



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos
Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro
Dezembro de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, Ph.D.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2020

Alves, Felipe Rodrigues de Mello

Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio/
Felipe Rodrigues de Mello Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2020.

XI, 26 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 25 – 25.

1. Equação do calor. 2. Método de elementos finitos.
3. Discos de freio. I. Rabello dos Anjos, Gustavo *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio.

*À minha família por todo o
suporte e compreensão.*

Agradecimentos

Sou muito grato não apenas ao investimento financeiro e educacional fornecido pelos meus pais Eduardo e Isabel mas também por toda a compreensão e apoio na jornada da graduação, que teve também grande suporte da minha dinda Daize na perspectiva do mercado de trabalho e complemento na formação profissional. Agradeço ao suporte de todos os meus amigos de fora da faculdade que perceberam meus momentos difíceis e foram capazes de me apoiar mesmo sem entender bem a realidade do curso e a meus amigos de faculdade que foram grandes companheiros em momentos de extrema importância. Um agradecimento enorme à equipe Icarus de Formula SAE por me proporcionar a paixão pela engenharia mecânica e me ensinar a ser um engenheiro mais completo, a todos os profissionais da Gerência de equipamentos de subestações de Furnas, que foram de extrema cordialidade no meu início da vida profissional e por último, a todo setor de Installation Analysis Subsea da TechnipFMC, que me proporcionaram uma oportunidade completa de atuar com a engenharia, fornecendo todas as ferramentas e suportes para o desenvolvimento de um trabalho do mais alto nível.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Dezembro/2020

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um código capaz de calcular soluções aproximadas para o problema térmico aplicado a discos de freio submetidos à situações críticas de frenagem de um protótipo de competição tipo formula utilizando o método de elementos finitos. A solução da equação transiente de calor aplicada a um disco de freios fornece uma alternativa aos softwares de altos investimentos financeiros e capacidades computacionais no momento do estudo da dissipação de calor, resultando em um parâmetro de escolha de materiais para fabricação e geometrias a serem consideradas.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

SOLUTION OF THE TRANSIENT HEAT EQUATION USING THE FINITE ELEMENT ANALYSIS APPLIED TO BRAKE DISCS

Felipe Rodrigues de Mello Alves

December/2020

Advisors: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

This work proposes the development of a code

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um código capaz de calcular soluções aproximadas para o problema térmico aplicado a discos de freio submetidos à situações críticas de frenagem de um protótipo de competição tipo formula utilizando o método de elementos finitos. A solução da equação transiente de calor aplicada a um disco de freios fornece uma alternativa aos softwares de altos investimentos financeiros e capacidades computacionais no momento do estudo da dissipação de calor, resultando em um parâmetro de escolha de materiais para fabricação e geometrias a serem consideradas.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivo	2
1.3 Metodologia	2
1.4 Organização da tese	2
2 Revisão Bibliográfica	3
2.1 Sistema de freios	3
2.2 Transferência de calor	3
2.3 Método dos elementos finitos	4
2.4 Método de Galerkin	4
3 Metodologia	6
3.1 Modelo teórico	6
3.2 Método de resíduos ponderados	8
3.3 Método de Galerkin	9
3.4 Noção de espaço de funções	9
3.5 O método dos elementos finitos	10
3.5.1 Problema bidimensional permanente	12
3.5.2 Problema bidimensional transiente	15
3.5.3 Problema tridimensional	16
3.6 O Algoritmo	19

4	Resultados e Discussões	20
4.1	Solução analítica	20
4.2	Validação	21
4.2.1	23
5	Conclusões	24
	Referências Bibliográficas	25
A	Código Fonte	26

Lista de Figuras

1.1	Modelagem de problemas reais para solução numérica	1
3.1	volume infinitesimal	7
3.2	C.Cs	14
4.1	Condições de contorno para solução analítica	20
4.2	Condições de contorno para solução analítica	21
4.3	Comparação de resultados no eixo central do plano estudado	22
4.4	Comparação de resultados no eixo central do plano estudado	22
4.5	Comparação de resultados no eixo central do plano estudado	23

Lista de Tabelas

4.1	Erro na simulação ponto a ponto	23
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Para transformar um problema real em um modelo compatível com soluções computacionais existem algumas metodologias de idealização do fenômeno físico - onde traduzimos suas características através de modelos matemáticos - a fim de discretizá-lo e resolvê-lo, como esquematizado na Figura 1.1.



Figura 1.1: Modelagem de problemas reais para solução numérica

Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações computacionais fazem uso de diferentes métodos e técnicas para calcular soluções envolvendo os problemas típicos da ciência e engenharia, como: método de diferenças finitas, método de elementos finitos e método de volumes finitos. O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento que busca soluções aproximadas para os modelos numéricos e se aplica a uma grande variedade de problemas físicos. Sua acurácia e estabilidade estão largamente estudados, o que confere ao método uma robustez e sólida confiabilidade.

