



Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

METÓDO DE ELEMENTOS FINITOS EM PYTHON COM A ABORDAGEM
LAGRANGIANA EULERIANA PARA AS OSCILAÇÕES DE UM CILINDRO
EM UM ESCOAMENTO TRANSVERSAL

Jéssica Aparecida Silva

Projeto de Graduação apresentado ao Curso
de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica,
Universidade Federal do Rio de Janeiro, como
parte dos requisitos necessários à obtenção do
título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro
Novembro de 2020

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM PYTHON COM A ABORDAGEM
LAGRANGEANA EULERIANA PARA AS OSCILAÇÕES DE UM CILINDRO EM
UM ESCOAMENTO TRANSVERSAL.**

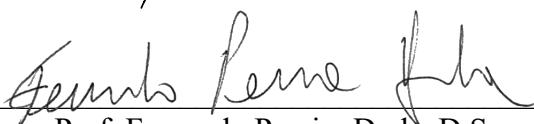
Jéssica Aparecida Silva

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

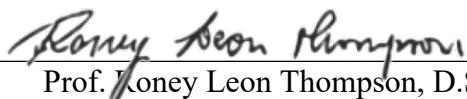
Aprovado por:



Prof. Gustavo Rabélio dos Anjos, PhD.



Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.



Prof. Koney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2020

Silva, Jéssica Aparecida

Metódo de Elementos Finitos em Python com a abordagem lagrangiana euleriana para as oscilações de um cilindro em um escoamento transversal/ Jéssica Aparecida Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2020.

XIV, 86 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 66 – 70.

1. Interação fluido-estrutura em Python. 2. Método Elementos Finitos LEA. 3. Equação de transporte corrente-vorticidade. I. Anjos, Gustavo Rabello dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Metódo de Elementos Finitos em Python com a abordagem lagrangiana euleriana para as oscilações de um cilindro em um escoamento transversal.

Dedico este trabalho à minha família, em especial à Maria Regina, Isadora Siqueira, Lúcio Flávio e Fátima. Também aos meus amigos de graduação, à Equipe Minerva Baja e por fim, à todo aluno de escola pública que deseja ingressar na Universidade pública brasileira.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à todos que estiveram presentes durante essa longa caminhada. Em primeiro lugar à minha mãe que desde o início me incentivou e lutou para que eu iniciasse meus estudos para alcançar a graduação. Além disso, quero agradecer ao meu irmão Lúcio Flávio por todo apoio durante todos esses anos e por ser uma fonte inspiradora de criatividade.

Não menos importante, quero agradecer a minha companheira, Isadora, por toda dedicação, incentivo no cotidiano e por ser uma fonte de inspiração para a vida. Também não posso deixar de incluir neste trabalho aos meus dois gatinhos, Joana e Belchior, que em muitos momentos de dificuldades me trouxeram acalanto e carinho.

Quero deixar um agradecimento muito especial para minha tia Fátima que nos deixou em 2018, mas que foi uma mulher inspiradora para diversas áreas da minha vida e que lutou até o fim na luta contra o câncer.

Gostaria de agradecer aos amigos que fiz durante a graduação e que foram muito importantes para que eu chegasse até este momento, o de realizar o meu sonho de ter uma graduação. Também agradeço a Equipe Minerva Baja por ter me proporcionado a minha primeira experiência na Engenharia Mecânica e por despertar a paixão pela área da mecânica.

Por fim, quero agradecer ao meu orientador Gustavo Rabello por ter me ensinado a arte da simulação computacional e por ser uma referência de professor que contém a excelência técnica e didática para transmitir seus conhecimentos e possibilitar que possamos desenvolver projetos na área de elementos finitos.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

METÓDO DE ELEMENTOS FINITOS EM PYTHON COM A ABORDAGEM
LAGRANGIANA EULERIANA PARA AS OSCILAÇÕES DE UM CILINDRO
EM UM ESCOAMENTO TRANSVERSAL

Jéssica Aparecida Silva

Novembro/2020

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

O presente projeto de graduação consiste no desenvolvimento de um código numérico em linguagem *Python* para movimentação de um cilindro utilizando uma abordagem lagrangiana-eulariana (LEA), estando esse cilindro sujeito a um carregamento devido ao escoamento transversal. Para atingir esse objetivo, utilizou-se o Método de Elementos Finitos para discretização da equação de *Corrente Vorticidade* que deriva da equação de *Navier-Stokes*. Para validação da metodologia aplicada, foram realizadas simulações para comparação entre a resposta numérica e ao ajuste de curva realizado em *Shih at al.* [1] do caso clássico de Lid Driven e também a comparação entre a solução numérica e a analítica para o escoamento entre placas planas. A partir da validação do código numérico, foram realizadas simulações de mais 4 cenários: escoamento ao redor de um cilindro em um canal, escoamento ao redor de um cilindro com paredes afastadas, escoamento ao redor de um cilindro sem nenhuma parede ao seu redor e por fim, escoamento ao redor de um cilindro livre para vibrar. Todas as simulações tiveram técnicas de refinamento de malha tendo como condição de parada o erro entre as soluções. Além disso realizou-se inclusão de uma matriz de estabilização para corrigir erros de instabilidade numérica causados

pelo termo convectivo. Os resultados obtidos neste trabalho foram satisfatórios e o modelo numérico se mostrou coerente com o modelo físico proposto de forma que o objetivo do trabalho foi atingido. Portanto, o código numérico demonstrado neste trabalho pode ser considerado um modelo numérico confiável, estável e acurado para a movimentação do cilindro quando submerso em um escoamento e este código está disponibilizado no apêndice A como ferramenta para uso da comunidade acadêmica e profissional.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment
of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

ALE-FE METHOD IN PYTHON FOR AN OSCILLATING CYLINDER IN A TRANSVERSAL FLOW

Jéssica Aparecida Silva

November/2020

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

The present graduation project consists of the development of a numerical code in textit Python language for the movement of a cylinder using a Lagrangian Euclidean approach (ALE), which cylinder is subject to loading due to transversal flow. To achieve this goal, the Finite Element Method was used to discretize the *Vorticity Current* equation that derives from the *Navier Stokes* equation. To validate the applied methodology, simulations were carried out to compare the numerical response and the curve fit performed in *Shih at al.* [1] of the classic case of Lid Driven and also the comparison between the solution numerical and analytical data for flow between flat plates. From the validation of the numerical code, simulations of 4 more scenarios were carried out: flow past a cylinder in a channel, flow past a cylinder with far walls, flow past a cylinder without wall effects and finally, flow around a free cylinder with vibration. All simulations had mesh refinement techniques with error between the solutions as a stop condition criterium. In addition, a stabilization matrix was included to correct errors of numerical instability caused by the convective term. The results obtained in this work were satisfactory and the numerical model was consistent with the proposed physical model so that the objective of the work was achieved. Therefore, the numerical code demonstrated in this work can

be considered a reliable, stable and accurate numerical model for the movement of the cylinder when submerged in a flow and this code is available in Appendix A as a tool for the academic and professional community.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução.	1
1.1 Motivação.	1
1.2 Organização do trabalho.	3
2 Revisão Bibliográfica.	4
2.1 Elementos finitos.	4
2.2 Dinâmica dos fluidos computacional.	6
2.3 Vibração induzida por vórtices.	7
2.4 Interação fluido-estrutura.	10
3 Metodologia.	15
3.1 Modelo teórico.	15
3.1.1 Função corrente.	15
3.1.2 Cinemática de uma partícula fluida.	16
3.1.3 Dinâmica de uma partícula fluida.	17
3.1.4 Adimensionalização das equações.	19
3.1.5 Formulação corrente vorticidade.	20
3.1.6 Vibração induzida por vórtices.	21
3.1.7 Abordagem lagrangiana euleriana.	23
3.2 Modelo numérico	25
3.2.1 Método de elementos finitos.	25
3.2.2 Gerador de malhas.	28

3.2.3	Discretização do domínio.	28
3.2.4	Elemento da malha.	29
3.2.5	O método aplicado a corrente vorticidade.	32
4	Validação do código.	40
4.1	Escoamento Lid Driven.	40
4.2	Escoamento entre placas planas.	44
5	Resultados	49
5.1	Escoamento ao redor de um cilindro em um canal.	49
5.2	Escoamento ao redor de um cilindro com paredes distantes.	53
5.3	Escoamento ao redor de um cilindro.	56
5.4	Vibração do Cilindro utilizando LEA	59
6	Conclusão	64
Referências Bibliográficas		66
A	Código Fonte do cilindro com vibração LEA.	71

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de interações fluido-estrutura com escoamento ao redor de uma hélice de turbina (a) e de uma asa de avião (b) [2].	1
1.2	Interação fluido-estrutura de um cilindro submerso em escoamento. .	2
2.1	Demonstração visual da camada limite, adaptado de [3].	8
2.2	Ilustração da separação de um escoamento, adaptado de [4].	9
2.3	Ilustração da região de esteira para um cilindro, adaptado de [5]. . . .	9
2.4	Forças em um cilindro submerso em um escoamento.	10
2.5	Coeficiente de arrasto no escoamento ao redor de um cilindro circular em função do número de Reynolds, adaptado de [6].	12
2.6	Tipos de escoamento ao redor de um cilindro circular para diferentes faixas de número de Reynolds, adaptado de [6].	13
2.7	Padrão de emissão da esteira de vórtices para diferentes valores de velocidades e amplitudes reduzidas, adaptado de [7].	14
3.1	Partícula infinitesimal de um fluido.	16
3.2	Tensões sobre um elemento de fluido na direção x	18
3.3	Esquema da configuração de um oscilador massa-mola.	22
3.4	Esquema do suavizador Laplaciano [8].	24
3.5	Assembling realizado nas matrizes global de rigidez e de massa, respectivamente [8].	27
3.6	Exemplo de malha criada utilizando o <i>Gmsh</i>	28
3.7	Exemplos de malha triangular e quadrangular	28
3.8	Elemento utilizado na discretização do domínio	29
3.9	Representação das funções de forma linear, quadrática e cúbica para o elemento triangular.	30

3.10	Discretização com o método Characteristic Galerkin, adaptado de [8].	36
3.11	Velocidades nodais do elemento triangular.	38
4.1	Clássico problema de escoamento em cavidade Lid Driven.	40
4.2	Condições de contorno do escoamento em uma cavidade Lid Driven.	41
4.3	Análise do refinamento de malha para Lid Driven.	42
4.4	Linha para o pós processamento para escoamento Lid Driven.	43
4.5	Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas para u .	43
4.6	Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas para v .	43
4.7	Velocidade u e v para $Re = 1$.	44
4.8	Função corrente ψ para $Re = 1$.	44
4.9	Escoamento entre placas paralelas	45
4.10	Condições de contorno do escoamento interno entre placas planas	46
4.11	Análise do refinamento de malha para o escoamento entre placas planas.	46
4.12	Linha para o pós processamento para escoamento entre placas planas.	47
4.13	Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas.	47
4.14	Velocidade u para $Re = 1000$.	48
4.15	Velocidade v para $Re = 1000$.	48
4.16	Função corrente ψ para $Re = 1000$.	48
5.1	Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro em um canal.	50
5.2	Análise do refinamento de malha para $Re = 1000$.	50
5.3	Linhas para o pós processamento para escoamento do cilindro em um canal.	51
5.4	Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas.	51
5.5	Velocidade u para $Re = 1000$.	52
5.6	Velocidade v para $Re = 1000$.	52
5.7	Função corrente ψ para $Re = 1000$.	52
5.8	Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro com paredes distantes	53
5.9	Refinamento de malha cilindro com paredes distantes para $Re = 1000$.	54

5.10 Linha para o pós processamento para escoamento do cilindro com paredes distantes.	54
5.11 Gráficos de u e v para o escoamento do cilindro com paredes afastadas.	55
5.12 Velocidade u e v para $Re = 1000$	56
5.13 Velocidade u para $Re = 1000$	56
5.14 Condições de contorno do escoamento ao redor do cilindro sem paredes.	57
5.15 Linha para o pós processamento para escoamento do cilindro sem paredes.	57
5.16 Gráficos de u para o escoamento de um cilindro sem paredes.	58
5.17 Gráficos de v para o escoamento de um cilindro sem paredes.	58
5.18 Velocidade u e v para $Re = 1000$	59
5.19 Velocidade ψ para $Re = 1000$	59
5.20 Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro sujeito a vibração utilizando LEA.	59
5.21 Zoom no pos processamento da abordagem lagrangiana-euleriana (LEA).	61
5.22 Evolução temporal da movimentação do cilindro com LEA.	61
5.23 Linhas para o pós processamento para movimentação do cilindro com LEA.	62
5.24 Gráfico de u para a movimentação do cilindro com LEA.	62
5.25 Velocidade u para $Re = 1000$	63
5.26 Velocidade v para $Re = 1000$	63
5.27 Função corrente ψ para $Re = 1000$	63

Lista de Tabelas

3.1	Variáveis da equação dinâmica do cilindro.	22
3.2	Variáveis da equação dinâmica adimensionalizada do cilindro.	23
3.3	Variáveis da equação corrente vorticidade na forma matricial.	33
4.1	Geometria do escoamento Lid Driven.	41
4.2	Configurações utilizadas para criação das malhas Lid Driven.	42
4.3	Erros relativos para Lid Driven.	42
4.4	Geometria do escoamento entre placas planas.	45
4.5	Configurações utilizadas para criação das malhas entre placas planas.	46
4.6	Erros relativos para escoamento entre placas planas.	47
5.1	Geometria do escoamento ao redor do cilindro.	49
5.2	Configurações utilizadas para criação das malhas.	50
5.3	Erros relativos para escoamento ao redor de um cilindro em m canal.	51
5.4	Geometria do escoamento ao redor do cilindro com paredes afastadas.	53
5.5	Configurações utilizadas para criação das malhas.	54
5.6	Geometria do escoamento ao redor do cilindro sem paredes.	56
5.7	Erros relativos para vibração com LEA.	63

Capítulo 1

Introdução.

1.1 Motivação.

Os fenômenos de interação fluido-estrutura (FSI) descrevem o acoplamento de entre fluidodinâmica e a mecânica estrutural. Na engenharia essas interações se manifestam em diversas áreas como por exemplo na ação do escoamento do ar em torno de um aerofólio, o escoamento ao redor de dutos submarinos na indústria off-shore, trocadores de calor, dentre outras aplicações.

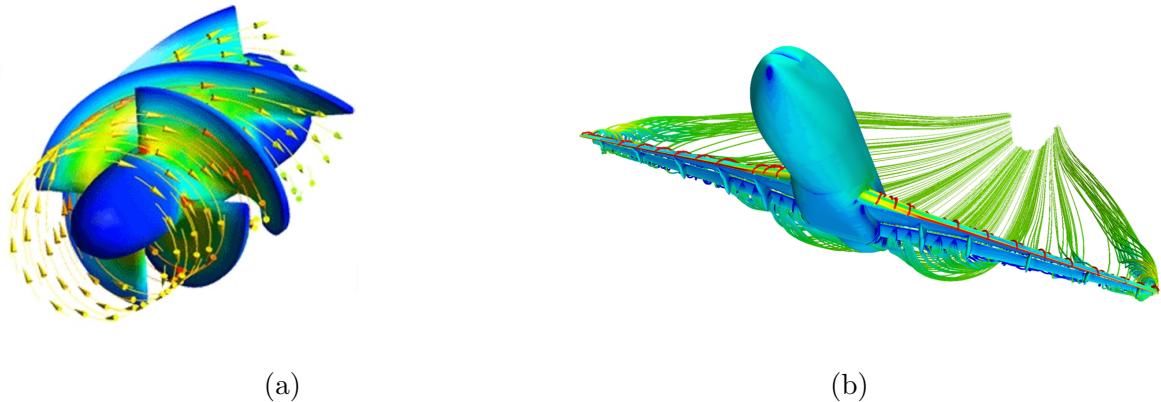


Figura 1.1: Exemplos de interações fluido-estrutura com escoamento ao redor de uma hélice de turbina (a) e de uma asa de avião (b) [2].

Dentre os diversos fenômenos de interação fluido-estrutura temos a vibração induzida por vórtices (VIV). Este fenômeno descreve que o escoamento de um fluido ao redor de um corpo gerará uma esteira de vórtices que induzirá uma vibração neste corpo. Quando a frequência de desprendimento de vórtices e a frequência natural do

corpo se aproximam ($f_s \sim f_{nat}$) observa-se um ganho na amplitude do movimento de vibração. Tendo esse ganho em vista, o estudo do fenômeno se torna importante no dimensionamento da estrutura para que essa suporte os esforços, aumentando a confiabilidade do projeto. Na figura abaixo temos o caso clássico de FSI, que consiste em um corpo cilíndrico submerso em um escoamento livre para vibrar no plano xy.

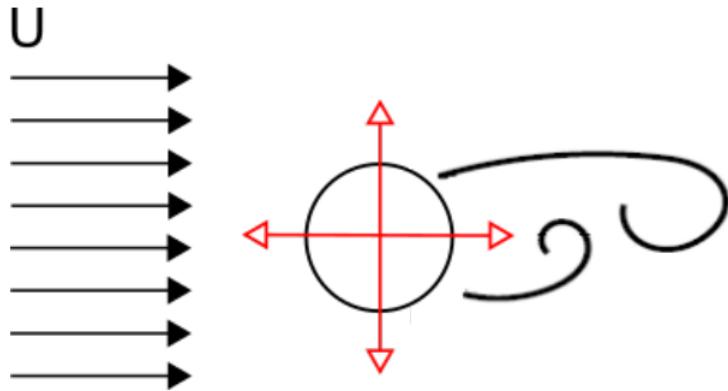


Figura 1.2: Interação fluido-estrutura de um cilindro submerso em escoamento.

Outra motivação para a escolha do tema abordado neste trabalho consiste no crescente aumento do uso de simulação numérica em projetos de engenharia. Tendo isso em vista, a simulação numérica tem demonstrado pontos positivos no que tange na obtenção de um maior grau de confiabilidade dos resultados e melhor uso de investimento financeiro no desenvolvimento de protótipos durante o desenvolvimento de um projeto.

Com o aumento do uso de simulações numéricas, o estudo utilizando a equação de *Navier – Stokes* se tornou uma realidade para a engenharia, proporcionando assim a possibilidade de estudos do acoplamento como um modo de prever melhorias na integridade de componentes estruturais.

Neste trabalho, tem-se como propósito a investigação do fenômeno de acoplamento entre o escoamento de fluido ao redor de um corpo rígido, cilíndrico, apoiado em base elástica sujeito a um escoamento com baixo número de Reynolds. A simulação é realizada utilizando o modelo numérico que usa a formulação corrente vorticidade

para descrever as equações de *Navier – Stokes* com a sua discretização em elementos finitos pelo Método de Galerkin e a utilização de uma abordagem abordagem Lagrangiana euleriana arbitrária (LEA) para seguir o movimento do cilindro.

1.2 Organização do trabalho.

Este trabalho possui uma estrutura desenvolvida de modo que no capítulo 2 é feita a revisão bibliográfica sobre a história do desenvolvimento do Método de Elementos Finitos (MEF) e da dinâmica dos fluidos computacional (DFC). Além disso, esse capítulo aborda os estudos realizados sobre vibração induzida por vórtices (VIV) e interação fluido-estrutura (FSI).

No capítulo 3, a fundamentação teórica do problema e a metodologia do MEF, bem como da *Abordagem Lagrangiana Euleriana* será aplicada à física. Em seguida são descritas as equações do fenômeno físico e é demonstrado a sua discretização.

O capítulo 4 traz simulações realizadas para a validação do código desenvolvido. Para isso comparou-se o código desenvolvido com casos clássicos como o escoamento *Lid Drive* e o escoamento *entre placas planas* que possui solução analítica.

Por fim, no capítulo 5 é demonstrado os resultados obtidos para 4 cenários: escoamento ao redor de um cilindro em um canal, escoamento ao redor de um cilindro com paredes afastadas, escoamento ao redor de um cilindro sem nenhuma parede ao seu redor e por fim, escoamento ao redor de um cilindro livre para vibrar. Sendo esse último, o principal objetivo deste trabalho. Por fim, nos resultados são demonstrados como a malha se movimenta de acordo com o avanço temporal. O código desenvolvido durante todo o trabalho é disponibilizado no apêndice A.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica.

2.1 Elementos finitos.

Nos diversas áreas da engenharia temos fenômenos que são modelados por equações diferenciais parciais (EDP's), como por exemplo a mecânica estrutural e a fluidodinâmica, conforme demonstrado em *Congro* [9]. Para geometrias e condições de contorno e/ou iniciais relativamente simples, as equações diferenciais parciais podem ser reduzidas a uma forma solucionável. Entretanto, solucionar essas equações para geometrias complexas através de métodos analíticos se torna uma tarefa quase que impossível.

