



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos
Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro
Abril de 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, Ph.D.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2021

Alves, Felipe Rodrigues de Mello

Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio/
Felipe Rodrigues de Mello Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2021.

XI, 34 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 33 – 33.

1. Equação do calor. 2. Método de elementos finitos.
3. Discos de freio. I. Rabello dos Anjos, Gustavo *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio.

*À minha família por todo o
suporte e compreensão.*

Agradecimentos

Sou muito grato não apenas ao investimento financeiro e educacional fornecido pelos meus pais Eduardo e Isabel mas também por toda a compreensão e apoio na jornada da graduação, que teve também grande suporte da minha dinda Daize na perspectiva do mercado de trabalho e complemento na formação profissional. Agradeço ao suporte de todos os meus amigos de fora da faculdade que perceberam meus momentos difíceis e foram capazes de me apoiar mesmo sem entender bem a realidade do curso e a meus amigos de faculdade que foram grandes companheiros em momentos de extrema importância. Um agradecimento enorme à equipe Icarus de Formula SAE por me proporcionar a paixão pela engenharia mecânica e me ensinar a ser um engenheiro mais completo, a todos os profissionais da Gerência de equipamentos de subestações de Furnas, que foram de extrema cordialidade no meu início da vida profissional e por último, a todo setor de Installation Analysis Subsea da TechnipFMC, que me proporcionaram uma oportunidade completa de atuar com a engenharia, fornecendo todas as ferramentas e suportes para o desenvolvimento de um trabalho do mais alto nível.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Abril/2021

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um código capaz de calcular soluções aproximadas para o problema térmico aplicado a discos de freio submetidos à situações críticas de frenagem de um protótipo de competição tipo formula utilizando o método de elementos finitos. A solução da equação transiente de calor aplicada a um disco de freios fornece uma alternativa aos softwares de altos investimentos financeiros e capacidades computacionais no momento do estudo da dissipação de calor, resultando em um parâmetro de escolha de materiais para fabricação e geometrias a serem consideradas.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

SOLUTION OF THE TRANSIENT HEAT EQUATION USING THE FINITE ELEMENT ANALYSIS APPLIED TO BRAKE DISCS

Felipe Rodrigues de Mello Alves

April/2021

Advisors: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

This work proposes the development of a code

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um código capaz de calcular soluções aproximadas para o problema térmico aplicado a discos de freio submetidos à situações críticas de frenagem de um protótipo de competição tipo formula utilizando o método de elementos finitos. A solução da equação transiente de calor aplicada a um disco de freios fornece uma alternativa aos softwares de altos investimentos financeiros e capacidades computacionais no momento do estudo da dissipação de calor, resultando em um parâmetro de escolha de materiais para fabricação e geometrias a serem consideradas.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivo	2
1.3 Metodologia	2
1.4 Organização da tese	2
2 Revisão Bibliográfica	3
2.1 Sistema de freios	3
2.2 Transferência de calor	6
2.3 Método dos elementos finitos	10
2.3.1 Método de resíduos ponderados	13
2.3.2 Método de Galerkin	14
2.3.3 Noção de espaço de funções	15
2.3.4 Assembling	17
2.3.5 Condições de contorno	18
3 Metodologia	20
3.1 Modelo teórico	20
3.2 O método dos elementos finitos	20
3.2.1 Problema bidimensional permanente	20
3.2.2 Problema bidimensional transiente	22
3.2.3 Problema tridimensional	23

3.3	O Algoritmo	26
4	Resultados e Discussões	27
4.1	Solução analítica	27
4.2	Validação	28
4.2.1	31
5	Conclusões	32
	Referências Bibliográficas	33
A	Código Fonte	34

Lista de Figuras

1.1	Modelagem de problemas reais para solução numérica	1
2.1	Pitch causado pela transferência de carga e de massa na frenagem de um veículo	4
2.2	Balance bar entre sistema dianteiro e traseiro e cilindros mestre . . .	5
2.3	Sistema de freios interligado por linhas pressurizadas	5
2.4	Sistema de freios interligado por linhas pressurizadas	6
2.5	volume infinitesimal	8
2.6	Elementos tridimensionais e seus nós	11
2.7	Interior da malha de um cubo com elementos tetraédricos	12
2.8	Projeção de um vetor em uma dimensão inferior	16
2.9	Montagem de todas as matrizes elementares em uma matriz global . .	18
4.1	Condições de contorno para solução analítica	27
4.2	Condições de contorno para solução analítica	28
4.3	Visualização da simulação numérica	29
4.4	Comparação de resultados no eixo central do plano estudado	29
4.5	Comparação de resultados em $x = 0,25$	30
4.6	Comparação de resultados em $x = 0,8$	30

Lista de Tabelas

4.1 Erro na simulação ponto a ponto	31
---	----

Capítulo 1

Introdução

Para transformar um problema real em um modelo compatível com soluções computacionais existem algumas metodologias de idealização do fenômeno físico - onde traduzimos suas características através de modelos matemáticos - a fim de discretizá-lo e resolvê-lo, como esquematizado na Figura 1.1.



Figura 1.1: Modelagem de problemas reais para solução numérica

Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações computacionais fazem uso de diferentes métodos e técnicas para calcular soluções envolvendo os problemas típicos da ciência e engenharia, como: método de diferenças finitas, método de elementos finitos e método de volumes finitos. O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento que busca soluções aproximadas para os modelos numéricos e se aplica a uma grande variedade de problemas físicos. Sua acurácia e estabilidade estão largamente estudados, o que confere ao método uma robustez e sólida confiabilidade.

Uma aplicação do MEF bastante importante no estudo da engenharia e que será explorada neste trabalho é a transferência de calor em sólidos. O estudo do calor se torna necessária em diversas aplicações na sociedade - tal como na química, no armazenamento de comidas e na medicina e farmácia - e consequentemente na engenharia - como no funcionamento de motores, turbinas, trocadores de calor, entre

outros.

A transferência de calor ocorre de forma contínua, geralmente em geometrias complexas e passa por um período transiente até chegar em algum estado que possa ser considerado permanente. Os problemas térmicos portanto, são de difícil solução, onde os métodos anteriormente citados ganham grande importância.

1.1 Motivação

Veículos de competição são submetidos a grandes esforços uma vez que o seu objetivo é ser mais eficiente em uma pista de corrida. As pistas planejadas para veículos de alta performance são compostas de diversos trechos curvos, principalmente as pistas de Formula SAE e a frenagem eficiente permite maior precisão nas entradas de curva. Sendo assim o sistema de freios é constantemente acionado, o que leva a um considerável aumento de temperatura dos seus componentes. O aumento descontrolado de temperatura nos discos de freio podem resultar em fadiga térmica, vaporização do fluido de freio, rachaduras e vibrações prejudiciais ao funcionamento do sistema, o que compromete a segurança e performance do protótipo.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como missão fornecer uma ferramenta de simulação térmica que utiliza o método de elementos finitos afim de estudar os fenômenos energéticos envolvendo os componentes dos freios de um carro de competição, sendo assim capaz de fornecer estudos comparativos sobre a influência das grandezas envolvidas no projeto.