Para viabilizar a solução, a modelagem divide uma geometria grande e complexa, que é submetida a carregamentos térmicos ou mecânicos em pequenas partes – denominadas *elementos* - os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. A filosofia por trás do método é reduzir um problema grande (seu objeto de estudo) em problemas menores (os *elementos*) e calcular também a relação entre

eles. O conjunto dos *elementos* e de seus pontos de contorno – denominados nós – é conhecido como *malha*. A *malha*, portanto, é composta por um número finito de *elementos* de comportamento bem definido. O método de elementos finitos é um método poderoso para discretização de geometrias complexas pois não exige esforço computacional adicional comparado a sua utilização em geometrias regulares.

A precisão do método dos elementos finitos (MEF) depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número dos elementos em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise.

1.1 Motivação

Veículos de competição são submetidos a grandes esforços uma vez que o seu objetivo é ser mais eficaz em uma pista de corrida. As pistas planejadas para veículos de alta performance são compostas de diversos trechos curvos, principalmente as pistas de Formula SAE e a frenagem eficiente permite maior precisão nas entradas de curva. Sendo assim o sistema de freios é constantemente acionado, o que leva a um considerável aumento de temperatura dos seus componentes. O aumento descontrolado de temperatura nos discos de freio podem resultar em fadiga, vaporização do fluido de freio, rachaduras térmicas e vibrações prejudiciais ao funcionamento do sistema, o que compromete a segurança e performance do protótipo.

1.2 Objetivo

Estudar os fenômenos energéticos envolvendo os componentes dos freios e apresentar soluções computacionais a fim de proporcionar comparativos das influências das grandezas envolvidas no projeto.

1.3 Metodologia

1.4 Organização da tese

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Sistema de freios

2.2 Transferência de calor

Em um disco de freios ocorrem os três tipos de transferência de calor descrito por Frank P. Incropera [1]: condução, convecção e radiação. O autor define transferência de calor como energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura no espaço. Quando existe um gradiente de temperatura em um meio estacionário sólido ou fluido a condução ocorre quando há transferência de calor através do meio. Já a convecção ocorre quando há transferência de calor entre uma superfície e um fluido em movimento. Quando a troca de calor ocorre através de ondas eletromagnéticas que são emitidas por qualquer superfície com temperatura não nula, ocorre a radiação. O estudo desses fenômenos ocorre através de equações de taxas que quantificam a energia transferida por unidade de tempo.

A condução pode ser interpretada como um fenômeno difusivo onde ocorre transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas através das interações entre partículas. Em um sólido essas interações ocorrem através da combinação entre a vibração das moléculas dos retículos cristalinos e a movimentação dos elétrons livres. Para a condução a equação que descreve a taxa de transferência de calor é conhecida como a *lei de Fourier*.

$$\mathbf{q} = -k\nabla\mathbf{T} = -k\left(\mathbf{i}\frac{dT}{dx} + \mathbf{j}\frac{dT}{dy} + \mathbf{k}\frac{dT}{dz}\right)$$

sendo \mathbf{q} o fluxo de calor e k a condutividade térmica.

EXEMPLO DE FUNCAO COM INTERVALOS

$$|x| = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \geq 0; \\ -1 & , \text{ se } x < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.3 Método dos elementos finitos

ESCREVER PERSPECTIVA HISTÓRICA (PRIMEIROS AUTORES QUE USARAM E MENCIONARAM O MEF)

2.4 Método de Galerkin

Boris Grigorievitch Galerkin, nascido em 1871, foi um engenheiro e matemático formado pelo Instituto Tecnológico de St. Peterburgo. Além de atuar como desenhista, Galerkin deu aulas particulares para ajudar o seu sustento durante os estudos. Após sua formação iniciou sua carreira de engenheiro da Fábrica de Aquecimento Mecânica do Norte, onde alcançou a chefia técnica. Após se envolver fervorosamente com política em um período conturbado acabou preso por um período de aproximadamente dois anos, onde teve a oportunidade de desenvolver conhecimento científico. Neste período escreveu o artigo sobre a teoria do encurvamento longitudinal. Após alguns anos, Galerkin começou a trabalhar com I. G. Bubnov no estudo da rigidez e elasticidade na construção civil. Em 1915 Galerkin publicou um trabalho que propunha um método de integração aproximada para equações diferenciais parciais, que ficou conhecido como Método de Galerkin. Este trabalho trouxe grande vantagem sobre o já proposto método de Ritz uma vez que era uma regra mais abrangente. Neste trabalho também surgiu o conceito de formulação fraca e forte para uma equação diferencial. Em 12 de Julho de 1945 termina sua passagem pela vida, quando Galerkin atuava como chefe do Instituto de Mecânica da Academia de Ciências Soviética.

