O MÉTODO DE GALERKIN

Veridiana Rezende

Maringá
2005

O MÉTODO DE GALERKIN

Veridiana Rezende

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá,
Av. Colombo 5790: Agência UEM, 87020-900, Maringá, PR, Brasil.
E-mail: `veridianarezende@hotmail.com`

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências, sob orientação do
Professor Dr. Gleb Germanovitch Doronin.

Maringá
2005

Ao senhor Deus, por iluminar todos os dias de minha vida.
Aos meus pais, que com amor e orgulho me apoiaram
intensamente no decorrer dessa caminhada.

Agradecimentos

Ao Prof. Gleb G. Doronin, que com compreensão, atenção e dedicação aceitou orientar-me neste trabalho.

Ao Prof. Osvaldo do Rocio, que satisfatoriamente me orientou nos primeiros meses de mestrado.

Ao Prof. Marcos Roberto Teixeira Primo, que com muita paciência e dedicação me orientou durante toda minha graduação.

Ao meu namorado Paulo Augusto Rezende, por todo carinho, apoio e incentivo; pelo seu companheirismo, e principalmente pela compreensão nos dias que precisei estar ausente.

Ao meu irmão Driano Rezende, e a todos os meus familiares, que com muito carinho e admiração acompanharam minha caminhada.

Às amigas Camila, Francielli, Kátia, Mônica e Talita, que compartilharam as alegrias e desafios, e por serem minhas amigas de verdade.

A todos os professores e funcionários no DMA, que direta ou indiretamente deram suas contribuições.

Aos amigos e colegas do mestrado, que com horas de alegrias e tristeza superamos juntos as dificuldades que encontramos.

Aos Profs. Luiz Adalto Medeiros, Nickolai A. Larkine e Cícero Lopes Frota, que atenciosamente colaboraram na correção deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Finalmente, a todos que com uma palavra, um gesto, um pensamento, me levavam sempre a acreditar que tudo na vida é possível, basta acreditar em si mesmo, ter persistência e força para lutar e VENCER!

Resumo

Estuda-se neste trabalho o Método de Galerkin – um dos métodos clássicos da Física Matemática que oferece a base teórica para os Métodos de Elementos Finitos e outros métodos numéricos baseados nas idéias de B. G. Galerkin.

Abstract

This work concerns the Galerkin Method – one of classical methods of Mathematical Physics which is a theoretical foundation for the Finite Elements Method and for other numerical methods inspired by the ideas of B. G. Galerkin.

Sumário

1. Introdução

Este trabalho é sobre o Método de Galerkin – um dos métodos clássicos da Física Matemática e da Análise que oferece a base teórica para os Métodos de Elementos Finitos e outros métodos numéricos e teóricos baseados nas idéias de B. G. Galerkin.

Um dos fatos que nos motivou ao desenvolvimento deste trabalho é que existem várias aplicações do Método de Galerkin encontradas pelo mundo inteiro, inclusive no Brasil, mas pouco é comentado sobre o histórico do método. Devido a este fato, nosso objetivo não consiste em obter resultados inéditos, mas sim em obter um conhecimento geral sobre o Método e um pouco sobre a vida de seu criador.

Outro motivo da realização deste trabalho é que o Método de Galerkin apesar de ter quase cem anos de história, está bem atualizado e serve como instrumento teórico para estudar as propriedades qualitativas (tais como existência e unicidade de soluções) de problemas matemáticos. Este estudo por sua vez, é uma parte indispensável de abordagem científica de problemas de natureza físicos e de alguns outros problemas, como por exemplo econômicos, da sociedade moderna. Grande parte destes problemas consiste na resolução de equações diferenciais não lineares. O Método de Galerkin é uma ferramenta bastante poderosa para este fim. Portanto além de obter um conhecimento geral sobre o Método, nos dedicamos em aprender aplicar as idéias de B. G. Galerkin para obter as soluções de algumas equações diferenciais parciais não lineares, onde as não linearidades possuem, aparentemente, características adequadas para aplicarmos o método de Galerkin, ou uma de suas modificações.

A estrutura do presente trabalho é a seguinte: Uma breve biografia de Galerkin, conforme [16, 29, 36], oferecida aqui na introdução. As diferenças principais e os pontos comuns entre o método de Galerkin e outros métodos clássicos, estudam-se no Capítulo 2, onde também encontra-se a análise de uma das mais famosas generalizações do Método – o Método de Faedo-Galerkin. Os Capítulos 3 e 4 são dedicados à aplicação do Método aos problemas de valor inicial e de contorno para Equações não lineares modernas da Física Matemática. Mais precisamente, estudamos o problema de valor inicial e de contorno para a equação da Mecânica Quântica Relativística [15, 34], seguindo as idéias de J. L. Lions [22]. Consideramos tanto o caso de solução fraca no Capítulo 3, como o caso forte no Capítulo 4, e ainda provamos a unicidade. Por último, no Capítulo 5, aplicamos o Método de Galerkin para uma equação do tipo misto descrevendo o fluxo transônico de gás em um tubo de Laval [28]. Este estudo foi baseado nos trabalhos [18, 19, 20].

1.1. **Biografia de Galerkin.** Boris Grigorievitch Galerkin, nasceu em 20 de Fevereiro (04 de Março no atual calendário) de 1871 em Polotsk (atualmente localizada na Bielo-Rússia), descendente de uma família pobre, passou por muitas dificuldades durante seus anos de estudos. Ele fez a escola secundária em Minsk, e em 1893 entrou no Instituto Tecnológico de St. Peterburgo, onde estudou matemática e engenharia. Durante este período além dos estudos precisou fazer "atividades extras" para sobreviver: foi professor particular e também trabalhou como desenhista.

Galerkin, junto com outros estudantes do Instituto Técnológico, sempre estava envolvido com política. Terminou a graduação em 1899, ano em que se tornou membro do Partido Social Democrático da Rússia. No mesmo ano começou a trabalhar como engenheiro na Fábrica de Locomotivas em Kharkov (atualmente na Ucrânia). Em 1903, foi para St. Peterburgo, e lá tornou-se engenheiro da Fábrica de Aquecimento Mecânica do Norte. Em 1906, Boris Grigoryevitch passou a ser membro do Comitê de St. Peterburgo do Partido Social Democrático (proibido pelo governo), época em que não trabalhou. Em março de 1907, depois de um confronto com a polícia, alguns membros do comitê foram presos, incluindo B. G. Galerkin, que ficou preso durante quase dois anos. Na prisão, Galerkin perdeu o interesse pelas atividades revolucionárias e voltou-se para a ciência e a engenharia. As prisões daquela época davam tal oportinidade. Saiu da prisão no fim de 1908.