Essas dificuldades levaram engenheiros, cientistas e matemáticos a adotarem várias aproximações para a solução de problemas de mecânica dos fluidos. Em busca do desenvolvimento de técnicas para resolução numérica dos fenômenos estudados, ao longo das últimas décadas diversos pesquisadores e estudiosos tem desenvolvido métodos numéricos que tem originado em boas metodologias, como podemos observar com o Método de Elementos Finitos e o Método de Volumes Finitos.

Conforme abordado em *Fox* [10], atualmente existem métodos numéricos que tem ganhado relevância na área da engenharia, como por exemplo a resolução através da discretização por volume finitos, diferenças finitas e elementos finitos. A escolha do esquema de discretização está relacionado às suas vantagens e desvantagens quando comparados aos demais.

Nesse trabalho o método de diferenças finitas foi aplicado para a discretização das derivadas temporais das equações em estudo. Conforme demonstrado em *Anjos* [8], esse método se baseia na aproximação das soluções através da expansão em série de Taylor e interpolação polinomial para aproximação da solução.

O método de volumes finitos consiste na discretização do domínio de estudo em volumes de controle. Após a discretização ser feita, a integração das equações que regem o fenômeno são feitas no centro do volume de controle. Uma característica desse método é a necessidade de uma enorme quantidade de elementos para a convergência da resposta.

Por fim, outro método e o utilizado neste trabalho é o método de elementos finitos (MEF). De acordo com *Fish* [11] o método foi desenvolvido nos anos de 1950 pela indústria aeroespacial. Em 1956, *Clough at al.* [12] publicaram um artigo onde trouxeram as principais ideias sobre o método, estabelecendo os procedimentos que deram origem a montagem das matrizes elementares e as formulações para alguns tipos de elementos.

Anos mais tarde, descobriu-se que em 1943 *Courant* [13], já havia publicado um artigo no qual ele usou elementos triangulares com princípios variacionais para resolver problemas na área de vibrações.

Em 1960 *Clough at al.* [14], professor da universidade de Berkeley, publicou um artigo onde definiu o termo "elementos finitos". Após esse feito, durante muitos anos a universidade se tornou o epicentro de estudos na área de elementos finitos.

A partir disso, o Método dos Elementos Finitos começou a se tornar uma ferramenta eficaz na resolução de diversos problemas na área de mecânica dos sólidos. Porém na mecânica dos fluidos seu uso só se tornou viável alguns anos depois. Isso não ocorreu antes devido às oscilações espúrias causadas pelo termo convectivo nas soluções.

Em 1976, *Christie* [15] propôs a utilização de funções assimétricas ou quadráticas para corrigir as oscilações nos problemas do tipo difusão-convecção. Esse procedi-

mento ficou conhecido como *Formulação Petrov-Galerkin*.

Em 1984, *Donea* [16] apresentou a *Formulação Taylor-Galerkin*, que consiste na utilização dos termos de alta ordem da expansão em série de Taylor para a redução das oscilações causadas nos problemas de convecção-difusão.

Nos últimos anos diversos pesquisadores têm buscado alternativas para realizar a estabilização e convergência das metodologias de discretização existentes.

2.2 Dinâmica dos fluidos computacional.

As equações de *Navier – Stokes* descrevem o movimento de substâncias fluidas viscosas. Essas equações se baseiam em leis da física que levam em consideração a conservação da quantidade de movimento linear, proveniente de forças viscosas e variações da pressão, dentre outras grandezas físicas, além da conservação da massa.

Na prática, não havia como resolver as equações de *Navier – Stokes* para geometrias complexas, devido ao acoplamento entre os campos de pressão e velocidade, conforme abordado em *Fox* [10]. Tal fato durante muitos anos foi empecilho para não surgirem grandes avanços na área da mecânica dos fluidos, porém, a partir de 1950 (*Fortuna*[17]) com o avanço dos computadores digitais surgiram uma nova alternativa para análise de tais equações: a simulação numérica. Essa nova área do conhecimento em análises da mecânica dos fluidos recebeu o nome de dinâmica dos fluidos computacional (DFC).

Em 1973, *Launder at al.* [18] iniciaram os estudos em um programa para predizer fluxos de cisalhamentos em fluidos. Apesar dos resultados obtidos serem muito simplórios, os trabalhos desenvolvidos se relacionavam com a presença de um fluxo parabólico, sem recirculação e usando funções corrente, método conhecido como algoritmo de solução de vorticidade. Porém, tal estudo foi considerado não aplicável a problemas reais na engenharia.

Embora os primeiros métodos de simulação de escoamento viscoso incompressível contassem com a vorticidade, também em 1973 *Spalding at al.* [18] e o mesmo

grupo de pesquisadores propuseram o algoritmo Simple Semi Implícito, que possuía o estudo das variáveis do campo de pressão (p) e do campo de velocidade (U) como as principais variáveis na análise do escoamento de um fluido. A partir desse estudo foi possível permitir as soluções das equações de *Navier – Stokes* de modo direto.

Em 1974, *Spalding at al.* [19] desenvolveram o modelo que conhecemos como $k-\epsilon$, que é um modelo utilizado para análise de escoamento turbulentos para um alto número de Reynolds.

Por fim, após a década de 80, com o advento da dinâmica dos fluidos computacional na pesquisa e projetos de engenharia, se tornou possível explorar fenômenos que antes não eram estudados de forma prática em laboratórios e além disso, atualmente é possível analisar diversos parâmetros relevantes e qual a sua influência sobre a física em estudo. Proporcionando assim uma maior flexibilidade e um ganho de custo no que tange ao financeiro para realização de experimentos.

2.3 Vibração induzida por vórtices.

A vibração induzida por vórtices é uma área de grande interesse na engenharia. O fenômeno ocorre quando uma estrutura é submersa em um meio composto por um fluido, onde o movimento deste fluido ao redor do corpo ocasiona em forças no corpo. Essas forças comumente ocasionam vibrações na estrutura. Tal fenômeno pode ser observado na indústria de petróleo através dos risers, em trocadores de calor, pontes, chaminés, etc.

Em algumas áreas, a análise VIV é incluída no projeto para mitigar a causa de danos causados por falha e fadiga da estrutura. Por outro lado, também pode-se usar a análise da vibração para a conversão da energia mecânica que a estrutura pode gerar, como ocorre no setor de geração de energia eólica.

Nas últimas décadas diversos estudos e experimentos foram realizados buscando a compreensão e quantificação das relações entre a resposta da estrutura e os parâmetros de governo do escoamento do fluido. Diversos pesquisadores como *Parkison* [20],

Sarpkaya [21], *Griffin at al.* [22], *Williamson at al.* [7]) tem buscado identificar e predizer as características envolvidas no fenômeno da vibração induzida por vórtices.

Em 1904, em um estudo realizado por *Prandt* [23] definiu a ideia de camada limite, que trata-se de uma região adjacente a uma superfície sólida imersa em um escoamento, na qual tensões viscosas estão presentes, em contraposição à corrente livre onde as tensões viscosas são desprezíveis. A figura 2.1 demonstra a formação de uma camada limite na superfície de uma placa plana.

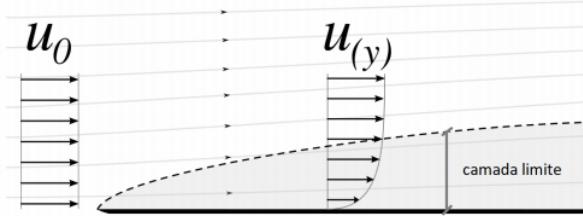


Figura 2.1: Demonstração visual da camada limite, adaptado de [3].

No escoamento do fluido, as partículas fluidas têm sua velocidade reduzida por tensões de cisalhamento e também possuem um gradiente adverso de pressão, ou seja, a pressão aumenta no sentido do escoamento ($\nabla p > 0$) provocando como consequência uma redução na velocidade das partículas fluidas na camada-limite. Se esse gradiente for severo, as partículas serão levadas ao repouso e com isso, as partículas são obrigadas a se afastar do corpo (separação do escoamento), conforme podemos observar na figura 2.2.

As partículas começam a se afastar do objeto no ponto denominado como ponto de separação e apesar de estarem em repouso, o escoamento é contínuo e o fluxo constante empurra essas partículas para frente. Com isso podemos notar que a trajetória dessa partícula ao longo do tempo terá o formato de vórtice e originará a região denominada de esteira, ou seja, uma região que contém partículas que estão em repouso, conforme mostrado na figura 2.2.

A natureza rotacional do escoamento na região da esteira origina em movimentos circulares formando núcleos de vorticidade, que é uma medida da rotação de um

elemento de fluido se movendo em um campo de escoamento. Esses núcleos de vorticidade são chamados de vórtices.

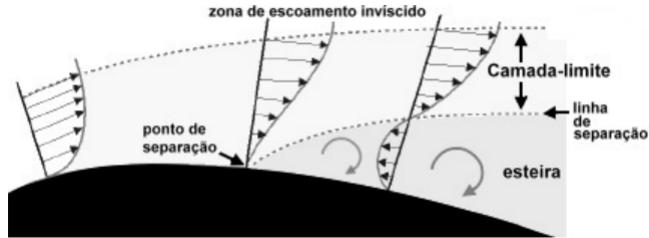


Figura 2.2: Ilustração da separação de um escoamento, adaptado de [4].

Em 1990, *Blevins* [24] descreveu a formação de vórtices ao redor de um cilindro submerso em um escoamento. O estudo demonstrou que ao se aproximarem do cilindro, as partículas sofrem um aumento de pressão em relação ao escoamento livre. Essa alta pressão impulsiona o fluido ao redor do cilindro e assim inicia-se o desenvolvimento da camada limite em ambos os lados do cilindro. Sob certas condições, esse aumento da pressão não é capaz de manter o escoamento aderido à parede de trás do cilindro, ocasionando assim a separação da camada limite em ambos os lados, como ilustrado na figura 2.3. Essa separação do escoamento, origina duas camadas cisalhantes que formam uma região de esteira e consequente formação das trilhas de vórtices, conforme pode ser observado na figura 2.3.

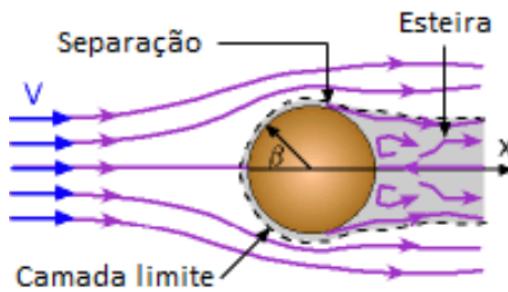


Figura 2.3: Ilustração da região de esteira para um cilindro, adaptado de [5].

Em 1984, *Bearman* [25] definiu o conceito de "bluff-body", que consiste em um corpo rombudo que quando submerso em um escoamento possui uma considerável separação do escoamento ao redor de sua superfície. Em contrapartida, na literatura temos também a definição de um corpo esbelto que consiste em um corpo que

mantém o todo ou praticamente todo o escoamento aderido à sua superfície.

2.4 Interação fluido-estrutura.

A interação fluido-estrutura (FSI) constitui o acoplamento entre diferentes fenômenos, como por exemplo a mecânica dos fluidos e a mecânica estrutural. Podemos encontrar problemas FSI em várias áreas das engenharias, tais como: mecânica, aeronáutica (*Stein* [26]), óleo e gás (*Koh at al.* [27]), na área da medicina (*Stergiopoulos* [28], *Taylor at al.* [29]), em estudos de biomecânica (*Steinman* [30]), energia renováveis (*Pantua at al.* [31]), dentre outras áreas de aplicação.

Conforme abordado no capítulo anterior, quando um fluido escoa ao redor de um corpo, este fluido gera uma força resultante que atua sobre o corpo submerso. Essa força surge devido às distribuições de pressão e tensão cisalhante que o fluido impõe sobre a superfície do corpo. A esse fenômeno de acoplamento entre a mecânica dos fluidos e a mecânica, dá-se o nome de interação fluido-estrutura.

A força resultante que surge dessa interação pode ser decomposta em duas componentes: a força de arrasto (F_D) que atua na direção do escoamento e a força de sustentação (F_L) que atua na direção transversal ao escoamento, conforme mostrado na figura 2.4.

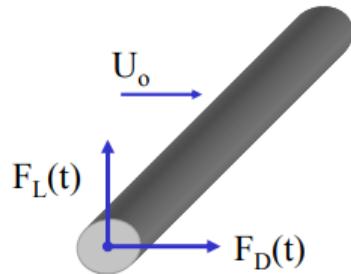


Figura 2.4: Forças em um cilindro submerso em um escoamento.

Conforme podemos observar na figura 2.4 o fluido ao escoar ao redor de um objeto origina duas forças sobre esse corpo. Essas forças são denominadas de forças

de arrasto F_L e força de sustentação F_D e conforme demonstrado em *Anderson* [6] podem ser obtidas do seguinte modo:

$$F_L = Lo \cdot \cos(\omega_s t + \psi) \quad (2.1)$$

$$F_D = Do \cdot \cos(2\omega_s t + \psi) \quad (2.2)$$

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad (2.3)$$

Onde f_s é a frequência natural do corpo que está submerso ao escoamento.

Além disso, quando a frequência de oscilação do corpo se torna próxima a frequência de geração dos vórtices ($f_s \sim f_v$) acontece o fenômeno chamado de "lock in", que é o ganho na amplitude de vibração do corpo sobre o escoamento.

Com a proposta de predizer como essas forças se comportam ao longo do tempo, de acordo com características tanto geométricas como propriedades do escoamento, existem 2 grandezas adimensionais que nos auxiliam na análise do comportamento do fenômeno, a primeira é o coeficiente de arrasto C_D e a segunda o coeficiente de sustentação C_L que são definidos nas equações 2.4 e 2.5, respectivamente. O termo $\frac{1}{2}\rho U^2$ é chamado de pressão dinâmica e S é uma área de referência, conforme demonstrado em *Anderson* [6].

$$C_L = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (2.4)$$

$$C_D = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (2.5)$$

$$\omega_s = 2\pi f_s \quad (2.6)$$

Para o escoamento ao redor de um cilindro, o coeficiente de arrasto é função do número de Reynolds, isto é, $C_D = f(R_e)$. As propriedades do fluido que irão ser tomadas para o cálculo do número de Reynolds são tomadas no escoamento de

corrente livre. A figura 2.5 demonstra a dependência do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds.

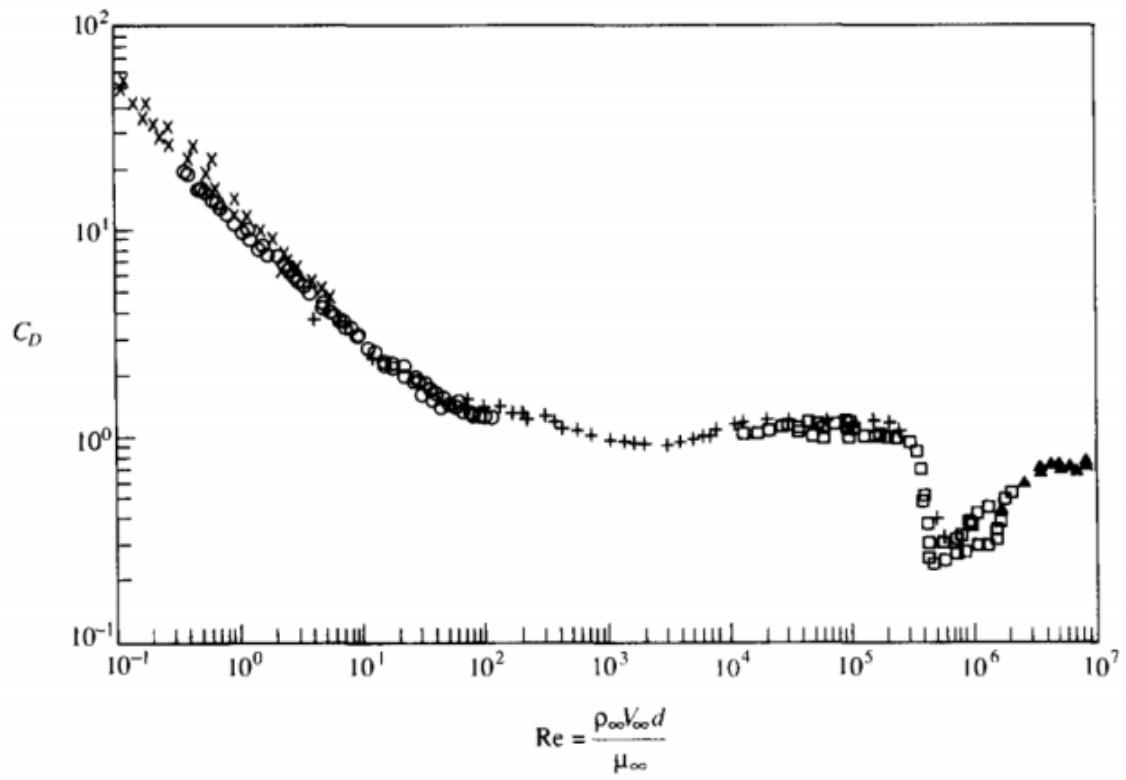


Figura 2.5: Coeficiente de arrasto no escoamento ao redor de um cilindro circular em função do número de Reynolds, adaptado de [6].

No fenômeno de interação fluido-estrutura temos também a frequência de emissão dos vórtices que é influenciada pelo Número de Reynolds. Conforme demonstrado na figura 2.6, quando o número de Reynolds aumenta, ocorre aumento na frequência de desprendimento de vórtices e também um aumento na região de esteira.

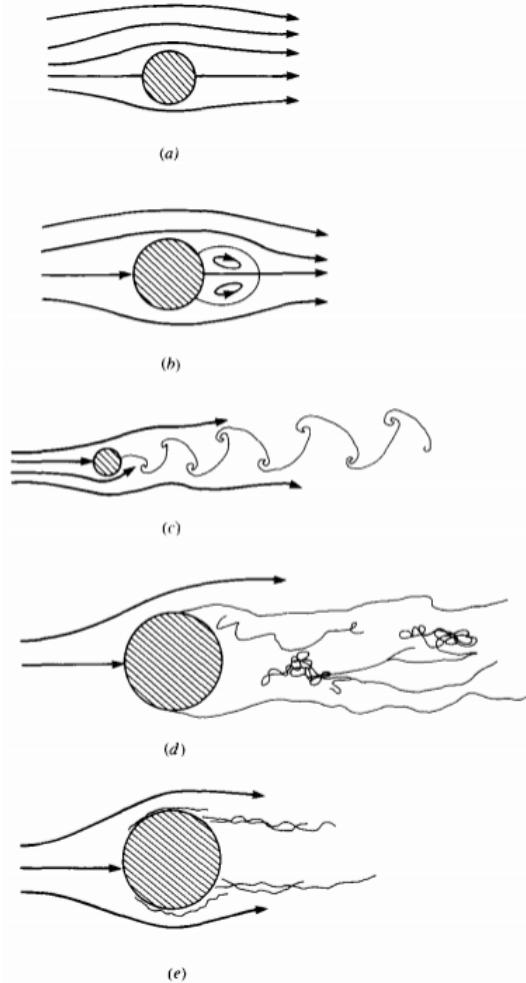


Figura 2.6: Tipos de escoamento ao redor de um cilindro circular para diferentes faixas de número de Reynolds, adaptado de [6].

Por fim, além da análise da região de esteira, nos últimos anos pesquisadores tem estudado a frequência da emissão de vórtices. Um estudo realizado por *Williamson at al.* [7], permitiu a observação da relação dos diferentes padrões de emissão de vórtices e amplitude com velocidade reduzida, conforme pode ser observado na figura 2.7.

Temos por exemplo o padrão 2S de emissão de vórtices característico do escoamento ao redor de um cilindro fixo é alterado quando este encontra-se livre para oscilar. Um estudo realizado por *Williamson at al* [7] permitiu a observação da relação dos diferentes padrões de emissão de vórtices com velocidade reduzida e a amplitude reduzida do movimento. Em resumo, os resultados podem ser observados

na figura 2.6.