Portanto, Galerkin desenvolveu um método que ficou mundialmente famoso na construção teórica de soluções de equações diferenciais para análises diversas da ciência e engenharia - como mecânica, termodinâmica e hidrodinâmica - e se mostrou

bastante útil em procedimentos numéricos e que constrói uma parte fundamental dos métodos numéricos como o MEF.

Capítulo 3

Métodologia

3.1 Modelo teórico

Considerando um volume infinitesimal contínuo formado pelo seu domínio Ω e contorno Γ e supondo um volume $dV = dxdydz$ homogêneo e isotrópico, o tensor de condutividade é $\tilde{K} = k\tilde{I}$ onde k é a condutividade térmica do material e \tilde{I} é a matriz identidade.

O fluxo de calor em um ponto do volume dV é descrito pela lei de *Fourier*:

$$q'' = \tilde{K} \frac{\partial T}{\partial \hat{X}}$$

onde:

- q'' - fluxo de calor;
- $T = T(x, y, z, t)$ - campo de temperatura do volume dV ;
- \tilde{K} - Tensor de condutividade térmica do volume dV ;
- $\frac{\partial T}{\partial \hat{X}}$ - gradient de temperatura na forma vetorial.

A taxa de energia em dV é dada por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

onde:

- c - calor específico;

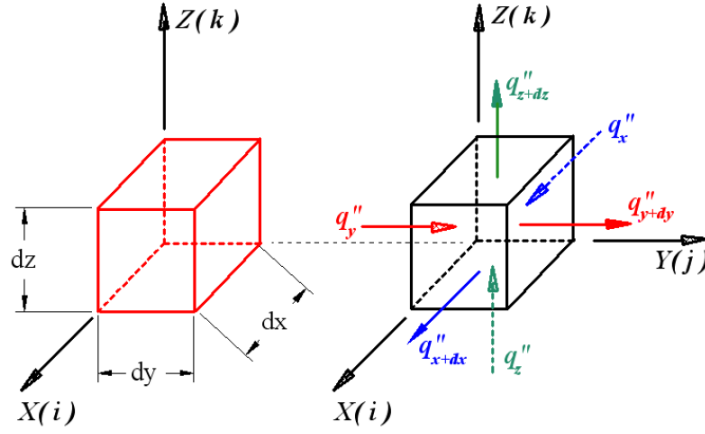


Figura 3.1: volume infinitesimal

Fonte: Elaborada pelo autor.

- ρ - massa específica;
- $\frac{\partial T}{\partial t}$ - Variação da temperatura no tempo.

Considerando ainda uma possível geração de calor Q no interior do volume dV , a equação do balanço de energia de dV é dado por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \Delta q''_x dydz + q''_y dxdz + q''_z dxdy + QdV$$

onde:

- $q''_x = q''_{x+dx} - q''_x$ - fluxo de calor na direção x;
- $dydz$ - área da seção perpendicular ao eixo x;
- $q''_y = q''_{y+dy} - q''_y$ - fluxo de calor na direção y;
- $dxdz$ - área da seção perpendicular ao eixo y;
- $q''_z = q''_{z+dz} - q''_z$ - fluxo de calor na direção z;
- $dxdy$ - área da seção perpendicular ao eixo z;

O termo $q''_{x+dx} - q''_x$ é a derivada parcial, portanto:

$$q''_{x+dx} - q''_x = \frac{\partial q''_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx$$

$$q''_{y+dy} - q''_y = \frac{\partial q''_y}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy$$

$$q''_{z+dz} - q''_z = \frac{\partial q''_z}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz$$

Encontra-se então a equação da condução tridimensional

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dxdydz + Q dxdydz$$

Define-se o operador *Laplaciano* ∇^2 como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Com isso é possível escrever a equação na sua forma diferencial:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -k \nabla^2 T + Q_\Omega$$

onde Q_Ω é o termo de geração de calor no volume total, chamado de termo fonte.

3.2 Método de resíduos ponderados

Equações diferenciais são objetos de estudo no mundo todo por conta do seu poder de descrever problemas físicos. Entretanto muitas vezes essas equações não têm soluções analíticas exatas e, quando têm, a sua determinação pode ser uma tarefa árdua. Os métodos de resíduos ponderados encontram uma função \mathbf{F} que aproxima a solução exata no intervalo com um bom grau de precisão, ou seja, minimizando o erro - ou resíduo - da aproximação. A função \mathbf{F} é dada por meio do somatório de N funções de forma ϕ_i com amplitudes arbitrárias A_n .