Em março de 1909, Galerkin começou a ensinar no Instituto Tecnológico de St. Peterburgo, quando teve sua primeira publicação sobre Curvatura Longitudinal, trabalho de 130 páginas, todo escrito na prisão. Este artigo teve grande importância nos seus estudos, e os resultados foram aplicados na construção de pontes e grandes estruturas. Durante todo o verão deste período, Boris Grigorievitch visitou a Europa junto com seus colegas de trabalho, para desenvolver estudos sobre construção civil. Suas visitas às construções européias, bem como da maioria dos engenheiros russos daquela época, terminaram por volta de 1914, quando começou a Primeira Guerra Mundial. Neste período (1909-1914) ele conheceu Alemanha, Suíça, Áustria, Bélgica e Suécia.

Também nesta época, Galerkin começou a trabalhar em colaboração com I. G. Bubnov no Departamento de Construção Civil, onde ambos estudavam questões da Teoria de Elasticidade e da Rigidez de Construções. Foi Bubnov, quem primeiro sugeriu, em 1913, uma generalização do Método de Ritz adaptada para problemas de construção civil. Talvez por esta razão o Método de Galerkin, na Rússia, as vezes é denominado Bubnov-Galerkin. Entretanto, o primeiro trabalho publicado sobre este assunto saiu em 1915 e foi escrito somente por B. G. Galerkin [14]. Neste trabalho foi proposto um método de integração aproximada de Equações Diferenciais Parciais, atualmente conhecido como "Método de Galerkin". Sem dúvidas, este artigo foi um de seus melhores trabalhos, e já nesta época, o próprio Galerkin apontou as principais diferenças entre seu método e o método de Ritz: no seu método não havia conexão entre aproximações e a forma variacional do problema; o método podia ser aplicado na resolução de problemas de forma bastante arbitrária. Foi ele quem neste artigo praticamente criou o conceito de solução fraca para uma equação diferencial. Além disso, as aproximações de Galerkin nos problemas de equilíbrio de barras e placas, representam claramente o princípio dos trabalhos virtuais [5, 21], ou seja, as aproximações têm um claro significado físico.

O Método de Galerkin ficou famoso mundialmente, e até hoje ele e suas generalizações são usados tanto na teoria de Equações Diferenciais [8, 30], como em Análise [4], Mecânica, Termodinâmica, Hydrodinâmica [9], e também no desenvolvimento de métodos numéricos, tais como o Método de Elementos Finitos e outros [2, 7, 37]. Só na Internet, encontram-se milhares de referências sobre o Método de Galerkin.

Em 1920, Galerkin foi promovido a diretor do Instituto Tecnologico Mecânico Estrutural de St. Peterburgo. Nesta mesma época, ganhou dois prêmios significativos, um sobre elasticidade no Instituto de Engenharia de Comunicação, e outro em Mecânica Estrutural na Universidade de St. Peterburgo. Em 1921, a Sociedade de Matemática de St. Peterburgo foi reaberta (havia sido fechada em 1917 devido a Revolução Russa) e Galerkin foi um dos destaques desta Sociedade, assim como Vladimir Andreevich Steklov, Sergei Natanovich Bernstein, Aleksandr Aleksandrovich Friedmann e outros. Outro trabalho em que Galerkin ficou conhecido, foi o seu trabalho sobre Placas Elásticas. Sua tese sobre este assunto foi publicada em 1937. De 1940, até a sua morte em 12 de Julho de 1945, Galerkin foi o chefe do Instituto de Mecânica da Academia de Ciências Soviética.

2. Comparação com outros Métodos

2.1. **O Método de Fourier.** Este é um método para solução dos problemas da física matemática, baseado na separação das variáveis. É proposto para a solução dos problemas de condutividade térmica por J. Fourier [12, 13], e de um modo mais geral e completo foi formulado por M. V. Ostrogradskii em 1828, cf. Antropova [1]. A solução da equação, que satisfaz às condições iniciais e de fronteira, procura-se pelo Método de Fourier como a superposição das soluções, que satisfazem às condições de contorno, e podem ser representadas como produto de uma função dependendo apenas de variáveis do espaço com uma outra função dependendo só do tempo. A presença de tais soluções, são conectadas com a busca de autofunções e autovalores de alguns operadores diferenciais, e da expansão subseqüente das funções de condições iniciais pelas autofunções obtidas. Particularmente, o problema de desenvolvimento de função em séries e integrais de Fourier, aparecem na aplicação do Método de Fourier para estudar as vibrações da corda, e a condutividade térmica de uma barra. Por exemplo, o estudo das pequenas vibrações de uma corda de comprimento 1, de extremidades fixas, consiste em obter a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} \ = \ c^2 u_{xx}, \ \text{em } R, \\ u(0,t) \ = \ u(1,t) = 0, \ \text{para } t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde supomos c constante, e R designa a semifaixa $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \ t > 0\}$.

Soluções do tipo $F(x)G(t)$ para essa equação que satisfazem as condições de contorno são dadas por

$$u_n(x,t) = sen(n\pi x)\big\{a_n cos(n\pi ct) + b_n sen(n\pi ct)\big\}.$$

Escolhendo os coeficientes a_n e b_n de modo adequado, é possível mostrar que a solução $u(x,t)$ do problema (2.1) seja dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen(n\pi x)\big\{a_n cos(n\pi ct) + b_n sen(n\pi ct)\big\}. \tag{2.2}$$

2.2. **O Método de Ritz.** O Método de Ritz [32, 33] é o método feito para desenvolver problemas variacionais e problemas de contorno que podem ser transformados em variacionais. Seja $V[y(x)]$ um funcional. Queremos obter tal função $y(x)$, que leva $V[y(x)]$ ao extremo.

Além disso, $y(x)$ deve satisfazer as condições de contorno: $y(x_1) = \alpha$ e $y(x_2) = \beta$. A idéia deste método, consiste na procura não de todas as possíveis funções $y(x)$, mas apenas as combinações lineares da forma

$$y^N(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j(x), \tag{2.3}$$

onde a_j são constantes, e $\varphi_j(x), j = 1, 2, \ldots$é um sistema de funções, que podem ser escolhidas de forma relativamente arbitrária, dependendo de cada problema. Uma condição necessária para a escolha das φ_j, é que as funções $y^N(x)$ devem satisfazer as condições $y^N(x_1) = \alpha$ e $y^N(x_2) = \beta$, para todos os valores dos parâmetros a_j. Escolhendo as $y^N(x)$ desta forma, o funcional $V[y^N(x)]$ torna - se numa função $\phi(a_1, \ldots, a_N)$ onde os coeficientes $a_j, j = 1, \ldots, N$ devem ser escolhidos de modo que $\phi(a_1, \ldots, a_N)$ assuma seu extremo, isto é, $a_1, \ldots, a_N$ devem ser solução do sistema algébrico

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_j} \ = \ 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.4}$$

A solução $y(x)$ do problema original é obtida tomando o limite em $y^N(x)$ quando $N \to \infty$.