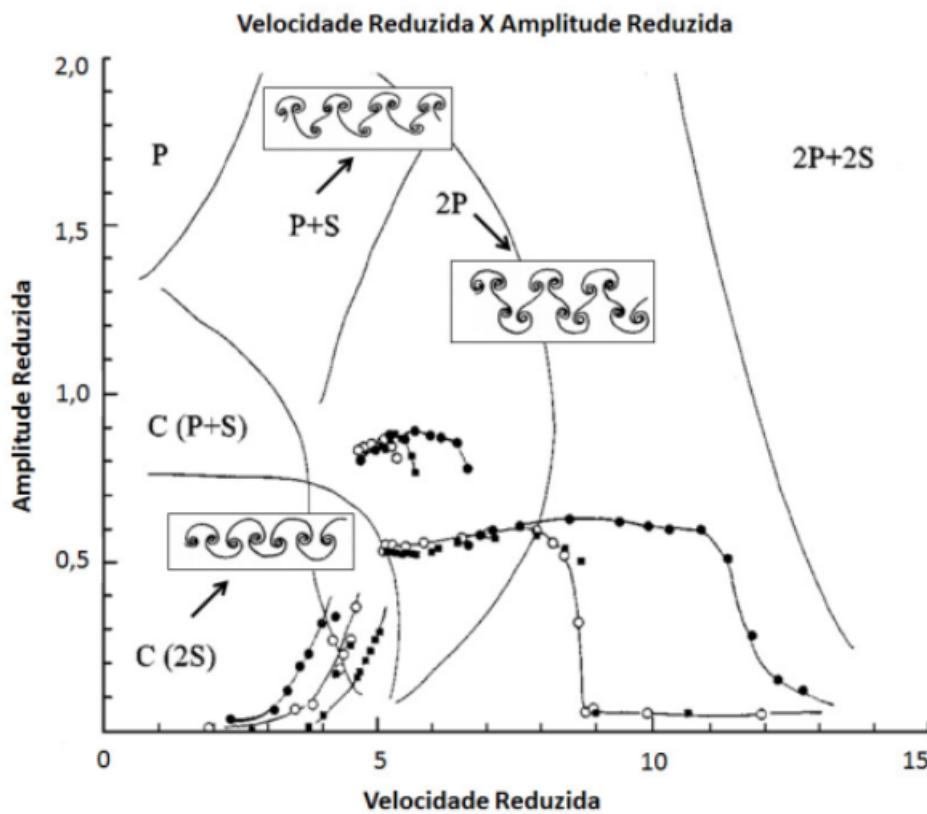


Figura 2.7: Padrão de emissão da esteira de vórtices para diferentes valores de velocidades e amplitudes reduzidas, adaptado de [7].

Capítulo 3

Metodologia.

3.1 Modelo teórico.

3.1.1 Função corrente.

Na mecânica dos fluidos os fenômenos são regidos por equações de conservação e quantidade de movimento. Para um escoamento bidimensional temos que a equação de conservação é descrita em termos das componentes de velocidades e é demonstrada em *Fox* [10], onde as componentes u e v são respectivamente, as velocidades na direção x e y.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Na literatura a função corrente (ψ) é definida como uma linha que é tangente ao vetor velocidade de uma partícula ao longo de todo o seu escoamento para um dado instante de tempo. Segundo *Fox* [10], para um escoamento bidimensional a função corrente é descrita a seguir, onde as componentes u e v são respectivamente, as velocidades na direção x e y.

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.3)$$

Na equação 3.1 notamos a existência de uma propriedade importante para a função corrente ψ , que é o fato de que ela satisfaz a equação da continuidade para um fluido incompressível em um escoamento bidimensional, conforme demonstrado a seguir, onde ρ é constante.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] = 0 \quad (3.4)$$

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.7)$$

Por fim, vale ressaltar que a dimensão de ψ no SI é $[m^2 \cdot t^{-1}]$.

3.1.2 Cinemática de uma partícula fluida.

Para estudarmos a cinemática de uma partícula fluida, podemos considerar uma partícula infinitesimal conforme mostrado na figura 3.1. O movimento desse elemento é descrito em quatro componentes: translação, rotação, deformação linear e deformação angular. Nesse trabalho iremos descrever apenas os movimentos de translação e rotação, pois são estes que irão ter enfase na resolução da equação corrente vorticidade pelo método numérico aplicado.

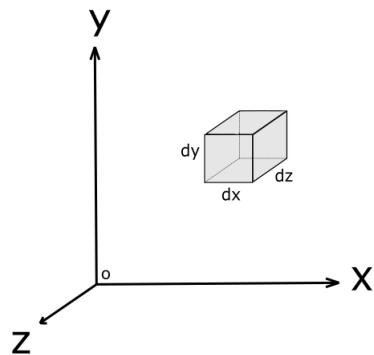


Figura 3.1: Partícula infinitesimal de um fluido.

Analizando a translação de uma partícula fluida notamos que esta é diretamente ligada ao seu campo de velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, expressos no sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, para o estudo das equações de *Newton* precisamos da aceleração dessa partícula. Conforme demonstrado em *Fox* [10], a aceleração em um escoamento bidimensional que esse partícula infinitesimal está submetida é dada por:

$$\mathbf{a}_p = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})}{\partial t} \quad (3.8)$$

Outra componente do movimento de uma partícula fluida é a vorticidade ω . Para analisar a rotação de um partícula infinitesimal movendo-se em um campo de escoamento bidimensional, temos que segundo *Fox* [10] que em coordenadas cartesianas ela calculada do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z \quad (3.9)$$

Onde ω_x é a rotação sobre o eixo x , ω_y é a rotação sobre o eixo y e ω_z é a rotação sobre o eixo z . O sentido de rotação é dado pela regra da mão direita. Conforme mostrado por *Fox* [10], a taxa de rotação em cada direção também pode ser obtida do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) \quad (3.10)$$

3.1.3 Dinâmica de uma partícula fluida.

Para o estudo da dinâmica de uma partícula fluida basta aplicarmos a segunda Lei de *Newton* a um partícula infinitesimal. Assim obteremos a equação diferencial do movimento de qualquer partícula em termos dos esforços que esse partícula infinitesimal esta submetida. A figura abaixo demonstra as componentes de tensões x e y na direção x .

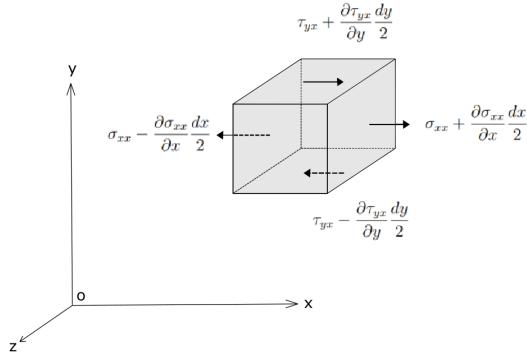


Figura 3.2: Tensões sobre um elemento de fluido na direção x

Satisfazendo a hipótese do contínuo, temos que para um escoamento bidimensional as equações diferenciais que regem o movimento da partícula, segundo *Fox* [10], com ρ constante são mostradas a seguir.

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

Além disso, podemos expressar essas equações diferenciais em termos do seu campo de velocidade e pressão. Adotando também a hipótese de um fluido newtoniano, ou seja, um fluido cuja viscosidade ou atrito interno é constante para diferentes taxas de cisalhamento e não variam com o tempo, as equações diferenciais são comumente chamadas de equações de *Navier – Stokes* e são definidas a seguir.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.14)$$

A seguir são descritos cada termo das equações 3.13 e 3.14.

- μ é a viscosidade dinâmica;
- ρ é a massa específica;
- ν é a viscosidade cinemática definida como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$;
- p é a pressão;
- u é a velocidade na direção x;

- v é a velocidade na direção y .

De modo a facilitar o avanço das definições que serão abordadas neste trabalho, as equações de *Navier-Stokes* podem ser escritas em notação vetorial, conforme mostrada a seguir:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3.15)$$

3.1.4 Adimensionalização das equações.

Muitos fenômenos em mecânica dos fluidos apresentam dependência de parâmetros geométricos e do escoamento, o que torna o seu estudo mais complexo. Visando facilitar a compreensão e análise de como cada parâmetro pode modificar a física do problema, na mecânica temos a adimensionalização das equações.

Neste trabalho iremos aplicar o teorema PI de Buckingham para adimensionalizar as equações e facilitar a influência de cada um dos parâmetros na solução de cada equação. Como demonstrado em *Fox* [10].

Como nomenclatura, denotando as quantidades adimensionalizadas por asteriscos (*). Temos por exemplo as seguintes variáveis adimensionalizadas:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{U} \quad e \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad (3.16)$$

Aplicando o conceito de adimensionalização nas equações da continuidade e *Navier-Stokes* temos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* = -\nabla p^* + \frac{\nu}{UL} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g} \frac{L}{U^2} \quad (3.17)$$

Podemos notar que surgiram números adimensionais clássicos na mecânica dos fluidos e são definidos conforme abordado em *Fox* [10], onde U é a velocidade na corrente livre do escoamento.

- $\frac{\rho U D}{\nu} = \frac{UD}{\nu}$ é o número de Reynolds (Re)
- $\frac{U}{\sqrt{gL}}$ é o quadrado do número de Froude (F_r^2)

Logo a equação de Navier-Stokes pode ser reescrita de forma adimensionalizada e simplificada do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g} \frac{1}{Fr^2} \quad (3.18)$$

3.1.5 Formulação corrente vorticidade.

A equação de *Navier-Stokes* é descrita em termos do acoplamento do campo de pressão e do campo de velocidades. Visando uma melhor solução numérica para essa equação, a formulação corrente vorticidade surgiu como um modo de desacoplarmos os dois campos. Para obtermos a formulação da corrente vorticidade, é necessário aplicar o rotacional na equação de *Navier-Stokes*. A seguir é descrito a aplicação do rotacional e o passo a passo para obtenção da formulação.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \nabla^2 \times \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (3.19)$$

Utilizando o operador rotacional ($\nabla \times$) na equação (2.15) temos:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times \frac{\nabla \mathbf{v}}{2} - \nabla \times \mathbf{v} \times \nabla^2 \times \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla p + \quad (3.20)$$

$$\nabla \times \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g}$$

Reorganizando todos os termos temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times \frac{\nabla}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla^2 \times \mathbf{v}] = -\nabla \times \nabla p + \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g}$$

Por definição podemos anular alguns termos da equação (2.17):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times \frac{\nabla}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla^2 \times \mathbf{v}] = -\cancel{\nabla \times \nabla p}^0 + \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g}$$

Conforme podemos analisar, a equação da corrente vorticidade terá zerado alguns termos. A primeira parcela referente à pressão é zerado devido ao fato do rotacional do gradiente ser sempre nulo. Já o segundo termo é referente a gravidade e nesse trabalho os efeitos gravitacionais não serão levados em conta.

Além disso, conforme a definição apresentada na equação (2.7) o termo $\nabla \times \mathbf{v} = \omega_z$ também será substituído na equação 3.21. Com todas essas hipóteses a equação de *Corrente Vorticidade* se torna:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.23)$$

Lembrando que a relação da função corrente (ψ) com a vorticidade (ω) é expressa por:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (3.24)$$

Como as análises realizadas neste trabalho são bidimensionais, utilizaremos apenas a componente da vorticidade na direção z.

$$\omega_z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$$

Por fim, há outra modo de expressarmos a função corrente, que é através do operador Laplaciano a equação 3.1.5, conforme demonstrado em *Fox* [10]:

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z \quad (3.25)$$

3.1.6 Vibração induzida por vórtices.

Para o estudo da vibração induzida por vórtices, o caso clássico conforme descrito em *Simon* [32], ou seja, um cilindro circular submerso em um escoamento uniforme pode ser modelado como um oscilador massa-mola. A figura a seguir nos trás uma visão esquemática do oscilador.

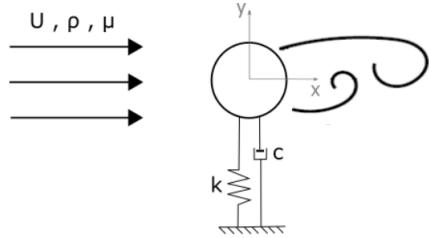


Figura 3.3: Esquema da configuração de um oscilador massa-mola.

Através da 2^a Lei de Newton, a equação dinâmica que descreve o deslocamento do cilindro, desconsiderando o movimento na direção x, em termos das suas coordenadas cartesianas, coeficientes de atrito e constante elástica é descrita a seguir, onde as constantes são descritas na tabela 3.1.

$$m \frac{d^2Y}{dt^2} + c \frac{dY}{dt} + kY = F_y \quad (3.26)$$

Deslocamento do cilindro	Y
Força de sustentação	F_y
massa do cilindro (%)	m
coeficiente de amortecimento (%)	c
constante da mola (%)	k

Tabela 3.1: Variáveis da equação dinâmica do cilindro.

A equação da dinâmica do movimento do cilindro pode ser adimensionalizada e desse modo podemos analisar a influência de cada um do parâmetros descritos na tabela 3.1 na dinâmica do cilindro. Conforme demonstrado em *Simon* [32], a equação 3.26 adimensionalizada é:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{\gamma_c}{m} \frac{dY}{dt} + \left(\frac{2\pi}{U^*} \right) Y = \frac{C_y}{2m} \quad (3.27)$$

Frequência natural do oscilador (obtida no vácuo)	$f_{nat} = D/2\pi U \sqrt{k_y/\rho_c}$
Amortecimento adimensional	γ_c
Velocidade reduzida	$1/f_{nat}$
Massa adimensional	m
Força de sustentação	C_y

Tabela 3.2: Variáveis da equação dinâmica adimensionalizada do cilindro.

3.1.7 Abordagem lagrangiana euleriana.

A abordagem lagrangiana euleriana arbitrária é discutida em detalhes em *Hughes* [33]. Nesse modelo a malha não está ligada ao material, como na abordagem Lagrangiana, e também a malha não é definida em termos das coordenadas espaciais, como na abordagem Euleriana.

Na abordagem langrangiana euleriana a malha é descrita utilizando uma componente que representa a sua velocidade \hat{u} . Segundo *Hirt* [34] a abordagem LEA é uma nova técnica que pode ser aplicada a escoamentos que possuem qualquer velocidade, trazendo assim maior flexibilidade para as análises utilizando a equação de *Corrente Vorticidade*.

Após introduzirmos o conceito de que a malha possui uma associada a ela, a equação de transporte da vorticidade dada na equação 3.23, possuirá essa nova componente, conforme mostrado a seguir:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.28)$$

Onde u e \hat{u} são as velocidades da partícula e da malha na direção x , v e \hat{v} são respectivamente as velocidades da partícula e da malha na direção y . Os termos $(u - \hat{u})$ e $(v - \hat{v})$ são denominados como velocidades convectivas na direção x e y , respectivamente.

Na literatura, existem alguns modos de calcular a velocidade da malha (\hat{u}), neste trabalho foi proposto o uso do suavizador Laplaciano (*Laplacian Smooth Operator*)

para o cálculo da velocidade da malha. Este método consiste em criar uma velocidade ponderada para cada vértice do elemento e essa velocidade suavizará a forma do elemento da malha pra que este atinja o formato de um triângulo equilátero, ou seja, ela determinará a posição x_i^{n+1} que force o elemento a ficar um triângulo equilátero. A figura 3.4 mostra a distribuição dos pontos da malha antes e depois de aplicarmos o suavizador Laplaciano.

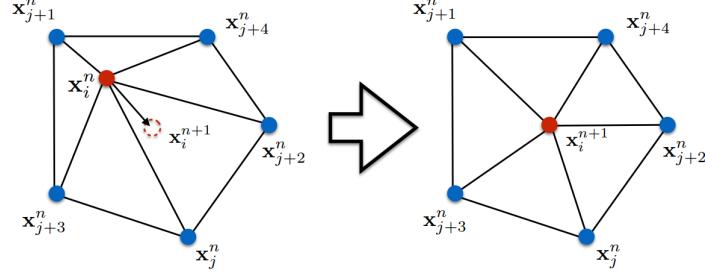


Figura 3.4: Esquema do suavizador Laplaciano [8].

Para o cálculo da velocidade é necessário definir a posição média dos vértices. Essa posição terá um peso associado à ela que no caso será a distância desse vértice ao vértice central (em vermelho) na figura 3.4. O cálculo da posição média pode ser feito do seguinte modo:

$$x_i^{n+1} = \frac{\sum_j x_j dist_{ij}}{\sum_j dist_{ij}} ; \quad y_i^{n+1} = \frac{\sum_j y_j dist_{ij}}{\sum_j dist_{ij}} \quad (3.29)$$

A partir do cálculo da posição final do vértice de cada nó, podemos calcular a velocidade da malha através do seguinte cálculo:

$$\hat{u} = \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\Delta t} \quad (3.30)$$

$$\hat{v} = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} \quad (3.31)$$

3.2 Modelo numérico

3.2.1 Método de elementos finitos.

No desenvolvimento do método de elementos finitos a primeira etapa consiste em definir as equações de governo da física do problema e as suas condições de contorno, sendo essa etapa denominada de formulação forte, conforme abordado em [11].

Todo o trabalho desenvolvido nos tópicos anteriores a este, se referem a formulação forte do estudo da corrente vorticidade e as equações de movimento definidas.

O segundo passo consiste em uma forma integral da formulação forte, onde essa forma recebe o nome de formulação fraca. Segundo *Fish* [11], a formulação fraca para um problema bidimensional é obtida com a multiplicação das equações de governo por uma função peso $w(x)$ e em seguida as integramos sobre o domínio do problema Ω e contorno natural Γ_q , respectivamente.

A fim de exemplificar como transformar uma equação diferencial da forma forte para a forma fraca podemos ter como exemplo a seguinte equação com suas respectivas condições de contorno. Este exemplo foi retirado de *Anjos* [8].

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.32)$$

$$u = u_o \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (3.33)$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \text{em } \Gamma_L \quad (3.34)$$

Para transformarmos essa equação para a forma fraca, temos que multiplicar a equação acima por uma função peso w e integra-la sobre o domínio Ω .

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{d^2u}{dx^2} + u + 1 \right] d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Utilizando a identidade de Green, conforme descrita em *Diomara* [35], para reduzirmos a ordem da derivada mais alta, temos:

$$w \frac{du}{dx} \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} w u d\Omega + \int_{\Omega} w d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

(3.37)

$$w \frac{du}{dx} \Big|_{\Gamma_0} - w \frac{du}{dx} \Big|_{\Gamma_L} - \int_{\Omega} \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} w u d\Omega + \int_{\Omega} w d\Omega = 0 \quad (3.38)$$

Para uma condição de contorno do tipo Dirichlet o valor da função peso no contorno se torna nulo $w = 0$, o que torna o primeiro termo da equação acima nula. Por outro lado, quando a condição de contorno é do tipo Neumann, o termo no contorno existirá.

As soluções aproximadas para a equação diferencial em questão, se da através da substituição das funções w e u . No método de elementos finitos podemos aproxima-las por um somatório dessa variável avaliada com as funções de aproximação $N_i(x)$ e $N_j(x)$ que são avaliadas em cada nó da malha que iremos utilizar.

$$\mathbf{u}^e(x) = \sum u_i N_i^e(x) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{w}^e(x) = \sum w_j N_j^e(x) \quad (3.40)$$

Atualmente existem diversos formas para selecionarmos essas funções de forma, sendo um dos casos mais utilizados o Método de Galerkin, onde as funções u e w são iguais, ou seja, $N_i^e = N_j^e$.

Ao utilizarmos o Método de Galerkin e substituirmos as respectivas escolhas para as funções de aproximação na equação 3.38, obteremos diversas integrais que terão os termos N_i^e e N_j^e , bem como as suas derivadas $dN_i^e/dx = N_j^e/dx$. Podemos a partir dessas integrais definirmos o que chamamos de matrizes elementares, que são definidas como:

- $\mathbf{k}_{i,j} = \int_{\Omega_e} \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} d\Omega$

- $\mathbf{m}_{i,j} = \int_{\Omega_e} N_j N_k c_k d\Omega$

- $\mathbf{f}_i = \int_{\Omega_e} N_i f d\Omega$

Onde as matrizes $k_{i,j}$, $m_{i,j}$, f_i são conhecidas como matriz elementar de rigidez, massa e vetor carregamento do elemento, respectivamente.

Para determinarmos as matrizes globais podemos realizar um assembling, que consiste na soma das matrizes elementares de todos os nós que compõe a malha do estudo.

Logo as matrizes K , M e f passam a ser denominadas como matrizes globais, contendo assim um termo A que é conhecido como operador montagem (Assembling).

O assembling consiste na montagem das matrizes globais, que originam da junção das matrizes elementares de todos os elementos que compõem a malha. Conforme podemos observar na figura 3.5 as matrizes globais são matrizes tridiagonais.