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N A_i \phi_i \quad (3.1)$$

Quando utiliza-se essa aproximação, um resíduo R é naturalmente gerado. A minimização deste resíduo R é dada pela multiplicação do mesmo por uma função de ponderação Ψ_j e integrando no domínio Ω .

$$\int_{\Omega} R \cdot \Psi_j d\Omega = 0, \text{ para } j = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

O método de resíduos ponderados utilizado no MEF é o método de Galerkin.

3.3 Método de Galerkin

Como descrito anteriormente, o método de Galerkin é um método de resíduos ponderados. Sua particularidade está no fato de que ele escolhe a função de ponderação exatamente igual a função de aproximação:

$$\Psi_j = \phi_j \quad (3.3)$$

Com isso, substituindo a equação 3.3 na equação 3.2 temos a equação do método de Galerkin:

$$\int_0^L R(x)\phi_i(x)dx = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Para uma melhor compreensão do método, é necessário o conhecimento do espaço de funções.

3.4 Noção de espaço de funções

O espaço de funções pode ser explicado como uma analogia ao espaço vetorial onde temos as seguintes definições:

- Base: espaço vetorial de três dimensões, V^3 , pode ser dado pelos vetores unitários $e_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $e_2 = [0 \ 1 \ 0]$ e $e_3 = [0 \ 0 \ 1]$.
- Combinação linear: qualquer elemento pertencente a este espaço é representado pela combinação linear dos elementos da base.

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

- Base é Linearmente Independente (ou ortogonais): é impossível descrever qualquer elemento da base como combinação dos outros elementos. Isso é descrito matematicamente como o resultado nulo do produto interno:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0, \langle e_1, e_3 \rangle = 0, \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

- Base é ortonormal: além de serem ortogonais, a norma dos vetores da base também é unitária:

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$$

Com isso, um espaço é formado pela combinação linear dos elementos de sua base. A construção de um espaço de funções é análoga pois as funções da base são ortogonais entre si. O que muda é a noção de ortogonalidade de funções. Por exemplo, considere as funções g e h definidas no domínio Ω , o produto interno das duas é dado por:

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} gh d\Omega$$

Da mesma forma, a representação dos elementos de um espaço de funções é dada pela combinação linear dos elementos de sua base.

No contexto do método de Galerkin, quando escolhemos as funções de aproximação ϕ_i estamos construindo um espaço de funções \bar{S} que é composto por todas as funções que possam ser representadas por uma combinação linear dos elementos de sua base, ou seja:

$$\bar{S} = \text{span}[\phi_i]_{i=1}^n$$

3.5 O método dos elementos finitos

A ideia por trás do método de elementos finitos é a simulação de um problema através da modelagem de partes discretas que, unidas, representam um meio contínuo, ou seja, através de uma discretização do modelo. Essas partes discretas têm seus comportamentos representados por descrições matemáticas.

1. Modelo matemático

O modelo matemático pode assumir a forma fraca e a forma forte, que tem soluções equivalentes - ou seja, a solução para uma delas representa a solução para a outra. A forma forte, ou forma diferencial, consiste na representação

do problema através de um sistema de equações diferenciais, parciais ou ordinárias, no espaço ou no tempo. Problemas simples podem ser resolvidos analiticamente na forma forte através de técnicas de integração, porém problemas mais complexos podem ter soluções muito difíceis de serem obtidas analiticamente, sendo indicado a utilização de métodos precisos para obtenção de soluções aproximadas. A forma fraca consiste na representação do problema através de uma equação integral ponderada, que é definida como uma equação que, a partir do método de solução, distribui diferentes "pesos" a determinados elementos da expressão. O termo forma fraca diz respeito ao fato de a equação ser resolvida adotando uma média em vez de ser solucionada ponto a ponto como na forma forte.

2. Método dos elementos finitos (MEF)

O método dos elementos finitos é um procedimento que busca soluções aproximadas para os modelos numéricos e se aplica a uma grande variedade de problemas físicos. Sua acurácia e estabilidade estão largamente estudados, o que confere ao método uma robustez e sólida confiabilidade.

Para viabilizar a solução, a modelagem divide uma geometria grande e complexa, que é submetida a carregamentos térmicos e/ou mecânicos em pequenas partes – denominadas elementos - os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. A filosofia por trás do método é reduzir um problema grande (seu objeto de estudo) em problemas menores (os elementos) e calcular também a relação entre eles. O conjunto dos elementos e de seus pontos de contorno – denominados nós – é conhecido como malha. A malha, portanto, é composta por um número finito de elementos de comportamento bem definido. O MEF é um método poderoso para discretização de geometrias complexas pois não exige esforço adicional comparado a sua utilização em geometrias regulares.