2.3. **O Método de Galerkin.** O Método de Galerkin [14], é uma generalização do Método de Ritz, que pode ser aplicado para problemas de contorno, que não podem ser reduzidos aos variacionais. A idéia do método é a seguinte: seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, queremos obter em Ω uma solução da equação diferencial

$$A[u] = 0, \tag{2.5}$$

onde A é um operador diferencial de $L^2(\Omega)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, satisfazendo a condição de contorno

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.6}$$

Se a função $u(x_1, \ldots, x_n)$ for solução de (2.5) em Ω, então $A[u(x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0$ em Ω. Consequentemente, a função $A[u(x_1, \ldots, x_n)]$ é ortogonal à toda função $\varphi(x) \in L^2(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega A[u(x)]\varphi(x)dx = 0.$$

A solução $u(x_1, \ldots, x_n)$ é procurada por meio das aproximações

$$u^N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j(x_1, \ldots, x_n),$$

onde $\{\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)\},\ j=1,2,\ldots$ é um sistema de funções linearmente independentes φ_j definidas em Ω, satisfazendo a condição (2.6).

Os coeficientes a_j são escolhidos de modo que $A[u^N]$ seja ortogonal às primeiras N funções do sistema $\{\varphi_j\}$

$$\int_\Omega A\left[\sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k(x)\right]\varphi_j(x)dx=0,\ j=1,\ldots,N. \tag{2.7}$$

Desta forma as aproximações $u^N(x_1,\ldots,x_n)$ são projeções ortogonais da solução desejada $u(x_1,\ldots,x_n)$ em um subespaço de dimensão finita $N\in\mathbb{N}$, [27]. A solução $u(x_1,\ldots,x_n)$ é obtida tomando o limite de u^N quando $N\to\infty$.

Em termos de Análise Funcional, o problema (2.5), (2.6) pode ser reformulado num contexto abstrato mais geral, [31]. Seja H um espaço de Hilbert e $A:V\to H$ um operador definido num subespaço $V\subset H$, denso em H. Dado $f\in H$, procura-se um elemento $u\in V$, tal que $Au=f$.

O Método de Galerkin consiste, então, na busca das aproximações $u^N=\sum a_j\varphi_j$ que são projeções ortogonais de $u\in V$ em um subespaço de dimensão finita $V_N=[\varphi_1,\ldots,\varphi_N]\subset V$, gerado pelos N primeiros vetores da base. Desta forma, os coeficientes a_j estão determinados pelo sistema algébrico $(Au^N-f,\varphi_j)_H=0, j=1,\ldots,N$, onde $(\cdot,\cdot)_H$ é o produto interno em H.

Observe que (2.7) é um sistema de equações não necessariamente linear. Caso A seja linear a existência de solução é um problema simplismente de álgebra linear. Caso contrário, a existência não é tão imediata e necessita de um resultado a ser visto posteriormente (ver Lema do Ângulo Agudo, Capítulo 5).

2.4. **O Método de Faedo - Galerkin.** Este método foi idealizado para encontrar soluções dos problemas de evolução. Desenvolvido por Sandro Faedo [10], trinta anos após o Método de Galerkin, o Método de Faedo - Galerkin é uma combinação dos Métodos de Fourier e de Galerkin. Para ilustrá - lo, consideremos o problema de evolução

$$A[u]=f, \tag{2.8}$$

onde $u:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ é uma função que depende de $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, e do tempo $t\geq 0$. A função $u(x_1,\ldots,x_n,t)$ normalmente satisfaz os dados iniciais

$$D_t^k u(x,0) = u_0^k(x),\ \ k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{2.9}$$

(onde u_0^k são funções conhecidas e $m \geq 1$ é a ordem da equação de evolução) e as condições de contorno

$$u|_{\Sigma} = 0, \tag{2.10}$$

onde Σ é a fronteira lateral do cilindro $\Omega \times (0,T)$.

Dado um sistema completo de funções $\{w_j(x)\}$ ortonormalizadas definidas em Ω, e satisfazendo (2.10), procura-se aproximações da solução de (2.8) - (2.10) da forma

$$u^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} g_j(t) w_j(x), \tag{2.11}$$

onde as funções $g_j(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\int_{\Omega} \{A[u^N] - f\} w_j\, dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.12}$$

com condições iniciais

$$D^k g_j(0) = \int_{\Omega} u_0^k w_j\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Se o sistema (2.12) é da forma normal, então as $g_j(t)$ estão bem definidas pelo menos localmente no tempo, e a solução $u(x,t)$ é obtida passando o limite em (2.11) quando $N \to \infty$.

Considerando o problema (2.1), e tomando em particular $w_j(x) = sen(\pi j x)$, obtemos

$$u^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} g_j(t) sen(\pi j x), \tag{2.13}$$

onde $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é solução do sistema de equações diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{ccll} g_1'' & - & c^2 g_1 & = 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ g_N'' & - & c^2 g_N & = 0. \end{array} \right.$$

A solução $u(x,t)$ de (2.1) é obtida quando tomamos o limite em (2.13) com $N \to \infty$. E neste caso, a solução coincide com (2.2).

3. Equação da Mecânica Quântica Relativística (solução fraca)

Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ suficientemente regular, $T > 0$ um número real arbitrário, e Q o cilindro $\Omega \times (0,T)$ cuja fronteira lateral Σ é dada por $\Gamma \times (0,T)$. Consideremos o problema

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f, \quad \text{em } Q \quad (\rho > 0), \tag{3.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{em } \ \Sigma, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

com

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega), \ u_1 \in L^2(\Omega) \text{ e } f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

Aqui $u = u(x,t)$ descreve um campo escalar relativístico com interações de potências, [35].

Daqui para frente adotaremos as notações e definições dos espaços funcionais conforme [22, 27].

Definição 3.1. *Uma função* $u : Q \to \mathbb{R}$,

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)),$$
$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

é chamada solução fraca do problema (3.1)-(3.3)*, se para toda* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) + ((u,v)) + \big\langle |u|^\rho u, v \big\rangle = (f,v), \tag{3.5}$$

em $D'(0,T)$ *e ainda*

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ e } u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3.6}$$

Aqui $(\cdot,\cdot)$ e $((\cdot,\cdot))$ representam o produto interno em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente:

$$(u,v) = \int_\Omega uv\,dx, \ \ ((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx,$$

e $\big\langle \cdot,\cdot \big\rangle$ designa a dualidade entre $L^{p'}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$, $p = \rho + 2$, especificando em seguida os duais correspondentes.