1.3 Metodologia

1.4 Organização da tese

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Sistema de freios

O objetivo de um sistema de freios é transformar a energia cinética de um objeto em energia térmica, sendo assim capaz de reduzir a velocidade do mesmo. A aplicação de freios é bastante plural, aparecendo em máquinas de fabricação industrial, elevadores e os mais diversos tipos de veículos. Os freios mais famosos são os freios automotivos que, assim como freios da aviação, carregam em si uma responsabilidade enorme de segurança e passa pelos mais diversos tipos de estudos e regulamentações. Além de ser um item de segurança, os freios também são estudados no meio da competição como um sistema de performance, uma vez que um carro com freios bem dimensionados tem a capacidade de frear mais perto de uma curva, ganhando então vantagem no percurso com relação a seus competidores. Os sistemas de freio automotivos mais utilizados são do tipo tambor ou a disco, ambos com acionamento hidráulico.

O freio a disco é mais utilizado em motocicletas e carros de alta performance por ser mais eficiente (em relação aos freios a tambor) já que é autolimpante, não acumula água e sujeira por meio do efeito centrífugo e por ser aberto ao mesmo externo proporcionando uma facilidade maior de manutenção. Além disso a dispersão de calor é maior nos discos, o que causa uma menor propensão a falhas por fadiga térmica.

Quando o motorista aciona o pedal de freios, o mesmo aciona um cilindro mestre, que por sua vez transforma o movimento do pedal em pressão hidráulica tanto no sis-

tema dianteiro quanto no traseiro, que são independentes por motivos de segurança. A pressão que é destinada ao sistema dianteiro e traseiro não é necessariamente igual e depende do dimensionamento e dos cálculos de frenagem do projeto. Quando um veículo freia, ocorre a chamada transferência de carga - somatório de momentos causado pelas forças inerciais - e a transferência de peso - o corpo do passageiro e a gasolina se deslocando mais para a frente do veículo - que fazem o veículo ter a rotação de *Pitch*, como mostra a Figura 2.1. Com isso normalmente os freios dianteiros de um veículo recebem maior carga, uma vez que o peso na parte dianteira do carro e a força de atrito entre pista e pneu são maiores.



Figura 2.1: Pitch causado pela transferência de carga e de massa na frenagem de um veículo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em veículos de competição a distribuição de pressão hidráulica nos sistemas independentes dianteiro e traseiro é feita por uma peça chamada Balance Bar, como mostra a Figura 2.2. Esta peça tem um braço de alavanca diferente para cada sistema, B_L e B_R , destinando assim uma força específica de projeto, de forma que a força exercida na balance bar pelo pedal F_{pd} é transformada nas força dianteira

F_{cilF} e na força traseira F_{cilR} , onde:

$$F_{pd} = F_{cilF} + F_{cilR}$$

$$F_{cilF} \cdot B_L = F_{cilR} \cdot B_R$$

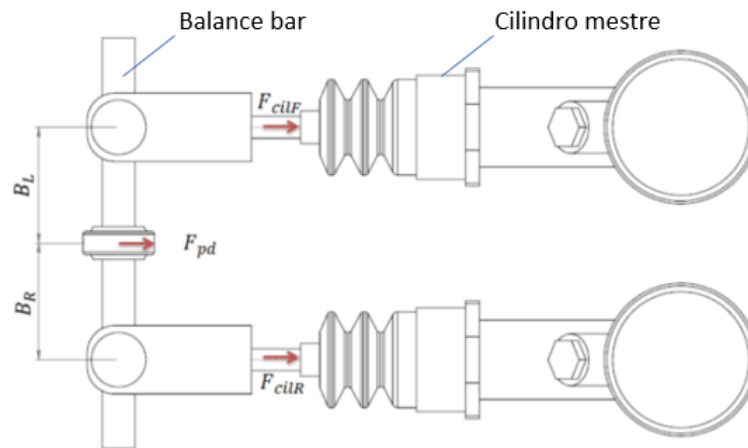


Figura 2.2: Balance bar entre sistema dianteiro e traseiro e cilindros mestre

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a força exercida em cada haste, o cilindro mestre pressuriza o interior das linhas de freio através de um fluido incompressível, como mostra a Figura 2.3.

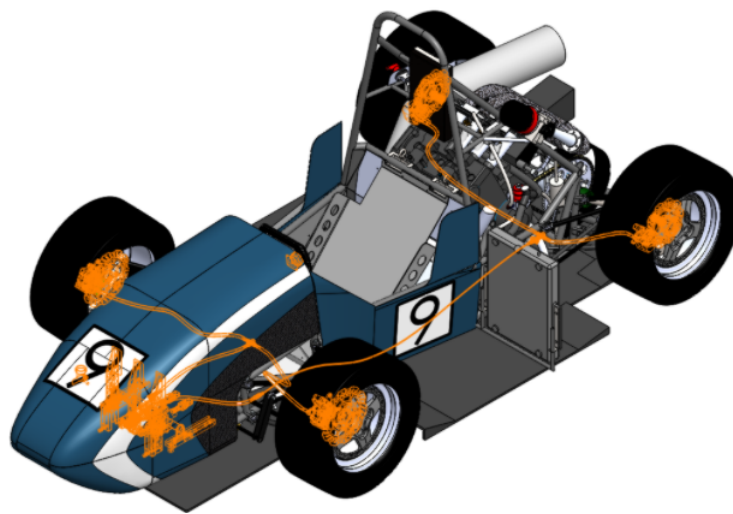


Figura 2.3: Sistema de freios interligado por linhas pressurizadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

As linhas então entregam a pressão hidráulica a um componente chamado pinças de freio. As pinças têm pistões que transformam a pressão hidráulica em força. Esta força pressiona as pastilhas de freio contra os discos, gerando uma força de atrito que vai resultar em um torque de frenagem.

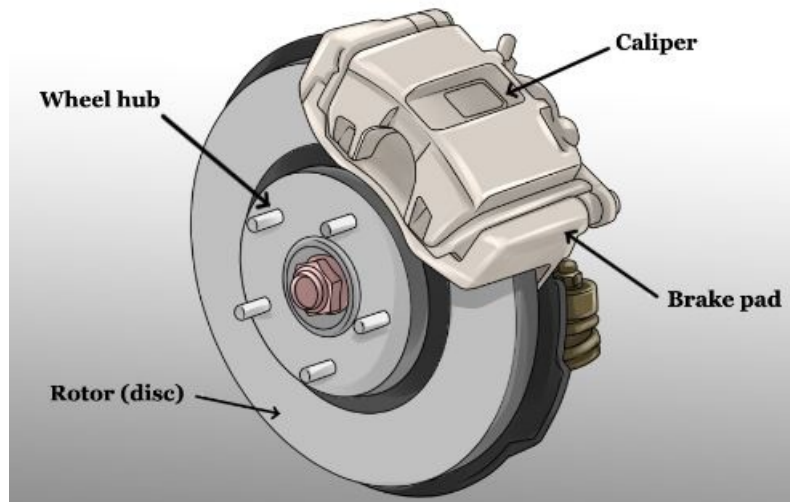


Figura 2.4: Sistema de freios interligado por linhas pressurizadas

Fonte: <https://www.quora.com/What-are-brake-calipers-and-what-do-they-do>

2.2 Transferência de calor

O fenômeno natural do calor é mais observado pelo ser humano desde que ele possui domínio sobre o fogo, por volta de 1200 A.C. Entretanto apenas na civilização grega o assunto começou a ser estudado. Acredita-se que o primeiro estudo do calor do fogo foi com a finalidade de transformar diferentes materiais em ouro. Os alquimistas da época tinham a teoria de que para isso acontecer, era necessário ter um alto controle da temperatura no processo.

Os anos passaram, as primeiras turbinas a vapor surgiram, e o calor ganhou diversas aplicações para a humanidade. Na engenharia mecânica, o calor pode ser desejado ou algo a ser evitado, dependendo da situação. Por exemplo no automobilismo é necessário uma centelha para um motor a combustão funcionar, porém se os freios superaquecerem, o condutor pode perder capacidade de frenagem e acarretar em um acidente.

