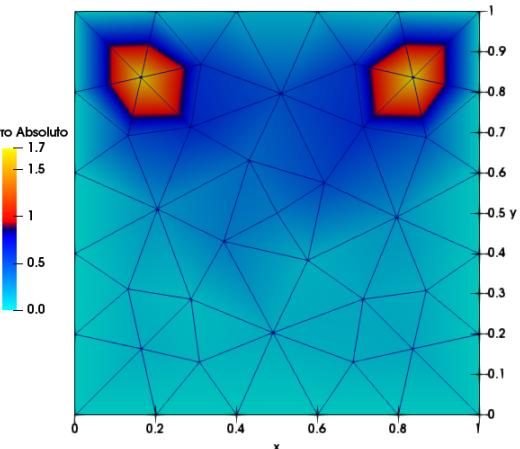
Considerando uma placa com lados unitários, $T_1 = 50^\circ C$ e $T_2 = 100^\circ C$, foram realizadas três simulações com malhas não estruturadas na mesma peça, apenas variando a quantidade de nós (Figura 20). As Figuras 20a, 20c, 20e demonstram a distribuição de temperatura na placa com 45, 1567 e 3433 nós e o sentido do fluxo de calor, representado pelas setas.

Já que é possível encontrar o valor da temperatura em qualquer ponto, foi possível calcular o erro absoluto nestes nós, como é apresentado nas Figuras 20b, 20d, 20f. Nelas ficam evidente que o programa obteve resultados muito próximos ou iguais à solução analítica na maioria dos nós para $n = 200$. Além disso, é possível verificar que existe

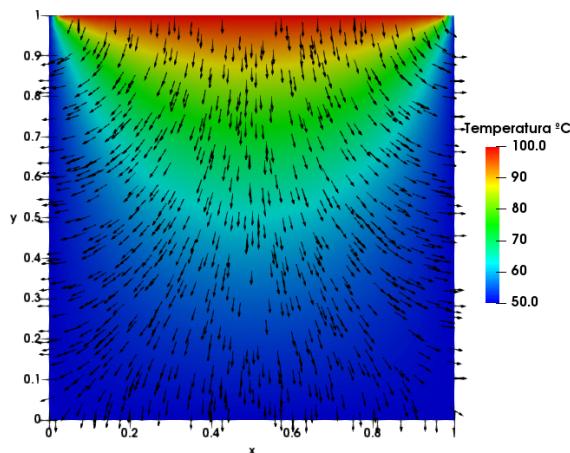
Figura 20 - Simulação sob condição de temperatura no contorno.



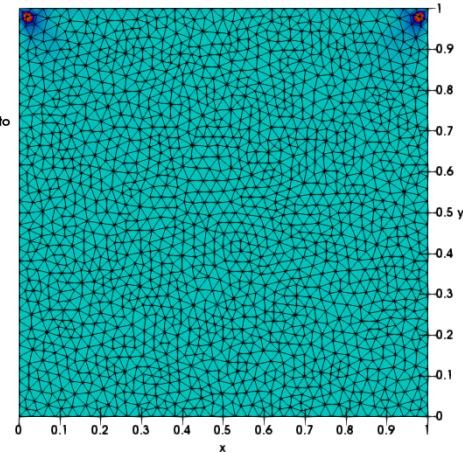
(a) Distribuição de temperatura com 45 nós.



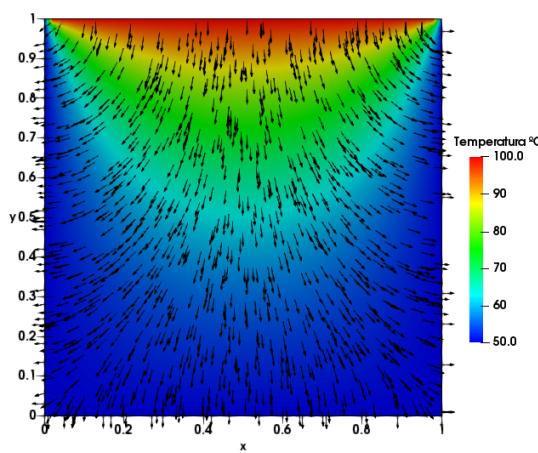
(b) Erro absoluto com 45 nós.



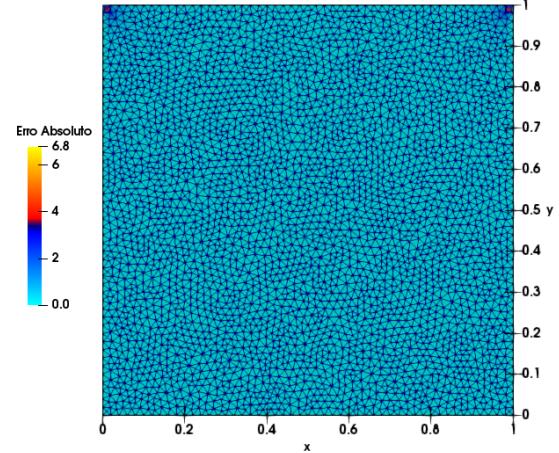
(c) Distribuição de temperatura com 1567 nós.



(d) Erro absoluto com 1567 nós.



(e) Distribuição de temperatura com 3433 nós.



(f) Erro absoluto com 3433 nós.

Fonte: O autor, 2019

uma região (próximo aonde ocorre a mudança de temperatura no contorno) da qual os resultados se divergem, e o erro absoluto aumenta conforme cresce o número de nós na malha.

4.1.1.2 Sob condições de contorno de fluxo de calor

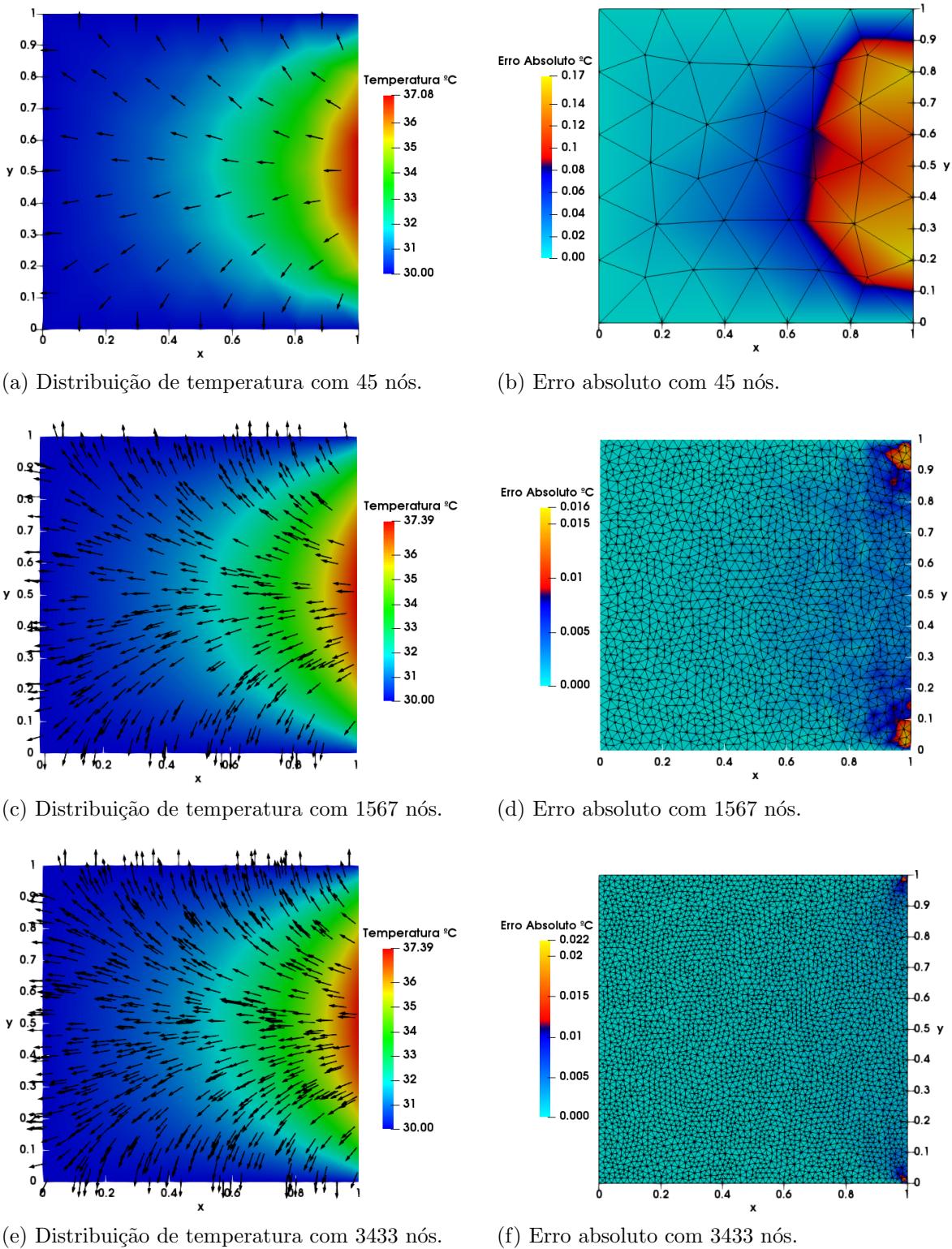
O segundo teste realizado foi aplicando um fluxo de calor uniforme q na lateral direita da mesma placa, enquanto que o restante dos lados é mantido a uma temperatura constante T_1 . Através do mesmo método analítico utilizado no teste anterior, pode-se chegar a uma expressão para a distribuição de temperatura (Equação 145).

$$T(x, y) = \frac{2qL}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{H}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} + T_1 \quad (145)$$

Para valores de $q = 1000 \frac{W}{m^2}$, $T_1 = 30^\circ C$ e $k = 50 \frac{W}{mK}$, foram simuladas três situações onde a única diferença é na quantidade de nós usadas nas malhas (Figura 21). A distribuição da temperatura para as malhas com 45, 1567 e 3433 nós são mostradas nas Figuras 21a, 21c, e 21e, respectivamente. Como o fluxo de calor q aplicado é positivo, a temperatura nessa região será maior do que nos demais lados.

Do mesmo modo que no teste anterior, foi gerado uma figura mostrando a diferença das temperaturas entre a solução analítica e a numérica. É possível notar que, a região próxima onde ocorre a mudança de condição de contorno é o local onde o erro absoluto é maior, da mesma forma que o teste anterior. Além do mais, o erro absoluto diminui com o aumento do número de nós, o que é de se esperar.

Figura 21 - Simulação sob condição de fluxo de calor no lado direito.



Fonte: O autor, 2019

4.1.1.3 Sob condições de fluxo de calor por convecção

Neste terceiro teste, uma condição de fluxo por convecção, considerando a temperatura $T_\infty = 0$, é aplicada no lado superior de uma placa com dimensões unitárias, uma temperatura constante $T_1 \neq 0$ é imposta na lateral esquerda e as demais faces estão termicamente isoladas (o fluxo é nulo). Para este problema, a distribuição de temperatura é expressa pela equação abaixo

$$T(x, y) = 2T_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + H^2) \sin(W\lambda_n)}{[W(\lambda_n^2 + H^2) + H]\lambda_n \cosh(\lambda_n L)} \cosh \lambda_n(x - L) \cos(\lambda_n y), \quad (146)$$

onde $H = \frac{h}{k}$ e λ_n são as raízes positivas da equação transcendente

$$\lambda_n \tan(\lambda_n W) = H$$

Para valores de $T_1 = 20^\circ C$, $h = 20 \frac{W}{m^2 \cdot C}$, $k = 100 \frac{W}{m \cdot C}$ e $n = 30$ foram simuladas três malhas distintas no número de nós. O lado esquerdo da Figura 22 mostram a distribuição de temperatura para as três malhas, além de evidenciar o comportamento do fluxo de calor. Como é esperado, o fluxo sai da região de maior temperatura indo para a região de menor temperatura, desviando das faces onde a condição de fluxo nulo foram exigidas.

As figuras do lado direito demonstram o erro absoluto em cada ponto do domínio. O código criado conseguiu obter temperaturas bem próximas às da solução analítica, tendo um erro absoluto máximo de $0,044^\circ C$ para a malha com menos nós e convergindo para a temperatura real conforme aumenta o número de nós.