Observação: Identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual, obtemos as cadeias

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega),$$

$$H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega).$$

Em virtude de (3.5) temos

$$u_{tt} = f + \Delta u - |u|^\rho u \text{ em } D'(Q). \tag{3.7}$$

Assim, considerando as inclusões:

$$\begin{aligned}
&f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),\\
&\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),\\
&|u|^\rho u \in L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)) \subset L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, obtemos

$$u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)), \tag{3.8}$$

e como consequência do Lema 1.2 (Capítulo 1) de [22], $u(x,0)$ e $u_t(x,0)$ estão bem definidas.

Teorema 3.1. *Sejam satisfeitas as condições* (3.4)*. Então, o Problema* (3.1) – (3.3) *admite uma solução fraca no sentido da definição 3.1. A solução é única para qualquer* $0 < \rho < +\infty$ *se* $n = 1, 2$ *e para* $0 < \rho < \frac{2}{n-2}$ *se* $n \geq 3$.

Para provar a existência da solução fraca do Problema (3.1) – (3.3), utilizaremos o Método de Galerkin, mais precisamente o Método de Faedo - Galerkin, ver 2.4. Em seguida, definindo as aproximações de Galerkin conforme (2.11), obteremos um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais, cuja existência de solução local será garantida pelo Teorema de Carathéodory [6] (ver cap.2, p.33). Por meio das estimativas a priori, estenderemos a solução a todo o intervalo $[0,T]$, obtendo uma sequência $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$, que convergirá para a solução de (3.1), verificando as condições iniciais.

3.1. **Problema Aproximado.** Sendo $H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega)$ separável [3], seja $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base para $H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega)$, cuja existência é garantida pelo Lema 1.1 de [22]. Para cada $N\in\mathbb{N}$, consideremos

$$V_N = [w_1, \ldots, w_N],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),\ p=\rho+2$, de dimensão finita, gerado pelos N primeiros vetores da base. Definamos

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x), \tag{3.9}$$

onde as funções $g_i^N(t)$ são escolhidas de modo que (u^N) seja solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(u_{tt}^N, w_j) + ((u^N, w_j)) + \int_\Omega |u^N|^\rho u^N w_j\, dx = (f, w_j),\ j = 1, \ldots, N \tag{3.10}$$

com condições iniciais

$$u^N(x,0) = u_0^N(x) \longrightarrow u_0(x) \text{ em } H_0^1(\Omega)\cap L^{\rho+2}(\Omega), \tag{3.11}$$

$$u_t^N(x,0) = u_1^N(x) \longrightarrow u_1(x) \text{ em } L^2(\Omega), \tag{3.12}$$

onde

$$u_0^N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_{0i} w_i(x); \quad u_{0i} = (u_0, w_i),$$

$$u_1^N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_{1i} w_i(x); \quad u_{1i} = (u_1, w_i)\ \forall\ i = 1, \ldots, N.$$

Por Carathéodory [6], o problema (3.10) - (3.12) para cada N, possui solução local u^N em um intervalo $[0, t_N)$ onde u^N e u_t^N são absolutamente contínuas e u_{tt}^N existe quase sempre. Por meio das estimativas a priori, vamos estender a solução à todo o intervalo $[0, T]$.

3.2. **Estimativas a priori.** Multiplicando (3.10) por $(g_j^N)'$ e somando de 1 até N, obtemos

$$(u_{tt}^N, u_t^N) + ((u^N, u_t^N)) + \int_\Omega |u^N|^\rho u^N u_t^N \, dx = (f, u_t^N). \tag{3.13}$$

Notemos que a terceira expressão à esquerda da igualdade faz sentido, pois $|u^N|^\rho u^N \in L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De fato, como

$$p' = \frac{\rho+2}{\rho+1},$$

temos

$$\| |u^N|^\rho u^N \|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}$$
$$= \int_\Omega ||u^N|^\rho u^N|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \, dx = \int_\Omega |u^N|^{\rho+2} \, dx = \|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p \; < +\infty. \tag{3.14}$$

Resulta de (3.14), (3.9) e em virtude da desigualdade de Hölder que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho u^N u_t^N \, dx \;\in\; L^1(0, t_N). \tag{3.15}$$

Consequentemente, (3.15) junto com (3.13) implica

$$(u_{tt}^N, u_t^N) \;\in L^1(0, t_N). \tag{3.16}$$

Afirmação:

$$(u_{tt}^N, u_t^N) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t), \tag{3.17}$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada distribucional em $D'(0, t_N)$. Com efeito, para cada $\theta \in D(0, t_N)$, de (3.16) temos

$$\big\langle (u_{tt}^N, u_t^N), \theta \big\rangle = \int_0^{t_N} (u_{tt}^N, u_t^N)\theta(t) \, dt =$$

$$\int_0^{t_N} \int_\Omega u_{tt}^N u_t^N \, dx \theta(t) \, dt = \int_\Omega \int_0^{t_N} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^N)^2 \theta(t) \, dt \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \int_\Omega \{ (u_t^N)^2 \theta(t)|_{t=0}^{t=t_N} - \int_0^{t_N} (u_t^N)^2 \theta'(t) \, dt \Big\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{t_N} \int_\Omega (u_t^N)^2 \, \theta'(t) \, dt = \frac{1}{2}\Big\langle \frac{d}{dt}|u_t^N|^2, \theta \Big\rangle.$$

De maneira análoga prova-se que

$$((u^N, u_t^N)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t), \tag{3.18}$$

onde daqui pra frente, estaremos considerando $\|\cdot\|(t) = \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}(t)$ e $|\cdot|(t) = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}(t)$. Também,

$$\int_\Omega |u^N|^\rho u^N u_t^N \, dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^{\rho+2} \, dx, \tag{3.19}$$

pois, para $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, tem - se $F'(\lambda) = (\rho+1)|\lambda|^\rho$.

Assim de (3.13), (3.17), (3.18) e (3.19) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^{\rho+2}dx = (f, u_t^N), \tag{3.20}$$

onde $t \in [0, t^N)$.

