

4

Solução Aproximada pelo Método de Galerkin**4.1.****Método dos Resíduos Ponderados**

Em muitos casos as equações diferenciais não têm soluções analíticas exatas, e, se existem, a sua determinação pode ser complexa ou demandar processos matemáticos muito elaborados. Ante tal situação têm sido desenvolvidos vários métodos aproximados para resolução de equações diferenciais, dentre eles o método dos resíduos ponderados.

O método dos resíduos ponderados consiste na minimização do erro ou resíduo R na aproximação da solução F de uma equação diferencial, válida para um domínio Γ , por meio do somatório de N funções de forma ϕ_n , linearmente independentes e que têm amplitudes arbitrárias A_n . Ao se substituir a aproximação da solução:

$$F = \sum_{n=1}^N A_n \phi_n \quad (4.1)$$

na equação diferencial, gera-se o resíduo R a minimizar. Esta minimização se logra multiplicando-se o resíduo R por uma função de ponderação Ψ_j e integrando no domínio Γ . O resultado desta integração deve ser nulo, i.e.:

$$\int_{\Gamma} R \cdot \Psi_j \cdot d\Gamma = 0, \text{ para } j = 1 \dots N \quad (4.2)$$

Obtém-se desta forma um sistema de N equações algébricas ou diferenciais, que permite a determinação das amplitudes inicialmente desconhecidas A_j .

Geralmente as condições requeridas para as funções de aproximação ϕ_j são que sejam deriváveis até a maior ordem presente na equação diferencial e atendam às condições de contorno do problema.

O método dos resíduos ponderados é classificado segundo o tipo de função de ponderação escolhida. Tem-se, por exemplo, o Método da Colocação, quando a função de ponderação é a função delta de Dirac, o método dos mínimos quadrados, e o método de Galerkin, entre outros.

4.2. Método de Galerkin

O método de Galerkin é o mais usado entre aqueles baseados em resíduos ponderados. Frýba (1972) usou este método para analisar problemas lineares de vigas submetidas a cargas móveis com velocidade variável no tempo. Soares (2003) também usou este método na análise de vibrações não-lineares em membranas hiperelásticas. A característica principal deste método é que se escolhe como função de ponderação a própria função de aproximação, ou seja:

$$\psi_j = \phi_j \quad (4.3)$$

Substituindo a expressão (4.3) na (4.2), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} R \cdot \phi_j \cdot d\Gamma = 0, \text{ para } j = 1 \dots N \quad (4.4)$$

4.3. Discretização do Domínio Infinito em um Domínio Finito Aproximado

Dado que o problema analisado nesta dissertação é de uma viga de comprimento infinito, e que, para a utilização do método de Galerkin, é necessário ter um domínio finito, define-se um domínio finito suficientemente longo ℓ tal que contenha a maior parte da energia do sistema. No presente trabalho, a origem coincide com o centro do carregamento, como ilustrado na Figura 4.1. Assim, a equação (4.4) pode ser reescrita como:

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} R \cdot \phi_j \cdot d\Gamma = 0, \text{ para } j = 1 \dots N \quad (4.5)$$

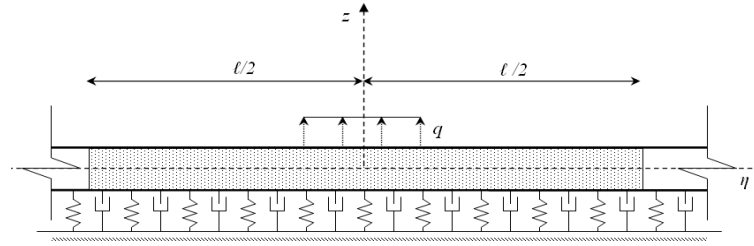


Figura 4.1 – Domínio discreto centrado com respeito à origem.

4.4.