4.1.2 Equação de Calor com geração de calor

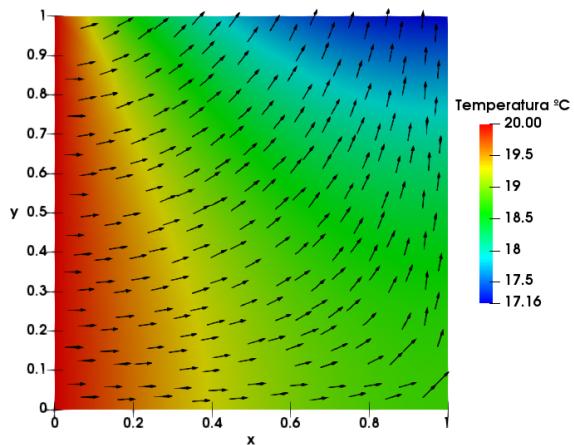
4.1.2.1 Sob condições de contorno de temperatura

O próximo caso a ser considerado é quando existe uma fonte de calor no interior do objeto. Ela pode ser de origem elétrica (efeito Joule), química (através de alguma reação exotérmica ou endotérmica), radioativa, etc.

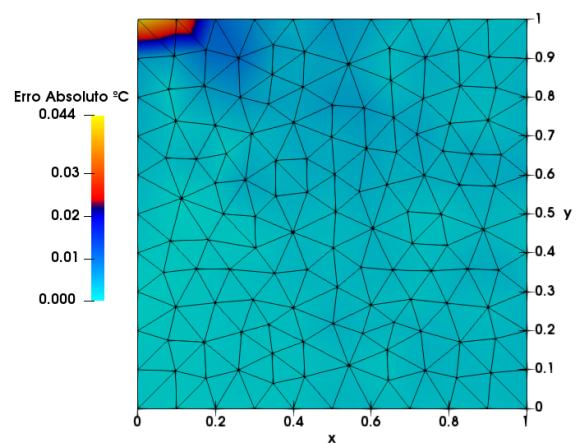
Considerando o mesmo problema da Seção 4.1.1, é adicionada uma fonte de calor Q uniforme na placa onde, consequentemente, uma situação da qual não é possível a aplicação do método da separação de variáveis (EDP não homogênea). Uma maneira de contornar este problema é aplicar o princípio da superposição, onde o problema original é dividido em dois problemas mais simples (Figura 23). A soma das soluções das equações diferenciais lineares será a solução da equação original.

A solução do problema $\nabla^2 T_B = 0$ é muito semelhante a Equação 144, então a

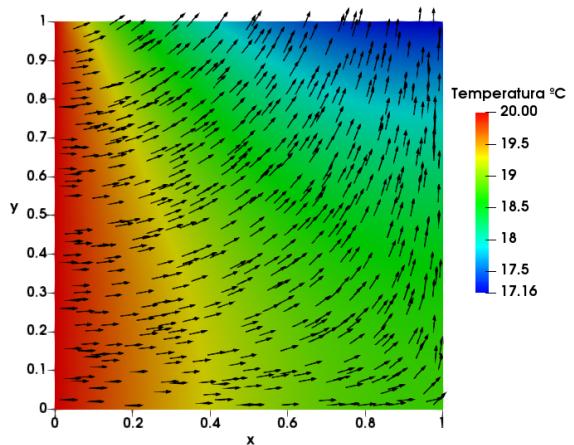
Figura 22 - Simulação sob condição de fluxo de calor por convecção.



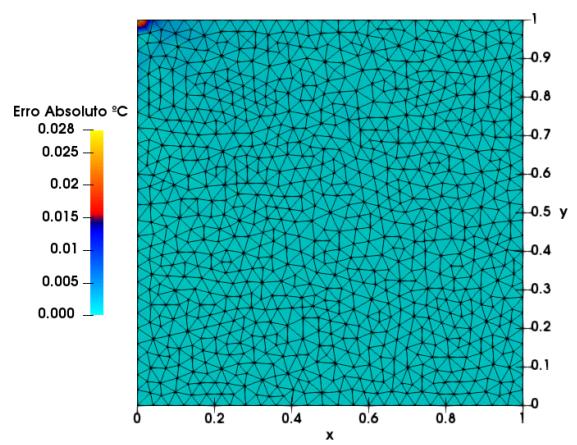
(a) Distribuição de temperatura com 148 nós.



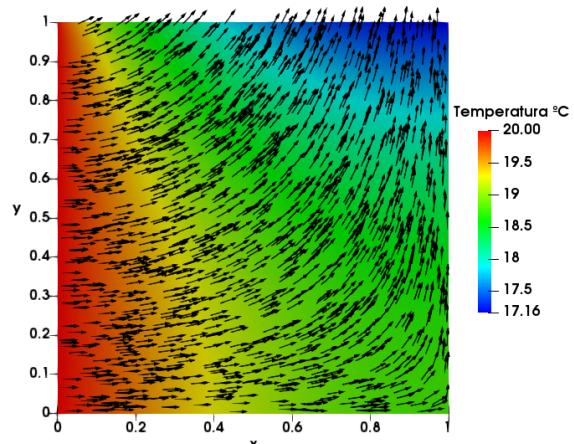
(b) Erro absoluto com 148 nós.



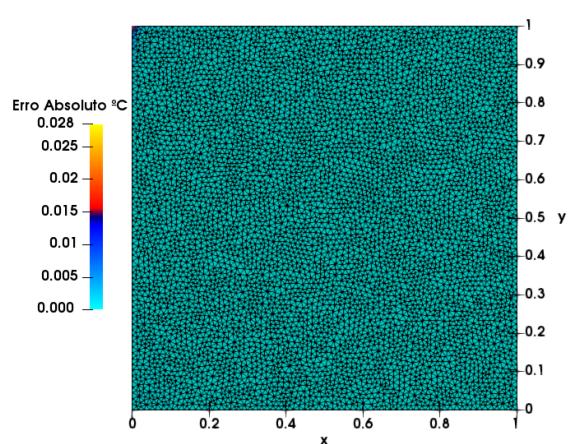
(c) Distribuição de temperatura com 896 nós.



(d) Erro absoluto com 896 nós.



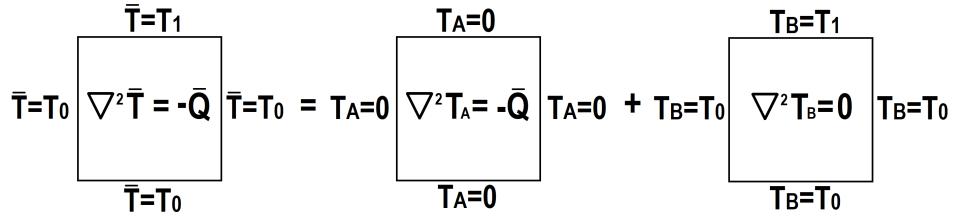
(e) Distribuição de temperatura com 6045 nós.



(f) Erro absoluto com 6045 nós.

Fonte: O autor, 2019

Figura 23 - Esquema do princípio da superposição.



Fonte: O autor, 2019

questão é resolver $\nabla^2 T_A = -\bar{Q}$. Uma das maneiras de resolvê-la é utilizando a Técnica da Transformada Integral Clássica, que é uma extensão do método da separação de variáveis. Segundo Silva et al. (2017), ela consiste em definir um par transformada-inversa para a variável primária (neste caso, para a temperatura) em termos de uma base ortogonal de autofunções, que são obtidos através de problemas auxiliares escolhidos adequadamente.

Fazendo a correta escolha do problema auxiliar e desenvolvendo o raciocínio da técnica, obtém-se a solução do problema $\nabla^2 T_A = -\bar{Q}$ para um para as condições de contorno mostradas na Figura 23 da forma

$$T_A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_1 \exp(\lambda_n y) + C_2 \exp(-\lambda_n y) + \frac{G}{\lambda_n^3} \right) \sin(\lambda_n x), \text{ para } 0 \leq x, y \leq 1 \quad (147)$$

onde

$$C_1 = \frac{-G}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{(\exp(\lambda_n) - 1)}{(\exp(-\lambda_n) - \exp(\lambda_n))} \right),$$

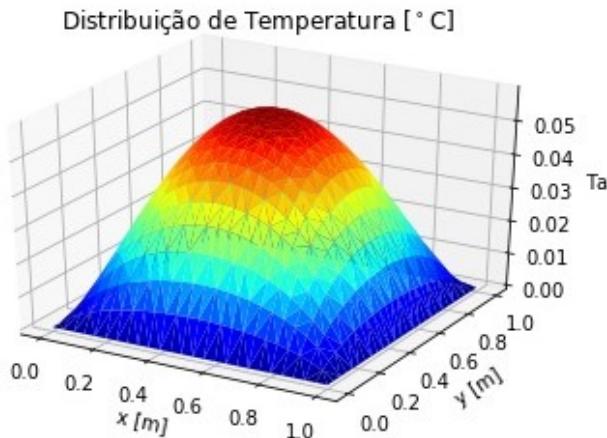
$$C_2 = \frac{G(\exp(\lambda_n) - 1)}{\lambda_n^2(\exp(-\lambda_n) - \exp(\lambda_n))},$$

$$G = \bar{Q} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n} \right),$$

$$\bar{Q} = \frac{\dot{Q}L^2}{k(T_1 - T_0)} \text{ e } \lambda_n = n\pi$$

A Equação 147 é responsável pelo termo da geração de calor no problema original, tendo consigo um perfil parabolóide de temperatura como mostrado na Figura 24

Figura 24 - Perfil de temperatura T_A .



Fonte: O autor, 2019

Com isso, a solução analítica da equação de Poisson $\nabla^2 T = -\bar{Q}$ será:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (T_1 - T_0)(T_A + T_B) + T_0, \text{ onde} \\ T_B(x, y) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n \sinh(\lambda_n)} \right) \sin(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y) \end{aligned}$$

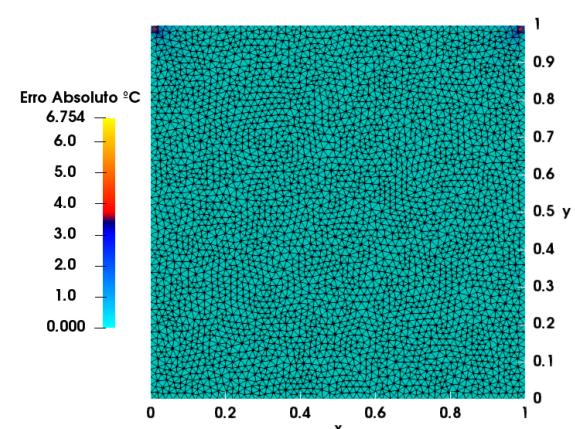
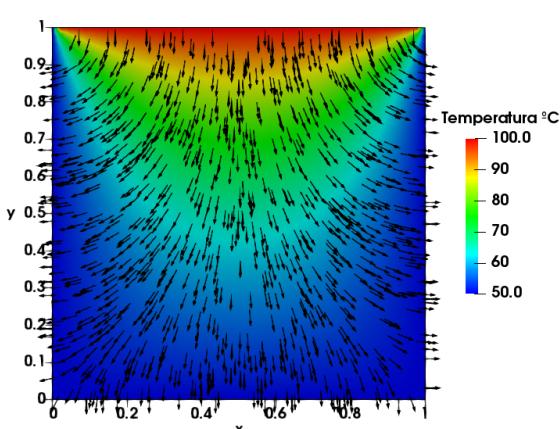
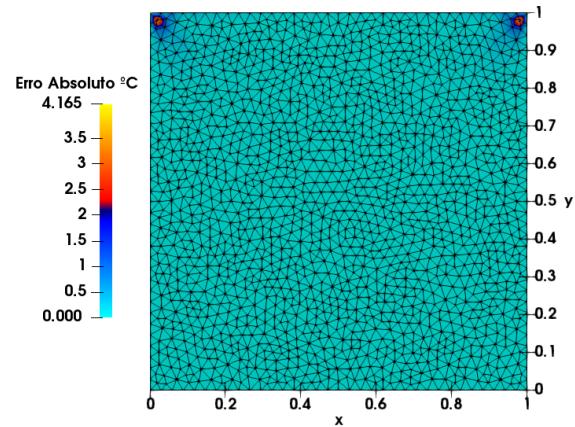
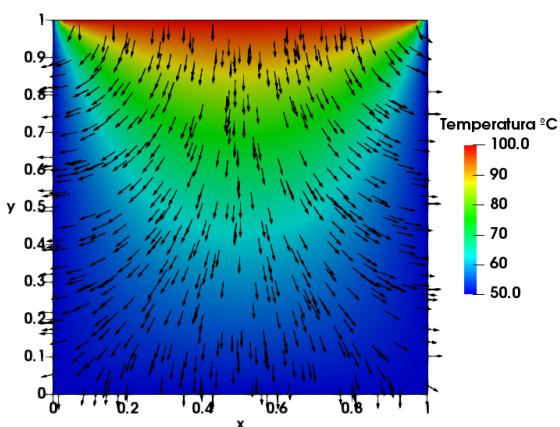
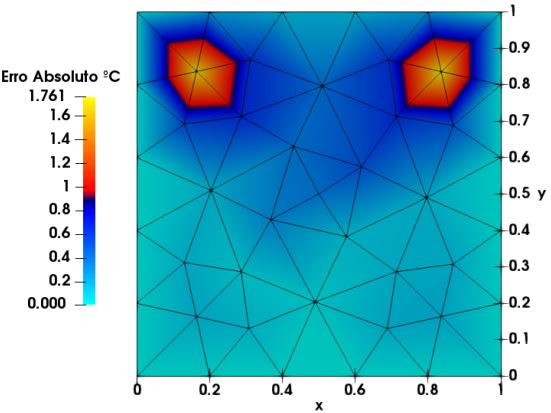
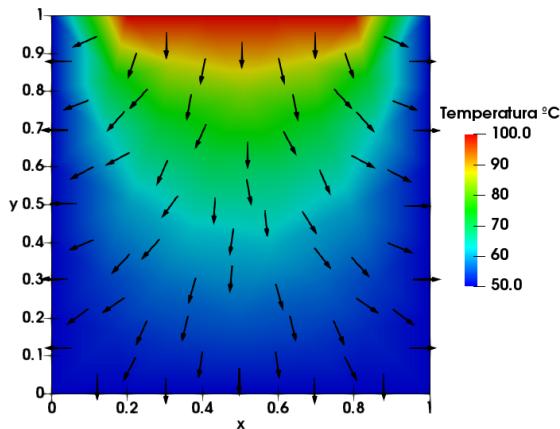
Considerando os valores de $T_0 = 50^{\circ}C$, $T_1 = 100^{\circ}C$, $k = 100 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$, $\dot{Q} = 4000 \frac{W}{m^3}$ e $n = 220$, foram geradas três simulações com as mesmas malhas do problema de Laplace (Seção 4.1.1), mostrados na Figura 25. As regiões onde se concentram os maiores erros são os mesmos do problema de Laplace. No geral, as regiões de maior erro absoluto nas simulações ocorreram nas zonas de maior gradiente da temperatura.