Segundo Frank P. Incropera [1] a Transferência de calor é definida como "*energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura no espaço*".

Em um disco de freios ocorrem os três tipos de transferência de calor descrito pelo autor: condução, convecção e radiação. Quando existe um gradiente de temperatura em um meio estacionário sólido ou fluido a *condução* ocorre quando há transferência de calor através do meio. Já a *convecção* ocorre quando há transferência de calor entre uma superfície e um fluido em movimento. Quando a troca de calor ocorre através de ondas eletromagnéticas que são emitidas por qualquer superfície com temperatura não nula (diferente de $0K$), ocorre a *radiação*. O estudo desses fenômenos ocorre através de equações de taxas que quantificam a energia transferida por unidade de tempo.

A condução pode ser interpretada como um fenômeno difusivo onde ocorre transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas através das interações entre partículas. Em um sólido essas interações ocorrem através da combinação entre a vibração das moléculas dos retículos cristalinos e a movimentação dos elétrons livres. Para a condução a equação que descreve a taxa de transferência de calor é conhecida como a *lei de Fourier*.

$$q''_{cond} = -k\nabla\mathbf{T} = -k\left(\mathbf{i}\frac{dT}{dx} + \mathbf{j}\frac{dT}{dy} + \mathbf{k}\frac{dT}{dz}\right) \quad (2.1)$$

sendo \mathbf{q} o fluxo de calor por área [W/m^2] e k a condutividade térmica [$W/m \cdot K$]. A condutividade térmica pode ser constante ou variável de acordo com a temperatura e é uma propriedade do material que está conduzindo o calor.

A convecção ocorre quando existe um gradiente de temperatura entre uma superfície e um grande número de moléculas em movimento. A transferência de calor ocorre devido a superposição de dois fenômenos: o transporte das moléculas devido ao movimento do fluido e o transporte de energia devido ao movimento aleatório de cada molécula (fenômeno difusivo, como a condução). A equação que descreve a taxa de transferência da convecção é a *lei do resfriamento de Newton*:

$$q''_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (2.2)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção que depende tanto do material do sólido quanto das condições da camada limite do escoamento, o que

significa que h depende também das propriedades do fluido e da geometria do sólido. Além disso q'' depende da diferença entre a temperatura do sólido T_s e do fluido T_∞ .

A radiação por sua vez é equacionada pela *Lei de Stefan Boltzman*:

$$q''_{rad} = \epsilon \sigma T^4 \quad (2.3)$$

onde σ é a constante de Stefan Boltzman e ϵ é a emissividade - propriedade do material ($0 \leq \epsilon \leq 1$).

Neste trabalho apenas fenômeno da condução será aplicada. Para fazer o equacionamento tridimensional da condução considera-se um volume infinitesimal contínuo formado pelo seu domínio Ω e contorno Γ e supondo um volume $dV = dxdydz$ homogêneo e isotrópico.

Conforme a *lei de Fourier* - equação 2.1 - é possível separar o fluxo de calor em três dimensões conforme Figura 2.5, onde:

- $q''_x = -k \left(\frac{dT}{dx} \right) \mathbf{i}$ - fluxo de calor na direção x;
- $q''_y = -k \left(\frac{dT}{dy} \right) \mathbf{j}$ - fluxo de calor na direção y;
- $q''_z = -k \left(\frac{dT}{dz} \right) \mathbf{k}$ - fluxo de calor na direção z.

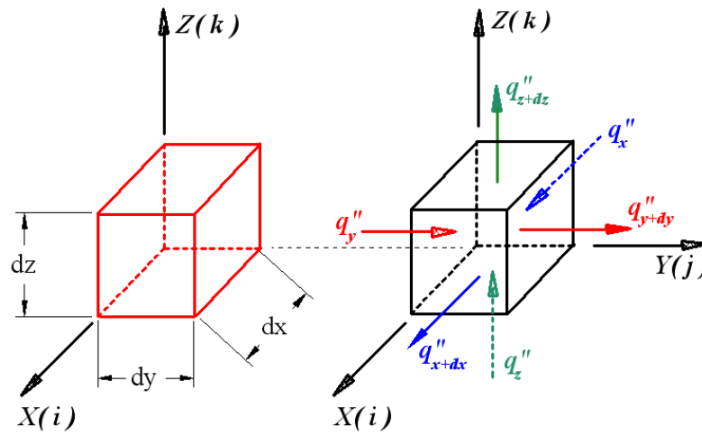


Figura 2.5: volume infinitesimal

Fonte: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/5645/1/arquivo76571.pdf>

Além disso a taxa de energia em dV é dada por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (2.4)$$

onde c é o calor específico do material, ρ a massa específica e $\frac{\partial T}{\partial t}$ - Variação da temperatura no tempo.

Considerando ainda uma possível geração de calor Q no interior do volume dV , a equação do balanço de energia de dV é dada por:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \Delta q''_x dydz + q''_y dxdz + q''_z dxdy + QdV \quad (2.5)$$

onde:

- $\Delta q''_x = q''_{x+dx} - q''_x$ - fluxo de calor na direção x;
- $dydz$ - área da seção perpendicular ao eixo x;
- $\Delta q''_y = q''_{y+dy} - q''_y$ - fluxo de calor na direção y;
- $dxdz$ - área da seção perpendicular ao eixo y;
- $\Delta q''_z = q''_{z+dz} - q''_z$ - fluxo de calor na direção z;
- $dxdy$ - área da seção perpendicular ao eixo z;

Sendo $\frac{q''_{x+dx} - q''_x}{\partial x}$ a derivada parcial, temos:

$$\begin{aligned} q''_{x+dx} - q''_x &= \frac{\partial(q''_x)}{\partial x} \partial x = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \\ q''_{y+dy} - q''_y &= \frac{\partial(q''_y)}{\partial y} \partial y = \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \\ q''_{z+dz} - q''_z &= \frac{\partial(q''_z)}{\partial z} \partial z = \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

Encontra-se então a equação da condução tridimensional

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dxdydz + Qdxdydz \quad (2.7)$$

Define-se o operador *Laplaciano* ∇^2 como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

Com isso é possível escrever a equação na sua forma diferencial:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -k \nabla^2 T + Q_\Omega \quad (2.9)$$

onde Q_Ω é o termo de geração de calor no volume total, chamado de termo fonte.

2.3 Método dos elementos finitos

Segundo *Logan* [2], o método de elementos finitos tornou-se realmente prático na solução de problemas de engenharia a partir do anos 50 juntamente com o desenvolvimento de computadores com maior capacidade de processamento. As publicações de Hrennikoff em 1941 e McHenry em 1943 trouxeram a primeira aplicação estrutural na solução unidimensional de tensões em vigas e barras. No mesmo período um paper de Courant foi publicado abordando a solução de tensões na forma variacional. Nesse trabalho ele propôs a utilização de funções interpoladoras em regiões triangulares de forma que toda a região possa obter uma solução numérica aproximada. Já em 1947, interessado em resolver problemas complexos em estrutura de aeronaves, Levy sugeriu o método de rigidez e deslocamento. Entretanto esse método exigia uma enorme capacidade de cálculo, que só foi satisfeita anos depois com o avanço tecnológico. A primeira aplicação realmente bidimensional veio em 1956 com Turner ao derivar matrizes de rigidez para elementos triangulares e retangulares (funcionando como treliças) no intuito de obter uma matriz de rigidez para toda a estrutura, método assim conhecido como *direct stiffness method*. O termo "elemento finito" veio em 1960 com Clough que utilizou ambos os elementos triangulares e retangulares na análise de tensão plana.