Multiplicando por 2 a igualdade acima, e integrando de 0 a $t,\ t \in (0, t_N)$, obtemos

$$|u_t^N|(t)^2 + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t)$$

$$= |u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p + 2\int_0^t (f, u_t^N)(s)\, ds.$$

Usando a desigualdade de Schwarz e o fato que $2ab \le a^2 + b^2,\ a, b > 0$, vem que

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t) \le |u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 \tag{3.21}$$

$$+\frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p + \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^t \{|u_t^N|^2 + \|u^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p\}(s)\, ds.$$

De (3.11) e (3.12), existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|u_1^N|^2 + \|u_0^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u_0^N\|_{L^p(\Omega)}^p \le c_0;\ \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Agora de (3.21) e (3.22) obtemos

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t)$$

$$\le c_0 + \ c_1\int_0^t \{|u_t^N|^2 + \|u^N\|^2 + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p\}(s)\, ds, \tag{3.23}$$

onde $c_1 > 0$. Logo, em virtude da desigualdade de Gronwall, existe uma constante $c > 0$ tal que após o prolongamento

$$|u_t^N|^2(t) + \|u^N\|^2(t) + \frac{2}{p}\|u^N\|_{L^p(\Omega)}^p(t) \le c;\ \forall\ t \in [0, T]. \tag{3.24}$$

Donde podemos concluir que

$$u^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.25}$$

$$u^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \tag{3.26}$$

$$u_t^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.27}$$

E ainda, de (3.14) e (3.26), resulta que

$$|u^N|^\rho u^N \text{ é limitada em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q). \tag{3.28}$$

De acordo com esses resultados e pela compacidade dos espaços correspondentes, [3, 22, 24], obtemos uma subsequência (u^ν) de (u^N) tal que

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.29}$$

$$u^\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^p(0,T;L^p(\Omega)) \tag{3.30}$$

$$u_t^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.31}$$

$$|u^\nu|^\rho u^\nu \rightharpoonup \chi \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q) \tag{3.32}$$

3.3. **Passagem ao Limite.** Consideremos o conjunto

$$W = \{u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega));\ u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

munido da topologia

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Resulta de (3.25) e (3.27) que a subsequência

$$u^\nu \text{ é limitada em } W. \tag{3.33}$$

Assim, pelo Teorema de Aubin-Lions, [22], existe uma subsequência u^μ de u^ν tal que

$$u^\mu \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.34}$$

Da última convergência, podemos obter uma subsequência de u^μ, para qual ainda usaremos a mesma notação, tal que

$$|u^\mu|^\rho u^\mu \longrightarrow |u|^\rho u \ \text{ q.s. em } \ Q, \tag{3.35}$$

e ainda, por (3.28), existe $C > 0$ tal que

$$\| |u^\mu|^\rho u^\mu \|_{L^{p'}(Q)} \leq C, \ \forall \mu \in \mathbb{N}.$$

Logo pelo Lema 1.3, capítulo 1 de [22], concluímos de (3.32) que

$$\chi = |u|^\rho u. \tag{3.36}$$

Sejam $\mu, j \in \mathbb{N}$ tais que $\mu \geq j$ e $\theta \in D(0,T)$. Multiplicando a equação aproximada (3.10) por θ, e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u_{tt}^\mu, w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T ((u^\mu, w_j))\theta(t)\,dt$$
$$+ \int_0^T \{\int_\Omega |u^\mu|^\rho u^\mu w_j\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)\,dt.$$

Integrando por partes, obtemos

$$- \int_0^T (u_t^\mu, w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T ((u^\mu, w_j))\theta(t)\,dt$$

$$+ \int_0^T \{\int_\Omega |u^\mu|^\rho u^\mu w_j\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)\,dt. \tag{3.37}$$

Devido as convergências de (3.27), (3.29), (3.31), (3.32) e por (3.36), tem - se

$$\int_0^T ((u^\nu, w_j))\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T ((u, w_j))\theta(t)\,dt \tag{3.38}$$

$$\int_0^T (u_t^\nu, w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (u_t, w_j)\theta'(t)\,dt \tag{3.39}$$

$$\int_0^T \{\int_\Omega |u^\nu|^\rho u^\nu w_j\,dx\}\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T \{\int_\Omega |u|^\rho u w_j\}\,dx\theta(t)\,dt. \tag{3.40}$$

De (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40), temos

$$- \int_0^T (u_t, w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T ((u, w_j))\theta(t)\,dt$$

$$+ \int_0^T \{\int_\Omega |u|^\rho u w_j\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)\,dt. \tag{3.41}$$

Pela densidade das combinações lineares finitas dos elementos da base (w_j) em $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, segue - se que

$$-\int_0^T (u_t,v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T ((u,v))\theta(t)\,dt$$

$$+\int_0^T \int_\Omega |u|^\rho uv\,dx\theta(t)\,dt = \int_0^T (f,v)\theta(t)\,dt \tag{3.42}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Mas como $(u_t, v) \in L^2(0,T)$, temos

$$\big\langle (u_t,v),\theta \big\rangle = \int_0^T (u_t,v)\theta\,dt,$$

que é derivável e sua derivada é dada por

$$\big\langle \frac{d}{dt}(u_t,v),\theta \big\rangle = -\big\langle (u_t,v),\theta' \big\rangle = -\int_0^T (u_t,v)\theta'\,dt.$$

Usando este fato e (3.42) obtemos

$$\frac{d}{dt}(u_t,v) + ((u,v)) + \int_\Omega |u|^\rho uv\,dx = (f,v) \text{ em } D'(0,T). \tag{3.43}$$

3.4. **Condições Iniciais.** Devido as convergências de (3.29), (3.31) e ainda por (3.8) segue do Lema 8.1 (Capítulo 3), [23] que

$$u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C_s(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$u_t \in C([0,T];H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)) \cap C_s(0,T;L^2(\Omega)),$$

onde $C_s(0,T;X)$ representa o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em X (ver [23]).

Provaremos inicialmente que

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3.44}$$

Com efeito, seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Então para $\nu > \ j, (j \in \mathbb{N})$ temos

$$\int_0^T (u_t^\nu, w_j)\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (u_t, w_j)\theta(t)\,dt.$$

Integrando por partes:

$$-(u^\nu(x,0), w_j) - \int_0^T (u^\nu, w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow -(u, w_j) - \int_0^T (u, w_j)\theta'(t)\,dt.$$

Mas de (3.29) resulta

$$\int_0^T (u^\nu, w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (u, w_j)\theta'(t)\,dt,$$

o que implica em

$$(u^\nu(x,0), w_j) \longrightarrow (u(x,0), w_j), \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$u^\nu(x,0) \rightharpoonup u(x,0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Por outro lado, de (3.11) vem que

$$u^\nu(x,0) \rightharpoonup u_0(x) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Pela unicidade do limite, obtemos $u(x,0) = u_0(x)$.