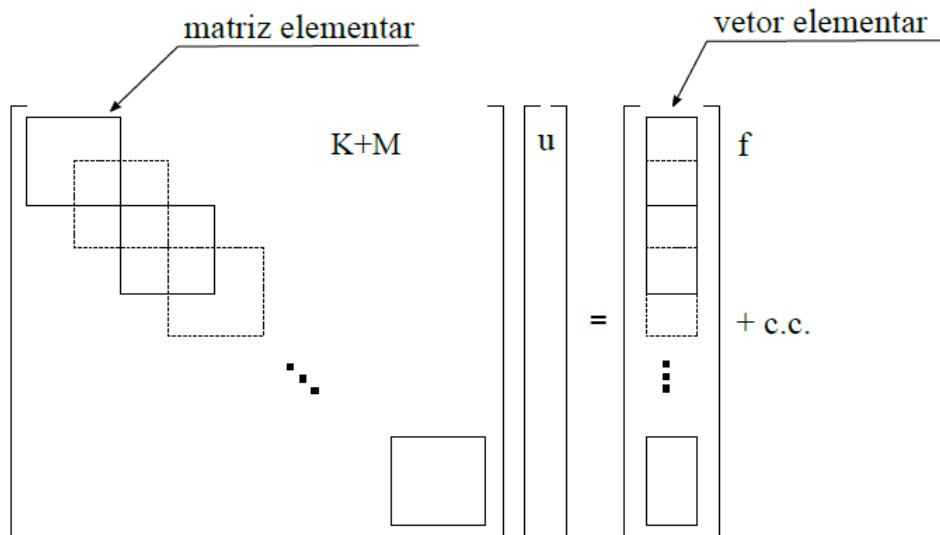


Figura 3.5: Assembling realizado nas matrizes global de rigidez e de massa, respectivamente [8].

$$\mathbf{K} = A_{e=1}^{ne} k^e \quad (3.41)$$

$$\mathbf{M} = A_{e=1}^{ne} m^e \quad (3.42)$$

$$\mathbf{f} = A_{e=1}^{ne} f^e \quad (3.43)$$

3.2.2 Gerador de malhas.

Neste trabalho, utilizou-se a open source *Gmesh* [36], que é um gerador de malha 3D com um mecanismo CAD e um pós-processador embutido em seu código, para gerarmos todas as malhas que foram necessárias. Um exemplo de malha gerada através do software é demonstrado na figura 3.6.

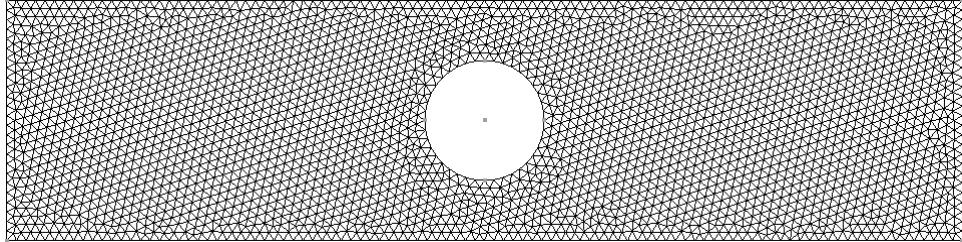


Figura 3.6: Exemplo de malha criada utilizando o *Gmesh*.

Quando utilizamos o *Gmesh* [36], podemos desenhar a geometria desejada e também definir o tipo de elemento para o estudo. Para mais detalhes de como construir malhas, consulte *Gmesh* [36].

3.2.3 Discretização do domínio.

A discretização do domínio consiste em sua divisão em subdomínios menores. Estes subdomínios no método de elementos finitos são chamados de elementos e podem possuir diversas formas geométricas como triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc. Além disso, podemos mesclar duas ou mais formas geométricas em um mesmo domínio.

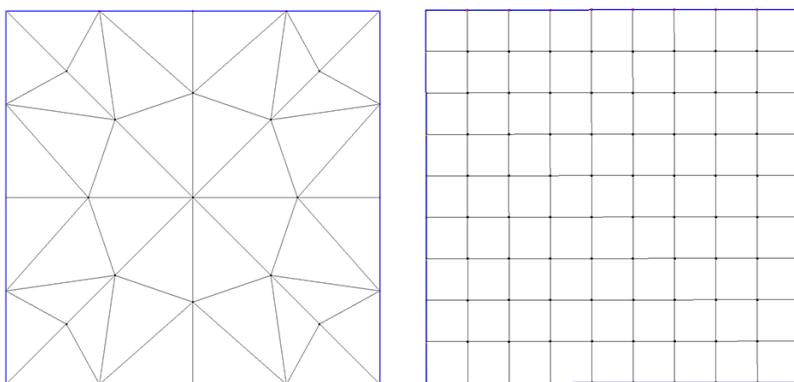


Figura 3.7: Exemplos de malha triangular e quadrangular

O número de subdomínios necessários para a aplicação do método de elementos finitos, varia de acordo com a geometria do problema bem como o fenômeno físico em estudo. Para a determinação do número mínimo de elementos para uma boa aproximação da solução, é necessário realizarmos a análise da convergência de malha.

A convergência de uma malha é feita através da variação do número de elementos presentes e também é feita a verificação da sensibilidade de uma variável do problema em estudo, como por exemplo a componente da velocidade em uma direção do escoamento v_x . Quando essa sensibilidade já não é mais afetada a malha é dita convergida e o número mínimo de elementos necessários é obtido.

3.2.4 Elemento da malha.

Para todas as análises realizadas neste trabalho, a malha utilizada é de elementos triangulares e estes possuem três vértices e três nós. A escolha deste elemento para o estudo ocorreu devido a sua simplicidade de sua metodologia e por apresentar uma boa discretização de superfícies irregulares.

Para a metodologia de elementos finitos é necessário termos um padrão na identificação dos vértices de cada elemento. Para isso eles são identificados através dos subíndices (i, j, k) e cada um desses vértices um possui uma coordenadas (x, y) no plano 2D, conforme mostrado a seguir.

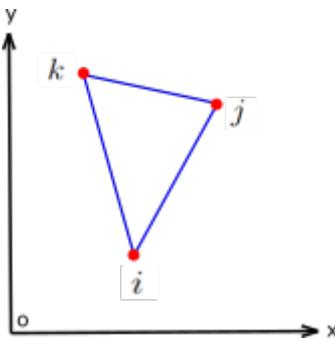


Figura 3.8: Elemento utilizado na discretização do domínio

Acrescido a escolha da geometria do elemento, também é necessário a escolha do polinômio interpolador do elemento. Esse polinômio será o responsável em calcular a variável desejada em cada um dos nós. Visando demonstrar alguns tipos de

polinômio interpoladores, abaixo apresentamos exemplos de polinôminos interpoladores que podem ser utilizados para a aproximação da solução, conforme descrito em *Anjos* [8]:

- Polinômio grau 1 - Função linear
- Polinômio grau 2 - Função quadrática
- Polinômio grau 3 - Função cúbica

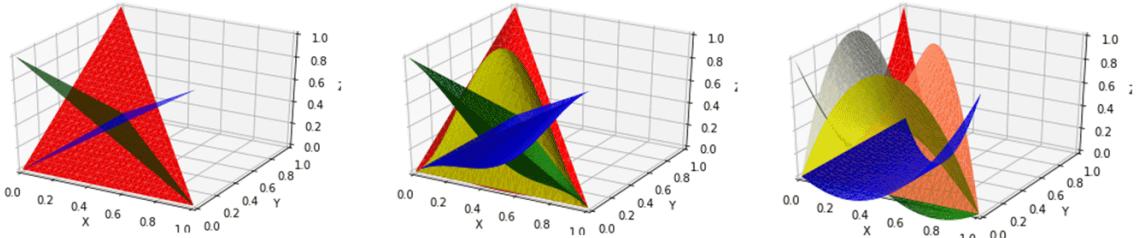


Figura 3.9: Representação das funções de forma linear, quadrática e cúbica para o elemento triangular.

Neste trabalho foi utilizado o polinômio interpolador linear, que será utilizado para encontrarmos a solução do problema. Abaixo é mostrado as funções de forma lineares para o elemento triangular, conforme demonstrado em *Fish* [11].

$$\mathbf{N}(x, y) = [N_i \ N_j \ N_k] \quad (3.44)$$

As componentes da função de forma para cada nó do elemento são descritas a seguir:

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.45)$$

$$N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \quad (3.46)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \quad (3.47)$$

Em que a_i, b_i e c_i são parâmetros que são calculados através da posição (x,y) do nó de cada elemento. Outro modo de escrevermos essa equação é através da forma matricial, conforme demonstrado em *Fish* [11].

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i^e & a_j^e & a_k^e \\ b_i^e & b_j^e & b_k^e \\ c_i^e & c_j^e & c_k^e \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Conforme mostrado na equação 3.48, precisamos calcular a área do elemento triangular para que possamos determinar a função interpoladora. A fórmula para esse cálculo pode ser encontrada em *Anjos* [8] e será:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Por fim, para o cálculo das variáveis a_i, b_i e c_i que estão presentes na função de forma do elemento são dependentes das coordenadas geométricas dos seus respectivos nós. Conforme observado em *Fish* [11], elas são calculadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_j - x_k \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_k - x_i \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_i - x_j \end{aligned} \quad (3.50)$$

Na formulação fraca da equação da corrente vorticidade temos a presença do termo das derivadas das funções de forma. Com isto, o gradiente dessas funções é demonstrado em *Fish* [11]. Para facilitarmos a compreensão, iremos expressar os gradientes (g_x e g_y) em função de uma matriz \mathbf{B} que será calculada do seguinte modo:

$$\nabla \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^e \\ N_j^e \\ N_k^e \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\nabla \mathbf{N}^e = B \mathbf{N}^e \quad (3.52)$$

Além disso, em *Fish* [11] temos que a matriz B e as matrizes dos gradientes são expressas em funções das coordenadas dos nós do elemento.

$$\mathbf{g}_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} ; \mathbf{g}_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

3.2.5 O método aplicado a corrente vorticidade.

Para aplicarmos o método de elementos finitos na equação de corrente vorticidade 3.25, o primeiro passo é realizar a transformação da forma forte para a forma fraca. A partir disso, basta multiplicarmos a equação 3.25 pela função peso $w(x,y)$ e integra-la no domínio Ω .

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z \quad (3.54)$$

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \psi d\Omega + \int_{\Omega} w \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.55)$$

Após feito isso, utilizamos o teorema da integral por partes (Teorema de Green) conforme mostrado em (*Hoffman* [37]), para transformarmos o primeiro termo da equação em:

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \psi d\Omega = w \nabla \psi|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla w d\Omega \quad (3.56)$$

Substituindo o Teorema de Green na equação 3.55, temos:

$$w \nabla \psi|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla w d\Omega + \int_{\Omega} w \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.57)$$

Utilizando do Método de Galerkin, conforme descrito em *Fish* [11], para substituição das funções de forma w na formulação franca, podemos aproximar as variáveis ψ e ω_z do seguinte modo:

$$\hat{\psi} = \sum_{n=1}^{np} N_i \psi_i \quad (3.58)$$

$$\hat{w} = \sum_{n=1}^{np} N_j w_j \quad (3.59)$$

$$\hat{\omega}_z = \sum_{n=1}^{np} N_k \omega_k \quad (3.60)$$

Substituindo essas aproximações na equação 3.57 teremos:

$$N_j \nabla N_i \psi_i w_j |_{\Gamma} - \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \psi_i w_j d\Omega + \int_{\Omega_e} N_j N_k w_j \omega_k d\Omega = 0 \div w_j \quad (3.61)$$

$$N_j \nabla N_i \psi_i |_{\Gamma} - \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \psi_i d\Omega + \int_{\Omega_e} N_j N_k \omega_k d\Omega = 0 \quad (3.62)$$

Na equação 3.62 temos dois tipos de termos, sendo o primeiro o termo que é avaliado dentro do domínio Ω e o segundo termo que é avaliado no contorno Γ .

Podemos organizar todos os termos da equação 3.62 como um sistema linear de matrizes, como se segue:

$$-\mathbf{K} \psi_i^n + \mathbf{M} \omega_j^n + cc = 0 \quad (3.63)$$

$$\mathbf{K} \psi_i^n = \mathbf{M} \omega_j^n + cc \quad (3.64)$$

Valores nodais de ψ_i e ω_z	a_i e c_j
Matriz de Rigidez	\mathbf{K}
Matriz de massa	\mathbf{M}
Condições de contorno	cc

Tabela 3.3: Variáveis da equação corrente vorticidade na forma matricial.

Onde cada uma das matrizes são descritas na tabela 3.3. Além disso, as matrizes descritas na equação 3.9 são demonstradas em *Fish* [11] e são denominadas de matrizes elementares, sendo respectivamente a matriz de massa (m^e) e de rigidez (k^e).

Elas são calculadas em cada nó do domínio e depois desse cálculo faz-se necessário a criação da matriz de massa e rigidez globais.

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} = 1 \quad (3.66)$$

$$\mathbf{m}^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Além de toda discretização realizada até presente momento, podemos notar que a equação de transporte da vorticidade contém um termo de derivada temporal. Para a discretização do termo temporal foi utilizado o método de diferenças finitas progressivas, conforme apresentado em *Anjos* [8].

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} \simeq \frac{N_k^{n+1} - N_k^n}{\Delta t} \quad (3.68)$$

Aplicando a discretização temporal na equação de corrente vorticidade já com a abordagem lagrangiana euleriana 3.29 e aplicando o método de elementos finitos, conforme abordado no exemplo anterior, temos:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \omega_z = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.69)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w[(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \omega_z] d\Omega = \int_{\Omega} w \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z d\Omega \quad (3.70)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w[(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \omega_z] d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \nabla \omega_z \cdot \nabla w d\Omega + \frac{1}{Re} w \nabla \omega_z|_{\Gamma} \quad (3.71)$$

A partir da aplicação do método do resíduo ponderado na equação 3.71, temos a origem da formulação fraca do problema. Em seguida, aplicamos as funções de

aproximação através do Método de Galerkin, conforme demonstrado anteriormente (equações 3.54, 3.55 e 3.56), a equação 3.71 contendo a formulação fraca se torna:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_e} \frac{N_k^{n+1}}{\Delta t} N_j \omega_k w_j d\Omega - \int_{\Omega_e} \frac{N_k^n}{\Delta t} N_j \omega_k w_j d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla N_k \omega_k d\Omega \right) \\ & + \left(\int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} \nabla N_j \cdot \nabla N_k \omega_k w_j d\Omega + cc \right) \div w_j = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Na equação 3.72 foi escolhido avaliar cada termo de forma explícita, ou seja, no tempo n . Com isso, podemos organizar todos os termos da equação 3.72, definindo um sistema linear de matrizes do seguinte modo:

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^{n+1} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^n + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{G} \omega_k^n + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \omega_k^n + cc = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^{n+1} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \mathbf{K} - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{G} \right) \omega_k^n + cc \quad (3.74)$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^{n+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \mathbf{K} - (u - \hat{u}) \mathbf{G}_y - (v - \hat{v}) \mathbf{G}_x \right] \omega_k^n + cc \quad (3.75)$$

A seguir são descritos os termos da equação 3.75.

- \mathbf{G}_x é a matriz do gradiente, definida na equação 3.53.
- \mathbf{G}_y é a matriz do gradiente, definida na equação 3.53.
- \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, definida na equação 3.65.
- \mathbf{M} é a matriz de massa global, definida na equação 3.67.
- cc é o vetor condição de contorno do problema.
- \hat{u} e \hat{v} são determinadas de acordo com a equação 3.29

Ao implementarmos a formulação corrente vorticidade 3.75, notamos que esta equação possui um termo que implica em instabilidade numérica ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}$), sendo esse termo denominado como termo convectivo e gerando oscilações espúrias na solução numérica. Esse fenômeno ocorre quando o número de Reynolds é elevado, exigindo assim um passo de tempo cada vez menor e/ou a presença de uma malha cada vez

mais refinada para solucionar o surgimento dessas oscilações espúrias em problemas com Re moderados a altos. Tornando assim impraticável a simulação numérica através do método de Galerkin.

Na literatura, conforme abordado em *Anjos* [8], existem algumas técnicas para a correção da presença dessas instabilidades. Algumas técnicas usuais para o Método de elementos finitos são:

- método Characteristic Galerkin (Taylor-Galerkin)
- método SUPG (Streamline upwind Petrov-Galerkin)
- método Semi-Lagrangeano
- método de captura de choque (shock-capturing)
- método CBS (Characteristic-based Split)

Neste trabalho a técnica escolhida para correção da instabilidade numérica foi o método *Characteristic Galerkin*. O desenvolvimento desta metodologia é baseado na curva característica do escoamento que para uma discretização de primeira ordem, é aproximada como uma reta. A partir disso, utiliza-se a expansão em série de Taylor para os termos da equação de transporte. A figura 3.10 demonstra a aproximação da discretização da curva característica do escoamento.

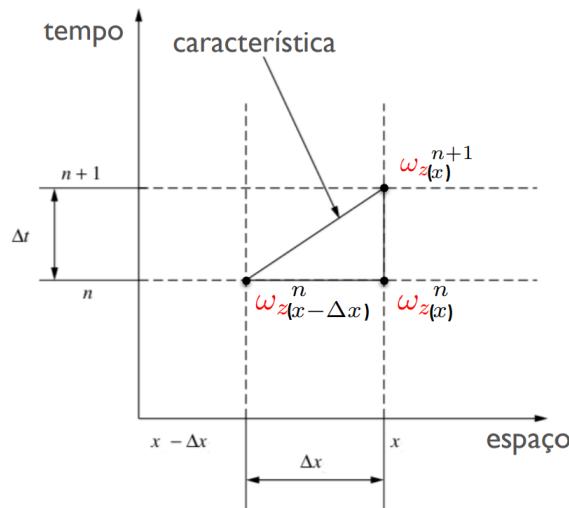


Figura 3.10: Discretização com o método Characteristic Galerkin, adaptado de [8].

A expansão em série de Taylor é demonstrada a seguir e pode ser encontrada em *Anjos* [8].

$$\omega_{z(x-\Delta x)}^n = \omega_{z(x)}^n - \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \quad (3.76)$$

A partir disso podemos calcular a derivada parcial da vorticidade através da equação 3.76, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)_{x-\Delta x}^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)_x^n - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)_x^n \right] \frac{\Delta x}{1!} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)_x^n \right] \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)_{x-\Delta x}^n = u \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right]^n + v \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right]^n \quad (3.78)$$

Utilizando uma discretização temporal semi-discreto, a equação da corrente vorticidade é apresentada com 2 termos adicionais de estabilização, sendo um para a direção x e outra para a direção y.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^{n+1} &= \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \mathbf{K} - (u - \hat{u}) \mathbf{G}_y - (v - \hat{v}) \mathbf{G}_x \right] \omega_k^n + \\ &+ u \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right]^n + v \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right]^n + cc \end{aligned} \quad (3.79)$$

Diante dessa nova discretização, podemos minimizar a instabilidade numérica e há inserção de uma nova matriz, denominada como matriz estabilizadora (\mathbf{K}_{est}).

O termo que contém \mathbf{K}_{est} aumentará o efeito difusivo do fenômeno e com isso os erros de discretização do termo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}$ também se difunde tendo como consequência, a estabilidade da solução da equação 3.75, conforme demonstrado em *Anjos* [8]. Desse modo, nas análises realizadas neste trabalho pode-se utilizar números de Re altos que não haverá problemas causados por instabilidade ou oscilações espúrias.

A matriz \mathbf{K}_{est} é definida a seguir e podemos notar que a cada iteração da análise de tempo n , essa matriz será calculada. Isso ocorre pois ela é dependente dos valores das velocidades u_{med} e v_{med} , que também são variáveis no tempo.

$$\mathbf{k}_{est}^e = \frac{u_{med}}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} u_{med}b_i^2 + v_{med}b_i c_i & u_{med}b_i b_j + v_{med}b_i c_j & u_{med}b_i b_k + v_{med}b_i c_k \\ u_{med}b_j b_i + v_{med}b_j c_i & u_{med}b_j^2 + v_{med}b_j c_j & u_{med}b_j b_k + v_{med}b_j c_k \\ u_{med}b_k b_i + v_{med}b_k c_i & u_{med}b_k b_j + v_{med}b_k c_j & u_{med}b_k^2 + v_{med}b_k c_k \end{bmatrix} + \frac{v_{med}}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} u_{med}c_i b_i + v_{med}c_i^2 & u_{med}c_i b_j + v_{med}c_i c_j & u_{med}c_i b_k + v_{med}c_i c_k \\ u_{med}c_j b_i + v_{med}c_j c_i & u_{med}c_j c_j + v_{med}c_j^2 & u_{med}c_j b_k + v_{med}c_j c_k \\ u_{med}c_k b_i + v_{med}c_k c_i & u_{med}c_k b_j + v_{med}c_k c_j & u_{med}c_k b_k + v_{med}c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Os termos u_{med} e v_{med} são as velocidades médias de cada elemento e para determinar o seu cálculo é necessário a análise das velocidades médias dos nós que compõem o elemento. A figura 3.11 demonstra como é o cálculo de u_{med} e v_{med} a cada passo de tempo. Conforme podemos notar, as velocidades médias são calculadas como a média da velocidade em cada um dos nós que compõe o elemento e o cálculo de cada componente é definido na equação 3.81.