Até este momento os projetos que utilizavam o método de elementos finitos se utilizavam da premissa de pequenas deformações e deslocamentos. Contudo, em 1960 Turner foi o primeiro a considerar grandes deflexões e principalmente, a desenvolver a aplicação em estudos térmicos. Conforme classificação feita por *Logan* [3] as aplicações do MEF podem ser tanto estruturais quanto não estruturais. As aplicações estruturais típicas são:

- Estudos de tensão, incluindo análises concentradores de tensão em furos, filetes e as mais diversas variações de geometria;
- Estudos de flambagem;
- Estudos de vibração.

Já as aplicações não estruturais são:

- Transferência de calor;
- Escoamento de fluidos;
- Estudos de potencial elétrico e magnético.

Além disso existem aplicações biomecânicas, como análises de coluna espinhal, crânio, coração, dentre outros.

A ideia por trás do método de elementos finitos é a simulação de um problema através da modelagem de partes discretas que, unidas, representam um meio contínuo, ou seja, através de uma discretização do modelo. Portanto, com o objetivo de viabilizar a solução computacional, a modelagem é feita dividindo a geometria grande e complexa - que é submetida a carregamentos térmicos - em pequenas partes - denominadas *elementos* que podem ser de diferentes formas como mostrado na figura 2.6.

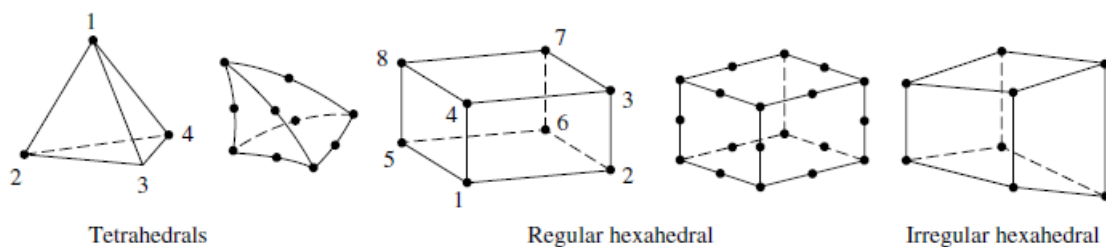


Figura 2.6: Elementos tridimensionais e seus nós

Fonte: [4]

O conjunto dos *elementos* e de seus pontos de contorno - denominados nós - é conhecido como *malha* como mostra a Figura 2.7. A *malha*, portanto, é composta por um número finito de *elementos* de comportamento bem definido. Logan [4] define que todo *elemento* é conectado direta ou indiretamente a todos os outros através de seus *nós*, e que um *nó* influencia no outro dando assim o comportamento da estrutura. O MEF é um método poderoso para discretização de geometrias complexas pois não exige esforço computacional adicional comparado a sua utilização em geometrias regulares e é também um método fácil de se incluir uma análise dinâmica.

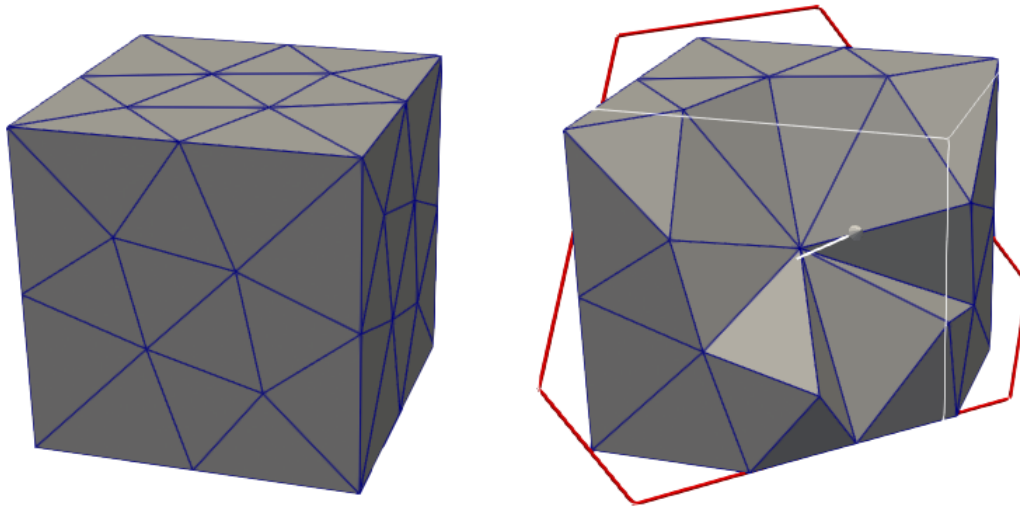


Figura 2.7: Interior da malha de um cubo com elementos tetraédricos

Fonte: Elaborada pelo autor

O MEF parte de uma equação diferencial que descreve o problema. As equações diferenciais são divididas na literatura entre a forma fraca e a forma forte. Ambas têm soluções equivalentes - ou seja, a solução para uma delas representa a solução para a outra. A forma forte, ou forma diferencial, consiste na representação do problema através de um sistema de equações diferenciais, parciais ou ordinárias, no espaço ou no tempo, como a demonstrada na equação 2.9. Problemas simples podem ser resolvidos analiticamente na forma forte através de técnicas de integração, porém problemas mais complexos podem ter soluções muito difíceis de serem obtidas analiticamente, se tornando uma tarefa árdua e pouco eficiente, sendo assim indicada a aplicação de métodos precisos para obtenção de soluções aproximadas como o método de elementos finitos. A forma fraca consiste na representação do problema através de uma equação integral ponderada, que é definida como uma equação que, a partir do método de solução, distribui "pesos" a determinados elementos da expressão. O termo forma fraca diz respeito ao fato de a equação ser resolvida adotando uma média em vez de ser solucionada ponto a ponto como na forma forte.

A aplicação do MEF se inicia justamente na transformação da equação diferencial na sua forma forte $f''(x, y, z)$ para a forma fraca. Para realizar este procedimento, é necessário integrar sua equação no domínio multiplicando por uma função peso

$\omega(x, y, z)$:

$$\int_{\Omega} \omega(x, y, z) f''(x, y, z) d\Omega \quad (2.10)$$

Após isso é necessário fazer a integração por partes pelo teorema de green para se obter a redução de ordem. Além disso aplica-se um método de resíduos ponderados para se encontrar a melhor aproximação para a função de interesse.

2.3.1 Método de resíduos ponderados

Os métodos de resíduos ponderados são procedimentos capazes de achar soluções aproximadas para equações diferenciais com um bom grau de precisão. Trata-se de encontrar uma função \mathbf{F} que aproxima a solução exata no intervalo minimizando o erro - aqui chamado de resíduo - da aproximação. A função \mathbf{F} é dada por meio do somatório de N funções de forma ϕ_i com amplitudes arbitrárias a_i .

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \quad (2.11)$$

Como esses passos estão sendo aplicados para cada elemento particular da malha, essas funções de forma têm as seguintes características:

1. O valor da função em seu respectivo nó vale 1, e nos outros nós tem valor nulo;
2. A função entre os nós pode ser linear, quadrática, cúbica ou até de graus maiores;
3. A função apresenta continuidade no interior de cada elemento, mas não na fronteira dos nós.

Ao substituir \mathbf{F} na equação diferencial original um resíduo R é encontrado já que \mathbf{F} não é exatamente igual a solução exata.