Provaremos, a seguir que

$$u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3.45}$$

Seja $0 < \delta < T$, definamos

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1; & 0 \leq t \leq \delta, \\ 0; & \delta < t \leq T, \end{cases} \tag{3.46}$$

que pertence a $H_0^1(0,T)$. Multiplicando a equação aproximada (3.10) por $\theta_\delta(t)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T (u_{tt}^\nu, w_j)\theta_\delta(t)\,dt + \int_0^T ((u^\nu, w_j))\theta_\delta(t)\,dt$$
$$+ \int_0^T \{\int_\Omega |u^\nu|^\rho u^\nu w_j\,dx\}\theta_\delta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta_\delta(t)\,dt.$$

Integrando a expressão acima por partes, segue que

$$-(u_t^\nu(x,0), w_j) + \frac{1}{\delta}\int_0^T (u_t^\nu, w_j)(t)\,dt + \int_0^T ((u^\nu, w_j))\theta_\delta(t)\,dt$$
$$+ \int_0^T \{\int_\Omega |u^\nu|^\rho u^\nu w_j\,dx\}\theta_\delta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta_\delta(t)\,dt.$$

Tomando $\nu \to \infty$ e levando em consideração a densidade dos elementos da base $\{w_j\}$ em $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, concluí-se que para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$

$$-(u_1(x), v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_t, v)(t)\,dt + \int_0^\delta ((u, v))\theta_\delta(t)\,dt$$

$$+\int_0^\delta \{\int_\Omega |u|^\rho uv\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^\delta (f,v)\theta_\delta(t)\,dt.$$

Passando agora o limite quando $\delta \to 0$, obtemos

$$(u_1(x), v) = (u_t(x,0), v),\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega),$$

ou seja,

$$u_1(x) = u_t(x,0).$$

3.5. **Unicidade.** Vamos mostrar que o Problema (3.1) – (3.3) admite uma única solução fraca desde que $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$, $n \geq 3$. De fato, suponhamos que u e v sejam soluções fracas de (3.1) – (3.3) e consideremos $w = u - v$. Convém observar que

$$w \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \quad w_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{3.47}$$

$$w_{tt} \in\ L^2(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$$

e satisfaz o problema

$$w_{tt} - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u \ \text{ em } \quad L^2(0,T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)), \tag{3.48}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \tag{3.49}$$

Utilizaremos o Método de Višik - Ladyzenskaya [39]. Consideremos para cada $s \in [0,T]$ a seguinte função

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} -\int_t^s w(x,\xi)\,d\xi; & 0 \leq t \leq s, \\ 0; & s < t \leq T. \end{cases} \tag{3.50}$$

Logo,

$$\Psi_t(x,t) = \begin{cases} w(x,t); & 0 \leq t \leq s, \\ 0; & s < t \leq T. \end{cases} \tag{3.51}$$

Das expressões acima e de (3.47) vem que

$$\Psi, \Psi' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)). \tag{3.52}$$

Compondo (3.48) com Ψ na dualidade $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)\cap L^{p'}(\Omega))\times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))$ obtemos

$$\int_0^s \big\langle w_{tt},\Psi\big\rangle(t)\,dt+\int_0^s \big\langle -\Delta w,\Psi\big\rangle(t)\,dt=\int_0^s \big\langle |v|^\rho v-|u|^\rho u,\Psi\big\rangle(t)\,dt. \tag{3.53}$$

Lembrando que $\Psi=0$ em $[s,T]$, e integrando por partes, e usando o fato que $\big\langle -\Delta w,\Psi\big\rangle = ((w,\Psi))$ temos

$$\begin{aligned}\big\langle w_t(x,s),\Psi(x,s)\big\rangle-\big\langle w_t(x,0),\Psi(x,0)\big\rangle-\int_0^s (w_t,\Psi_t)(t)\,dt\\ +\int_0^s ((w,\Psi))(t)\,dt=\int_0^s \big\langle |v|^\rho v-|u|^\rho u,\Psi\big\rangle(t)\,dt\end{aligned}$$

ou ainda de (3.49), (3.50) e (3.51) obtemos

$$-\int_0^s (w_t,w)\,dt+\int_0^s ((w_t,\Psi))\,dt=\int_0^s \big\langle |v|^\rho v-|u|^\rho u,\Psi\big\rangle\,dt,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|w|^2(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\Psi\|^2(t)dt=\int_0^s \big\langle |v|^\rho v-|u|^\rho u,\Psi\big\rangle(t)\,dt,$$

implicando em

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}|w(x,s)|^2+\frac{1}{2}|w(x,0)|^2+\frac{1}{2}\|\Psi(x,s)\|^2\\ -\frac{1}{2}\|\Psi(x,0)\|^2=\int_0^s \big\langle |v|^\rho v-|u|^\rho u,\Psi\big\rangle dt.\end{aligned}$$

Visto (3.49) e (3.50) segue

$$-\frac{1}{2}|w|^2(s)-\frac{1}{2}\|\Psi(x,0)\|^2=\int_0^s\int_\Omega (|v|^\rho v-|u|^\rho u)\Psi\,dx\,dt. \tag{3.54}$$

Afirmação:

$$||v|^\rho v-|u|^\rho u|\le(\rho+1)2^{2\rho}\{|u|^\rho+|v|^\rho\}|w|.$$

De fato, notemos que

$$F(\lambda)=|\lambda|^\rho\Rightarrow F'(\lambda)=(\rho+1)|\lambda|^\rho,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

logo $F\in C^1(\mathbb{R})$. Assim, dados α e $\beta\in\mathbb{R}$, existe $\xi\in(\alpha,\beta)$ tal que pelo Teorema do Valor Médio:

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq |F'(\xi)||\beta - \alpha|$$

ou seja,

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq (\rho + 1)|\xi|^{\rho}|\beta - \alpha|. \tag{3.55}$$

Sendo $\xi \in (\alpha, \beta)$ existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\xi = \alpha + (\beta - \alpha)\theta. \tag{3.56}$$

Agora tomando $\alpha = u(x,t),\ \beta = v(x,t)$, de (3.55) e (3.56), obtemos

$$||v|^{\rho}v - |u|^{\rho}u| \leq (\rho + 1)2^{2\rho}\{|u| + |v|\}^{\rho}|w|. \tag{3.57}$$

De (3.55) e (3.57) resulta que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s) + \frac{1}{2}\|\Psi(x,0)\|^2 \tag{3.58}$$

$$\leq c(\rho)\int_0^s \int_\Omega \{|u| + |v|\}^{\rho}|w|\Psi \, dx \, dt.$$

Usando o Teorema de Imersão de Sobolev [24], obtemos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \tag{3.59}$$

Afirmação:

$$|u|^{\rho},\ |v|^{\rho}\ \in L^n(\Omega) \text{ q.s. em } (0,T). \tag{3.60}$$

De fato, temos por hipótese

$$0 < \rho < \frac{2}{n-2},$$

ou seja,

$$0 < \rho n < \frac{2n}{n-2} \leq q.$$

Disto, e do fato que Ω é limitado, resulta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \tag{3.61}$$