Nas seções subsequentes serão utilizados procedimentos para verificar a convergência e a veracidade do programa criado com o intuito de solucionar problemas estruturais bidimensionais, primeiramente utilizando um procedimento chamado de *Patch Test* e, em seguida, aplicando em alguns problemas clássicos da Resistência dos Materiais.

4.1.3 Patch Test

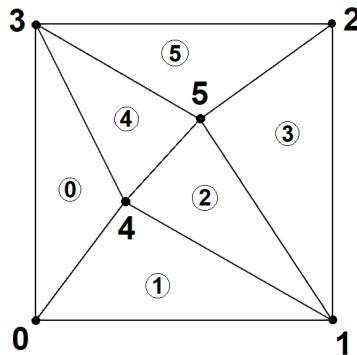
Segundo Logan (2012), o *patch test* pode ser usado para determinar se um elemento finito utilizado na análise satisfaz as exigências de convergência, isto é, o elemento finito deve estar apto a acomodar tanto o movimento de um corpo rígido quanto o estado de tensão constante dentro da estrutura. Um elemento finito que passa pelo teste é capaz de reunir os seguintes requisitos:

Figura 25 - Simulação do problema de Poisson.



Fonte: O autor, 2019

Figura 26 - Modelo do *patch test*.



Fonte: O autor, 2019

1. Prever o movimento de corpo rígido sem deformação, quando este estado existe;
2. Prever estados de deformações constantes, se eles ocorrerem;
3. Compatibilidade com os elementos adjacentes quando o estado de deformação constante existir nos elementos adjacentes;

O teste é realizado aplicando condições de deslocamento, deformação e tensão em um modelo de elemento finito composto por elementos irregulares (triangulares ou quadrangulares) de mesmo material, com pelo menos um nó dentro deste. Neste trabalho, foi utilizado um modelo com seis nós, dois deles no seu interior, e com seis elementos como mostrado na Figura 26. Ele possui lados de dimensões unitárias, espessura igual a 0,1 e as coordenadas do nós 4 e 5 são, respectivamente, (0,3; 0,4) e (0,55357; 0,67857). Seu material possui o módulo de elasticidade E igual a $10^6 Pa$ e o coeficiente de *Poisson* ν igual a 0,3.

Como é resumido no trabalho de Felippa (2003b), a ideia essencial do *patch test* é que *um bom elemento deve resolver problemas simples exatamente*, portanto os problemas resolvidos a seguir possuem seus resultados triviais e o código deve obter exatamente o mesmo valor. No teste do deslocamento, os nós no contorno (nós 0, 1, 2 e 3) tiveram seus deslocamentos definidos como: Caso 1 - unitário na direção x e nulo na direção y , Caso 2 - nulo na direção x e unitário na direção y e Caso 3 - unitário em ambas as direções. O que se espera é que os deslocamentos dos nós no interior do modelo acompanhem os deslocamentos dos nós no contorno e, consequentemente, a tensão/deformação deve ser nula.

A Tabela 2 mostra o resultado dos três casos gerados. A tabela à esquerda indica a numeração dos nós e seus respectivos deslocamentos e as suas coordenadas depois da simulação. Já à direita demonstra a numeração dos elementos e suas respectivas de-

Tabela 2 - *Patch test* de deslocamento.

	Nó	Deslocamento		Posição		Elem.	Deformação			Tensão		
		x	y	x	y		ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
Caso 1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
	2	1	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0
	3	1	0	1	1	3	0	0	0	0	0	0
	4	1	0	1,3	0,4	4	0	0	0	0	0	0
	5	1	0	1,55357	0,67857	5	0	0	0	0	0	0
Caso 2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0
	3	0	1	0	2	3	0	0	0	0	0	0
	4	0	1	0,3	1,4	4	0	0	0	0	0	0
	5	0	1	0,55357	1,67857	5	0	0	0	0	0	0
Caso 3	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	1	1	2	2	2	0	0	0	0	0	0
	3	1	1	1	2	3	0	0	0	0	0	0
	4	1	1	1,3	1,4	4	0	0	0	0	0	0
	5	1	1	1,55357	1,67857	5	0	0	0	0	0	0

Fonte: O autor, 2019

Tabela 3 - *Patch test* de deformação.

Nó	Deslocamento		Posição		Elem.	Deformação			Tensão			
	x	y	x	y		ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	
Caso 1	0	0	0	0	0	-3,30e-11	7,72e-9	1,1e+6	3,3e+5	2,97e-3		
	1	1	0	2	1	5,74e-9	-4,11e-8	1,1e+6	3,3e+5	-1,58e-2		
	2	1	0	2	1	3,83e-9	8e-9	1,1e+6	3,3e+5	3,08e+2		
	3	0	0	1	3	-4,1e-11	-6,93e-9	1,1e+6	3,3e+5	-2,67e-3		
	4	0,3	2e-9	0,6	0,4	-1,497e-9	7,38e-8	1,1e+6	3,3e+5	2,84e+2		
	5	0,553571	3e-9	1,10714	0,67857	-9,72e-9	-7,43e-8	1,1e+6	3,3e+5	-2,86e+2		
Caso 2	0	0	0	0	0	1,03e-9	1	-4,06e-8	3,3e+5	1,1e+6	-1,56e-2	
	1	0	0	1	0	-3,9e-11	1	8,4e-10	3,3e+5	1,1e+6	3,2e-4	
	2	0	1	1	2	1,47e-9	1	6,8e-8	3,3e+5	1,1e+6	2,62e-2	
	3	0	1	0	2	-3,76e-9	1	-6,08e-8	3,3e+5	1,1e+6	-2,34e-2	
	4	0	0,4	0,3	0,8	3,76e-9	1	8,71e-8	3,3e+5	1,1e+6	3,35e+2	
	5	2e-9	0,678571	0,55357	1,35714	-3,50e-11	1	-5,16e-9	3,3e+5	1,1e+6	-1,98e-3	
Caso 3	0	0	0	0	0	0	-7,35e-9	4,99e-12	1	-8,07e-3	-2,42e-3	3,85e+5
	1	0	0	1	0	1,27e-11	-1,23e-8	1	-4,03e-3	-1,35e-2	3,85e+5	
	2	1	0	2	1	1,73e-8	2,17e-8	1	2,62e-2	2,95e-2	3,85e+5	
	3	1	0	1	1	-2,03e-8	1,05e-11	1	-2,24e-2	-6,7e-3	3,85e+5	
	4	0,4	-5e-9	0,7	0,4	2,61e-8	1,92e-8	1	3,51e-2	2,97e-2	3,85e+5	
	5	0,678571	6e-9	1,23214	0,67857	2,86e-12	-1,88e-8	1	-6,18e-3	-2,06e-2	3,85e+5	

Fonte: O autor, 2019

formações e tensões.

Como esperado, os nós 4 e 5 se deslocaram conforme a condição de contorno atribuída aos nós no contorno do modelo e tanto a deformação quanto a tensão no interior deste é nula, já que não existe nenhuma restrição de deslocamento.

No *patch test* de deformação, é verificado se o modelo pode representar o estado de deformação constante e já que as funções de deslocamento para o presente trabalho são lineares, a deformação em cada elemento tem que ser constante. Contudo, não existe no programa uma opção aplicando uma condição de contorno de deformação e, portanto, foi realizado o seguinte procedimento:

Caso 1 - restringe-se o deslocamento dos nós 0, 3 e aplica-se um deslocamento unitário na direção positiva de x nos nós 1 e 2, a fim de obter uma deformação unitária ϵ_x ;

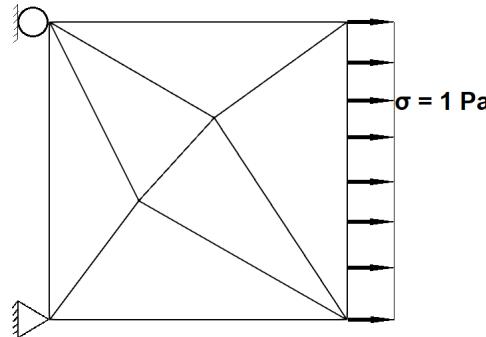
Caso 2 - restringe-se o deslocamento dos nós 0, 1 e aplica-se um deslocamento unitário na direção positiva de y nos nós 2 e 3, a fim de obter uma deformação unitária ϵ_y ;

Caso 3 - restringe-se o deslocamento dos nós 0, 1 e aplica-se um deslocamento unitário na direção positiva de x nos nós 2 e 3, a fim de obter uma deformação de cisalhamento γ_{xy} ;

Devido a deformação ser unitária dentro de cada elemento, o deslocamento de cada nó, na direção da deformação aplicada, deve então ser igual a própria coordenada do nó e isto é apresentado para cada caso na Tabela 3.

Por último, é aplicado o *patch test* de força pelo qual, segundo Logan (2012), verifica que o erro associado com as cargas aplicadas não ocorrem. O teste funciona da

Figura 27 - Caso 1 do *patch test* de força.



Fonte: O autor, 2019

seguinte forma: Aplica-se uma tensão unitária em um dos lados do modelo e restrições de deslocamento são impostas o suficiente para evitar o movimento deste, a Figura 27 ilustra o esquema para o caso 1. Semelhante ao *patch test* anterior, uma tensão uniforme e unitária deve ser obtida dentro de cada elemento e as outras componentes de tensão devem ser nulas.

Os resultados obtidos para $\sigma_x = 1 \text{ Pa}$ (caso 1), $\sigma_y = 1 \text{ Pa}$ (caso 2) e $\gamma_{xy} = 1 \text{ Pa}$ (caso 3) são apresentados na Tabela 4. Como era de se esperar, a tensão dentro de cada elemento permanece constante e unitária. Além da deformação na mesma direção da tensão aplicada, uma deformação transversal à carga aplicada é gerada devido ao efeito de *Poisson* e seus valores estão de acordo com a lei de Hooke, como é mostrado a seguir.