Por exemplo, para a equação diferencial $\frac{df}{dx} - f = 0$ com c.c $f(0) = 1$ propõe-se um polinômio do terceiro grau:

$$\mathbf{F} = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + 1$$

onde x^3 , x^2 e x são as funções de forma.

Substituindo \mathbf{F} na equação diferencial temos:

$$\frac{d(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + 1)}{dx} - (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + 1) = R(x)$$

Não é igualado a zero, mas sim ao resíduo. Portanto:

$$R(x) = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 - a_1x^3 - a_2x^2 - a_3x - 1$$

Após isso, escolhe-se pontos arbitrários onde o resíduo será nulo. Por exemplo, escolhendo $x = 0,25$, $x = 0,50$ e $x = 0,75$ obtem-se um sistema linear para as amplitudes a_i que resulta em:

$$\mathbf{F} = 0,28x^3 + 0,42x^2 + 1,03x + 1$$

A comparação dos resultados dessa função com a solução exata ($f = e^x$) no intervalo de 0 a 1 dão um erro menor que 0,5%.

A minimização deste resíduo R é dada pela integração do mesmo no domínio Ω e multiplicando-o por uma função de ponderação Ψ_j .

$$\int_{\Omega} R \cdot \Psi_j d\Omega = 0, \text{ para } j = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

Existem diversos tipos de métodos de resíduos ponderados. O mais utilizado no MEF é o método de Galerkin.

2.3.2 Método de Galerkin

Boris Grigorievitch Galerkin, nascido em 1871, foi um engenheiro e matemático formado pelo Instituto Tecnológico de St. Peterburgo. Ao se envolver fervorosamente com a política em um período conturbado, acabou sendo preso por um período de aproximadamente dois anos, onde teve a oportunidade de desenvolver seu conhecimento científico. Em 1915 Galerkin publicou um trabalho que propunha um método de integração aproximada para equações diferenciais parciais, que ficou conhecido como Método de Galerkin. Este trabalho trouxe grande vantagem sobre o já proposto método de Ritz uma vez que era uma regra mais abrangente.

Com isso, Galerkin desenvolvia o método de resíduos ponderados mais útil para o MEF. A particularidade do método de Galerkin está no fato de que ele escolhe a função de ponderação Ψ_j exatamente igual a função de forma ϕ_i :

$$\Psi_j = \phi_j \quad (2.13)$$

Com isso, substituindo a equação 2.13 na equação 2.12 temos a equação do método de Galerkin:

$$\int_{\Omega} R \cdot \phi_i d\Omega = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Para uma melhor compreensão do método, é necessário o conhecimento da definição de espaço de funções.

2.3.3 Noção de espaço de funções

O espaço de funções pode ser explicado como uma analogia ao espaço vetorial onde temos as seguintes definições:

- Base: espaço vetorial de três dimensões, V^3 , pode ser dado pelos vetores unitários $e_1 = [1 \ 0 \ 0]$, $e_2 = [0 \ 1 \ 0]$ e $e_3 = [0 \ 0 \ 1]$.
- Combinação linear: qualquer elemento pertencente a este espaço é representado pela combinação linear dos elementos da base.

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

- Base é Linearmente Independente (ou ortogonais): é impossível descrever qualquer elemento da base como combinação dos outros elementos. Isso é descrito matematicamente como o resultado nulo do produto interno:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0, \langle e_1, e_3 \rangle = 0, \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

- Base é ortonormal: além de serem ortogonais, a norma dos vetores da base também é unitária:

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$$

Com isso, um espaço é formado pela combinação linear dos elementos de sua base. A construção de um espaço de funções é análoga pois as funções da base são ortogonais entre si. O que muda é a noção de ortogonalidade de funções. Por exemplo, considere as funções g e h definidas no domínio Ω , o produto interno das duas é dado por:

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} gh d\Omega \quad (2.15)$$

Da mesma forma, a representação dos elementos de um espaço de funções é dada pela combinação linear dos elementos de sua base.

No contexto do método de Galerkin, quando escolhemos as funções de forma ϕ_i estamos construindo um espaço de funções \bar{S} que é composto por todas as funções que possam ser representadas por uma combinação linear dos elementos de sua base, ou seja:

$$\bar{S} = \text{span}[\phi_i]_{i=1}^n$$

Para o método de Galerkin, a analogia com o espaço vetorial se faz muito útil ao entendimento. Quando é necessário se obter uma aproximação de um vetor v de dimensão $(N+1)$ em um espaço de dimensão N , uma projeção do vetor é feita, como mostra a Figura 2.8.

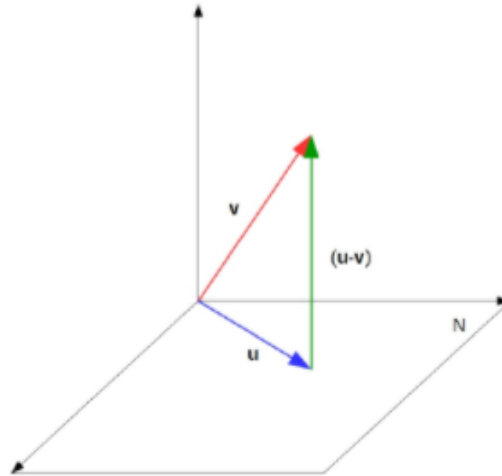


Figura 2.8: Projeção de um vetor em uma dimensão inferior

Fonte:

https://www.researchgate.net/publication/295546402_Uma_Introducao_a_o_Metodo_dos_Residuos_Ponderados

Com isso, a melhor aproximação do vetor \mathbf{v} em N é \mathbf{u} . A diferença entre \mathbf{v} e \mathbf{u} é ortogonal ao espaço N . A mesma ideia se aplica no método de Galerkin. No caso a diferença entre a função \mathbf{F} e a função exata f é o erro $R = f - \mathbf{F}$. Como o produto interno entre funções é dado pela Equação 2.15, isso significa que o produto interno entre o erro R e todas as funções de forma tem que ser nulo afim de minimizar o erro, como mostra a Equação 2.16. Com isso a função de forma toma o lugar da função de aproximação, o que define a igualdade definida na equação 2.13.

$$\int_{\Omega} R \cdot \phi_i d\Omega = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

Com isso, de acordo com a Equação 2.11, a variável de interesse $f''(x, y, z)$ da Equação 2.10 é aproximada pelas funções de forma $\phi(x, y, z)$ e a função peso $\omega(x, y, z)$ é aproximada pelas funções de aproximação $\Psi(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\approx \hat{f} = \sum_0^n a_i \phi(x, y, z) \\ \omega(x, y, z) &\approx \hat{\omega} = \sum_0^n b_j \Psi(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\Psi(x, y, z) = \phi(x, y, z)$.

2.3.4 Assembling

Portanto, após transformar a expressão da forma forte para a forma fraca, reduzir a ordem através do teorema de Green e substituir as aproximações da Equação 2.17 chega-se a um sistema do tipo:

$$Ku = f$$

para cada elemento da malha.

Com isso é necessário fazer a montagem das matrizes de cada elemento para formar a matriz global. Este procedimento é conhecido como *Assembling* como mostra a Figura 2.9.

Após o Assembling pode-se aplicar as condições de contorno.