Solução Aproximada Considerando Simetria da Resposta

Considera-se inicialmente que o campo de deslocamentos $w(\eta, t)$ seja simétrico com respeito à origem que coincide com centro do carregamento. Neste caso, é possível trabalhar apenas com a metade do domínio. Desta forma, a equação (4.5) pode ser reescrita como:

$$\int_0^{\ell/2} R \cdot \phi_j \cdot d\eta = 0, \text{ para } j = 1 \dots N \quad (4.6)$$

Para o caso de se ter simetria na resposta, as condições de contorno da viga são:

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial \eta} = w(\infty, t) = \frac{\partial^2 w(\infty, t)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^3 w(\infty, t)}{\partial \eta^3} = 0 \quad (4.7)$$

Esta aproximação só é válida quando a velocidade da carga móvel for suficientemente pequena, de tal modo que o campo de deslocamentos seja simétrico. Para velocidades altas, o campo de deslocamentos perde esta simetria.

Usando o método de Galerkin, supõe-se que a resposta do sistema $w(\eta, t)$ seja dada por:

$$w(\eta, t) = \sum_{n=1}^N X_n(\eta) T_n(t) \quad (4.8)$$

onde $X_n(\eta)$ é uma função de aproximação na coordenada móvel, que cumpre com as condições de contorno do problema, e $T_n(t)$ é a amplitude modal que é função do tempo. Substituindo a equação (4.8) na equação (2.14) e multiplicando o

resíduo a minimizar pela própria função de aproximação $X_j(\eta)$ e integrando no domínio, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{n=1}^N \left[M_n \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + D_n \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + K_n T_n(t) \right] - \int_0^{\ell/2} q(\eta, t) X_j(\eta) d\eta = 0, \quad j = 1..N \quad (4.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^{\ell/2} m \left(X_n(\eta) - r^2 \frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right) X_j(\eta) d\eta \\ D_n &= \int_0^{\ell/2} \left[2mV \left(r^2 \frac{\partial^3 X_n(\eta)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} \right) + C X_n(\eta) \right] X_j(\eta) d\eta \\ K_n &= \int_0^{\ell/2} \left[mV^2 \left(\frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - r^2 \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} \right) + EI \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} - P \frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - CV \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} + k X_n(\eta) \right] X_j(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.10)$$

O sistema de equações, definido através das equações (4.9) e (4.10), é um sistema de N equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes constantes com N variáveis dependentes tempo $T_n(t)$. Resta apenas resolver o sistema de equações diferenciais no domínio do tempo para a obtenção da resposta do sistema.

Na presente dissertação são estudados três tipos de funções de aproximação para o caso da consideração da simetria na resposta, que são: funções correspondentes a modos de vibração de uma viga engastada, polinômios ímpares de Legendre, e modos de vibração de uma viga bi-apoiada.

4.4.1.

Aproximação por modos de vibração de viga bi-engastada.

Como a tendência do deslocamento vertical e da rotação é de se anularem em zonas afastadas do carregamento, adotam-se como funções de aproximação os modos simétricos de vibração de uma viga bi-engastada de comprimento igual ao comprimento discretizado. Esta viga é semelhante à original, já que nos extremos a flecha e a rotação são nulas. Portanto, as funções de aproximação são dadas por:

$$X_n(\eta) = \frac{\sin\left(\frac{(4n-1)\pi}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{(4n-1)\pi}{4}\right)} \cosh\left(\frac{(4n-1)\pi\eta}{4L}\right) + \cos\left(\frac{(4n-1)\pi\eta}{4L}\right) \quad (4.11)$$

A Figura 4.2 mostra a forma das três primeiras funções.

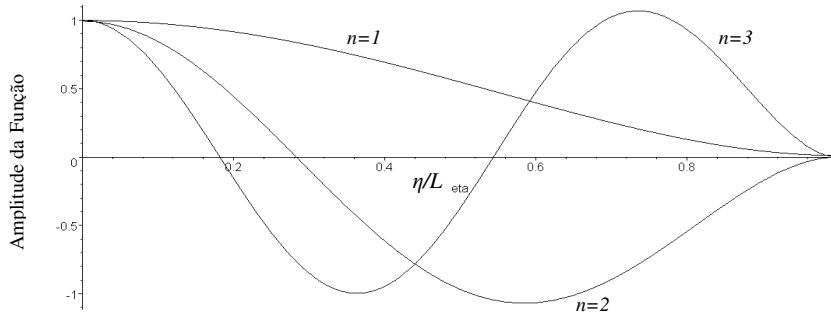


Figura 4.2 – Forma das funções de aproximação, considerando modos de vibração de metade de viga bi-engastada.