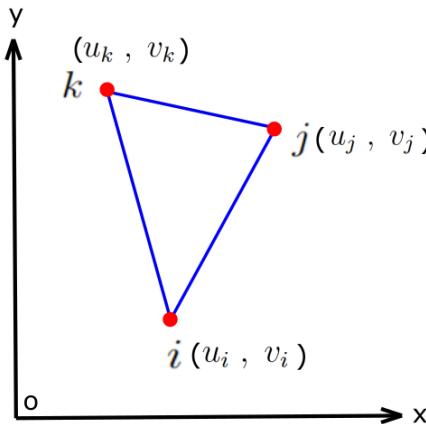


Figura 3.11: Velocidades nodais do elemento triangular.

$$u_{med} = \frac{u_i + u_j + u_k}{3} ; \quad v_{med} = \frac{v_i + v_j + v_k}{3} \quad (3.81)$$

Em seguida, após definir a matriz estabilizadora elementar, temos o assembling para a formação da matriz estabilizadora global, conforme demonstrado anteriormente na figura 3.10.

$$\mathbf{K}_e = A_{e=1}^{ne} k_e^e \quad (3.82)$$

Por fim, a equação 3.75 contendo o termo estabilizador é definida a seguir.

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_k^{n+1} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \mathbf{K} - (u - \hat{u}) \mathbf{G}_y - (v - \hat{v}) \mathbf{G}_x \right] \omega_k^n + \mathbf{K}_{est} \omega_k^n + cc \quad (3.83)$$

Conforme demonstrado em *Fox* [10] podemos definir algumas equações que serão auxiliares na nossa análise. Uma primeira equação é a definição do campo de velocidade através da função corrente (ψ) e outra equação é a definição de vorticidade (ω) em função do campo de velocidades do escoamento.

Para a aproximação da solução das equações auxiliares, utilizou-se a aplicação do Método de Galerkin e obte-se as seguintes equações matriciais:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{G}_y \psi \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\begin{cases} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \mathbf{M} \mathbf{v} = -\mathbf{G}_x \psi \end{cases} \quad (3.85)$$

$$\begin{cases} \omega_k = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \\ \mathbf{M} \omega_k = \mathbf{G}_x v - \mathbf{G}_y u \end{cases} \quad (3.86)$$

Sendo as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{G}_x e \mathbf{G}_y definidas como as matrizes global de massa, matriz global do gradiente na direção x e matriz global do gradiente na direção y. Estas podem ser calculadas de acordo com a posição de cada nó do elemento que compõem a malha, conforme demonstrado anteriormente pela equação 3.67.

Capítulo 4

Validação do código.

4.1 Escoamento Lid Driven.

Para o estudo de validação do código numérico desenvolvido neste trabalho, o primeiro caso considerado foi o estudo clássico do escoamento de um fluido confinado em uma cavidade com uma tampa deslizante, conhecido como escoamento de *Cavity Lid Driven*, demonstrado na figura 4.1.

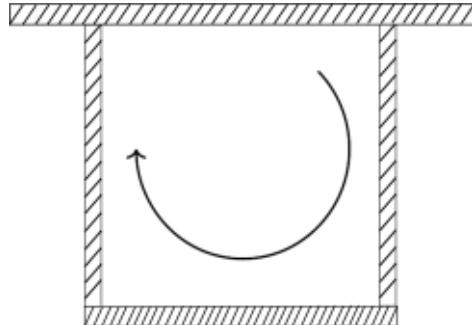


Figura 4.1: Clássico problema de escoamento em cavidade Lid Driven.

O escoamento que foi estudado por *Hagen Posseiuille* [38], é muito importante pois ele é um dos poucos casos onde podemos encontrar uma base experimental já estudada por outros pesquisadores e assim podemos validar o código numérico desenvolvido neste trabalho.

Em *Shih at al.* [1], é apresentada um ajuste de curva para os perfis de velocidade para o estudo, com número de Reynolds=1. Em resumo, de acordo com *Shih at al.*

[1] a velocidade na direção x (u) e a velocidade na direção y (v) do escoamento são determinadas a partir da distância y da parede inferior, conforme mostrada nas seguintes equações:

$$u = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (4.1)$$

$$v = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (4.2)$$

As condições de contorno para o escoamento em análise são mostradas na figura 4.2 e são descritas logo a seguir. Além disso, em relação ao modelo numérico desenvolvido, a tabela 4.4 apresenta as informações gerais para criação da geometria utilizada na simulação.

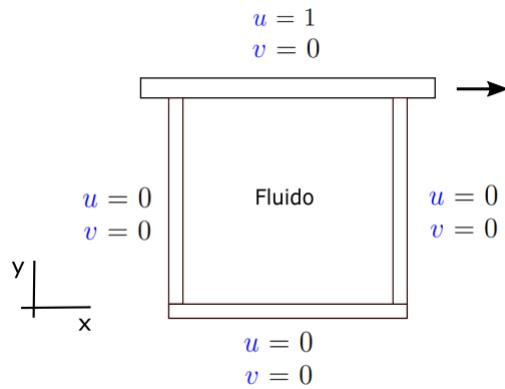


Figura 4.2: Condições de contorno do escoamento em uma cavidade Lid Driven.

Comprimento da cavidade	1m
Altura da cavidade	1m

Tabela 4.1: Geometria do escoamento Lid Driven.

Para determinação do número de nós da malha utilizados na simulação, realizou-se o refinamento da malha com $Re = 1$ como ilustrado na Figura 4.3. Como podemos verificar os valores convergem e estabilizam conforme o número de elementos aumentam e como critério de parada foi utilizado o erro $< 2\%$.

Malha analisada	Número de nós (n_p)	Número de elementos (n_e)
Malha 1	148	248
Malha 2	404	1714
Malha 3	1564	2998

Tabela 4.2: Configurações utilizadas para criação das malhas Lid Driven.

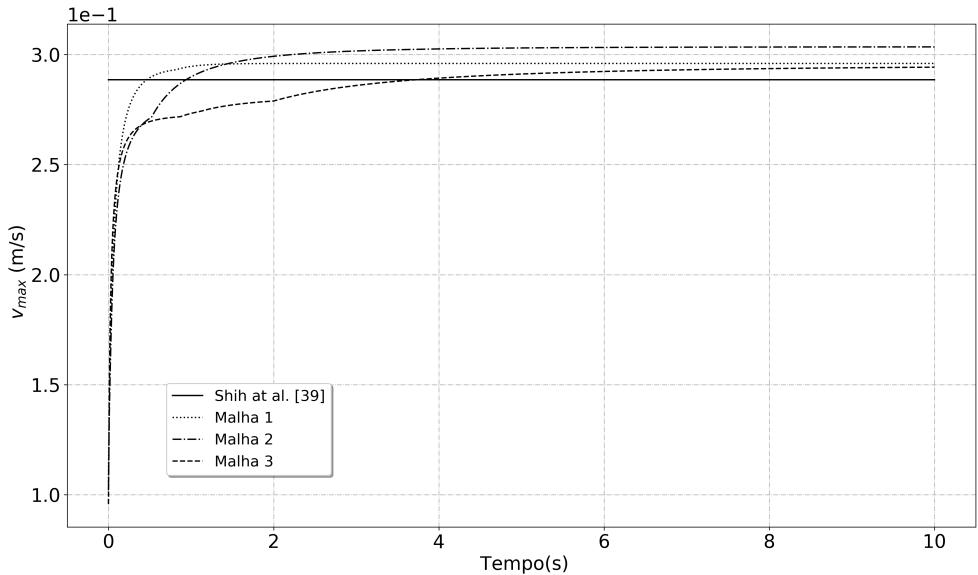


Figura 4.3: Análise do refinamento de malha para Lid Driven.

A tabela 4.3 trás o erro relativo da solução numérica deste trabalho em relação ao ajuste de curva obtido por *Shih at al.* [1]. Considerando os erros inerente ao método numérico utilizado, os resultados obtidos permitem concluir que a simulação desenvolvida para o caso em estudo, funciona satisfatoriamente com erros relativos abaixo de 1.97%.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3
Erro relativo (%)	3.5	2.7	1.97

Tabela 4.3: Erros relativos para Lid Driven.

Para o pós processamento dos resultados, a figura 4.5 mostra comparação entre a solução numérica e analítica para a velocidade v para uma linha tomada na

horizontal, ou seja, $v = v(x, y=0.5)$.

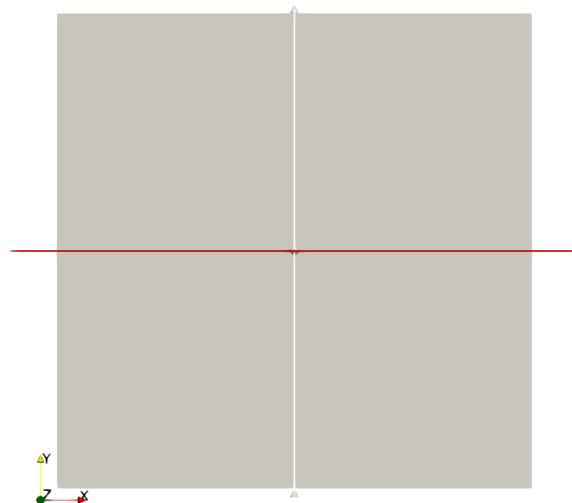


Figura 4.4: Linha para o pós processamento para escoamento Lid Driven.

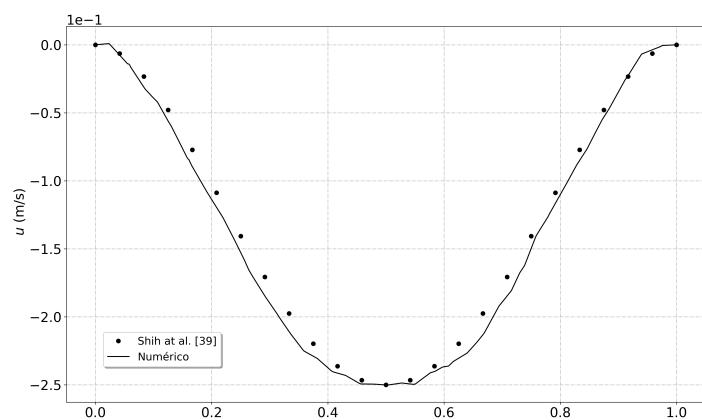


Figura 4.5: Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas para u .

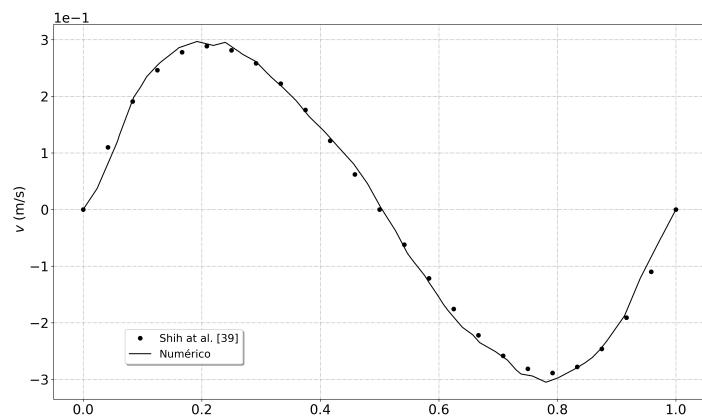


Figura 4.6: Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas para v .

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u , v e da função corrente ψ em regime permanente. As figuras 4.7 e 4.8 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

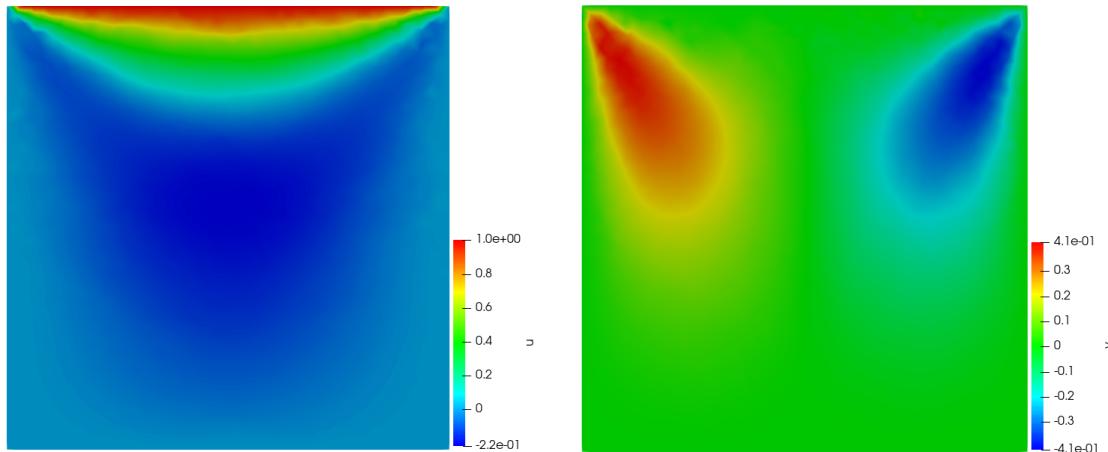


Figura 4.7: Velocidade u e v para $Re = 1$.

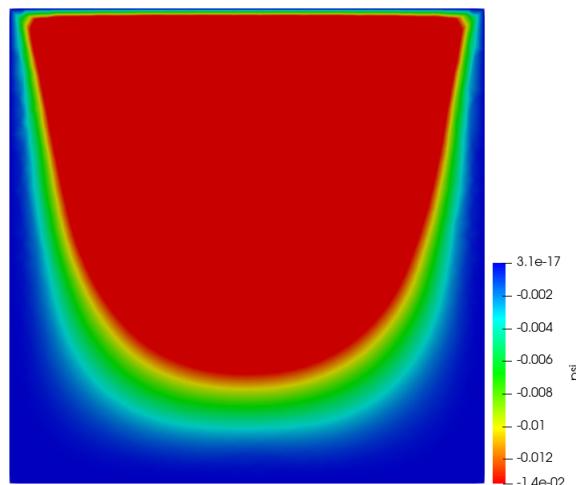


Figura 4.8: Função corrente ψ para $Re = 1$.

4.2 Escoamento entre placas planas.

Outra análise realizada neste trabalho para a validação do código numérico, foi a do caso clássico do escoamento de um fluido entre placas paralelas, sendo este estudo conhecido como escoamento de *entre placas planas*. O estudo desse escoamento foi

necessário para a validação da condição de contorno do tipo *Neumann* que relaciona a derivada $\partial\psi/\partial x = 0$ e $\partial\psi/\partial y = 0$ na saída das placas. A figura 4.9 mostra o perfil do campo de velocidade esperado quando o escoamento estiver em regime permanente.

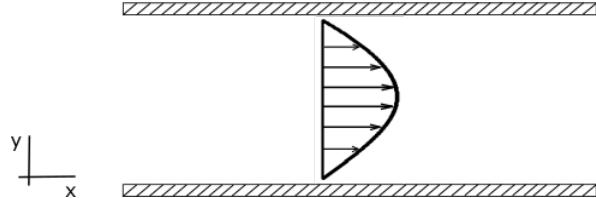


Figura 4.9: Escoamento entre placas paralelas

A solução analítica para este problema pode ser encontrada em *Santos et al.* [39]. Segundo este, o perfil de velocidade a uma distância y da parede inferior é calculado por:

$$u(y) = \frac{6}{L^2}y(L - y) \quad (4.3)$$

Em relação ao modelo numérico, a tabela 4.4 apresenta as informações sobre a geometria utilizada na simulação.

Largura entre as placas L (m)	1
Coordenada y entre as placas (m)	[0,1]

Tabela 4.4: Geometria do escoamento entre placas planas.

As condições de contorno para o escoamento em análise são mostradas na figura 4.10, onde u é a componente da velocidade na direção x e v é a componente da velocidade na direção y .

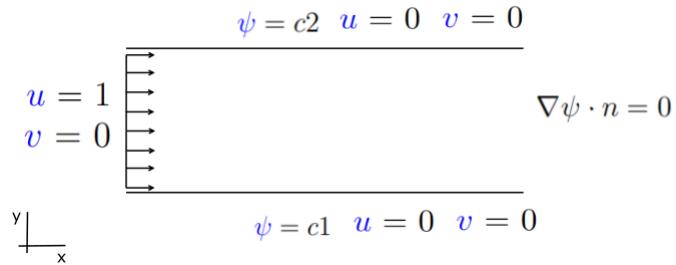


Figura 4.10: Condições de contorno do escoamento interno entre placas planas

Para determinação do número de nós da malha utilizados na simulação, realizou-se o refinamento da malha adotando $Re = 1000$ como ilustrado na Figura 4.11. Como podemos verificar os valores convergem e estabilizam conforme o número de elementos aumentam e como critério de parada foi utilizado o erro $< 2\%$.

Malha analisada	Número de nós (n_p)	Número de elementos (n_e)
Malha 1	694	1284
Malha 2	1332	2526
Malha 3	2295	4388

Tabela 4.5: Configurações utilizadas para criação das malhas entre placas planas.

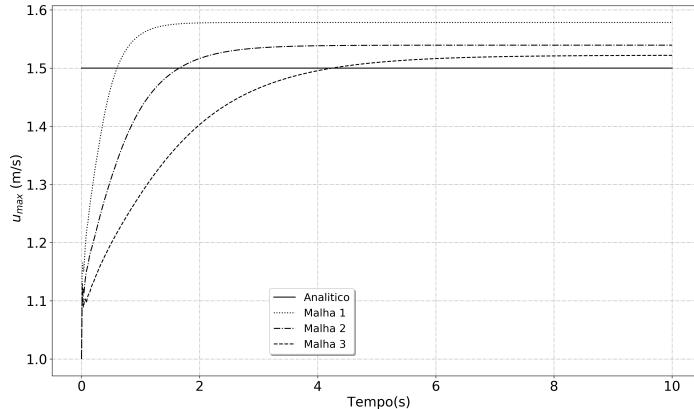


Figura 4.11: Análise do refinamento de malha para o escoamento entre placas planas.

A tabela 4.6 trás o erro relativo da solução numérica em relação à solução analítica. Considerando os erros inerente ao método numérico utilizado, os resultados obtidos permitem concluir que a simulação desenvolvida para domínios bidimensionais funciona satisfatoriamente com erros relativos abaixo de 1.4%.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3
Erro relativo (%)	5.2	2.6	1.4

Tabela 4.6: Erros relativos para escoamento entre placas planas.

A figura 4.13 mostra comparação entre a solução numérica e analítica. O gráfico analisado foi pós processados através de um corte transversal na geometria na posição de $x=2.5m$, conforme mostrado na figura 4.12.

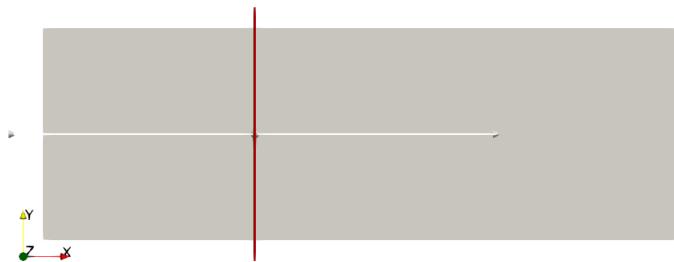


Figura 4.12: Linha para o pós processamento para escoamento entre placas planas.

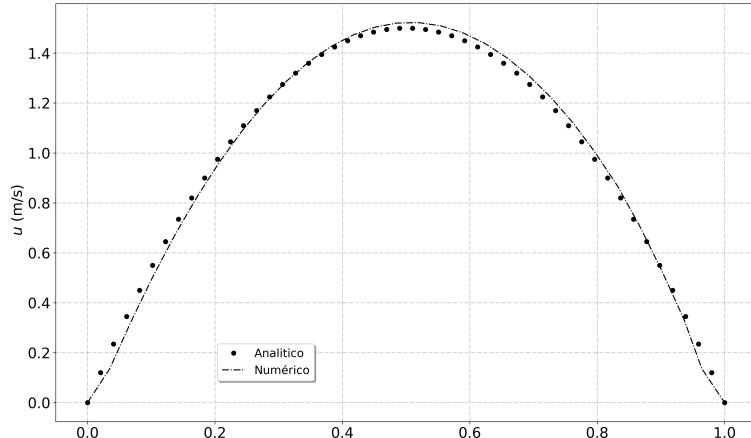


Figura 4.13: Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas.

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u , v e função corrente ψ em regime permanente. As figuras 4.14, 4.15 e 4.16 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

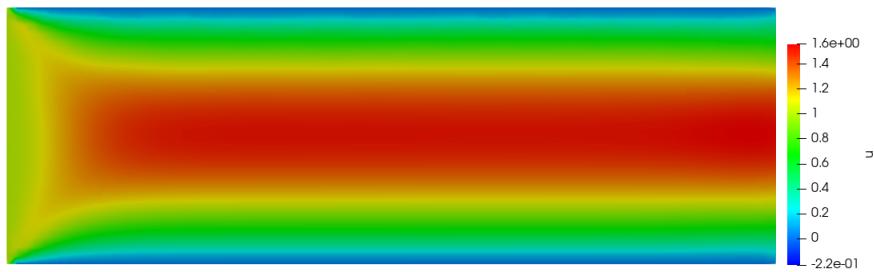


Figura 4.14: Velocidade u para $Re = 1000$.