Agora, como u e $v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em $(0,T)$, segue da cadeia acima que

$$|u|^\rho,\ |v|^\rho\ \in L^n(\Omega) \text{ q.s. em } (0,T). \tag{3.62}$$

De (3.59)

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1. \tag{3.63}$$

Lembrando as inclusões

$$w \in L^2(\Omega) \text{ q.s. em } (0,T), \tag{3.64}$$

e

$$\Psi \in L^q(\Omega) \text{ q.s em } (0,T), \tag{3.65}$$

segue de (3.58), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) e pela Desigualdade de Hölder generalizada [3] que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s) + \frac{1}{2}\|\Psi(x,0)\|^2 \tag{3.66}$$

$$\leq c_1 \int_0^s \{(\||u|^\rho\|_{L^n(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{L^n(\Omega)})|w|_{L^2(\Omega)}\|\Psi\|_{L^q(\Omega)}\}(t)\,dt.$$

Mas de (3.61), e do fato que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u|^\rho\|_{L^n(\Omega)}(t) = \sup_{t\in[0,T]} [\int_\Omega |u|^{n\rho}(t)dx]^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq k_1 \sup_{t\in[0,T]} \|u\|^\rho(t) < +\infty,$$

donde concluímos

$$\frac{1}{2}|w|^2(s) + \frac{1}{2}\|\Psi(x,0)\|^2 \leq c_2 \int_0^s |w|_{L^2(\Omega)}(t)\|\Psi\|(t)\,dt. \tag{3.67}$$

Considere

$$w_1(x,t) = \int_0^t w(x,\xi)d\xi. \tag{3.68}$$

De (3.50) e (3.68), para todo $t \in [0,s]$ temos

$$\Psi(x,t) = -\int_t^s w(x,\xi)\,d\xi = -\int_0^s w(x,\xi)\,d\xi + \int_0^t w(x,\xi)\,d\xi = w_1(x,t) - w_1(x,s). \tag{3.69}$$

Assim,

$$\Psi(x,0) = w_1(x,0) - w_1(x,s) = -w_1(x,s).$$

Deste fato, de (3.69) e (3.67) resulta que

$$\frac{1}{2}|w|^2(s) + \frac{1}{2}\|w_1\|^2(s) \leq c\int_0^s \{|w|^2 + \|w_1\|^2\}(t)\,dt.$$

Logo, em virtude da Desigualdade de Gronwall obtemos

$$|w|^2(t) + \|w_1\|^2(t) \leq 0.$$

Donde concluimos que

$$w = 0 \text{ em } L^2(\Omega),\ \forall\, t \in [0,T].$$

como queríamos demonstrar.

No caso $n = 1,2$ com $0 < \rho < +\infty$, a demonstração é análoga, simplificando as imersões (3.61) as quais verificam-se imediatamente quando $n = 1,2$.

□

4. Equação da Mecânica Quântica Relativística (solução forte)

Consideremos o mesmo problema

$$u_{tt} - \Delta u + \mid u \mid^{\rho} u = f, \quad \text{em } Q \quad (\rho > 0), \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{em } \Sigma, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)\ , \quad x \in \Omega. \tag{4.3}$$

O objetivo deste capítulo é obter uma solução forte para (4.1) – (4.3), portanto impomos condições mais rigorosas aos dados iniciais:

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ u_1 \in H_0^1(\Omega) \text{ e } f, f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.4}$$

Definição 4.1. *Uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$
$$u_t \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$u_{tt} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

é chamada solução forte do problema (4.1) – (4.3) *se satisfaz a equação* (4.1) *q.s. em Q e as condições iniciais* (4.3) *para q.t. $x \in \Omega$.*

Teorema 4.1. *Sejam satisfeitas as condições* (4.4) *e $0 < \rho < \frac{2}{n-2}$ ($n \geq 3$). Então, o problema* (4.1)-(4.3) *admite uma única solução no sentido da definição 4.1 .*

Como no capítulo anterior este teorema ainda é válido para $n = 1, 2$ com $0 < \rho < +\infty$.

A existência da solução, será provada utilizando novamente o Método de Faedo - Galerkin.

4.1. **Problema Aproximado.** Observamos inicialmente que, pelo Teorema de Imersão de Sobolev [24, 26], temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega); \quad q \leq \frac{2n}{n-2}. \tag{4.5}$$

Como por hipótese, $\rho \leq \frac{2}{n-2}$, então

$$2\rho \leq \frac{4}{n-2} \Leftrightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{4}{n-2} + 2 \Leftrightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Portanto

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega), \tag{4.6}$$

e consequentemente, para toda $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$|\, v \,|^{\rho+2} \in L^1(\Omega) \text{ e } |\, v \,|^{\rho}\, v \in L^2(\Omega). \tag{4.7}$$

Seja (w_ν) uma base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos

$$V_N = [w_1, \ldots, w_N],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gerado pelos N primeiros vetores da base. Definamos

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x) \tag{4.8}$$

onde as funções $g_i^N(t)$ são escolhidas de modo que u^N seja solução do sistema de equações diferenciais

$$(u_{tt}^N, w_j) + ((u^N, w_j)) + (|\, u^N \,|^{\rho}\, u^N, w_j) = (f, w_j),\ j = 1, \ldots, N \tag{4.9}$$

com condições iniciais

$$u^N(x,0) = u_0^N(x) \longrightarrow u_0(x) \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{4.10}$$

$$u_t^N(x,0) = u_1^N(x) \longrightarrow u_1(x) \text{ em } H_0^1(\Omega). \tag{4.11}$$

Por Carathéodory, o sistema (4.9) para cada N, possui solução local u^N em um intervalo $[0, t_N)$, onde u^N e u_t^N são absolutamente contínuas e u_{tt}^N existe quase sempre. Por meio das estimativas a priori, vamos estender a solução a todo intervalo $[0, T]$.

4.2. **Estimativas a priori.**

- **Estimativa I:** Multiplicando (4.9) por $(g_j^N)'$ e somando de 1 a N, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2(t) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^{\rho+2}(t)\, dx = (f, u_t^N),$$

conforme já fizemos no Problema (3.1) – (3.3).