A precisão do método dos elementos finitos (MEF) depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número dos elementos em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise.

3. Passos para realizar uma análise por MEF

Para utilizarmos o método dos elementos finitos, seguimos os seguintes passos:

- (a) Transformar a expressão da forma forte para a forma fraca;
- (b) Utilizar integração por partes para atingir a redução da ordem da expressão;
- (c) Uso do método de aproximação de funções (método de Galerkin);
- (d) Montagem das matrizes - conhecido como assembling;
- (e) Imposição das condições de contorno;
- (f) Solução do sistema linear encontrado.

4. Funções de forma

A solução do problema se dá através de funções interpoladoras calculadas em cada nó. Essas funções tem as seguintes características:

- (a) O valor da função em seu respectivo nó vale 1, e nos outros nós tem valor nulo;
- (b) A função entre os nós pode ser linear, quadrática, cúbica ou até de graus maiores;
- (c) A função apresenta continuidade no interior de cada elemento, mas não na fronteira dos nós.

Com isso é necessário encontrar uma solução para a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx < \infty$$

A função que satisfaz essa condição é chamada função H. Para a implementação das condições de contorno é necessário a inclusão da função peso ω , que assume o valor nulo onde a variável u é definida (contorno).

3.5.1 Problema bidimensional permanente

A solução de um problema bidimensional permanente pode ser calculado seguindo os passos descritos:

- Descrição na forma forte:

$$\nabla^2 u = 0$$

onde as condições de contorno podem ser:

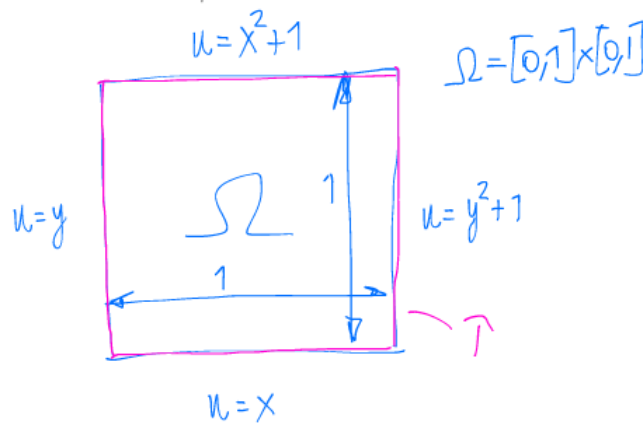


Figura 3.2: C.Cs

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio Ω :

$$\int_{\Omega} \omega \nabla^2 u \, d\Omega = 0$$

- Integração por partes:

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u \cdot n \, d\tau - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega$$

O primeiro termo representa o contorno e o segundo o domínio.

- Usando Galerkin:

$N_i(x, y, z) = N_j(x, y, z)$, sendo

$$\hat{u} = \sum_0^n N_i(x, y) a_i$$

$$\hat{\omega} = \sum_0^n N_j(x, y) b_j$$

Por definição, a função peso é nula onde a condição de Dirichlet é definida, portanto:

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u \cdot n \, d\tau - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega$$

Então:

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_0^n N_i(x, y) a_i \right) \cdot \nabla \left(\sum_0^n N_j(x, y) b_j \right) d\Omega = 0$$

$$\sum_0^n \sum_0^n \left(\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \right) a_i = 0$$

Que podemos escrever como:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

Sendo:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} = K x_{ij} \quad ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} = K y_{ij}$$

e

$$K_{ij} = K x_{ij} + K y_{ij}$$

- Solução do sistema linear:

Portanto o código calcula a matriz K_{ij} aplicada na malha do problema e resolve o sistema linear considerando as condições de contorno:

$$K_{ij} a_i = 0 \quad \text{ou} \quad a_i = K_{ij}^{-1} b_j$$

a_i representando a temperatura T no nó i .

Nesses passos demonstra-se a construção da matriz de rigidez K .

3.5.2 Problema bidimensional transiente

- Descrição na forma forte:

$$\frac{du}{dt} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio Ω , realizando a integração por partes e Galerkin:

O segundo termo foi demonstrado anteriormente, onde origina-se a matriz K_{ij} . Para a derivada temporal foi utilizado o método de diferenças finitas. Portanto, após realizar os passos i, ii e iii do MEF, temos:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\int_0^1 N_i N_j \left(\frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} \right) d\Omega \right) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\alpha \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} + \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_j}{dy} d\Omega \right) a_i = 0$$

sendo a matriz de massa definida como:

$$M_{ij} = N_i N_j$$

temos:

$$\frac{M}{\Delta t} a_i^{n+1} - \frac{M}{\Delta t} a_i^n - \alpha K a_i^{n+1} = 0$$

Temos, portanto:

$$(M - \alpha \Delta t K) a_i^{n+1} = M a_i^n$$

$$H a_i^{n+1} = f^n$$

a_i representando a temperatura T no nó i .