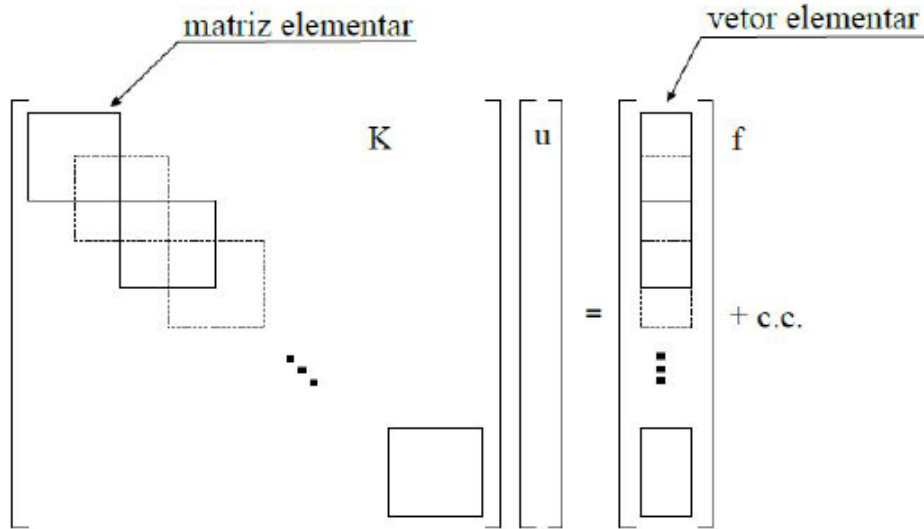


Figura 2.9: Montagem de todas as matrizes elementares em uma matriz global

Fonte: [5]

2.3.5 Condições de contorno

Para a solução de um problema físico, é necessário o conhecimento das condições de contorno daquele problema, ou seja, um conjunto de restrições adicionais que definem a situação dos limites físicos do objeto estudado. As condições de contorno no estudo de transferência de calor são divididas em três tipos: Dirichlet (1º tipo), Neumann (2º tipo) e Robin (3º tipo). Esses tipos podem ser misturados em um mesmo problema.

As condições de contorno são definidas em 1 dimensão menor do que o problema, ou seja, em um problema tridimensional, a condição de contorno diz respeito a um plano (2D). As definições de cada condição são as seguintes:

1. Dirichlet - As condições do 1º tipo são quando a variável de interesse - no caso térmico, a temperatura - é definida na fronteira. Por exemplo: $T_{parede} = a_1^{\circ}\text{C}$;
2. Neumann - As condições do 2º tipo são quando a derivada (fluxo) da variável de interesse é definida na fronteira. Por exemplo: $k \frac{dT_{parede}}{dx} = a_2$;
3. Robin - As condições do 3º tipo são a combinação linear do 1º e 2º tipos. Por exemplo: $T_{parede} + k \frac{dT_{parede}}{dx} = a_3$.

É importante destacar que no equacionamento do MEF, a condição de contorno do 1º tipo gera uma função peso nula, portanto $\omega = 0$.

Com as condições de contorno aplicadas na matriz global, encontra-se um sistema do tipo:

$$K_{ij}X_i = F_i$$

A solução do problema resulta no cálculo final, onde encontram-se os valores da variável de interesse para cada ponto da malha estudada.

A precisão do método dos elementos finitos (MEF) depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho dos elementos da malha e do tipo de funções de forma considerados (lineares, quadráticas, cúbicas, etc). Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número dos elementos em uma determinada malha, mais próximo da realidade está a representação e maior a precisão nos resultados da análise.

Capítulo 3

Métodologia

3.1 Modelo teórico

Escrever aqui o modelo teórico específico do meu problema

3.2 O método dos elementos finitos

1. Passos para realizar uma análise por MEF

Para utilizarmos o método dos elementos finitos, seguimos os seguintes passos:

- (a) Transformar a expressão da forma forte para a forma fraca;
- (b) Utilizar integração por partes para atingir a redução da ordem da expressão;
- (c) Uso do método de aproximação de funções (método de Galerkin);
- (d) Montagem das matrizes - conhecido como assembling;
- (e) Imposição das condições de contorno;
- (f) Solução do sistema linear encontrado.

3.2.1 Problema bidimensional permanente

A solução de um problema bidimensional permanente pode ser calculado seguindo os passos descritos:

- Descrição na forma forte:

$$\nabla^2 u = 0$$

onde as condições de contorno podem ser do tipo Dirichlet.

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio Ω :

$$\int_{\Omega} \omega \nabla^2 u \, d\Omega = 0$$

- Integração por partes:

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u \cdot n \, d\tau - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega$$

O primeiro termo representa o contorno e o segundo o domínio.

- Usando Galerkin:

$\Psi(x, y, z) = \phi(x, y, z)$, sendo

$$u \approx \hat{u} = \sum_0^n a_i \phi(x, y)$$

$$\omega \approx \hat{\omega} = \sum_0^n b_j \Psi(x, y)$$

Por definição, a função peso é nula onde a condição de Dirichlet é definida, portanto:

$$\int_{\Omega} \omega \nabla u \cdot n \, d\tau - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega$$

Então:

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_0^n N_i(x, y) a_i \right) \cdot \nabla \left(\sum_0^n N_j(x, y) b_j \right) \, d\Omega = 0$$

$$\sum_0^n \sum_0^n \left(\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega \right) a_i = 0$$

Que podemos escrever como:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

Sendo:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} = Kx_{ij} \quad ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} = Ky_{ij}$$

e

$$K_{ij} = Kx_{ij} + Ky_{ij}$$

- Solução do sistema linear:

Portanto o código calcula a matriz K_{ij} aplicada na malha do problema e resolve o sistema linear considerando as condições de contorno:

$$K_{ij}a_i = 0 \quad \text{ou} \quad a_i = K_{ij}^{-1}b_j$$

a_i representando a temperatura T no nó i .

Nesses passos demonstra-se a construção da matriz de rigidez K .

3.2.2 Problema bidimensional transiente

- Descrição na forma forte:

$$\frac{du}{dt} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio Ω , realizando a integração por partes e Galerkin:

O segundo termo foi demonstrado anteriormente, onde origina-se a matriz K_{ij} . Para a derivada temporal foi utilizado o método de diferenças finitas. Portanto, após realizar os passos i, ii e iii do MEF, temos:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\int_0^1 N_i N_j \left(\frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} \right) d\Omega \right) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\alpha \int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} + \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_j}{dy} d\Omega \right) a_i = 0$$

sendo a matriz de massa definida como:

$$M_{ij} = N_i N_j$$

temos:

$$\frac{M}{\Delta t} a_i^{n+1} - \frac{M}{\Delta t} a_i^n - \alpha K a_i^{n+1} = 0$$

Temos, portanto:

$$(M - \alpha \Delta t K) a_i^{n+1} = M a_i^n$$

$$H a_i^{n+1} = f^n$$

a_i representando a temperatura T no nó i .

3.2.3 Problema tridimensional

- Descrição na forma forte

Como demonstrado anteriormente, a equação de transferência de calor tridimensional é:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -k \nabla^2 T + Q_\Omega$$

Ou,

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + Q_\Omega$$

onde considero propriedades constantes do material.