Figura 4.15: Velocidade v para $Re = 1000$.

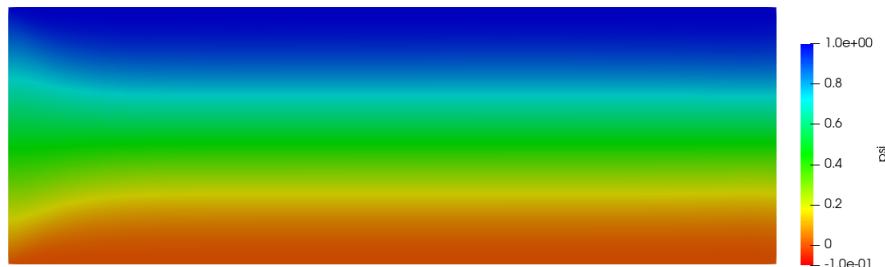


Figura 4.16: Função corrente ψ para $Re = 1000$.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Escoamento ao redor de um cilindro em um canal.

Outro estudo realizado neste trabalho foi o estudo do escoamento ao redor de um cilindro em um canal. O estudo desse escoamento foi necessário para a validação da condição de contorno do tipo *Dirichlet* na superfície do cilindro.

O perfil do campo de velocidade esperado quando o escoamento estiver em regime permanente é encontrado na equação 4.3.

Em relação ao modelo numérico, a Tabela 5.6 apresenta as informações da geometria utilizada na simulação.

Largura entre as placas L (m)	2
Coordenada y entre as placas (m)	[0,2]
Comprimento do canal (m)	8
Raio do cilindro (m)	0.5
Coordenadas do centro do cilindro (m)	[1.5,1.0]

Tabela 5.1: Geometria do escoamento ao redor do cilindro.

As condições de contorno para o escoamento em análise também são mostradas na figura 5.1, onde u é a componente da velocidade na direção x e v é a componente da

velocidade na direção y . Nesse caso também temos o perfil de velocidade na entrada do canal que será $u = 1 \text{ m/s}$ e a função corrente poderá ser calculada através da integral do campo de velocidade, conforme demonstrado a seguir.

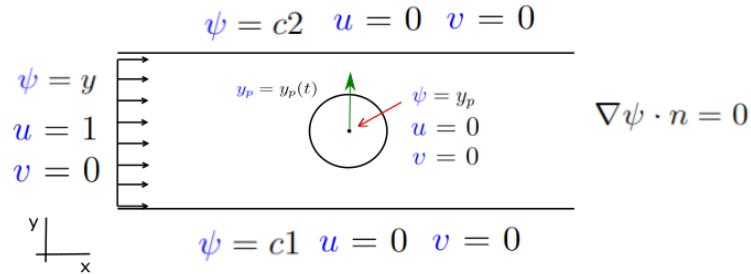


Figura 5.1: Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro em um canal.

Para determinação do número de nós da malha que seriam utilizados na simulação, realizou-se o refinamento da malha adotando $Re = 1000$ como ilustrado na Figura 5.2. Como podemos verificar os valores convergem e estabilizam conforme o número de elementos aumentam e como critério de parada foi utilizado o erro $< 2\%$.

Malha analisada	Número de nós (n_p)	Número de elementos (n_e)
Malha 1	852	1558
Malha 2	1385	2575
Malha 3	3294	6298

Tabela 5.2: Configurações utilizadas para criação das malhas.

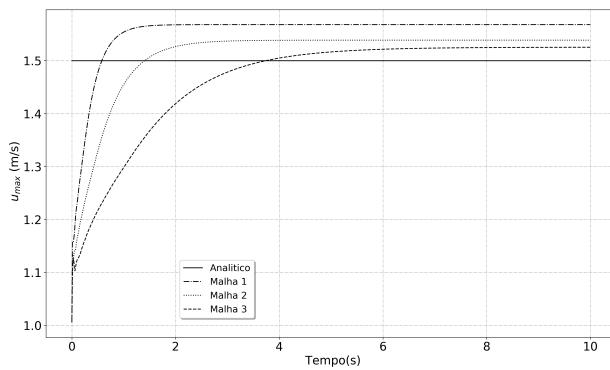


Figura 5.2: Análise do refinamento de malha para $Re = 1000$.

A tabela 5.3 trás o erro relativo da solução numérica em relação à solução analítica. Considerando os erros inerente ao método numérico utilizado, os resultados obtidos permitem concluir que a simulação desenvolvida para domínios bidimensionais funciona satisfatoriamente com erros relativos abaixo de 1.6%.

	Malha 1	Malha 2	Malha 3
Erro relativo (%)	4.5	2.5	1.6

Tabela 5.3: Erros relativos para escoamento ao redor de um cilindro em m canal.

A figura 5.4 mostram comparação entre a solução numérica e analítica para o perfil de velocidade u . Os gráficos analisados foram pós processados através de um corte transversal na geometria na posição de $x=2.0\text{m}$ (antes do cilindro) e também em $x=6.0\text{m}$ (após o cilindro), conforme mostrado na figura 5.3.

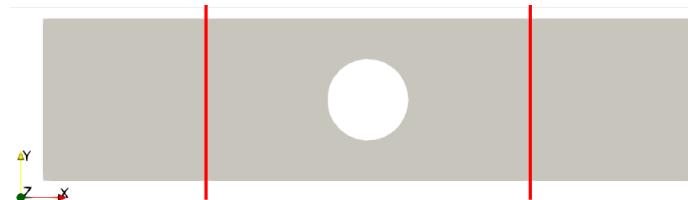


Figura 5.3: Linhas para o pós processamento para escoamento do cilindro em um canal.

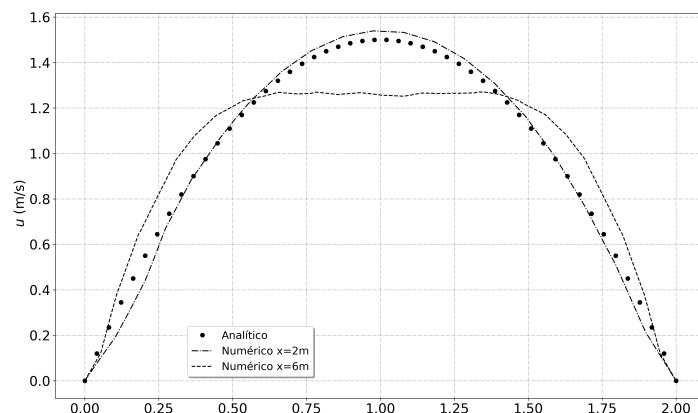


Figura 5.4: Gráficos comparativos entre as soluções analíticas e numéricas.

Conforme podemos notar no gráfico 5.4, o escoamento próximo a parede sólida irá ter o efeito de retardamento devido a imposição da condição de não deslizamento, que é o fato da velocidade na região próxima a parede adquirir a velocidade igual a velocidade da parede ($u = 0$). Com isso, espera-se que na região próxima à parede, o escoamento seja dominado pela viscosidade e o perfil em regime permanente irá possuir um perfil parabólico.

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u , v e função corrente ψ em regime permanente. As figuras 5.5, 5.6 e 5.7 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

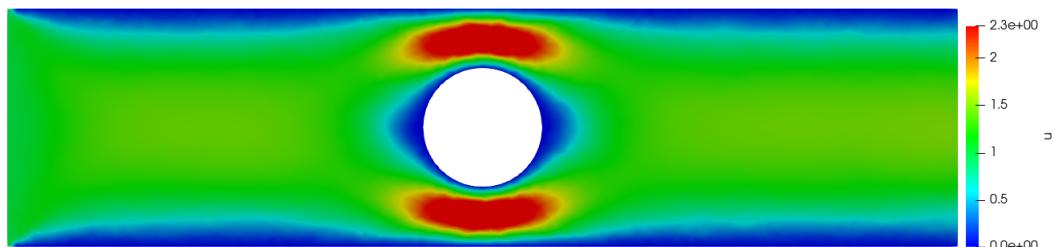


Figura 5.5: Velocidade u para $Re = 1000$.

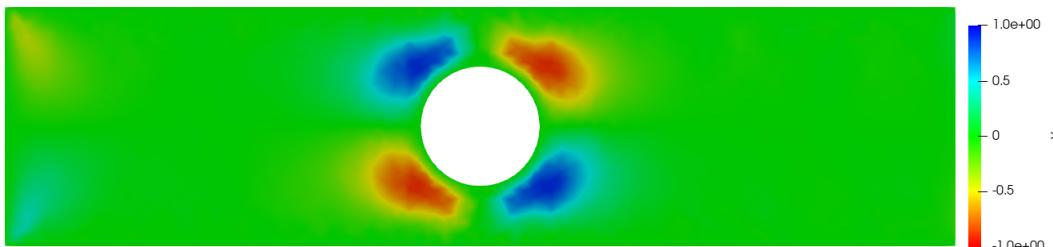


Figura 5.6: Velocidade v para $Re = 1000$.

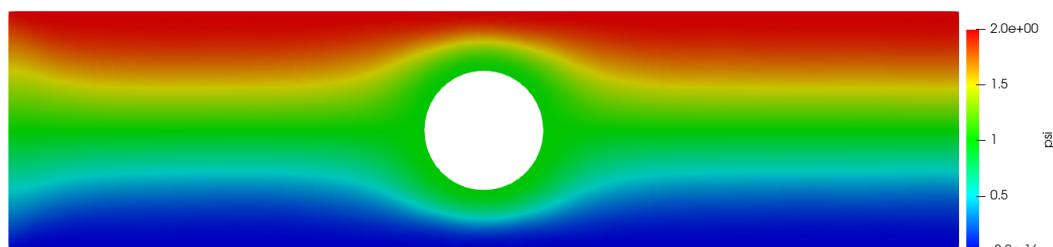


Figura 5.7: Função corrente ψ para $Re = 1000$.

5.2 Escoamento ao redor de um cilindro com paredes distantes.

O objetivo dessa simulação foi mostrar o escoamento ao redor de um cilindro quando as paredes estão afastadas. O estudo desse escoamento foi determinado para demonstrar a diminuição dos efeitos de parede quando a distância entre as placas é maior.

Em relação ao modelo numérico, a Tabela 5.4 apresenta as informações da geometria utilizada na simulação.

Coordenada y entre as placas (m)	[0,6]
Coordenada x (m)	[0,9]
Raio do cilindro (m)	0.5
Coordenadas do centro do cilindro (m)	[4.5,3.0]

Tabela 5.4: Geometria do escoamento ao redor do cilindro com paredes afastadas.

As condições de contorno para o escoamento em análise também são mostradas na figura 5.8, onde u é a componente da velocidade na direção x e v é a componente da velocidade na direção y . Nesse caso também temos o perfil de velocidade na entrada do canal que será $u = 1m/s$ e a função corrente poderá ser calculada através da integral do campo de velocidade, conforme demonstrado a seguir.

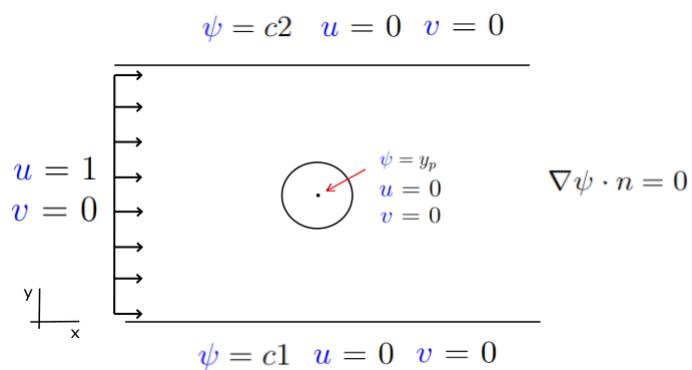


Figura 5.8: Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro com paredes distantes

Para determinação do número de nós da malha que seriam utilizados na simulação, realizou-se o refinamento da malha adotando $Re = 1000$ como ilustrado na Figura 5.9. Como podemos verificar os valores convergem e estabilizam conforme o número de elementos aumentam e como critério de parada foi utilizado o erro $<2\%$.

Malha analisada	Número de nós (n_p)	Número de elementos (n_e)
Malha 1	1800	3445
Malha 2	3119	6028
Malha 3	7009	13698

Tabela 5.5: Configurações utilizadas para criação das malhas.

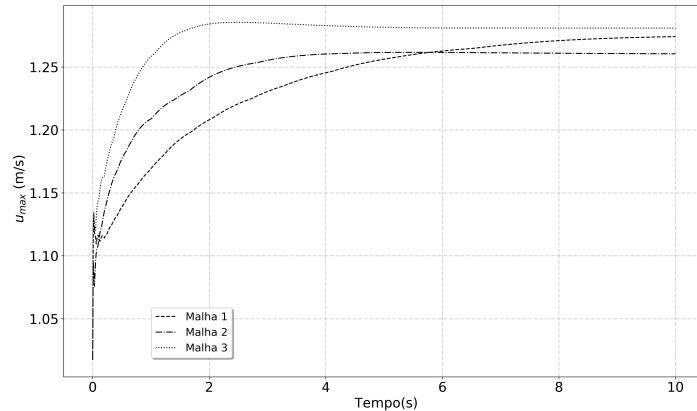


Figura 5.9: Refinamento de malha cilindro com paredes distantes para $Re = 1000$.

Os gráficos mostrado na figura 5.11 mostram os perfis de velocidades na direção x e y. Os gráficos analisados foram pós processados através de um corte transversal na geometria na posição de $x=2.5m$, conforme mostrado na figura 5.10.

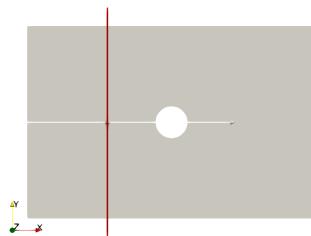


Figura 5.10: Linha para o pós processamento para escoamento do cilindro com paredes distantes.

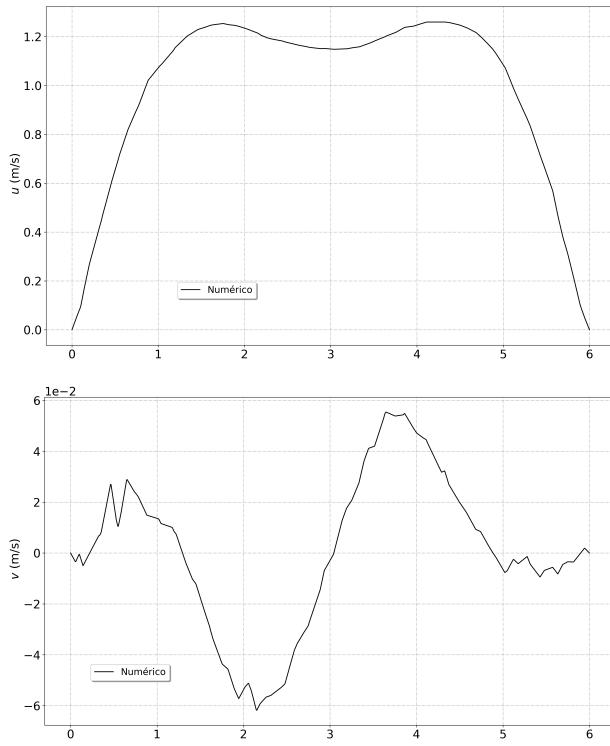


Figura 5.11: Gráficos de u e v para o escoamento do cilindro com paredes afastadas.

Conforme podemos notar nos gráficos da figura 5.11 ao se afastar as placas para uma distância considerável, os efeitos de retardamento do escoamento na direção x irá ocorrer, mas não serão tão intensos conforme observados na simulação do escoamento no canal. Portanto, podemos concluir que nesta simulação não teríamos um perfil de velocidades parabólico na direção x .

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u e da função corrente ψ em regime permanente. As figuras 5.12 e 5.13 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

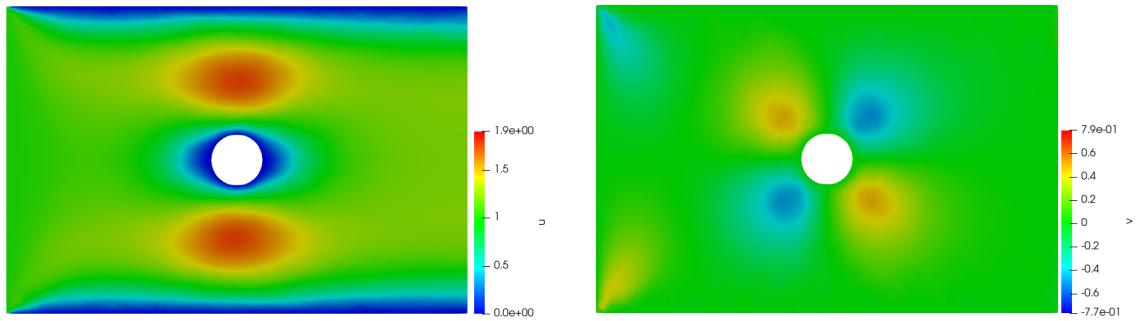


Figura 5.12: Velocidade u e v para $Re = 1000$.

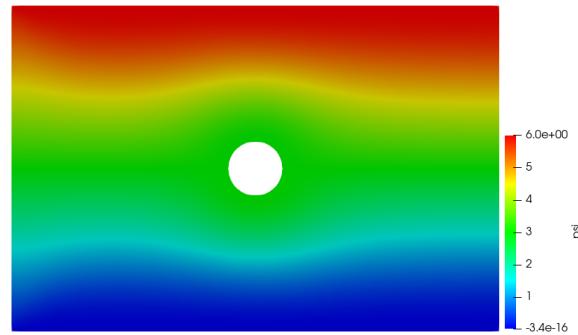


Figura 5.13: Velocidade u para $Re = 1000$.

5.3 Escoamento ao redor de um cilindro.

O objetivo dessa simulação foi mostrar o escoamento ao redor de um cilindro sem a presença das paredes. O estudo desse escoamento foi determinado para demonstrarmos como o escoamento irá se comportar sem a presença dos efeitos de parede.

Em relação ao modelo numérico, a Tabela 5.6 apresenta as informações da geometria utilizada na simulação.

Coordenada y entre as placas (m)	[0,6]
Coordenada x (m)	[0,9]
Raio do cilindro (m)	0.5
Coordenada do centro do cilindro (m)	[4.5 , 3.0]

Tabela 5.6: Geometria do escoamento ao redor do cilindro sem paredes.

As condições de contorno para o escoamento em análise também são mostradas na figura 5.14, onde não temos mais a presença de u e v . Nesse caso temos somente o perfil de velocidade na entrada do canal que será $u = 1m/s$ e a função corrente que poderá ser calculada através da coordenada y do da geometria.

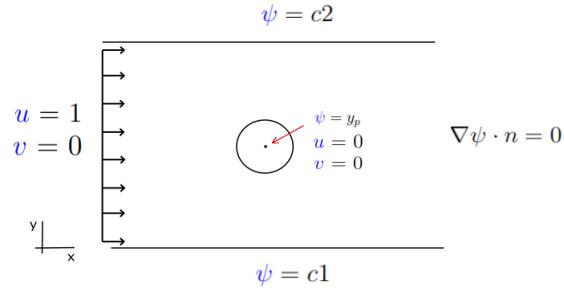


Figura 5.14: Condições de contorno do escoamento ao redor do cilindro sem paredes.

A análise referente ao refinamento da malha é semelhante a realizada na seção 5.2 deste trabalho. Isso ocorre pois a geometria e o fenômeno físico (equação corrente-vorticidade) são idênticos à análise anterior, tendo somente as condições de contorno do problema como diferencial.

As figuras 5.16 e 5.17 mostram os perfis de velocidades na direção x e y , respectivamente. Os gráficos analisados foram pós processados através de um corte transversal na geometria na posição de $x=2.5m$, conforme mostrado na figura 5.15.

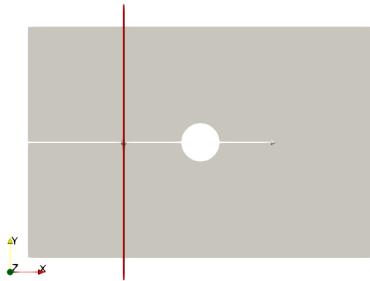


Figura 5.15: Linha para o pós processamento para escoamento do cilindro sem paredes.