3.5.3 Problema tridimensional

- Descrição na forma forte

Como demonstrado anteriormente, a equação de transferência de calor tridimensional é:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -k \nabla^2 T + Q_\Omega$$

Ou,

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + Q_\Omega$$

onde considero propriedades constantes do material.

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio $\Omega = dx dy dz$:

$$\int_{\Omega} \omega \left[\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T - Q \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \omega \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \omega \nabla \cdot k \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} \omega Q d\Omega = 0$$

Pela identidade de Green

$$\int_{\Omega} \omega \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma} \omega k \nabla T d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot (k \nabla T) d\Omega - \int_{\Omega} \omega Q d\Omega$$

- Usando Galerkin:

$N_i(x, y, z) = N_j(x, y, z) = N_k(x, y, z)$, sendo

$$T(x, y, z) = \sum_{i=0}^n N_i(x, y, z) a_i$$

$$\omega(x, y, z) = \sum_{j=0}^n N_j(x, y, z) b_j$$

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=0}^n N_k(x, y, z) Q_k$$

Após substituir, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (\rho c_v) N_i N_j \frac{da_i}{dt} d\Omega + \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n - \int_{\Gamma} \omega (k \nabla N_i) d\Gamma + \int_{\Omega} (k \nabla N_i) \cdot \nabla N_j d\Omega \right] a_i = \\ = \int_{\Omega} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n N_i N_j Q_i d\Omega \end{aligned}$$

Considerando a condição de contorno de Dirichlet, zeramos o termo:

$$\int_{\Gamma} \nabla^0 (k \nabla N_i) d\Gamma = 0$$

Portanto, temos:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (\rho c_v) N_i N_j \frac{da_i}{dt} d\Omega + \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (k \nabla N_i) \cdot \nabla N_j d\Omega \right] a_i = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n Q_i N_i N_j d\Omega$$

Sendo:

$$\sum \sum \int k \nabla N_i \nabla N_j d\Omega = K_{ij} \text{ a matriz de rigidez}$$

$$\sum \sum \int N_i N_j d\Omega = M_{ij} \text{ a matriz de massa}$$

Temos:

$$(\rho c_v) M_{ij} \frac{da_i}{dt} + K_{ij} a_i = M_{ij} Q_i + c.c$$

Para a discretização espacial $\frac{da_i}{dt}$ utiliza-se o método de diferenças finitas progressivo:

$$(\rho c_v) M_{ij} \left(\frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} \right) + K_{ij} a_i = M_{ij} Q_i + c.c$$

Para este passo, podemos utilizar três métodos distintos:

– Implícito - define o termo $K_{ij} a_i$ no tempo $(n+1)$:

$$\left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} + K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

– Explícito - define o termo $K_{ij} a_i$ no tempo (n) :

$$\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} a_i^{n+1} = \left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} - K_{ij} \right) a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

– Crank-Nicolson - mistura os dois métodos:

$$\left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{2} K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} - \frac{1}{2} K_{ij} \right) a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

Por questão de facilidade de implementação de algoritmos, escreve-se:

$$\left(\frac{(\rho c_v)M_{ij}}{\Delta t} + \theta K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \left[\frac{(\rho c_v)M_{ij}}{\Delta t} - (1 - \theta)K_{ij} \right] a_i^n + M_{ij}Q_i + c.c$$

Sendo:

- * $\theta = 1$ para o método implícito
- * $\theta = 0$ para o método explícito
- * $\theta = 0.5$ para Crank-Nicolson.

No código, a equação usada é:

$$(M_{ij} + \theta \Delta t K_{ij}) a_i^{n+1} = [M_{ij} - \Delta t (1 - \theta) K_{ij}] a_i^n + M_{ij} \Delta t Q_i + c.c$$

onde:

$$H = (M_{ij} + \theta \Delta t K_{ij})$$

3.6 O Algoritmo

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Solução analítica

Para estudar a precisão dos resultados do algoritmo proposto, os valores de temperatura no regime permanente é comparado a uma solução analítica proposta.