Da Equação 100, pode-se calcular as deformações em função das tensões aplicadas. Por exemplo, para a situação onde $\sigma_x = 1 \text{ Pa}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{10^6} (1 - 0,3 \times 0) = 10^{-6} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{10^6} (0 - 0,3 \times 1) = 3 \times 10^{-7} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0}{G} = 0\end{aligned}$$

Tendo em vista que o elemento finito utilizado neste trabalho alcançou os resultados esperados no *patch test*, é garantido de que a malha contendo este elemento alcançará a convergência para a solução conforme esta é continuamente refinada. Para reforçar esta afirmação, são realizadas outras simulações de problemas estruturais com soluções analíticas conhecidas.

Tabela 4 - *Patch test* de força.

	Nó	Deslocamento		Posição		Elem.	Deformação			Tensão		
		x	y	x	y		ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
Caso 1	0	0	0	0	0	0	1e-6	-3e-7	2,96e-14	1	0	0
	1	1e-6	0	1	0	1	1e-6	-3e-7	-3,9e-14	1	0	0
	2	1e-6	-3e-7	1	1	2	1e-6	-3e-7	4,83e-14	1	0	0
	3	0	-3e-7	0	1	3	1e-6	-3e-7	-1,02e-15	1	0	0
	4	3e-7	-1,2e-7	0,3	0,4	4	1e-6	-3e-7	6,19e-14	1	0	0
	5	5,54e-7	-2,04e-7	0,55375	0,67857	5	1e-6	-3e-7	-6,76e-14	1	0	0
Caso 2	0	3e-7	0	0	0	0	-3e-7	1e-6	-4,75e-14	0	1	0
	1	0	0	1	0	1	-3e-7	1e-6	1,91e-14	0	1	0
	2	0	1e-6	1	1	2	-3e-7	1e-6	5,42e-14	0	1	0
	3	3e-7	1e-6	0	1	3	-3e-7	1e-6	-5,65e-14	0	1	0
	4	2,1e-7	4e-7	0,3	0,4	4	-3e-7	1e-6	5,3e-14	0	1	0
	5	1,34e-7	6,79e-7	0,55357	0,67857	5	-3e-7	1e-6	1,02e-14	0	1	0
Caso 3	0	0	0	0	0	0	-2,2e-14	1,3e-17	2,6e-6	0	0	1
	1	0	2,6e-6	1	0	1	3,29e-17	-3,59e-14	2,6e-6	0	0	1
	2	0	2,6e-6	1	1	2	4,56e-14	4,89e-14	2,6e-6	0	0	1
	3	0	0	0	1	3	-5,05e-14	-1,05e-14	2,6e-6	0	0	1
	4	0	7,8e-7	0,3	0,4	4	6,65e-14	4,84e-14	2,6e-6	0	0	1
	5	0	1,44e-6	0,55357	0,67857	5	7,44e-18	-5,41e-14	2,6e-6	0	0	1

Fonte: O autor, 2019

4.1.4 Força de corpo

No caso de problemas estáticos onde existe apenas forças de corpo distribuídas, a força gravitacional é a única força atuante no objeto. Considere uma chapa de 1 metro de largura e 5 metros de comprimento engastada na parte superior.

Pela equação do equilíbrio (Equação 12), as forças internas agindo nas áreas geram, no limite, o equilíbrio do ponto material. Para este caso, tem-se que:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g = 0 \quad (148)$$

considerando que as outras componentes de tensões serão nulas (σ_x e τ_{xy}). Essa equação diferencial é resolvida por integração direta como

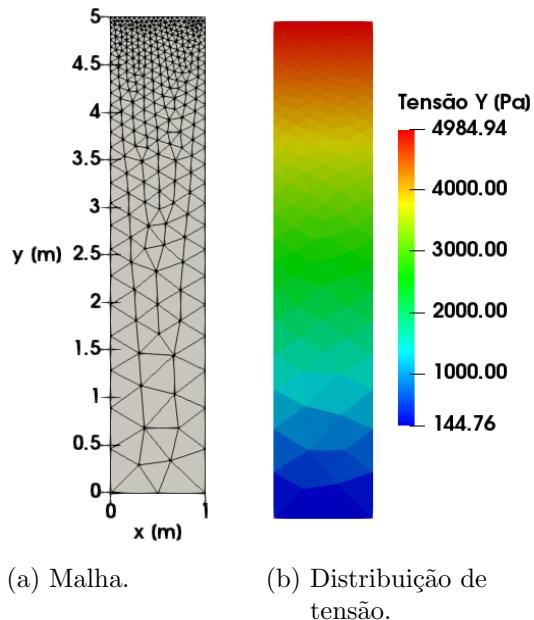
$$\sigma_y = \rho g y + constante \quad (149)$$

sob a seguinte condição de contorno:

$$\sigma_y = 0 \text{ em } y = 0 \quad (150)$$

o que implica que a constante é nula. Para simplicidade do problema, considere que $\rho g = 1000 \frac{N}{m^3}$ e $E = 10^6 Pa$. No engaste, o valor da tensão normal será máxima e igual

Figura 28 - Malha da chapa com 526 elementos.



Fonte: O autor, 2019

a

$$\sigma_y = 1000 \times 5 = 5000 \text{ Pa.} \quad (151)$$

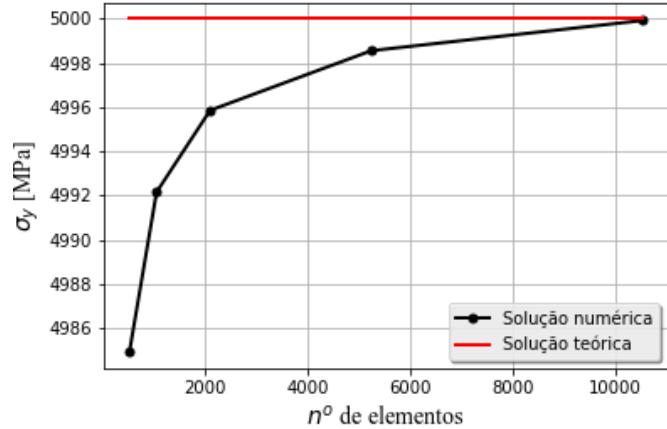
Foram realizadas cinco simulações onde a quantidade de nós na região engastada variou (região de interesse). A Figura 28 exemplifica uma malha contendo 526 elementos e 301 nós, dentre os quais 21 nós estão localizados em $y = 5 \text{ m}$. O gráfico da Figura 29 demonstra que o contínuo refinamento da malha faz com que a solução numérica converja para a solução teórica, como dito anteriormente na Seção 4.1.3.

4.1.5 Chapa com furo circular

Uma outra aplicação do código *estrutural.py* é o cálculo de tensões máximas em geometrias com concentradores de tensões. Segundo Pilkey e Pilkey (2008), a presença de filetes de rebaixo, rasgos de chaveta, furos, ranhuras, etc., resultam na modificação da distribuição de tensões nos elementos, isto é, aumentam o valor da tensão nestas regiões.

O concentrador de tensão é medido pelo *fator de concentração de tensão* K_t que é definido pela razão entre a tensão máxima e a tensão média. Contanto que K_t seja conhecido e a tensão média seja calculada por $\sigma_{med} = \frac{P}{A}$, onde A é a menor área de seção

Figura 29 - Força peso - solução teórica X solução numérica.



Fonte: O autor, 2019

transversal, então a tensão máxima na seção transversal será

$$\sigma_{max} = K_t \frac{P}{A} \quad (152)$$

Considere uma chapa retangular com 30 cm de comprimento, 10 cm de altura, espessura de 1 cm e com um furo central de 3 cm de diâmetro. Uma tensão normal igual a 10 MPa é aplicada nas laterais da chapa. Para calcular a tensão média, primeiramente deve-se saber o valor da força aplicada P . Dito isso, a tensão média pode ser calculada como

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma A_T}{A} = \frac{\sigma (Ht)}{(H - d)t} \quad (153)$$

onde $\sigma = 10 \text{ MPa}$, H é a altura, t é a espessura da chapa e d é o diâmetro do furo.

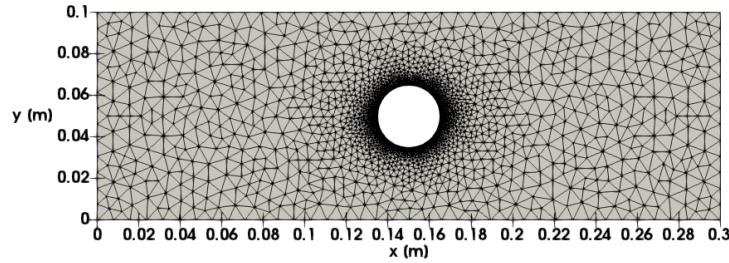
A fórmula de K_t para esta situação, segundo (PILKEY; PILKEY, 2008), é

$$K_t = 2 + 0,284 \left(1 - \frac{d}{H}\right) - 0,6 \left(1 - \frac{d}{H}\right)^2 + 1,32 \left(1 - \frac{d}{H}\right)^3 \quad (154)$$

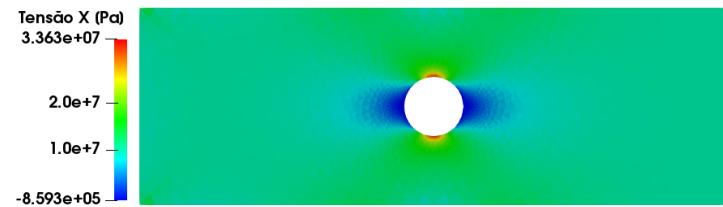
e o seu valor para os dados conhecidos de H e d é, portanto, 2,3576. Logo, a tensão máxima calculada será de 33,6799 MPa, valor que será utilizado como referência nas simulações a seguir.

Para este problema, foram simulados 7 malhas das quais a quantidade de nós na borda do furo é maior do que no restante da chapa, já que é de conhecimento prévio que a tensão máxima ocorrerá nesta região. Um exemplo da malha é mostrada na Figura 30,

Figura 30 - Simulação sob tensão constante.



(a) Malha com 6130 elementos.



(b) Distribuição de tensão.

Fonte: O autor, 2019

juntamente com a distribuição de tensão.

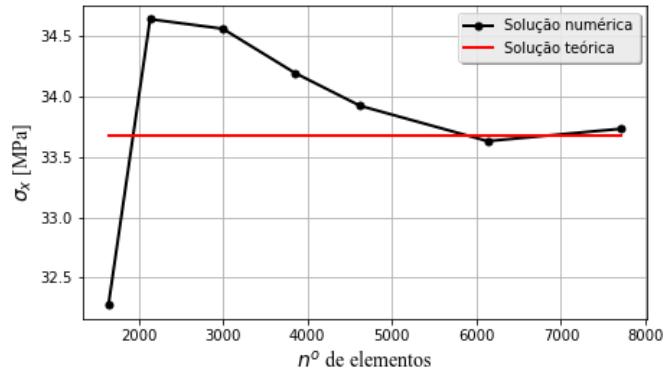
A Figura 31 demonstra o progresso da solução numérica ao passo que o número de elementos aumenta. Mesmo que a convergência não ocorra da mesma maneira que a da Figura 29, a solução numérica tende continuamente para a solução teórica, como previsto na Seção 4.1.3.

Depois de validado os códigos *termico.py* e *estrutural.py*, é construído o código *híbrido.py* que, além de calcular as mesmas variáveis que os dois códigos anteriores, calcula a distribuição de tensões devido à variação de temperatura. A sua construção se deve pela união de partes dos códigos verificados anteriormente e, portanto, não serão realizados os mesmos testes para o *híbrido.py*.

4.1.6 Tensões térmicas

Nesta seção será verificada a eficiência do novo código para a obtenção da distribuição de tensões devido à diferença de temperatura. No primeiro teste será utilizado uma chapa com dimensões $0,254 \times 0,102 \times 0,006\text{ m}$, sob condições de deslocamento nulo e temperatura de $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ nas laterais e condição de fluxo de calor nula nas faces superior e inferior. A temperatura inicial é de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. O material da chapa possui um módulo de elasticidade E igual a 207 GPa , coeficiente de expansão térmica $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ e

Figura 31 - Chapa com furo - solução teórica X solução numérica.



Fonte: O autor, 2019

coeficiente de *Poisson* de 0,292.