- Multiplicando a equação pela função peso w e integrando no domínio $\Omega = dx dy dz$:

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T - Q \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \omega \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \omega \nabla \cdot k \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} \omega Q d\Omega = 0$$

Pela identidade de Green

$$\int_{\Omega} \omega \frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma} \omega k \nabla T d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot (k \nabla T) d\Omega - \int_{\Omega} \omega Q d\Omega$$

- Usando Galerkin:

$N_i(x, y, z) = N_j(x, y, z) = N_k(x, y, z)$, sendo

$$T(x, y, z) = \sum_{i=0}^n N_i(x, y, z) a_i$$

$$\omega(x, y, z) = \sum_{j=0}^n N_j(x, y, z) b_j$$

$$Q(x, y, z) = \sum_{k=0}^n N_k(x, y, z) Q_k$$

Após substituir, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (\rho c_v) N_i N_j \frac{da_i}{dt} d\Omega + \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n - \int_{\Gamma} \omega (k \nabla N_i) d\Gamma + \int_{\Omega} (k \nabla N_i) \cdot \nabla N_j d\Omega \right] a_i = \\ = \int_{\Omega} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n N_i N_j Q_i d\Omega \end{aligned}$$

Considerando a condição de contorno de Dirichlet, zeramos o termo:

$$\int_{\Gamma} \omega^0 (k \nabla N_i) d\Gamma = 0$$

Portanto, temos:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (\rho c_v) N_i N_j \frac{da_i}{dt} d\Omega + \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \int_{\Omega} (k \nabla N_i) \cdot \nabla N_j d\Omega \right] a_i = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n Q_i N_i N_j d\Omega$$

Sendo:

$$\sum \sum \int k \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = K_{ij} \text{ a matriz de rigidez}$$

$\sum \sum \int N_i N_j d\Omega = M_{ij}$ a matriz de massa

Temos:

$$(\rho c_v) M_{ij} \frac{da_i}{dt} + K_{ij} a_i = M_{ij} Q_i + c.c$$

Para a discretização espacial $\frac{da_i}{dt}$ utiliza-se o método de diferenças finitas progressivo:

$$(\rho c_v) M_{ij} \left(\frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} \right) + K_{ij} a_i = M_{ij} Q_i + c.c$$

Para este passo, podemos utilizar três métodos distintos:

- Implícito - define o termo $K_{ij} a_i$ no tempo $(n+1)$:

$$\left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} + K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

- Explícito - define o termo $K_{ij} a_i$ no tempo (n) :

$$\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} a_i^{n+1} = \left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} - K_{ij} \right) a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

- Crank-Nicolson - mistura os dois métodos:

$$\left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} + \frac{1}{2} K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} - \frac{1}{2} K_{ij} \right) a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

Por questão de facilidade de implementação de algoritmos, escreve-se:

$$\left(\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} + \theta K_{ij} \right) a_i^{n+1} = \left[\frac{(\rho c_v) M_{ij}}{\Delta t} - (1 - \theta) K_{ij} \right] a_i^n + M_{ij} Q_i + c.c$$

Sendo:

- * $\theta = 1$ para o método implícito
- * $\theta = 0$ para o método explícito
- * $\theta = 0.5$ para Crank-Nicolson.

No código, a equação usada é:

$$(M_{ij} + \theta \Delta t K_{ij}) a_i^{n+1} = [M_{ij} - \Delta t (1 - \theta) K_{ij}] a_i^n + M_{ij} \Delta t Q_i + c.c$$

onde:

$$H = (M_{ij} + \theta \Delta t K_{ij})$$

3.3 O Algoritmo

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Solução analítica

Para estudar a precisão dos resultados do algoritmo proposto, os valores de temperatura no regime permanente é comparado a uma solução analítica proposta.

A solução analítica proposta é bidimensional e define três laterais com uma temperatura T_1 e a parte superior com outra temperatura T_2 , da seguinte forma:

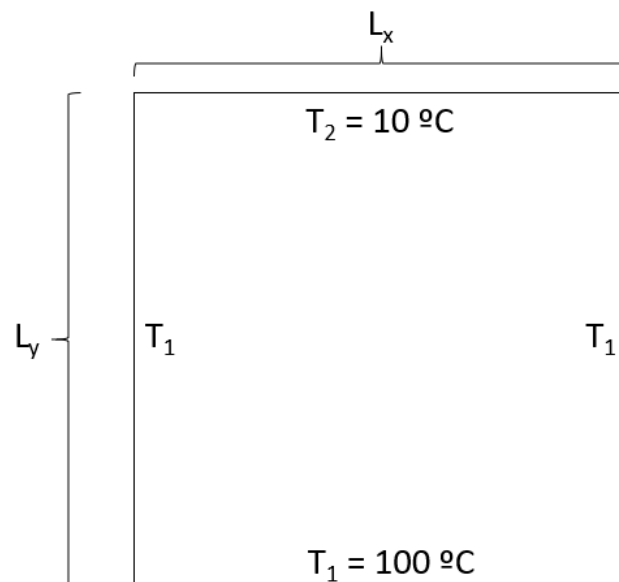


Figura 4.1: Condições de contorno para solução analítica

Fonte: Elaborada pelo autor.

A solução é comparada com o resultado do código tridimensional, onde apenas

o plano $Z = 0$ é levado em consideração e todas as propriedades dos materiais são unitárias - densidade, condutividade térmica e calor específico. A validação totalmente tridimensional será feita comparando com a solução no software consolidado Ansys.

A equação que resulta na solução analítica é dada por:

$$\frac{T(x, y) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi L_y}{L_x}\right)}$$

onde o somatório é truncado em um número razoável de iterações.

Após fazer o cálculo de $T(x, y)$ truncando o somatório em $n = 200$ o resultado foi plotado, como mostra a Figura 4.2

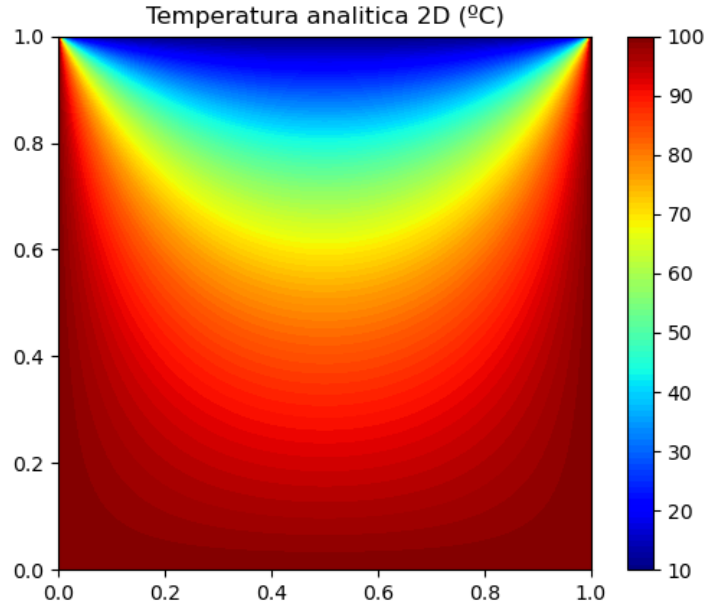


Figura 4.2: Condições de contorno para solução analítica

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Validação

O resultado do código proposto neste trabalho é visualizado a partir do Paraview, como mostra a Figura 4.3

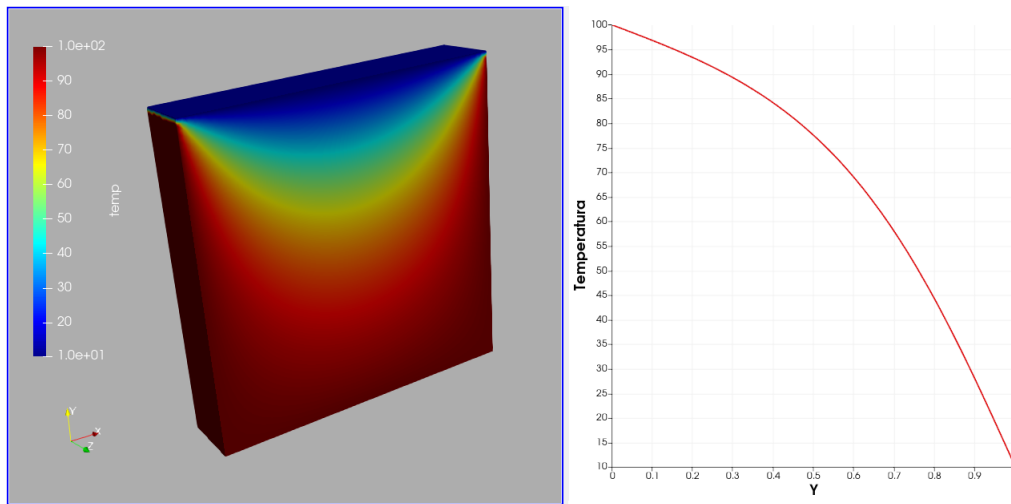


Figura 4.3: Visualização da simulação numérica

Fonte: Elaborada pelo autor.