4.4.2.

Aproximação por polinômios de Legendre:

Os polinômios de Legendre são uma família de polinômios ortogonais que representam condições nulas de flecha e rotação nos extremos. Estas funções foram usadas por Andrade (1993) no estudo de colunas semi-enterradas. Na presente dissertação estudam-se estes polinômios por terem um comportamento parecido com o de vigas sobre fundação elástica, tendo uma amplitude máxima no centro e diminuindo nos extremos. Para o caso da resposta simétrica, usam-se apenas os polinômios simétricos, obtendo-se:

$$X_n(\eta) = \sum_{i=0}^{Div\left(\frac{2n+3}{2}\right)} \frac{(-1)^i (2(2n+3) - 2i - 7)!!}{2^i i! ((2n+3) - 2i - 1)!} \frac{\eta^{(2n-2(1+i))}}{L} \quad (4.12)$$

onde $Div(\dots)$ é um operador que toma a parte inteira da divisão. As três primeiras funções são mostradas na Figura 4.3:

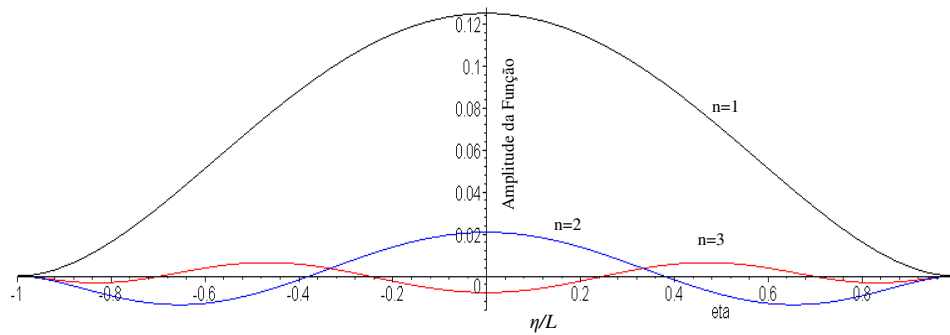


Figura 4.3 – – Forma das funções de aproximação considerando a metade de viga bi-engastada.

4.4.3.

Aproximação por modos de vibração de viga bi-apoiada

Adotam-se também como funções de aproximação os modos de vibração simétricos de uma viga bi-apoiada, já que, apesar de não atender as condições de rotação nula nas extremidades, possibilitam uma grande simplificação do sistema de equações, e demandam menor quantidade de operações. Estas funções de aproximação são dadas por:

$$X_n(\eta) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\eta\right) \quad (4.13)$$

As três primeiras funções são mostradas na Figura 4.4:

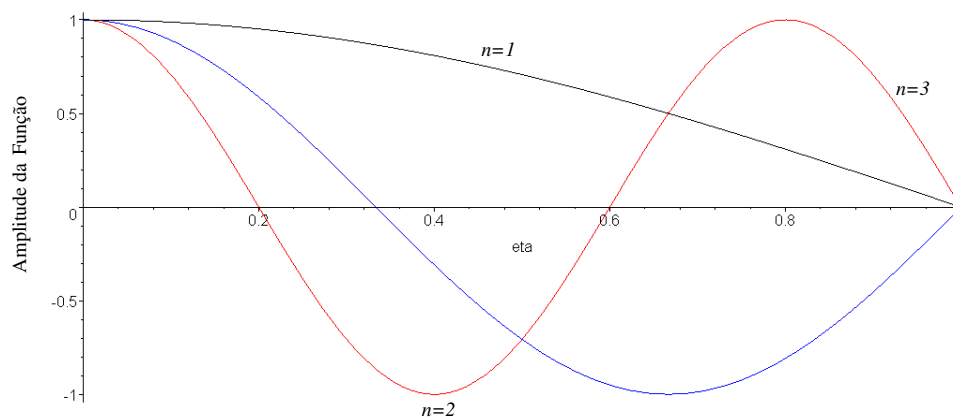


Figura 4.4 – Forma das funções de aproximação, considerando modos de vibração de metade de viga bi-apoiada.