A solução analítica proposta é bidimensional e define três laterais com uma temperatura T_1 e a parte superior com outra temperatura T_2 , da seguinte forma:

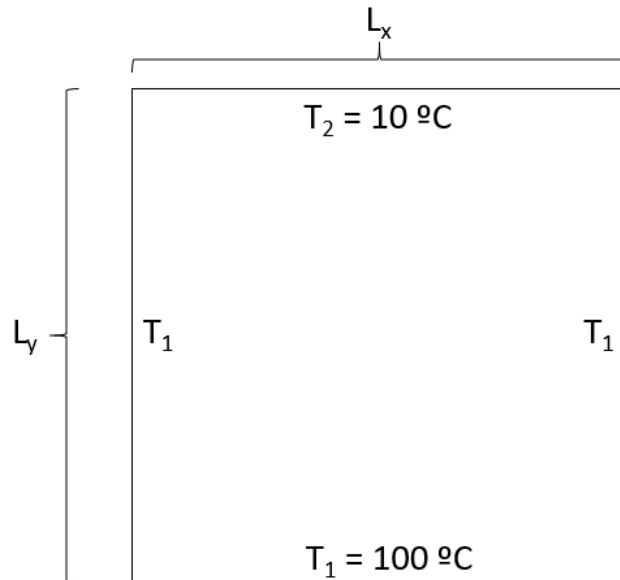


Figura 4.1: Condições de contorno para solução analítica

Fonte: Elaborada pelo autor.

A solução é comparada com o resultado do código tridimensional, onde apenas

o plano $Z = 0$ é levado em consideração e todas as propriedades dos materiais são unitárias - densidade, condutividade térmica e calor específico. A validação totalmente tridimensional será feita comparando com a solução no software consolidado Ansys.

A equação que resulta na solução analítica é dada por:

$$\frac{T(x, y) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L_y}{L_x}\right)}$$

onde o somatório é truncado em um número razoável de iterações.

Após fazer o cálculo de $T(x, y)$ truncando o somatório em $n = 200$ o resultado foi plotado, como mostra a Figura 4.2

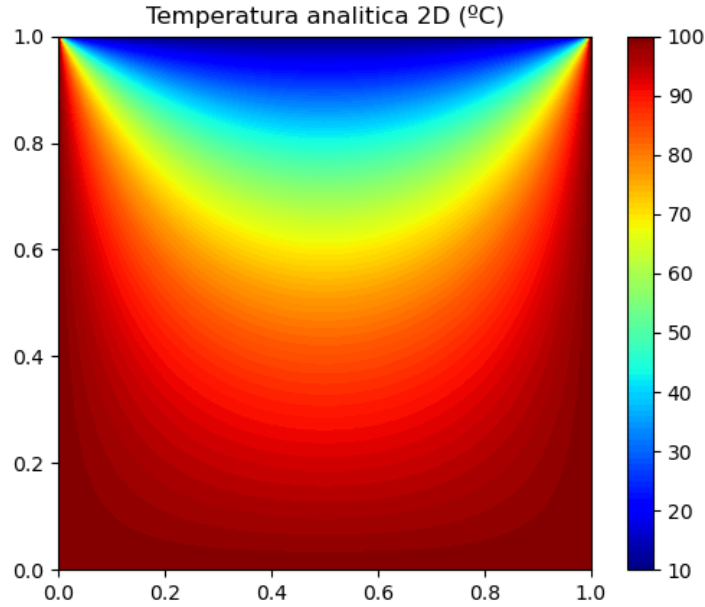


Figura 4.2: Condições de contorno para solução analítica

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Validação

O resultado do código proposto neste trabalho é visualizado a partir do Paraview, como mostra a Figura 4.3

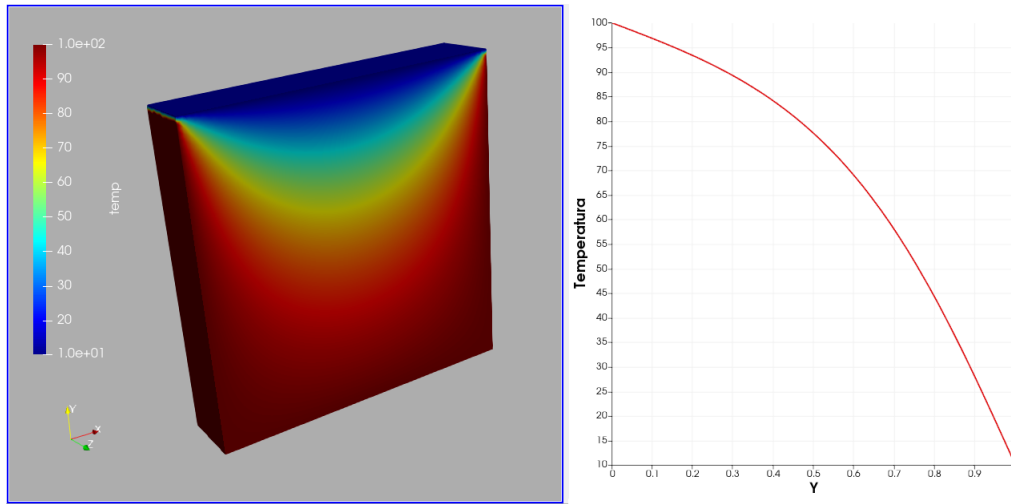


Figura 4.3: Comparação de resultados no eixo central do plano estudado

Fonte: Elaborada pelo autor.