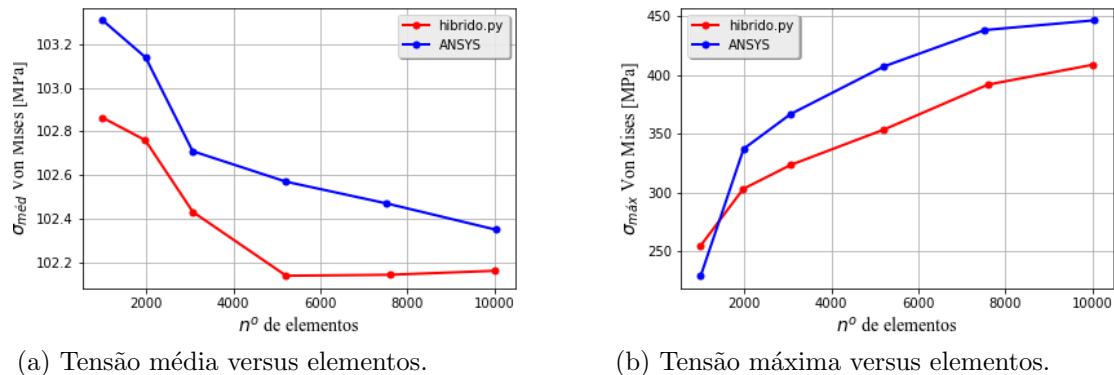
Por se tratar de um problema mais complexo, foi utilizada a ferramenta de análise *ANSYS Workbench* como uma fonte de comparação de resultados. O *ANSYS* é um programa de simulação de problemas em engenharia, envolvendo análise estrutural, fluidodinâmica, eletromagnética e multifísica (ESSS, 2017). Ele também utiliza o MEF como forma de solucionar os problemas, portanto a porcentagem relativa à diferença dos resultados obtidos pelo *ANSYS* e pelo *híbrido.py* será denominada de "diferença relativa".

4.1.6.1 Numa chapa plana com gradiente de temperatura constante

Foram realizadas seis simulações, tanto no *ANSYS* quanto no código *híbrido.py*, onde a quantidade de elementos na malha variou entre 998 e 10000. A Figura 32 mostra o progresso da tensão média e máxima nos dois programas onde, na última simulação, o diferença relativa da tensão média é de 0,185% e a diferença relativa da tensão máxima é de 8,435%. A magnitude desta diferença da tensão máxima se deve pelo fato da imprecisão do *híbrido.py* próxima às regiões de mudança de condição de contorno, como também relatado nos problemas térmicos. Além disso, a ferramenta *ANSYS Workbench* calcula as deformações e tensões dentro do elemento utilizando pontos de integração, diferente ao modo do código *híbrido.py*, de modo que os resultados das variáveis secundárias terão uma melhor precisão mesmo escolhendo um elemento triangular linear no pré processamento.

Na malha com 10000 elementos, foram obtidos os valores das tensões de Von Mises em quatro pontos aleatórios da malha, a fim de verificar a convergência dos resultados

Figura 32 - Tensão de Von Mises no *ANSYS* e no *híbrido.py*.



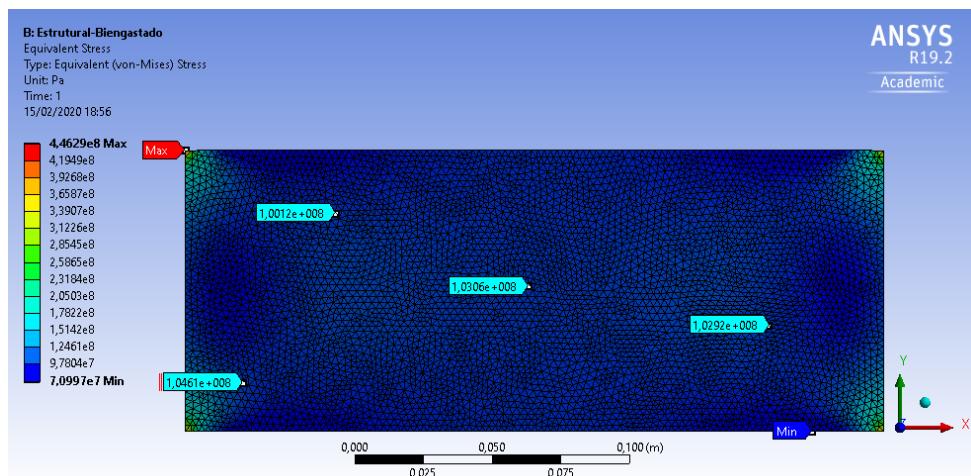
Fonte: O autor, 2019

Tabela 5 - Tensão de Von Mises na malha com 10000 elementos.

x (m)	y (m)	ANSYS (MPa)	híbrido.py (MPa)	Diferença (%)
0,0209	0.0176	104,61	106,25	-1,568
0,0548	0,0791	100,12	101,147	-1,026
0,1247	0,0527	103,06	103,132	-0,0698
0,2122	0,03847	102,92	103,2	-0,272

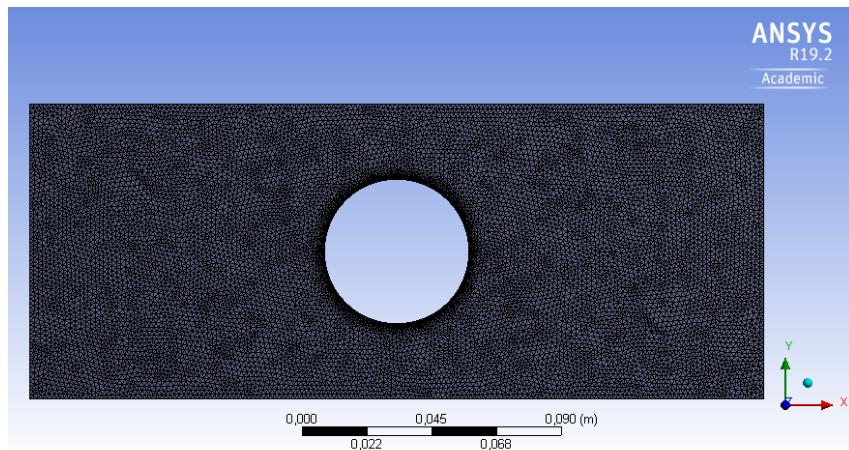
Fonte: O autor, 2019

Figura 33 - Tensão de Von Mises nos pontos selecionados.



Fonte: O autor, 2019

Figura 34 - Malha refinada no *Ans*ys.



Fonte: O autor, 2019

entre os dois programas. Os dados disponíveis na Tabela 5 mostram que as tensões foram próximas nos pontos selecionados, tendo como o ponto de maior diferença relativa àquele próximo ao vértice da chapa, como mostra a Figura 33.

4.1.6.2 Numa chapa furada com gradiente de temperatura variado

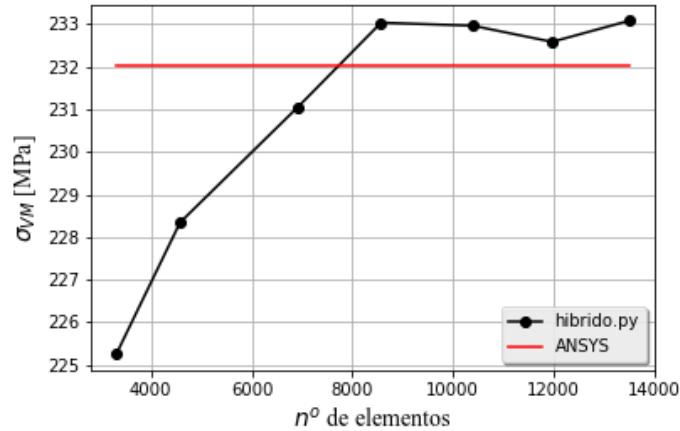
Neste segundo teste será utilizado a mesma chapa do teste anterior, só que com um furo passante no centro desta, com um diâmetro de $0,03\text{ m}$. Além disso, as condições de temperatura constante no lado esquerdo e direito serão, respectivamente, de $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $38\text{ }^{\circ}\text{C}$. As demais superfícies são isoladas termicamente. Antes de colocar a chapa entre as paredes, a temperatura inicial desta era de $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Estas condições térmicas geram um perfil linear de temperatura na direção do eixo x , consequentemente as deformações térmicas variarão linearmente na direção x . Devido à restrição de sua expansão, a chapa sofrerá tensões térmicas de diferentes magnitudes em cada seção transversal, diferentemente da situação onde a chapa com furo central foi submetida a uma tensão constante. Com isso, seria inviável obter uma solução analítica da mesma maneira que foi o problema da Seção 4.1.5.

Gerou-se uma malha no *ANSYS* com 24906 elementos triangulares e 12870 nós distribuídos sobre a chapa (Figura 34), sendo esta refinada na borda do furo, e a partir desta malha foram retiradas as informações sobre o deslocamento e a tensão de Von Mises em volta do furo para serem usadas como parâmetro de resultado.

Com o código *híbrido.py*, foram gerados sete simulações onde o número de elementos variou ao longo da borda do furo entre 30 (3312 elementos no total) e 360 (13494

Figura 35 - Convergência da tensão de Von Mises na região do furo.

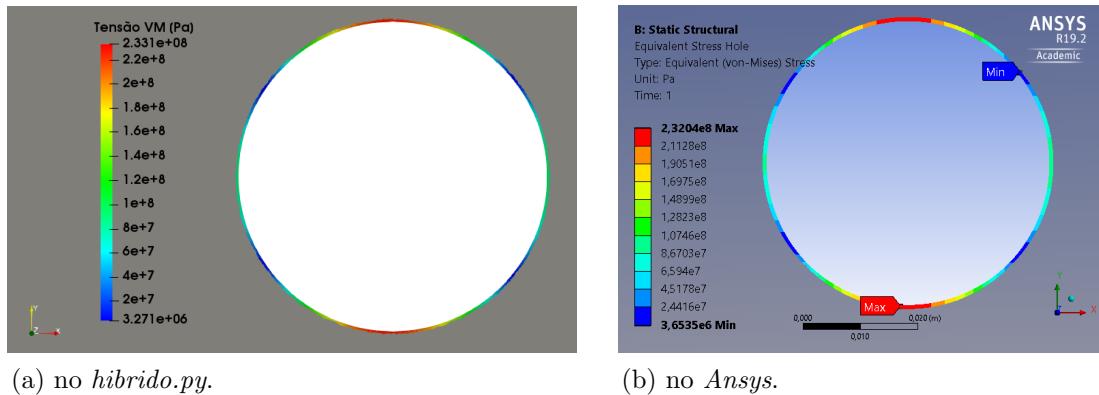


Fonte: O autor, 2019

elementos no total). A convergência da tensão máxima no furo, pelo critério de Von Mises, é mostrada na Figura 35. A tensão obtida pelo código aumenta conforme é acrescido o número de elementos, até 8572 elementos. Depois disso, ocorre pequenas oscilações no valor da tensão até 13494 elementos, onde a diferença relativa é de 0,4568 %. A Figura 36 mostra o perfil de tensão ao longo da borda do furo nesta malha.

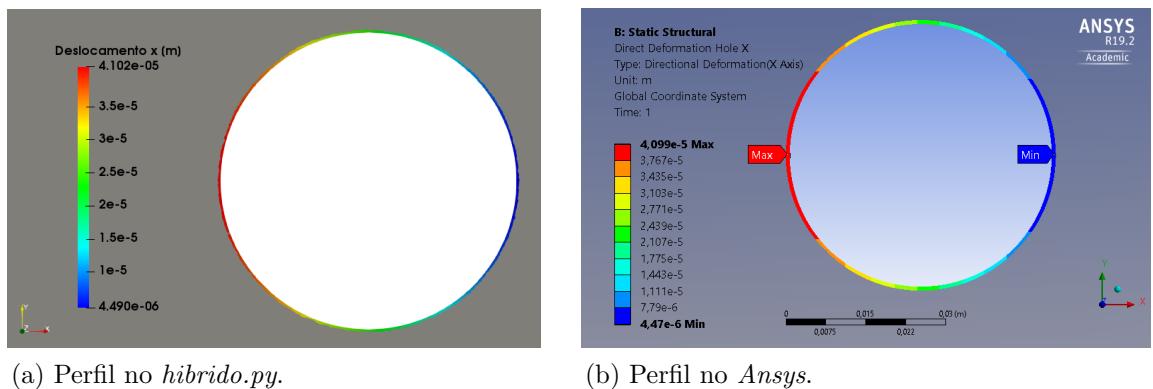
Da mesma forma, o valor do deslocamento dos nós no contorno do furo tendeu para os resultados obtidos pelo programa *Ansys*. As Figuras 37 e 38 comparam o perfil de deslocamento na direção *x* e *y*, do qual a diferença relativa, tanto para o valor máximo quanto para o valor mínimo, é menor do que 1 %, na malha com 13494 elementos.