Substituindo a equação (4.13) nas equações (4.9) e (4.10), e usando a ortogonalidade e simetria das funções, chega-se a desacoplar por completo o sistema de equações, podendo o mesmo ser reescrito da seguinte maneira:

$$M_n \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + D_n \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} + K_n T(t) - \int_0^L q(\eta, t) X_n(\eta) d\eta = 0, \quad n=1..N \quad (4.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^L m \left(X_n(\eta) - r^2 \frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} \right) X_n(\eta) d\eta \\ D_n &= \int_0^L \left[2mV \left(r^2 \frac{\partial^3 X_n(\eta)}{\partial \eta^3} - \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} \right) + C X_n(\eta) \right] X_n(\eta) d\eta \\ K_n &= \int_0^L \left[mV^2 \left(\frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - r^2 \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} \right) + EI \frac{\partial^4 X_n(\eta)}{\partial \eta^4} - P \frac{\partial^2 X_n(\eta)}{\partial \eta^2} - CV \frac{\partial X_n(\eta)}{\partial \eta} + k X_n(\eta) \right] X_n(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Este desacoplamento em N equações diferenciais ordinárias, permite solucioná-las analiticamente. Quando acrescentada alguma parcela não-linear à equação diferencial original, a montagem do sistema final pode ser feito primeiro obtendo-se a parcela linear desacoplada e, a seguir, a parcela não-linear acoplada. Este desacoplamento não é possível de ser feito com os polinômios de Legendre nem com os modos de viga bi-engastada.

4.5.

Solução Aproximada Considerando Resposta Assimétrica

Quando as condições do problema levam a uma perda de simetria na resposta, mesmo sendo o carregamento simétrico, precisa-se trabalhar com todo o domínio discretizado, como explicitado na equação (4.5). Neste contexto é necessário adotar funções de aproximação que possam representar uma possível assimetria no sistema. Na presente dissertação são estudados dois tipos de funções de aproximação, a primeira usando uma série completa de Fourier, e a segunda usando polinômios de Legendre.

4.5.1. Aproximação por série completa de Fourier

Supõe-se agora que a solução do sistema seja dada por uma série completa de Fourier truncada até um certo número N de termos, ou seja:

$$w(\eta, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^N \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}\eta\right) \cdot T_{2n-1}(t) + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\eta\right) \cdot T_{2n}(t) \right) \quad (4.16)$$

onde $T_0(t)$, $T_{2n-1}(t)$ e $T_{2n}(t)$, indicam as $2N+1$ amplitudes no tempo a serem determinadas.

Usando o mesmo procedimento adotado para o caso simétrico, substitui-se a equação (4.16) na equação (2.14), multiplica-se esta pela função de peso $\psi_j(\eta)$, com j variando de zero até $2N$, e integra-se de $-L$ até L . Tem-se assim um sistema de $2N+1$ equações a serem resolvidas. As funções peso $\psi_j(\eta)$ para este caso estão dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_0(\eta) &= 1 \\ \psi_{2j-1}(\eta) &= \cos\left(\frac{j\pi}{L}\eta\right), j = 1 \dots N \\ \psi_{2j}(\eta) &= \text{sen}\left(\frac{j\pi}{L}\eta\right), j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (4.17)$$