A título de comparação, um gráfico das temperaturas em função do eixo y é traçado com os resultados analíticos e numéricos em diferentes valores de coordenadas x.

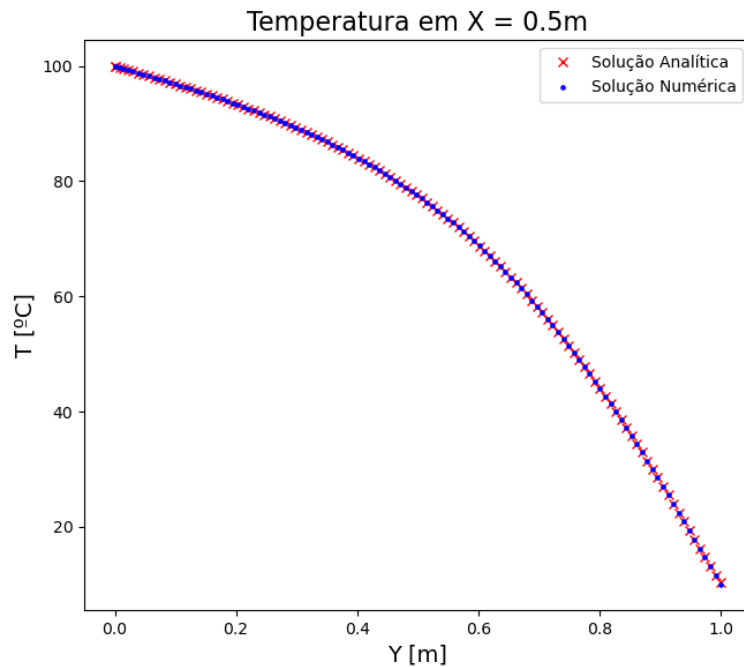


Figura 4.4: Comparação de resultados no eixo central do plano estudado

Fonte: Elaborada pelo autor.

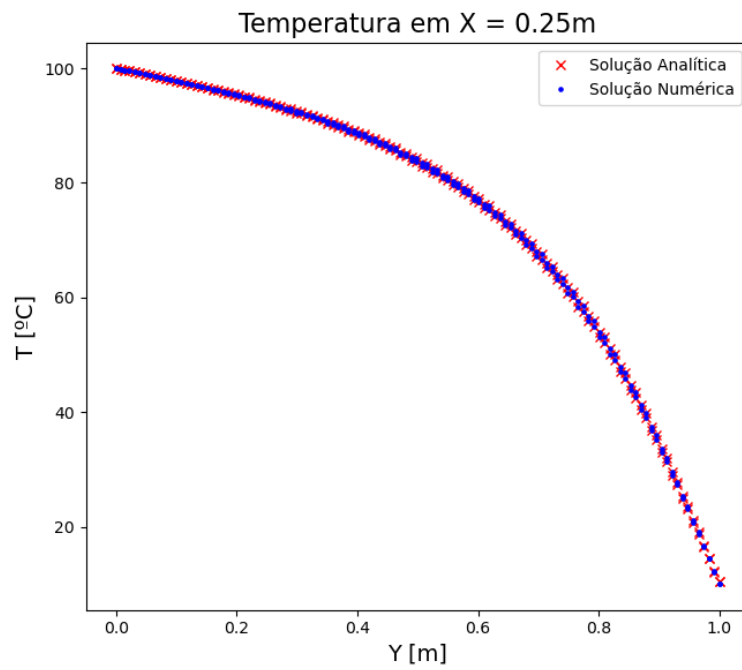


Figura 4.5: Comparação de resultados em $x = 0,25$

Fonte: Elaborada pelo autor.

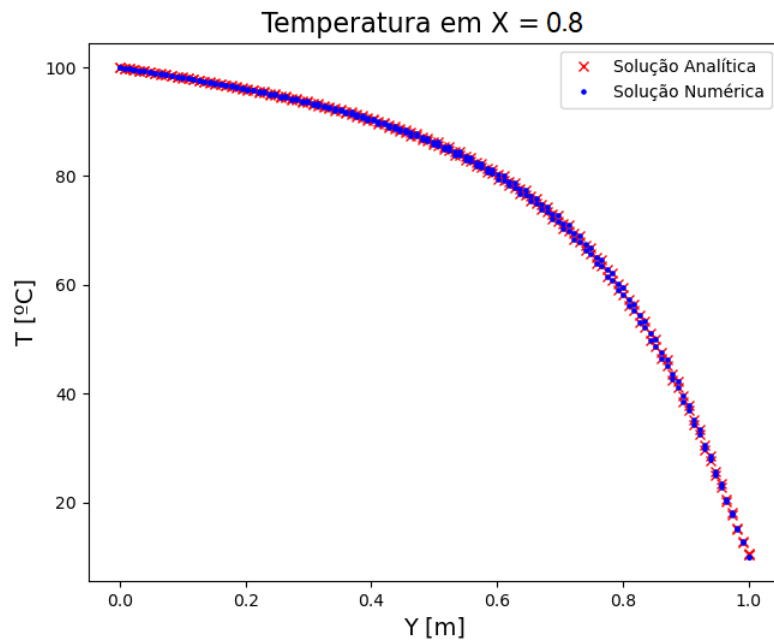


Figura 4.6: Comparação de resultados em $x = 0,8$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi feita uma comparação ponto a ponto onde foi possível calcular os erros entre o resultado numérico e analítico para os nós internos do plano estudado da seguinte maneira:

$$erro (\%) = 100 \cdot \frac{Temperatura\ analítica - Temperatura\ numérica}{Temperatura\ analítica}$$

Os dados são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Erro na simulação ponto a ponto

Maior erro	Média	Desvio padrão
1,98 %	0,01 %	1,63 %

4.2.1

Capítulo 5

Conclusões

Referências Bibliográficas

- [1] INCROPERA, “Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa”, *LTC*, v. 6^a EDIÇÃO, pp. 255–282, 2008.
- [2] LOGAN, D., “A First Course in the Finite Element Method”, *Thomson Canada Ltd*, v. 4th edition, pp. 255–282, 2007.
- [3] LOGAN, D., “A First Course in the Finite Element Method”, *Thomson Canada Ltd*, v. 4th edition, pp. 15, 2007.
- [4] LOGAN, D., “A First Course in the Finite Element Method”, *Thomson Canada Ltd*, v. 4th edition, pp. 8, 2007.
- [5] GUSTAVO.
- [6] LIMPert, R., “Brake Design and Safety”, , pp. 17–29, 2011.
- [7] OZISIK, M., “Heat Transfer, a Basic Approach”, , pp. 255–282, 1985.

Apêndice A

Código Fonte