Figura 36 - Perfil de tensão de Von Mises.



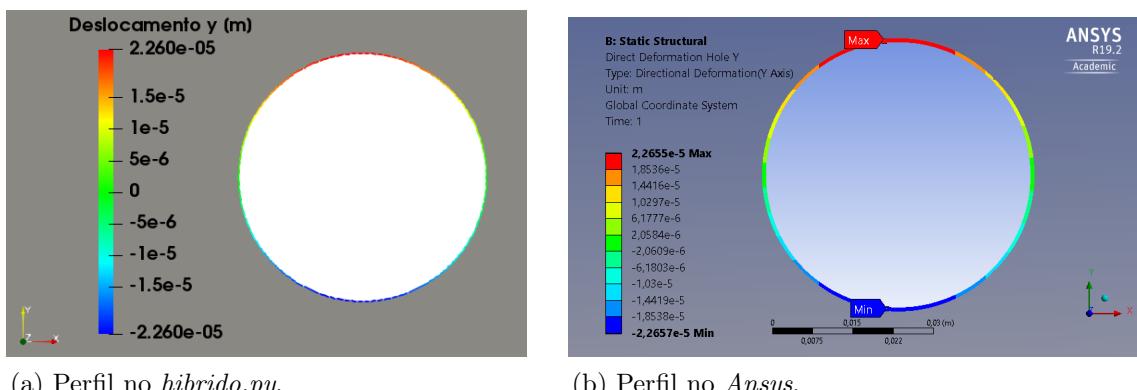
Fonte: O autor, 2019

Figura 37 - Perfil de deslocamento na direção x na malha com 13494 elementos.



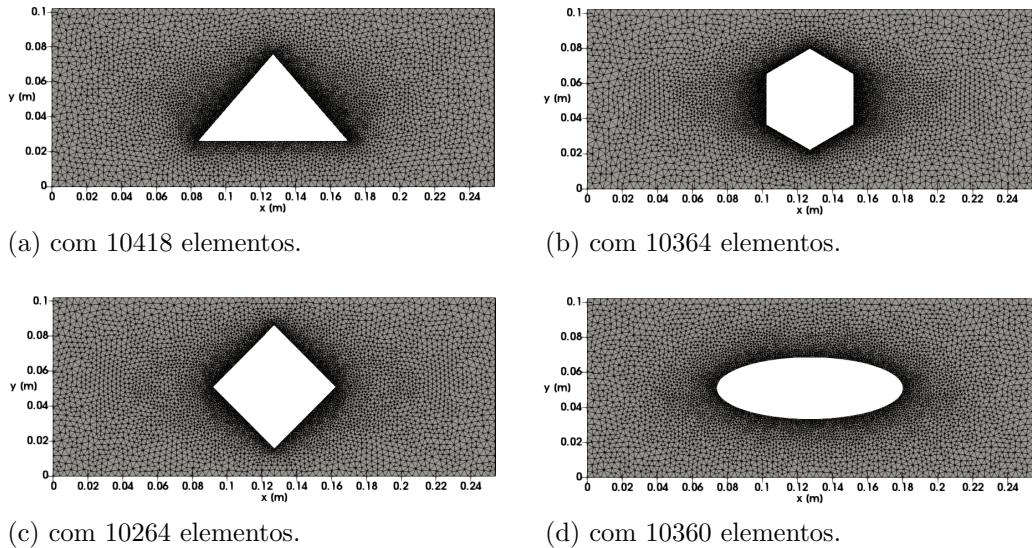
Fonte: O autor, 2019

Figura 38 - Perfil de deslocamento na direção y na malha com 13494 elementos.



Fonte: O autor, 2019

Figura 39 - Malhas com diferentes concentradores de tensões.



Fonte: O autor, 2019

4.2 Estudo de caso

Nesta seção será investigada o efeito de concentradores de tensões de diferentes formas geométricas, sujeitos às tensões térmicas de compressão.

A chapa e as condições de contorno são as mesmas utilizadas na seção anterior (Seção 4.1.6.2) e, como referência de resultados, foram utilizados os valores obtidos na malha com 10396 elementos (240 elementos na borda do furo), malha na qual a tensão de Von Mises foi próxima ao do programa *ANSYS*.

Foram escolhidas quatro formas geométricas para representar um concentrador de tensão com um diâmetro equivalente (diâmetro hidráulico) ao do furo circular da Seção 4.1.6.2. Os modelos com esses concentradores estão dispostos na Figura 39, juntamente com a malha. As malhas não possuem a mesma quantidade de elementos no seu domínio, no entanto foi mantido o mesmo número de elementos na borda do furo semelhante ao modelo de referência.

A distribuição de temperatura (à esquerda) e de deslocamentos dos nós (à direita) em cada chapa estão apresentadas na Figura 40. O formato dos furos não desfigura o perfil da temperatura no seu entorno, existem apenas pequenas variações desta nas laterais do furo, mais perceptíveis no rasgo quadrangular.

Nas figuras que representam o perfil de deslocamento, foram adicionadas setas escuras que evidenciam o sentido de deslocamento dos nós. Com exceção do furo triangular, o perfil de deslocamento de todos os concentradores são simétricos em relação ao eixo x , como consequência da simetria do próprio concentrador. Outro detalhe a salientar é que as regiões de maior deslocamento ocorrem nos polos e à esquerda do furo, fazendo com

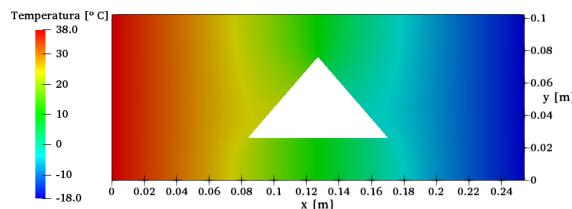
que este fique mais estreito na direção x . No entanto, o concentrador elíptico não permite tal comportamento, fazendo com que as áreas de maior deslocamento sejam nas bordas da chapa, acima e abaixo do furo.

Com relação à distribuição da tensão de Von Mises na chapa (Figuras 41b, 41d, 41f, 41h e 41j), é possível visualizar que os concentradores de tensões com formato hexagonal, triangular e quadrático geram tensões no seu entorno acima da tensão que é gerada nos vértices da chapa no lado esquerdo, devido ao alto gradiente de temperatura que é imposto. Particularmente na região do furo, estes concentradores produziram tensões, no mínimo, 142 % acima da tensão de referência (tensão de Von Mises máxima no furo circular), isso se deve ao fato da mudança de seção nestes concentradores de tensões serem mais bruscas.

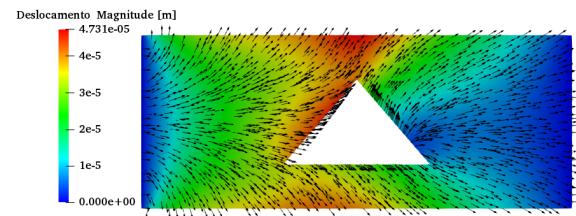
Por outro lado, o furo de seção elíptica obteve a menor tensão máxima de Von Mises dentre todas, 40,8568 % a menos do que a tensão de referência. Isso ocorre por causa da suave variação de seção na direção do eixo x , fato que não ocorreria se o eixo maior da elipse estivesse coincidindo com o eixo y da chapa.

Foram gerados também gráficos que representam o progresso da tensão de Von Mises (Figura 42) nos eixos horizontal e vertical, que se cruzam no centro da chapa, como é mostrado nas Figuras 41b, 41d, 41f, 41h e 41j. Exceto pelo furo triangular, é possível perceber um certo padrão entre os gráficos, em ambas as direções. No sentido crescente do eixo x , a tensão decresce até chegar na região próxima ao concentrador de tensão, fazendo com que a tensão cresça de forma acentuada. Passando pelo furo, a tensão decresce intensamente e sobe até um certo valor do qual é próxima à tensão sem o concentrador. Na direção y , a tensão cresce de maneira exponencial até o seu valor máximo (apresentados nas Figuras 41a, 41c, 41e e 41i) e decresce da mesma forma. No entanto, a curva da tensão no furo elíptico tende a ser mais linear do que as outras curvas, provavelmente provocado formato da seção deste.

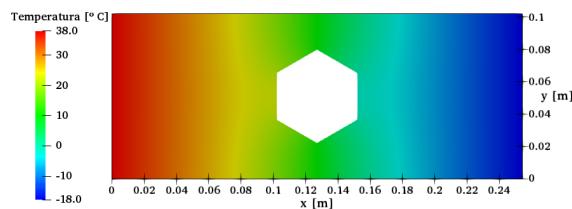
Figura 40 - Distribuição de temperatura e de deslocamento nos nós com diferentes concentradores de tensões.



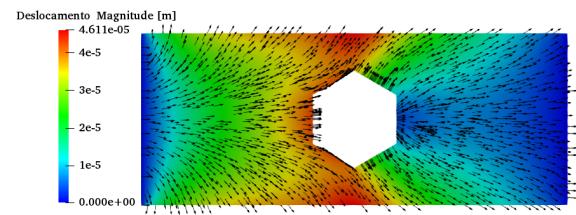
(a) furo triangular.



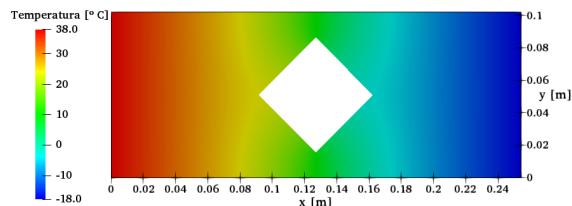
(b) furo triangular.



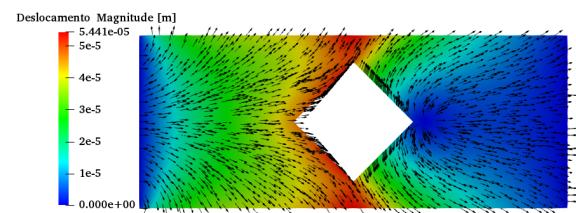
(c) furo hexagonal.



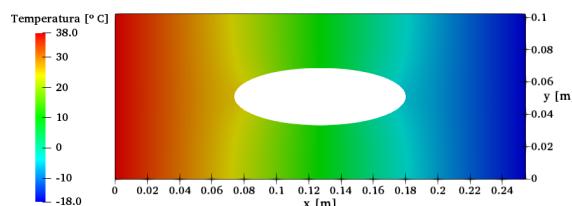
(d) furo hexagonal.



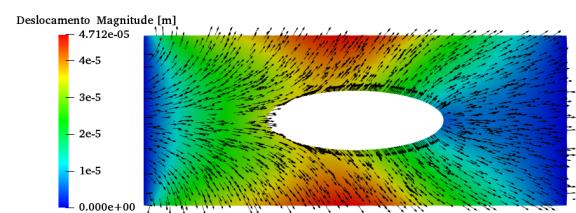
(e) furo quadrangular.



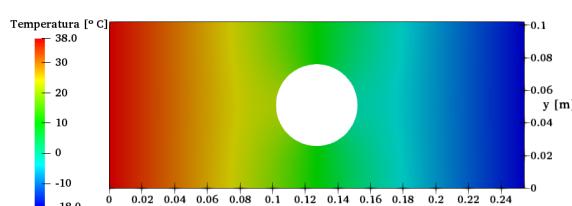
(f) furo quadrangular.



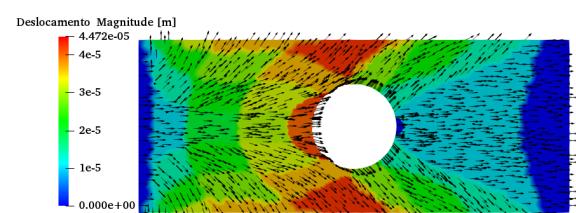
(g) furo elíptico.



(h) furo elíptico.



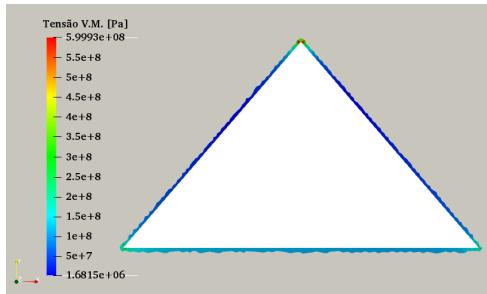
(i) furo circular.