O sistema de equações é composto de uma equação desacoplada, gerada por $\psi_0(\eta)$, e $2N$ equações acopladas por pares, geradas por $\psi_{2j-1}(\eta)$ e $\psi_{2j}(\eta)$. O sistema de equações é determinado a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
R_0 &= \int_{-L}^L -q(\eta, t) + m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_0(t) \right) + k T_0(t) + C \left(\frac{d}{dt} T_0(t) \right) d\eta \\
R_{j2-1} &= \left(m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right) + \frac{P \pi^2 j^2 T_{2j-1}(t)}{L^2} + k T_{2j-1}(t) + C \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right) \right. \\
&\quad + \frac{EJ \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t)}{L^4} - \frac{m r^2 V^2 \pi^4 j^4 T_{2j-1}(t)}{L^4} - \frac{m V^2 \pi^2 j^2 T_{2j-1}(t)}{L^2} - \frac{C V \pi j T_{2j}(t)}{L} \\
&\quad + \frac{m r^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j-1}(t) \right)}{L^2} - \frac{2 m V \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right)}{L} - \frac{2 m r^2 V \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right)}{L^3} \Bigg) L \\
&\quad + \int_{-L}^L q(\eta, t) \cos\left(\frac{\pi j \eta}{L}\right) d\eta \\
R_{2j} &= \left(m \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right) + C \left(\frac{d}{dt} T_{2j}(t) \right) + \frac{m r^2 \pi^2 j^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} T_{2j}(t) \right)}{L^2} + \frac{C V \pi j T_{2j-1}(t)}{L} \right. \\
&\quad + \frac{P \pi^2 j^2 T_{2j}(t)}{L^2} + k T_{2j}(t) - \frac{m V^2 \pi^2 j^2 T_{2j}(t)}{L^2} + \frac{2 m V \pi j \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right)}{L} \\
&\quad + \frac{EJ \pi^4 j^4 T_{2j}(t)}{L^4} - \frac{m r^2 V^2 \pi^4 j^4 T_{2j}(t)}{L^4} + \frac{2 m r^2 V \pi^3 j^3 \left(\frac{d}{dt} T_{2j-1}(t) \right)}{L^3} \Bigg) L \\
&\quad + \int_{-L}^L q(\eta, t) \sin\left(\frac{\pi j \eta}{L}\right) d\eta
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $R_j = 0$, com $j = 1 \dots N$

A ortogonalidade observada na equação (4.18) é muito importante, já que gera condições para sistematizar a montagem do sistema de equações lineares, podendo-se analisar separadamente contribuições de parcelas não-lineares.

4.5.2. Aproximação por polinômios ortogonais

Fazendo uma analogia com a série de Fourier, supõe-se agora que a solução seja dada por:

$$w(\eta, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^N (PS_n(\eta).T_{2n-1}(t) + PA_n(\eta).T_{2n}(t)) \quad (4.19)$$

onde PS_n e PA_n são as funções que descrevem os polinômios de Legendre simétricos e anti-simétricos respectivamente, e que para são dados por:

$$\begin{aligned} PS_n(\eta) &= \sum_{i=0}^{Div\left(\frac{2n+3}{2}\right)} \frac{(-1)^i (2(2n+3) - 2i - 7)!!}{2^i i! ((2n+3) - 2i - 1)!} \frac{\eta^{(2n-2(1+i))}}{L} \\ PA_n(\eta) &= \sum_{i=0}^{Div\left(\frac{2n+4}{2}\right)} \frac{(-1)^i (2(2n+4) - 2i - 7)!!}{2^i i! ((2n+4) - 2i - 1)!} \frac{\eta^{(2n+1-2(1+i))}}{L} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $Div(...)$ é um operador que toma a parte inteira da divisão, com $0!!=1$. As funções de peso $\psi_j(\eta)$ são dadas pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \psi_0(\eta) &= 1; \\ \psi_{2j-1}(\eta) &= \sum_{i=0}^{Div\left(\frac{2j+3}{2}\right)} \frac{(-1)^i (2(2j+3) - 2i - 7)!!}{2^i i! ((2j+3) - 2i - 1)!} \frac{\eta^{(2j-2(1+i))}}{L}, j = 1 \dots N; \\ \psi_{2j}(\eta) &= \sum_{i=0}^{Div\left(\frac{2j+4}{2}\right)} \frac{(-1)^i (2(2j+4) - 2i - 7)!!}{2^i i! ((2j+4) - 2i - 1)!} \frac{\eta^{(2j+1-2(1+i))}}{L}, j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (4.21)$$

Neste caso não é possível conseguir o desacoplamento do sistema de equações, tendo-se que trabalhar com o sistema acoplado.