A título de comparação, um gráfico das temperaturas em função do eixo y é traçado com os resultados analíticos e numéricos em diferentes valores de coordenadas x .

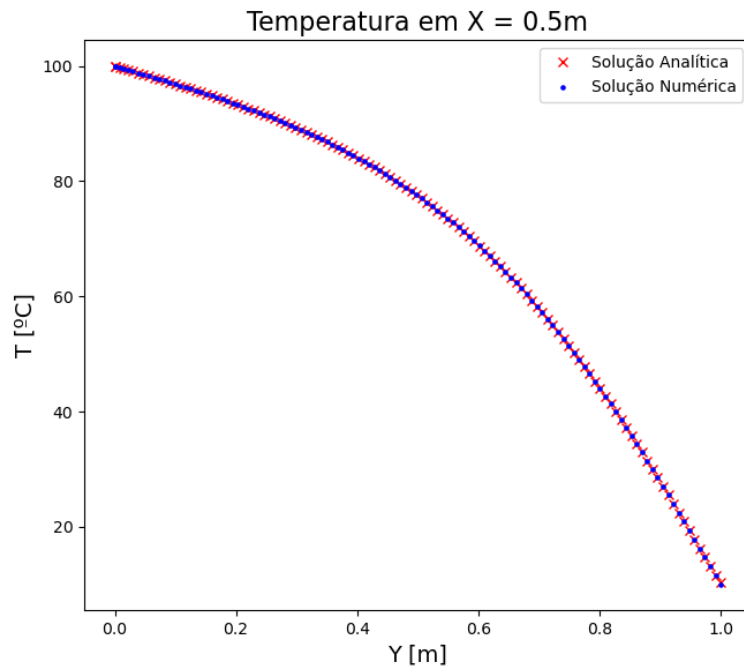


Figura 4.4: Comparação de resultados no eixo central do plano estudado

Fonte: Elaborada pelo autor.

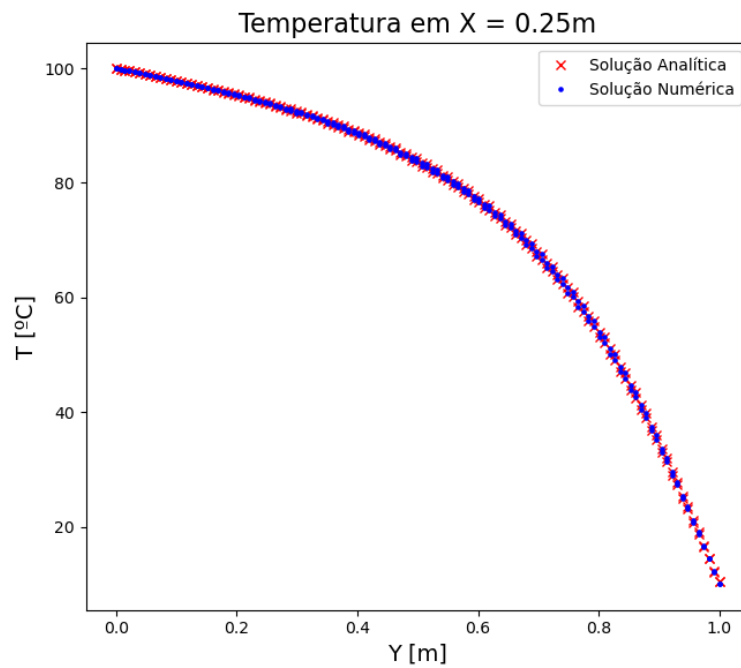


Figura 4.5: Comparação de resultados no eixo central do plano estudado

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi feita uma comparação ponto a ponto onde foi possível observar os erros entre o resultado numérico e analítico para os nós internos do plano estudado. Os dados são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Erro na simulação ponto a ponto

Maior erro	Média	Desvio padrão
1,98 %	0,01 %	1,63 %

4.2.1

Capítulo 5

Conclusões

Referências Bibliográficas

- [1] LANCZOS, C., “An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators”, *J. Research Nat. Bur. Standards*, v. 45, pp. 255–282, 1950.
- [2] ARNOLDI, W. E., “The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem”, *Quart. Appl. Math.*, v. 9, pp. 17–29, 1951.

Apêndice A

Código Fonte