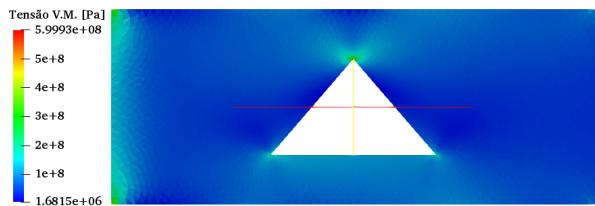
(j) furo circular.

Fonte: O autor, 2019

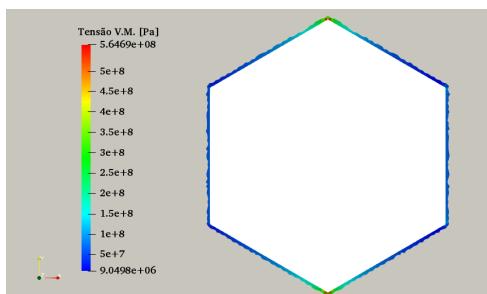
Figura 41 - Distribuição de tensões no furo e na chapa.



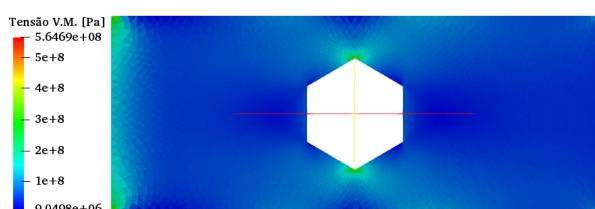
(a) furo triangular.



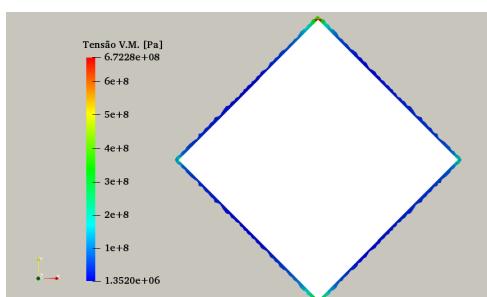
(b) furo triangular.



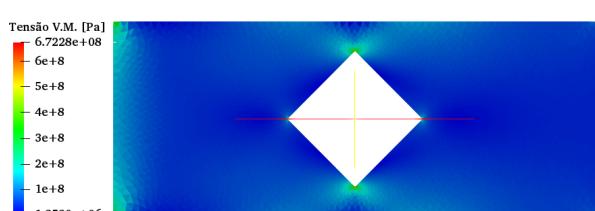
(c) furo hexagonal.



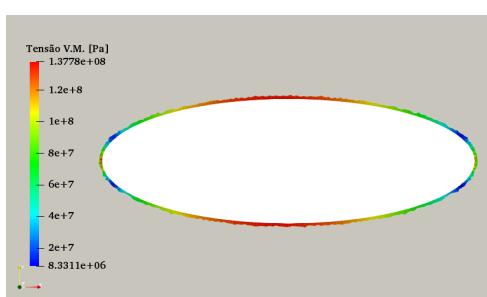
(d) furo hexagonal.



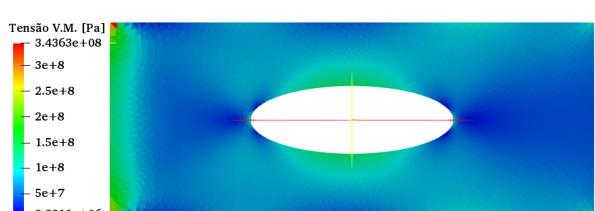
(e) furo quadrangular.



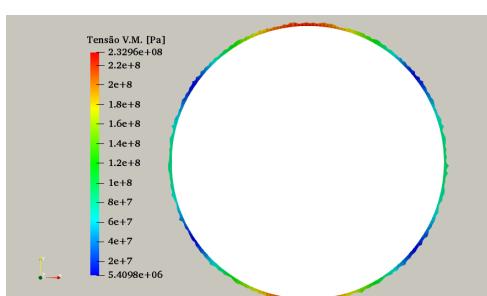
(f) furo quadrangular.



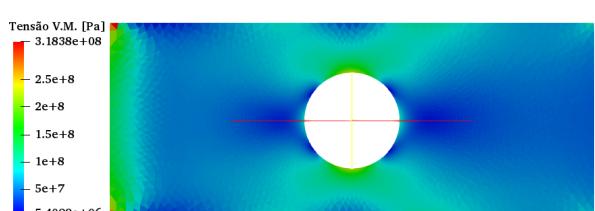
(g) furo elíptico.



(h) furo elíptico.

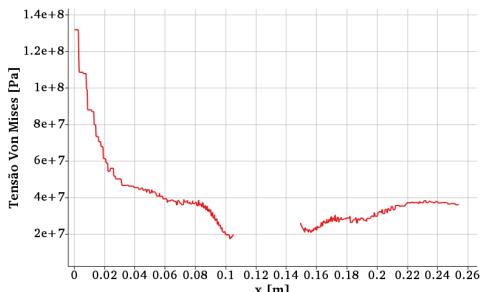


(i) furo circular.

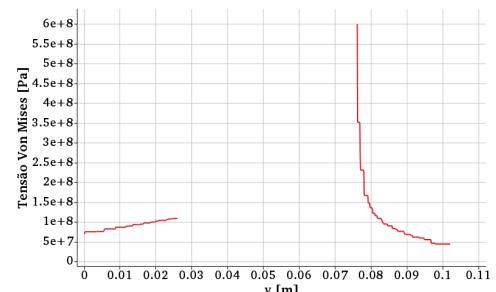


(j) furo circular.

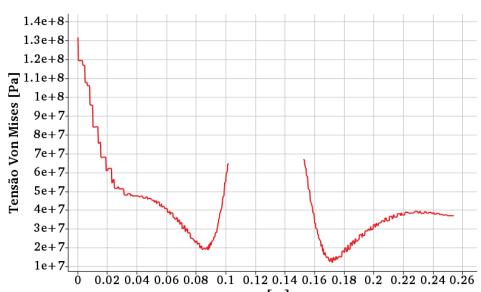
Figura 42 - Tensão de Von Mises em corte.



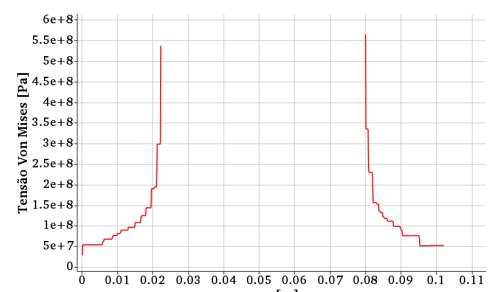
(a) furo triangular - direção x .



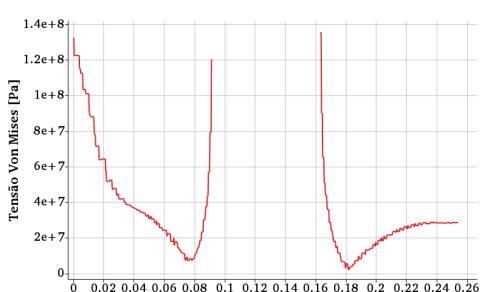
(b) furo triangular - direção y .



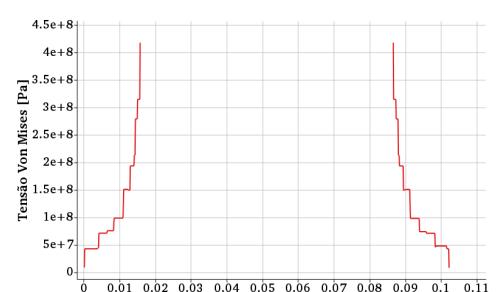
(c) furo hexagonal - direção x .



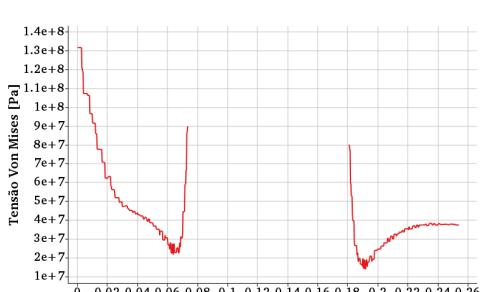
(d) furo hexagonal - direção y .



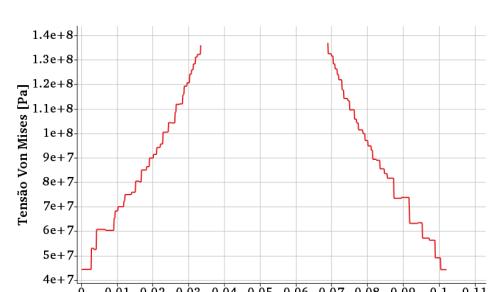
(e) furo quadrangular - direção x .



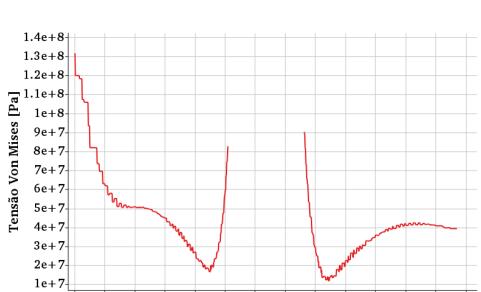
(f) furo quadrangular - direção y .



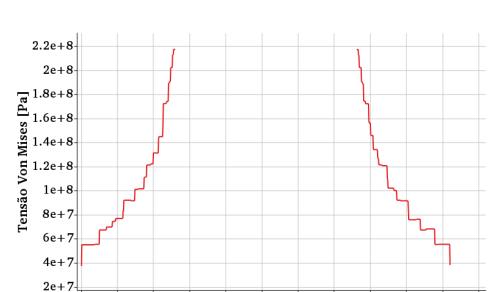
(g) furo elíptico - direção x .



(h) furo elíptico - direção y .



(i) furo circular - direção x .



(j) furo circular - direção y .

CONCLUSÃO

No presente trabalho desenvolveu-se um código computacional para uma análise térmica, estrutural e termoestrutural, em regime estacionário e bidimensional, do qual foi desenvolvida em linguagem de programação *Python* e utilizando o Método dos Elementos Finitos. Além disso, foram apresentados os conceitos da Mecânica dos Sólidos, da Transferência de Calor e do MEF. Com os códigos desenvolvidos, foram verificados os seus resultados através da comparação de soluções analíticas, exatas e aproximadas, e através de um *software* de simulação numérica comercialmente conhecido.

A utilização de simulações numéricas possibilita, além de baratear o processo de desenvolvimento ou análise de um projeto, diminuir a velocidade com que o resultado desta é obtido. Métodos numéricos surgiram para facilitar e/ou melhorar o desenvolvimento destas simulações e as linguagens de programação existentes atualmente tornaram esta ferramenta mais acessível e fácil de serem construídas. Isso contribui positivamente para o surgimento de novos tipos de programas de simulações numéricas mais específicos para um determinado problema, diminuindo o seu tempo de execução e seu tamanho computacional, além de torná-lo disponível para possíveis modificações e otimizações.

As simulações de validação realizadas neste trabalho, para os três códigos, mostraram que o método e o modelo utilizado foram capazes de reproduzir o comportamento real de um problema de engenharia em regime estacionário, mesmo utilizando elementos menos precisos, como é o elemento finito triangular linear. Nas simulações dos problemas térmicos, verificou-se que o pico do erro absoluto ocorreu nas regiões onde o gradiente de temperatura é maior. Como forma de melhorar os resultados obtidos, o refinamento da malha foi necessário e, devido à natureza do MEF, em alguns problemas a malha foi refinada nas regiões de interesse de análise.

Além das validações, um estudo de caso foi realizado com o intuito de investigar a consequência de concentradores de tensões de diversas geometrias, sob condições de contorno de temperatura e deslocamento. Considerando que o código criado *híbrido.py* foi validado anteriormente, os resultados adquiridos do estudo de caso demonstraram que os concentradores que possuem vértices geraram tensões de Von Mises muito acima da tensão de referência. Em contrapartida, com o concentrador de formato elíptico, a região do furo obteve uma queda de tensão de, aproximadamente, 41 %.

Com isso, o objetivo deste trabalho, que era de desenvolver uma ferramenta para uma análise termoestrutural e aplicá-lo em um problema de engenharia, foi alcançado. Os algoritmos aqui criados estão disponíveis no site *GitHub*, clicando aqui. Para dar continuidade à este trabalho, algumas ideias de pesquisas futuras são sugeridas abaixo:

- Desenvolver este trabalho utilizando uma função de aproximação de ordem superior.