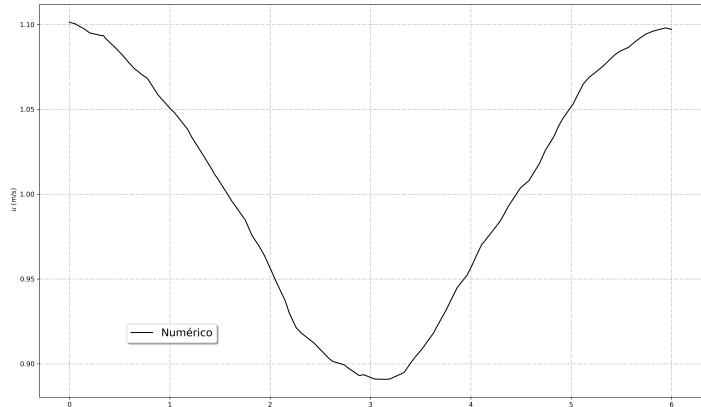


Figura 5.16: Gráficos de u para o escoamento de um cilindro sem paredes.

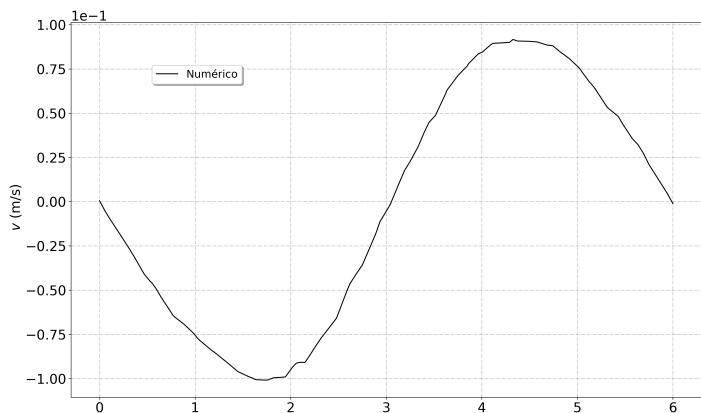


Figura 5.17: Gráficos de v para o escoamento de um cilindro sem paredes.

Conforme podemos notar nos gráficos 5.16 e 5.17, ao se retirar as paredes do escoamento as velocidades nos extremos possuem um valor diferente de zero. Desse modo não ocorrerá o retardamento do escoamento na direção x e nem mesmo a presença do efeito de parede.

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u , v e da função corrente ψ em regime permanente. As figuras 5.18 e 5.19 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

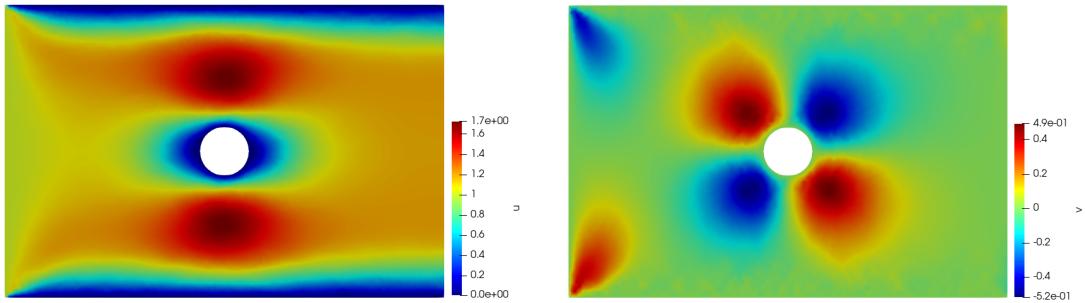


Figura 5.18: Velocidade u e v para $Re = 1000$.

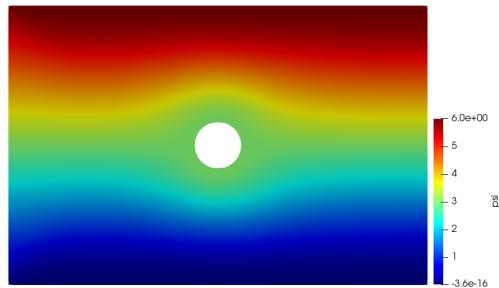


Figura 5.19: Velocidade ψ para $Re = 1000$.

5.4 Vibração do Cilindro utilizando LEA

A última simulação realizada neste trabalho consiste na análise do escoamento que ocasionará em uma vibração no cilindro submerso ao escoamento.

As condições de contorno para o escoamento em análise também são mostradas na figura 5.20, onde u é a componente da velocidade na direção x e v é a componente da velocidade na direção y . Nesse caso também temos o perfil de velocidade na entrada do canal que será $u = 1m/s$ e a função corrente poderá ser calculada através da integral do campo de velocidade, conforme demonstrado a seguir.

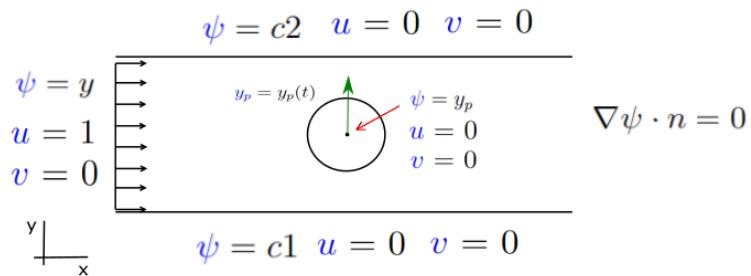


Figura 5.20: Condições de contorno do escoamento ao redor de um cilindro sujeito a vibração utilizando LEA.

Para a simulação utilizou-se a mesma geometria do tópico 5.1 deste trabalho, bem como o refinamento de malha que já foi realizado na simulação do escoamento em um canal.

Conforme podemos observar na figura 5.20, o cilindro é posto para vibrar na direção transversal do escoamento e para realizar a movimentação do cilindro, utilizou-se a metodologia LEA que consiste em movimentar a malha a cada passo de tempo através da inserção de uma velocidade da malha \hat{v} , conforme abordado na seção 3.1.7 deste trabalho.

Tendo isso em vista, acrescentou-se uma movimentação em função de uma senoidal $y(t) = A\sin(\phi t)$ para os pontos da malha que estavam sobre o cilindro. Desse modo o movimento do cilindro será sempre periódico e controlado. Na função senoidal temos a amplitude A e a frequência de oscilação ϕ que descrevem o modo com que o cilindro se movimenta.

Um dos pontos principais durante a simulação é a escolha da amplitude da função senoidal, pois uma grande amplitude pode ocasionar em falhas para manter os elementos da malha consistentes e para que os seus nós não entrem dentro de outro elemento. No apêndice A demonstramos a função escolhida para a configuração de malha utilizada neste trabalho.

A movimentação do cilindro foi limitada pela escolha da amplitude da função senoidal, pois a movimentação do cilindro tem que permitir a deformação da malha sem que essa desrespeite a configuração dos elementos originais.

Para demonstração dos resultados obtidos através da simulação computacional foi dado zoom na região do cilindro para melhor visualização de como a malha se comportou a cada passo de tempo.

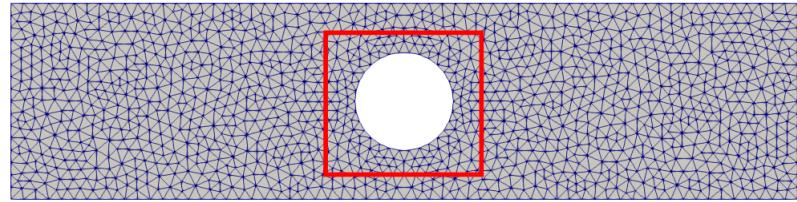


Figura 5.21: Zoom no pos processamento da abordagem lagrangiana-euleriana (LEA).

Observando o avanço temporal demonstrado na figura 5.22, os nós dos elementos são movimentados na direção y de forma suave e respeitando a continuidade, ou seja, nenhum dos nós que compõem determinado elemento irá se locomovendo para dentro de outro elemento.

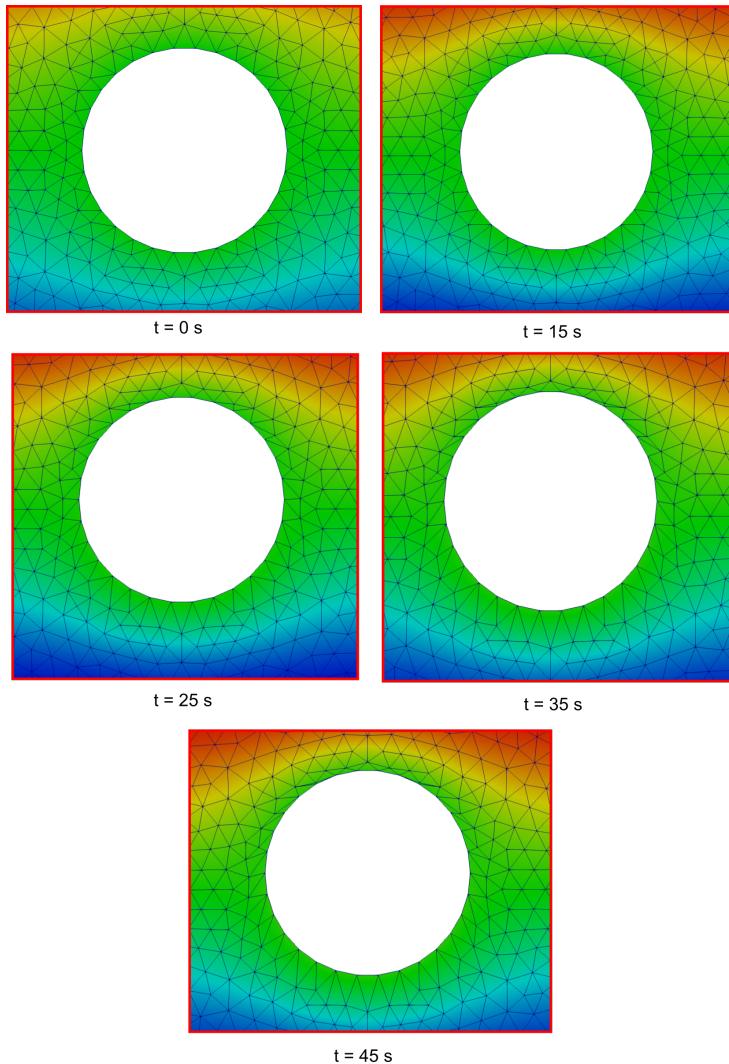


Figura 5.22: Evolução temporal da movimentação do cilindro com LEA.

A figura 5.24 traz os perfis de velocidades na direção x (u). Os gráficos analisados foram pós processados através de um corte transversal na geometria na posição de $x=2.0\text{m}$ (antes do cilindro) e na posição $x=6\text{m}$ (após o cilindro), conforme mostrado na figura 5.23. Além disso, comparou-se os resultados obtidos com a solução analítica para o escoamento do canal, descrito pela equação 4.3.

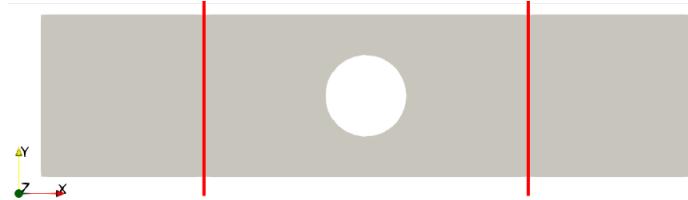


Figura 5.23: Linhas para o pós processamento para movimentação do cilindro com LEA.

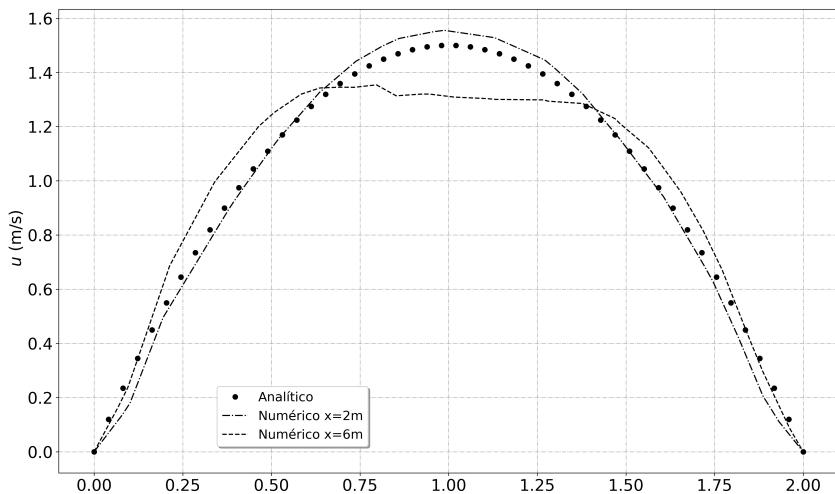


Figura 5.24: Gráfico de u para a movimentação do cilindro com LEA.

Conforme podemos notar no gráfico 5.24, o escoamento próximo a parede sólida irá ter o efeito de retardamento devido a imposição da condição de não deslizamento igual ao obtido para o escoamento em um canal. Com isso, podemos concluir que a simulação numérica utilizando a movimentação da malha através da abordagem lagrangiana-euleriana foi satisfatória, pois a resposta convergiu para um perfil de velocidade parabólico na direção x. A tabela 5.7 trás o erro relativo entre a solução numérica e a solução analítica.

	Numérico x=2m	Numérico x=6m
Erro relativo (%)	2.821	2.721

Tabela 5.7: Erros relativos para vibração com LEA.

Por fim, para fins ilustrativos utilizou-se o software open source Paraview para o pós processamento de dados dos perfis de velocidades u , v e função corrente ψ em regime permanente. As figuras 5.25, 5.26 e 5.13 abaixo apresentam as imagens pós processadas.

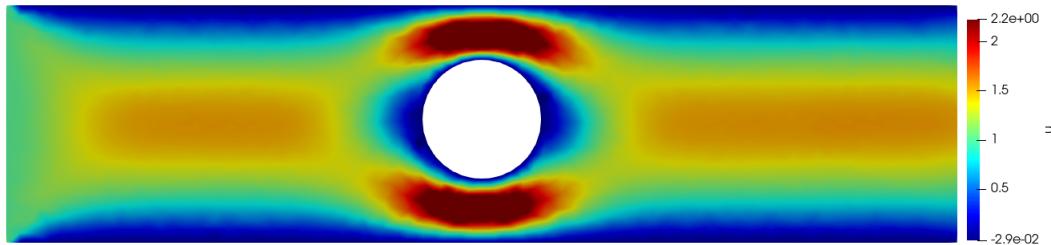


Figura 5.25: Velocidade u para $Re = 1000$.

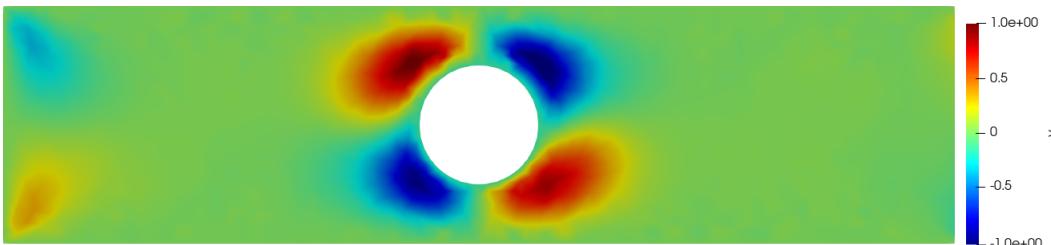


Figura 5.26: Velocidade v para $Re = 1000$.

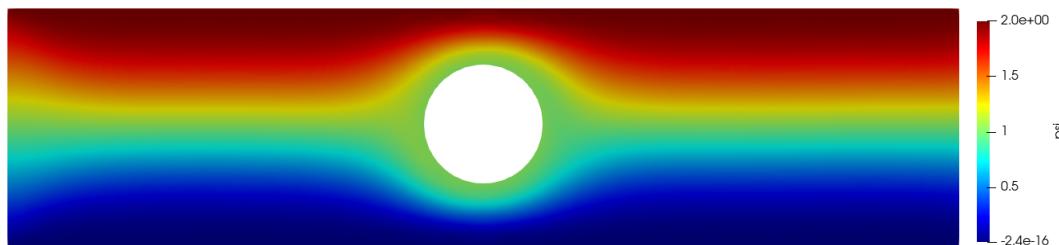


Figura 5.27: Função corrente ψ para $Re = 1000$.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado a equação de *Navier-Stokes* e a sua utilização para descrever a dedução da formulação corrente vorticidade com uma abordagem do Método de Elementos Finitos acrescido com a abordagem LEA para a vibração induzida de um cilindro. Como a formulação não possuía acoplamento entre os campos de pressão e de velocidade, o uso do elemento triangular linear pode ocorrer sem nenhum problema na implementação do MEF. O código desenvolvimento durante todo o trabalho encontra-se disponível no Apêndice A deste trabalho e poderá ser utilizado por toda a comunidade acadêmica e profissional.

O objetivo desse trabalho foi a análise da interação fluido-estrutura causada pelo escoamento ao redor de um cilindro que induz uma vibração no cilindro. Para isso, a calibração do código numérico foi feita através de 2 casos clássicos *Lid Driven* e *Escoamento entre placas planas* e as respostas obtidas foram satisfatórias para um erro $\leq 2\%$. Além disso, neste trabalho mostrou-se com sucesso método de movimentação da malha de elementos finitos utilizando uma abordagem lagrangiana euleriana.

A análise da movimentação do cilindro demonstrou que a escolha da função senoidal para movimentação contém uma limitação na escolha da sua amplitude. O desafio foi encontrar uma amplitude que respeitasse a deformação da malha de modo com que um elemento não se desloque sobre outro.

Conforme demonstrado nos resultados, a movimentação ocorreu de forma satisfatória, sendo respeitadas as condições de deformação e deslocamento dos elementos abordada anteriormente.

Para estudos futuros, recomenda-se a realização de novas técnicas para movimentação da malha, como por exemplo a abordagem da movimentação através do malhamento dinâmico para obtenção de resultados mais acurados.

Outra proposta de trabalho futuros é o uso da biblioteca do `scipy` ao invés da biblioteca `numpy` no código numérico para formação das matrizes elementares e globais, bem como para os métodos numéricos utilizados para os cálculos das equações matriciais. Tal mudança ocasionará em diminuição do espaço alocado no computador para a criação das matrizes e vetores, este que foi um dos maiores desafios encontrados durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, pode-se fazer a criação de uma interface gráfica para o modelo numérico e como consequência ter a criação de um software que será desenvolvido através de uma `open source` e assim possa ser utilizado pelo meio acadêmico ou profissional.

Referências Bibliográficas

- [1] SHIH,T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C., “Effects of grid staggering on numerical schemes”, *Internacional Journal for numerical methods in fluids*, pp. 193–21, 1989.
- [2] CONTESSI, B. A., *Análises numéricas considerando a interação fluido-estrutura*. Annual Review of Fluid Mechanics: Brasil, disponível em:’<https://www.esss.co/blog/analises-numericas-considerando-interacao-fluido-estrutura/>’, 2008.
- [3] WIKIPÉDIA, 2018, “**Camada Limite**”, Disponível em [‘https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Camada_limite&oldid=53701839’](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Camada_limite&oldid=53701839), 2018.
- [4] CELMA, 2011, “**A separação da camada-limite e a entrada em perda**”, Disponível em [‘http://fenomenosdairmacelma.blogspot.com/2011/09/separacao-da-camada-limite-e-entrada-em.html’](http://fenomenosdairmacelma.blogspot.com/2011/09/separacao-da-camada-limite-e-entrada-em.html), 2011.
- [5] ECOURSES, 2018., *Fluid Mechanics - Theory*. Disponível em:’<http://www.ecourses.ou.edu/cgi-bin/ebook.cgi?topic=flchap&sec=09.1&page=theory>’.
- [6] ANDERSON, J., *Lei de Poiseuille*. ISBN: 97800733981105 ed. McGraw-Hill Education: Brasil, disponível em:’<https://books.google.com.br/books?id=xwY8PgAACAAJ>’, 2010.
- [7] GOVARDHAN, R., W., *Vortex-Induced Vibrations*. Vol 36 ed. Annual Review of Fluid Mechanics: Índia, disponível em:’<https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.11462004>’.

- [8] ANJOS, G. R., *Computação científica para engenheiros*. Brasil, disponível em: '<https://drive.google.com/file/d/1F3hddkpuzMoLg7nFrfrQ0jxB7JGMD8NR/view>', 2019.
- [9] CONGRO, M. D. S., *Equações diferenciais parciais e suas aplicações*. Brasil, disponível em: '<http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio/resumo2016/relatorios/pdf/ctc/MAT/MAT-Marcello2019>.
- [10] ROBERT, W. F.; PHILIP, J. P.; ALAN, T. M., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 7^a ed. LTC, Ltda.: Brasil, 2013.
- [11] FISH, J., *Um primeiro curso em elementos finitos*. 1^a ed. LTC: São Paulo, Brasil, 2009.
- [12] CLOUGH, R. W.; TURNER, M. J.; TOPP, L. J., “**Stiffness and deflection analysis of complex structures**”, *Aeronaut. Sci.*, pp. 805–823, 1956.
- [13] COURANT, R., “**Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations**”, *Bull. Am. Math. Soc.*, pp. 2165–2186, 1943.
- [14] CLOUGH, R. W., “**The finite element method in plane stress analysis**”, *ASCE*, 1960.
- [15] CHRISTIE, I. ET AL., “**Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976.
- [16] DONEA, J. A., “**The numerical computation of turbulent flows**”, ., pp. 269–275, 1974.
- [17] ARMANDO, O. F., *Técnicas computacionais para dinâmicas dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp: Brasil, 2000.
- [18] LAUNDER, R.; GOSMAN, A. D.; PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B., “**Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation**”, ., pp. 60–68, 1973.