- Expandir os códigos para problemas tridimensionais.
- Adaptar os códigos para problemas em regime transiente.
- Otimizar este trabalho criando suas instruções em módulos.
- Desenvolver este trabalho considerando fluxo de calor por radiação e fonte de calor pontual.
- Realizar refinamento baseado em gradientes dos campos de interesse.
- Reproduzir o estudo de caso com outras formas geométricas e em outros arranjos.
- Reproduzir o estudo de caso de forma experimental, com o objetivo de validar a análise numérica.

REFERÊNCIAS

- AVALLONE, E.; BAUMEISTER, T.; SADEGH, A. *Marks' Standard Handbook for Mechanical Engineers, 11/e.* [S.l.]: New York: McGraw-Hill, 2006.
- BARBER, J. Solid mechanics and its applications. *Elasticity*,, Springer, 2004.
- BATHE, K.-J. *Finite element procedures.* 2. ed. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2014.
- BRASIL, A. P. *Python Brasil.* -, 2009. Disponível em: <<https://python.org.br/introducao/>>.
- ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. *Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática, 4ª Edição.* [S.l.]: AMGH Editora LTDA., 20012.
- CHANDRASEKHARIAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics.* [S.l.]: Elsevier, 2014.
- CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D.; RAMESH, T.; RAY, C. *Introduction to finite elements in engineering.* 5. ed. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 10.
- ESSS, E. *ANSYS fornece software de simulação gratuita a estudantes.* Blog ESSS, 2017. Disponível em: <<https://www.esss.co/blog/ansys-fornecce-software-de-simulacao-gratuito-a-estudantes/>>.
- FELIPPA, C. A. Advanced finite element methods. *Course notes, available online at <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/Home.html>,* 2003.
- FELIPPA, C. A. Advanced finite element methods. *Course notes, available online at <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/Home.html>,* 2003.
- GEUZAIN C. E REMACLE, J.-F. *Gmsh: A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.* International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2009. Disponível em: <<http://gmsh.info/>>.
- HIBBEKER, R. C. *Resistência dos materiais.* 7. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- INC., K. *Paraview.* Disponível em: <<https://www.paraview.org/>>.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. *Fundamentos de Transferência de Calor E de Massa.* [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2008.
- KREITH, F.; BOHN, M. S. *Princípios de transferência de calor.* [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow.* [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method.* [S.l.]: Cengage Learning, 2012.

- MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1969.
- MARSDEN, J. E.; HUGHES, T. J. *Mathematical foundations of elasticity*. [S.l.]: Courier Corporation, 1994.
- PILKEY, W. D.; PILKEY, D. F. *Peterson's stress concentration factors*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- POPOV, E. *Mecánica de sólidos*. [S.l.]: Pearson Educación, México, 2000.
- RAO, S. S. *The finite element method in engineering*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2004.
- REDDY, J. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984.
- REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1993.
- RUGARLI, P. *Structural analysis with finite elements*. [S.l.]: Thomas Telford, 2010.
- SILVA, L. da; CHALHUB, D.; CALIL, A.; MOURA, R. de. Semi-analytical solution of the heat conduction in a plate with heat generation. *Revista de Engenharia Térmica*, v. 16, n. 1, p. 58–65, 2017.
- SLAUGHTER, W. S. *The linearized theory of elasticity*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- STASA, F. L. *Applied finite element analysis for engineers*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1985.
- TIMOSHENKO, S.; GERE, J. *Mecânica dos Sólidos, v. 1*. [S.l.]: LTC, 1983. v. 1.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2005. v. 2.

APÊNDICE A – Relações de Integração

A.1 Integração por partes

A integração por partes é, frequentemente, usada na formulação das integrais de equações diferenciais e é uma ferramenta de cálculo muito importante, que permite transferir a diferenciação de uma função para outra na integral. Sejam u , v , e w funções diferenciáveis na coordenada x . Então, a integração por partes pode ser escrita da forma:

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = \int_a^b u dv = - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx + [u v]_a^b \quad (155)$$

A equação acima pode ser deduzida facilmente através da regra do produto da diferenciação. Façamos a utilização da regra do produto nas funções u e v ,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

então,

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - \frac{du}{dx}v$$

Integrando ambos os lados no intervalo de $[a, b]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b u \frac{dv}{dx} dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(uv) dx - \int_a^b \frac{du}{dx}v dx \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx}v dx \end{aligned}$$

que é a mesma expressão da Equação 155.

Agora, considere esta expressão para demonstrar a passagem de diferenciação.

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx &= \int_a^b w \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx \\ &= \int_a^b w \frac{dv}{dx} dx, \text{ sendo } v = \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Utilizando a Equação 155 na equação acima

$$\begin{aligned} \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx &= - \int_a^b v \frac{dw}{dx} dx + w(b)v(b) - w(a)v(a) \\ &= - \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx + w(b) \frac{du}{dx}(b) - w(a) \frac{du}{dx}(a) \end{aligned} \quad (156)$$

ou

$$- \int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_a^b w \frac{d^2u}{dx^2} dx + w(a) \frac{du}{dx}(a) - w(b) \frac{du}{dx}(b) \quad (157)$$

e para integrais que possuem no seu integrando equações diferenciais de quarta ordem, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b v \frac{d^4w}{dx^4} dx &= \int_a^b v \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \\ &= \int_a^b v \frac{d^2u}{dx^2} dx, \text{ sendo } u = \frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se utilizar a Equação 156, com $w = v$, para expandir a integral do lado direito da equação acima,

$$\int_a^b v \frac{d^4w}{dx^4} dx = - \int_a^b \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a)$$

e em seguida, utilizar a Equação 157, com $u = v$ e $w = u$, na primeira integral do lado direito para chegar em

$$\int_a^b v \frac{d^4w}{dx^4} dx = \int_a^b u \frac{d^2v}{dx^2} dx + u(a) \frac{dv}{dx}(a) - u(b) \frac{dv}{dx}(b) + v(b) \frac{du}{dx}(b) - v(a) \frac{du}{dx}(a)$$

Por último, retornamos com o real valor de $u = \frac{d^2w}{dx^2}$ na expressão acima e obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_a^b v \frac{d^4w}{dx^4} dx &= \int_a^b \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx + \frac{d^2w}{dx^2}(a) \frac{dv}{dx}(a) - \frac{d^2w}{dx^2}(b) \frac{dv}{dx}(b) \\ &\quad + v(b) \frac{d^3w}{dx^3}(b) - v(a) \frac{d^3w}{dx^3}(a) \end{aligned} \quad (158)$$

As Equações 155, 156 e 158 são úteis na formulação fraca de equações diferenciais de primeira, segunda e quarta ordem, respectivamente.

A.2 Teoremas do Gradiente e do Divergente

Em casos bi e tridimensionais, a integração por partes é mais conhecida como os teoremas do gradiente e do divergente. Façamos ∇ e ∇^2 representarem, respectivamente, o operador gradiente e o operador laplaciano no sistema de coordenadas cartesianas em três dimensões (x, y, z) :

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

onde $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ representam os vetores base unitários ao longo dos eixos x, y e z , respectivamente. Seja $F(x, y)$ uma função escalar contínua no domínio Ω e $\mathbf{G}(x, y)$ uma função vetorial contínua no mesmo domínio que F , o teorema do gradiente diz que

$$\int_{\Omega} \nabla F \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} F \, d\Gamma \quad (159)$$

que é igual a

$$\int_{\Omega} \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial F}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}} \right) F \, d\Gamma$$

E o teorema do divergente diz que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{G} \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \, d\Gamma \quad (160)$$

ou

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z) \, d\Gamma$$

O sinal (\cdot) na Equação 160 e no operador laplaciano representa o produto escalar entre vetores. $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície Γ do domínio Ω , e n_x, n_y e n_z (G_x, G_y e G_z) são as componentes retangulares de $\hat{\mathbf{n}}$ (\mathbf{G}).

As identidades seguintes são as relações apresentadas no Apêndice A aplicadas nos teoremas aqui apresentados. Sejam w e G funções escalares definidas no domínio bidimensional Ω , então

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla w) G \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} G w \, ds \quad (161)$$

e

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G) w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla G \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} w \, ds \quad (162)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é o operador da derivada normal,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$$

APÊNDICE B – Cálculo Variacional

O cálculo variacional é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos (relativos) de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional. Ele é uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções reais de uma variável pois, ao invés de lidar com funções reais de variáveis independentes, ele faz uso de *funcionais*. Esse assunto é bem extenso, então será resumido aqui alguns conceitos de grande importância na resolução de problemas diferenciais.

B.1 Funcional

Quando a formulação variacional de problemas contínuos são o foco de estudo, geralmente são encontradas funções de variáveis dependentes em que, elas mesmas, são funções de outros parâmetros, tais como o tempo, a posição, etc. Algumas expressões, em particular, de integrais de variáveis dependentes e de suas derivadas são de grande interesse e tais expressões são chamadas de *funcionais*. De uma forma mais simples, um funcional é uma *função de funções*.

Um funcional I é um mapeamento (ou operador) de um espaço vetorial U para o espaço de números reais \mathbb{R} . Então, se $u \in U$, então $I(u)$ é um número real.

$$I : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Note que I é um operador e $I(u)$ é um funcional. A expressão mostrada abaixo é um exemplo de funcional.

$$I(u) = \int_0^L [au(x) + bu'(x) + cu''(x)] \, dx, \quad u' \equiv \frac{du}{dx}, \quad u'' \equiv \frac{d^2u}{dx^2} \quad (163)$$

Um funcional $I(u)$ é dito ser *linear* se, e somente se,

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v)$$

para $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e variáveis dependentes u e v . Um funcional $B(u, v)$ é dito ser *bilinear* se, e somente se, ele for linear em ambos os seus argumentos:

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v), \quad (\text{linearidade no 1º argumento})$$

$$B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2), \quad (\text{linearidade no 2º argumento})$$

$$B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v) = B(u, \alpha v)$$

onde u, u_1, u_2, v, v_1 e v_2 são variáveis dependentes. Um exemplo de funcional bilinear é da forma

$$B(au, v) = \int_0^L a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L \frac{dv}{dx} a \frac{du}{dx} dx = B(u, av)$$

para $\forall a \in \mathbb{R}$.

O funcional bilinear $B(u, v)$ pode também ser *simétrico* em seus argumentos u e v se

$$B(u, v) = B(v, u)$$

e o funcional $B(au, v)$ mostrado acima é um exemplo disso.

B.2 Operador Variacional

Considere um funcional $F = F(x, u, u')$. Para um valor fixo e qualquer de x , F estará em função de u e u' . A troca de αv por u , onde α é uma constante e v é uma função de x , é chamada de *variação* de u e é representada por δu .

Este δ é chamado de *operador variacional* e δu representa uma variação admissível na função u para um valor fixado da variável independente x . É claro que para regiões onde u é especificado (geralmente no seu contorno), não pode ocorrer uma variação da função, isto é, δu deve satisfazer as condições de contorno essencial para u (por exemplo, $u(0) = u_0 \rightarrow \delta u(0) = 0$). Essa variação δu é imaginária e tem especial importância em problemas que são resolvidos por métodos variacionais, como o princípio dos trabalhos virtuais na mecânica.

Uma variação na função u acarretará, consequentemente, numa variação na função F . Semelhante à diferenciação total de uma função de 2 variáveis, a *variação* de F com relação a u é definido por:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (164)$$

Perceba a analogia entre a variação de F (Equação 164) e a diferenciação de F (Equação 165),

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du' \quad (165)$$

Já que x não muda durante a variação de u para $u + \delta u$, $dx = 0$ e a semelhança se torna evidente. Então é como se o operador δ agisse como um operador diferencial com respeito às variáveis dependentes. As leis de soma, diferença, produto, divisão, potência,

entre outras operações de variação são completamente análogas às leis correspondentes da diferenciação. Sendo $F_1 = F_1(u)$ e $F_2 = F_2(u)$, então

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$$

$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{\delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2}{F_2^2}$$

$$\delta[(F_1)^n] = n(F_1)^{n-1} \delta F_1$$

Além disso, o operador variacional pode comutar com os operadores diferencial e integral, contanto que as variáveis independentes estejam fixas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\delta u) &= \frac{d}{dx}(\alpha v) = \alpha \frac{dv}{dx} = \alpha v' = \delta u' = \delta \frac{du}{dx} \\ \int_a^b \delta u(x) dx &= \delta \int_a^b u(x) dx \end{aligned}$$