- [19] LAUNDER, R.;SPALDING, D. B., “A Taylor-Galerkin method for convective transport problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984.
- [20] PARKISON, G. V., “Mathematical models of flow-induced vibrations of bluff bodies”, *Springer*, pp. 81–127, 1974.
- [21] SARKAYA, T., “A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations”, *Elsevier*, pp. 389–447, 2004.
- [22] RAMBERG, S. E., G., “Some recent studies of vortex shedding with application to marine tubulars and risers.” *ASME*, pp. 2–13, 1982.
- [23] PRANDT, L., “Fluid Motion with very small friction”, *Proceedings of the Third International Congress on Mathematics*, 1904.
- [24] BLEVINS, R., “Flow-induced vibration”, *Van Nostrand Reinhold*, 1990.
- [25] BEARMAN, P. W., “Vortex shedding from oscillating bluff bodies”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pp. 195–222, 1984.
- [26] STEIN, K., “3-D computation of parachute fluid-structure interactions: Performance and control”, *Elsevier*, pp. 99–109, 1999.
- [27] KOH, H. M.;KIM, J. K.;PARK, J. H., “Fluid–structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM–FEM and comparison with test results”, *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 1998.
- [28] STERGIOPULOS, N., “Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenoses”, *Elsevier*, pp. 1477–1488, 1992.
- [29] TAYLOR, N.;YOUNG, D.;ROGGE, T., “Finite Element Modeling of Three-Dimensional Pulsatile Flow in the Abdominal Aorta: Relevance to Atherosclerosis”, *Springer*, pp. 975–987, 1998.

- [30] STEINMAN, D. A., “**Image-Based Computational Fluid Dynamics Modeling in Realistic Arterial Geometries**”, *Springer*, pp. 483–497, 2002.
- [31] PANTUA, C. A. J.; CALAUTIT, J. K.; WU, Y., “**A fluid-structure interaction (FSI) and energy generation modelling for roof mounted renewable energy installations in buildings for extreme weather and typhoon resilience**”, *Elsevier*, pp. 770–787, 2020.
- [32] GSELL, M. S., *Vortex-induced vibrations of a rigid circular cylinder*. Institut National Polytechnique de Toulouse: Toulouse, France, 2016.
- [33] HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K.; ZIMMERMANN, T. K., “**Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows**”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, pp. 329–349, 1981.
- [34] HIRT, C.W; AMSDEN, A. A.; COOK, J. L., “**An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all flow speeds**”, *Journal of computational physics*, pp. 227–253, 1974.
- [35] PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. , *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*. 4^a ed. UFRJ: Rio de Janeiro, Brasil, 2015.
- [36] GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F., *An user guide of Gmsh 4.5.4*. USA, disponível em:’<http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html>’, 2020.
- [37] HOFFMAN, K.; KUNZE, R., *Álgebra Linear*. 2^a ed. LTC: Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
- [38] HAGEN, G.; POISEUILLE, J. L., *Lei de Poiseuille*. Brasil, disponível em:’https://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_de_Poiseuille’, 1846.
- [39] SANTOS, FERNANDA OLEGÁRIO, “**Simulação numérica de escoamentos de fluidos utilizando diferenças finitas generalizadas**”, *Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP*, 2005.

- [40] PLACZEK, A.; SIGRIST, J. F.; HAMDOUNI, A. , “**Numerical simulation of an oscillating cylinder in a cross-flow at low Reynolds number: Forced and free oscillations**”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, pp. 80–100, 2009.
- [41] MING,Z.; LIANG, C., “**Vortex-induced vibration of a circular cylinder of finite lenght**”, *AIP Publishing*, 2014.
- [42] MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K., “**The Lid-Driven Square Cavity Flow: Numerical solution with a 1024x1024 Grid**”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2009.
- [43] GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T., “**High-Re Solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method**”, *Journal of Computational Physics*, pp. 387–411, 1982.
- [44] SHIH, T. M.; TAN, H., “**Effects of grid staggering on numerical schemes**”, *International journal for numerical methods in fluids*, pp. 193–212, 1989.
- [45] HARLOW, F. H.;AMSDEN, A. A., “**A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds**”, *Elsevier*, pp. 197–213, 1971.

Apêndice A

Código Fonte do cilindro com vibração LEA.

```
# FORMULAÇÃO EF-LEA para Escoamento transversal
# Autora: Jéssica Aparecida Silva
# Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Rio de Janeiro

#-----
#          Bibliotecas utilizadas
#-----


import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import meshio
import time

#meshio é uma biblioteca no python criada para leitura de malha
#ao importar tal biblioteca podemos otimizar leituras e escrita

#Por exemplo, para lermos uma malha exportada da opensource paraview basta:
# points, cells, point_data, cell_data, field_data = \
#     meshio.read(args.infile)
```

```

#para escrevermos um arquivo de saída para ler na opensource paraview
# meshio.write(
#     args.outfile,
#     points,
#     cells,
#     point_data=point_data,
#     cell_data=cell_data,
#     field_data=field_data
#     )

#-----
#           Seção com as funções utilizadas
#-----


def get_X():
    f = open("Nodes.txt", "r")
    points = []
    for i in range(0,7359):
        line = f.readline()
        line = line.strip('\n')
        line = line.split(" ")
        line = line[1:]
        for i in range(0,3):
            line[i] = float(line[i])
        points.append(line)
    f.close()
    return points

# a função get_X é para buscar os pontos X, Y
# dos nos pertencentes a malha

```

```

def get_IEN():
    f = open("IEN.txt", "r")
    points = []
    for i in range(0,14255):
        line = f.readline()
        line = line.strip('\n')
        line = line.split(" ")
        line = line[4:]
        for i in range(0,3):
            line[i] = int(line[i]) - 1
        points.append(line)
    f.close()
    return points

```

*# a função get_IEN é para buscar os pontos a
relação de quais nos pertencem a um elemento*

#-----
Seção para leitura de malha
#-----

#definicao da geometria do canal

```

minY = 0
maxY = 2
minX = 0
maxX = 8

```

xc = (maxX-minX)/2.0 #centro do cilindro
yc = (maxY-minY)/2.0

raio = 0.50 #raio do cilindro
d = 0.01 #constante usada para encontrar os nós do cilindro

```

IEN = np.array(get_IEN())
points = get_X()
npoints = len(points) # numero de pontos da malha
ne = len(IEN) # numero de elementos da malha

X = np.zeros(npoints,dtype='float')
Y = np.zeros(npoints,dtype='float')
for i in range(0,npoints):
    X[i] = points[i][0] #coordenadas X dos pontos da malha
    Y[i] = points[i][1] #coordenadas Y dos pontos da malha

# Pontos de condição de contorno
cc = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# pontos que possuem uma condicao de contorno de psi
Fc = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# condicoes de contorno de psi inicial
circle = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# pontos que possuem uma condicao de contorno de psi
Fcircle = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# condicoes de contorno de psi inicial
ccoutlet = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# pontos que possuem uma condicao de contorno de psi no outlet
Fcoutlet = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
ccw = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# pontos de contorno para usar em omega
cc_velo = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# pontos que possuem uma condicao de contorno de velocidade
Fu = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# condicoes de contorno de u no topo e fundo
Fv = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
# condicoes de contorno de v no topo e fundo

```

```

Fyc = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
Xc = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
Yc = np.zeros((npoints,1),dtype='float')
fixo = np.zeros((npoints,1),dtype='float')

# Criando as matrizes de condição de contorno de Psi
# e de velocidades vx e vy
for i in range(0,npoints):
    # Verificando parte inferior do canal
    if Y[i]== minY :
        fixo[i]=1.0
        cc[i] = 1.0
        Fc[i] = 0.0
        cc_velo[i] = 1.0
        Fu[i] = 0.0
        Fv[i] = 0.0
        ccw[i] = 1.0

    # Verificando parte superior do canal
    if Y[i] == maxY :
        fixo[i]=1.0
        cc[i] = 1.0
        Fc[i] = 2.0
        cc_velo[i] = 1.0
        Fu[i] = 0.0
        Fv[i] = 0.0
        ccw[i] = 1.0

    # Verificando inlet
    if X[i] == minX :
        fixo[i]=1.0
        cc[i] = 1.0
        Fc[i] = Y[i]
        cc_velo[i] = 1.0

```

```

Fu[i] = 1.0
Fv[i] = 0.0
ccw[i] = 1.0

# Verificando outlet

if X[i] == maxX:
    fixo[i]=1.0
    ccoutlet[i] = 1.0    #cc de psi
    Fcoutlet[i] = 0.0
    Fu[i]=0.0           #cc de velocidade
    Fv[i]=0.0
    cc_velo[i]=0.0
    ccw[i] = 1.0  #cc de omega

# Verificando o cilindro

if (raio -d) < ((xc-X[i])**2+ (Y[i]-yc)**2)**(0.5) < (raio + d) :
    fixo[i]=1.0
    circle[i] = 1.0
    Fcircle[i] = yc
    cc_velo[i] = 1.0
    Fu[i] = 0.0
    Fv[i] = 0.0
    Fyc[i] = yc
    Xc[i] = X[i]
    Yc[i] = Y[i]

#-----
#      Seção com criação das matrizes elementares      #
#              e matrizes globais                      #
#-----

# implementação do numero de iteracoes no tempo
nIter = 44  #interações
t = 0      #contador temporal

```

```

dt = 0.06  #avanço temporal

#propriedades do fluido
#  nu=1/Re
nu = 0.001

# Iniciando a velocidade
vx = np.zeros( (npoints,1),dtype='float')
vy = np.zeros( (npoints,1),dtype='float')

# ccs em vx e vy
#busca pelas condições de contorno inicial
for i in range(0,npoints):
    if cc_velo[i]==1.0:
        vx[i] = Fu[i]
        vy[i] = Fv[i]

c1 = 0.2  #controle da velocidade de suavização
        # ao invés de colocar 100%, vou acrescentando
        # aos poucos

for j in range(0,nIter):
    if j<nIter:
        # inicio = time.time()  #caso deseje ver o tempo de simulação

        print('iteracao =',j) # visualizar a iteração

        # inicializando as matrizes K e M, vetor condição de contorno
        # F e Kest

```

```

# e os gradientes na direção X e Y
K = np.zeros( (npoints,npoints), dtype='float')
M = np.zeros( (npoints,npoints), dtype='float')
Gx = np.zeros( (npoints,npoints), dtype='float')
Gy = np.zeros( (npoints,npoints), dtype='float')
Kest = np.zeros( (npoints,npoints), dtype='float')

# loop dos elementos da malha
for e in range(0,ne):
    v = IEN[e]
    det = X[v[2]]*( Y[v[0]]-Y[v[1]]) +
          X[v[0]]*( Y[v[1]]-Y[v[2]]) +
          X[v[1]]*(-Y[v[0]]+Y[v[2]]) 

#calculo da area do elemento
area = det/2.0

# matriz de massa do elemento
m = (area/12.0) * np.array([ [2.0, 1.0, 1.0],
                             [1.0, 2.0, 1.0],
                             [1.0, 1.0, 2.0] ])
b1 = Y[v[1]]-Y[v[2]]
b2 = Y[v[2]]-Y[v[0]]
b3 = Y[v[0]]-Y[v[1]]

c1 = X[v[2]]-X[v[1]]
c2 = X[v[0]]-X[v[2]]
c3 = X[v[1]]-X[v[0]]

# matriz da matriz B
B = (1.0/(2.0*area)) * np.array([ [b1, b2, b3],
                                    [c1, c2, c3] ])

```

```

# matriz da matriz B transposta
BT = B.transpose()

# matriz de rigidez do elemento
ke = area*np.dot(BT,B)

#calculo das matrizes do gradiente
gxe = (1.0/6.0)*np.array([ [b1, b2, b3] ,
                           [b1, b2, b3] ,
                           [b1, b2, b3] ])
gye = (1.0/6.0)*np.array([ [c1, c2, c3] ,
                           [c1, c2, c3] ,
                           [c1, c2, c3] ])

#-----
# inicio da matriz de estabilização Kest
#-----

#calculo de u_med e v_med
v1 = IEN[e,0]
v2 = IEN[e,1]
v3 = IEN[e,2]

vx_medio = ( vx[v1] + vx[v2] + vx[v3] )/ 3.0
vy_medio = ( vy[v1] + vy[v2] + vy[v3] )/ 3.0

#matriz elementar de estabilizacao
kestx = ((dt/2.0)*(vx_medio/4*area))*np.array([
    [vx_medio*b1*b1 + vy_medio*b1*c1 , 
     vx_medio*b1*b2 + vy_medio*b1*c2 ,
     vx_medio*b1*b3 + vy_medio*b1*c3],
    [vx_medio*b2*b1 + vy_medio*c1*b1 ,
     vx_medio*b2*b2 + vy_medio*c1*c2 ,
     vx_medio*b2*b3 + vy_medio*c1*c3],
    [vx_medio*b3*b1 + vy_medio*c2*b1 ,
     vx_medio*b3*b2 + vy_medio*c2*c2 ,
     vx_medio*b3*b3 + vy_medio*c2*c3]])

```

```

[vx_medio*b2*b1 + vy_medio*b2*c1 ,
vx_medio*b2*b2 + vy_medio*b2*c2 ,
vx_medio*b2*b3 + vy_medio*b2*c3],
[vx_medio*b3*b1 + vy_medio*b3*c1 ,
vx_medio*b3*b2 + vy_medio*b3*c2 ,
vx_medio*b3*b3 + vy_medio*b3*c3] ])
```

```

kesty = ((dt/2.0)*(vy_medio/4*area))*np.array([
[vx_medio*c1*b1 + vy_medio*c1*c1 ,
vx_medio*c1*b2 + vy_medio*c1*c2 ,
vx_medio*b1*b3 + vy_medio*c1*c3],
[vx_medio*c2*b1 + vy_medio*c2*c1 ,
vx_medio*c2*b2 + vy_medio*c2*c2 ,
vx_medio*b2*b3 + vy_medio*c2*c3],
[vx_medio*c3*b1 + vy_medio*c3*c1 ,
vx_medio*c3*b2 + vy_medio*c3*c2 ,
vx_medio*b3*b3 + vy_medio*c3*c3] ])
```

```

# matrizes Globais
for i in range(0,3):
    ii = IEN[e,i]
    for j in range(0,3):
        jj = IEN[e,j]
        K[ii,jj] = K[ii,jj] + ke[i,j]
        M[ii,jj] = M[ii,jj] + m[i,j]
        Gx[ii,jj] = Gx[ii,jj] + gxe[i,j]
        Gy[ii,jj] = Gy[ii,jj] + gye[i,j]
        Kest[ii,jj] = Kest[ii,jj] + kestx[i,j] + kesty[i,j]
```

```

# CALCULO DA VELOCIDADE DA MALHA
R = []
#mapear um nó e quais elementos ele pertence e
```

```

#anotar quais nós são esses
for NODE in range(0,npontos):
    V=[]
    for i in range(0,ne):
        if IEN[i,0] == NODE :
            V.append(IEN[i,1])
            V.append(IEN[i,2])
        if IEN[i,1] == NODE :
            V.append(IEN[i,0])
            V.append(IEN[i,2])
        if IEN[i,2] == NODE :
            V.append(IEN[i,0])
            V.append(IEN[i,1])
    V = list(set(V))
    R.append(V)

p = np.zeros((npontos,1),dtype = 'float')
ui = np.zeros((npontos,1), dtype = 'float')
vi = np.zeros((npontos,1), dtype = 'float')

#calculo da velocidade ponderada pela distancia
#de cada nó vizinho
for i in range(0,len(R)):
    VIZINHOS = R[i]
    sum_xj = 0.0
    sum_yj = 0.0
    sumdist = 0.0
    for j in VIZINHOS:
        dist = np.sqrt(((X[j]-X[i])**2)+((Y[j]-Y[i])**2))
        sumdist += dist
        sum_xj += X[j]*dist
        sum_yj += Y[j]*dist

```

```

ui[i] = c1*((sum_xj/sumdist)-X[i])/dt
#valor da velocidade da malha

vi[i] = c1*((sum_yj/sumdist)-Y[i])/dt
#valor da velocidade da malha

#velocidade de movimentacao dos pontos do cilindro
for i in range(0,npoints):
    if fixo[i] == 0.0:
        Y[i] = Y[i] + vi[i]*dt
        X[i] = X[i] + ui[i]*dt
        Fc[i] = Fc[i] + vi[i]*dt
    if circle[i]==1.0:
        Y[i] = Y[i] + 0.045*np.sin(1.1*j)*dt
        Fcircle[i] = Fcircle[i] + 0.045*np.sin(1.1*j)*dt
        Fv[i] = 0.045*np.sin(1.1*j)/dt

#-----
#  INICIO DO SOLVER CORRENTE Vorticidade
#-----

# Calculando o termo  $G_{xvy} - G_{yvx}$ 
b = np.dot(Gx,vy) - np.dot(Gy,vx)
omega = np.linalg.solve(M,b) #vorticidade no tempo n
omegacc = omega.copy()

# Aplicando as condições de contorno de w
for i in range(0,len(cc)):
    if ccw[i] == 1.0:
        omegacc[i] = omega[i]
    # so existe w na parede, no restante do dominio é nulo

```

```

# nova velocidade convectiva
unew = vx - ui
vnew = vy - vi

# Calculo de v.\nabla\omega
VGO = np.diagflat(unew)*Gx + np.diagflat(vnew)*Gy

# Iniciando solver transporte da vorticidade para omega n+1
LHSw = (1.0/dt)*M.copy()

# Vetor do lado direito para eq. de transporte da vorticidade
RHSw = (1.0/dt)*np.dot(M.copy(),omega) -np.dot(VGO,omega) -
nu*np.dot(K.copy(),omega)

# imposicao das ccs para omega
for i in range(0,len(cc)):
    if ccw[i] == 1.0:
        LHSw[i,:] = 0.0
        LHSw[i,i] = 1.0
        RHSw[i] = omegacc[i]

# SOLVER eq. transporte
omega = np.linalg.solve(LHSw,RHSw)

# Funcao corrente K \psi = M* \omega
RHSpsi = np.dot(M,omega)

# Lado esquerdo da eq K\psi = M*\omega
LHSpsi = K.copy()

# Imposicao das ccs de \psi

```

```

for i in range(0,len(cc)):

    if ccoutlet[i]==1.0:
        RHSpsi[i] = Fcoutlet[i]

    if cc[i] == 1.0:
        LHSpsi[i,:] = 0.0
        LHSpsi[i,i] = 1.0
        RHSpsi[i] = Fc[i]

    if circle[i] == 1.0:
        LHSpsi[i,:] = 0.0
        LHSpsi[i,i] = 1.0
        RHSpsi[i] = Fcircle[i]

# SOLVER da funcao corrente
psi = np.linalg.solve(LHSpsi,RHSpsi)

# encontrar as novas velocidades  $Mvx = Gy \backslash \psi$ ,  $Mvy = -Gx \backslash \psi$ 
b_3 = np.dot(Gy,psi)
M3 = M.copy()
vx = np.linalg.solve(M3,b_3)

b_4 = np.dot(Gx,psi)
M4 = M.copy()
vy = -np.linalg.solve(M4,b_4)

# impor cc de velocidade nos vetores vx e vy
for i in range(0,len(cc)):

    if cc[i] == 1.0:
        vx[i] = Fu[i]
        vy[i] = Fv[i]

    if circle[i] == 1.0:
        vx[i] = Fu[i]
        vy[i] = Fv[i]

```

```

# fim = time.time()

#-----
#EXPORTAR CALCULOS DO SOLVER
#NO TEMPO n
#-----

#exportar arquivo para ser lido no paraview

# salvar a nova configuração da malha
# apos se movimentar

msh = meshio.read('malhatcc.msh')
IEN = msh.cells_dict['triangle']
cells=[('triangle',IEN)]

xyz = msh.points

for i in range(0,npontos):
    xyz[i]=[X[i],Y[i],0.0]

# print('Tempo da interação:',(fim - inicio))

# salvando as variaveis calculadas
meshio.write_points_cells(
    "./vtk/teste"+str(t)+".vtk",
    xyz,
    cells,
    # Optionally provide extra data on points, cells, etc.
    point_data={'vx':vx,'vy':vy,'psi':psi, 'omega':omega},

```

```
# cell_data=cell_data,  
# field_data=field_data  
)  
  
t += 1
```