Tomando $p=\rho+2$ e integrando a expressão acima de 0 a $t,\ t\in(0,t_N)$, obtemos

$$|u_t^N|^2(t)+\|u^N\|^2(t)+\frac{2}{p}\|u^N\|^p_{L^p(\Omega)}(t)$$

$$=|u_1^N|^2+\|u_0^N\|^2+\frac{2}{p}\|u_0^N\|^p_{L^p(\Omega)}+2\int_0^t(f,u_t^N)(s)\,ds \tag{4.12}$$

$$\leq\ |u_1^N|^2+\|u_0^N\|^2+\frac{2}{p}\|u_0^N\|^p_{L^p(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(Q)}+\int_0^t|u_t^N|^2(s)\,ds.$$

De (4.10) e (4.11), existe uma constante $c_0>0$ tal que

$$|u_1^N|^2+\|u_0^N\|^2+\frac{2}{p}\|u_0^N\|^p_{L^p(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(Q)}\leq c_0. \tag{4.13}$$

Assim, de (4.12) e (4.13) obtemos

$$|u_t^N|^2(t)+\|u^N\|^2(t)+\frac{2}{p}\|u^N\|^p_{L^p(\Omega)}(t)$$

$$\leq c_0+\ c_1\int_0^t\{|u_t^N|^2+\|u^N\|^2+\frac{2}{p}\|u^N\|^p_{L^p(\Omega)}\}(s)\,ds.$$

Usando a desigualde de Gronwall na última desigualdade vem que

$$|u_t^N|^2(t)+\|u^N\|^2(t)+\frac{2}{p}\|u^N\|^p_{L^p(\Omega)}(t)\leq c_2;\ \forall\ t\in[0,T]. \tag{4.14}$$

Logo,

$$u^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{4.15}$$

$$u^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \tag{4.16}$$

$$u_t^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.17}$$

E ainda, de (4.6) e (4.15), resulta que

$$|u^N|^\rho u^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.18}$$

- **Estimativa II:** Podemos sem perda de generalidade, considerar a base (w_ν) como sendo ortonormal em $L^2(\Omega)$ (pelo processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt qualquer base pode ser ortogonalizada [27]).

  Notemos que

$$u_{tt}^N = \sum_{j=1}^{N} (g_j^N)'' w_j \Rightarrow (u_{tt}^N, w_j) = (g_j^N)''.$$

  Da expressão acima e de (4.9) resulta

$$(g_j^N)'' = (f, w_j) - ((u^N, w_j)) - (|u^N|^\rho u^N, w_j),\ j = 1, \ldots, N. \tag{4.19}$$

Como os termos do segundo membro de (4.19) são absolutamente contínuos em $[0, T]$, segue que $(g_j^N)'' \in L^2(0, T)$. Portanto, para cada $N \in \mathbb{N}$ fixo, tem - se

$$u_{tt}^N \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.20}$$

Usando o fato que as derivadas clássicas e distribucionais coincidem no presente caso, resulta de (4.9) que

$$\frac{d}{dt}(u_{tt}^N, w_j) = (f_t, w_j) - ((u_t^N, w_j)) - (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho u_t^N w_j \, dx \tag{4.21}$$

em $L^2(0, T)$. Logo de (4.19) vem

$$(g_j^N)''' \in L^2(0, T).$$

Sendo assim, para cada $N \in \mathbb{N}$ fixo, temos

$$u_{ttt}^N \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.22}$$

Logo, de (4.21), obtemos

$$(u_{ttt}^N, w_j) + ((u_t^N, w_j)) + (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho u_t^N w_j \, dx = (f_t, w_j). \tag{4.23}$$

Multiplicando por $(g_j^N)''$ e somando de 1 a N, vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{tt}^N|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^N\|^2(t) + (\rho + 1) \int_\Omega |u^N|^\rho u_t^N u_{tt}^N \, dx = (f_t, u_{tt}^N),$$

donde

$$\frac{d}{dt}\{|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t)\} \leq 2(\rho+1)\int_\Omega |u^N|^\rho u_t^N u_{tt}^N \, dx + 2(f_t, u_{tt}^N). \tag{4.24}$$

Como $u^N \in H_0^1(\Omega)$, vem que $u^N \in L^{\rho n}(\Omega)$, ou ainda $|u^N|^\rho \in L^n(\Omega)$. Também do fato que $u_t^N \in H_0^1(\Omega)$, obtemos $u_t^N \in L^q(\Omega)$. Sendo $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$, segue pela desigualdade de Hölder generalizada que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u^N|^\rho |u_t^N||u_{tt}^N| \, dx &\leq \||u^N|^\rho\|_{L^n(\Omega)} \|u_t^N\|_{L^q(\Omega)} |u_{tt}^N|_{L^2(\Omega)}(t) \\ &= \|u^N\|_{L^{\rho n}(\Omega)}^\rho \||u_t^N\||_{L^q(\Omega)} |u_{tt}^N|_{L^2(\Omega)}(t). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Temos

$$0 < \rho < \frac{2}{n-2} \Rightarrow \rho n < \frac{2n}{n-2} \leq q.$$

Disto, e do fato que Ω é limitado, resulta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \tag{4.26}$$

De (4.25) e (4.26) existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho |u_t^N||u_{tt}^N| \, dx \leq c_3 \|u^N\|^\rho(t) \|u_t^N\|(t) |u_{tt}^N|(t),$$

e usando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, e (4.15) na expressão acima, temos que existe $c_4 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u^N|^\rho |u_t^N||u_{tt}^N| \, dx \leq c_4 \{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(t). \tag{4.27}$$

Agora de (4.24) e (4.27) obtemos

$$\frac{d}{dt}\{|u_{tt}^N|^2 + \|u_t^N\|^2\}(t) \leq c_5 \{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(t) + |f_t|^2(t) + |u_{tt}^N|^2(t).$$

Integrando a expressão acima de 0 a t; $t \in [0, T]$, vem que

$$\begin{aligned} |u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) &\leq \|u_{tt}^N(x,0)\|^2 + \|u_1^N\|^2 + \|f_t\|_{L^2(Q)}^2 \\ &+ c_6 \int_0^t \{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(s) \, ds. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Em virtude de (4.15),(4.17),(4.20) e (4.22) temos

$$u^N \in C_s([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)),$$
$$u_t^N, u_{tt}^N \in C([0,T]; L^2(\Omega)),$$

tendo sentido falar em $u_{tt}^N(x,0)$. De (4.19) em particular, podemos escrever

$$|u_{tt}^N(x,0)|^2 = (f(x,0), u_{tt}^N(x,0)) - ((u^N(x,0), u_{tt}^N(x,0))) - (|u^N(x,0)|^\rho u^N(x,0), u_{tt}^N(x,0)). \tag{4.29}$$

Usando os Teoremas de Green e de Schwarz na expressão acima, resulta

$$|u_{tt}^N(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \{|f(x,0)|_{L^2(\Omega)} + |\Delta u_0^N|_{L^2(\Omega)} + ||u_0^N|^\rho u_0^N|\}|u_{tt}^N(x,0)|.$$

Portanto de (4.6) e (4.10), concluí - se que existe $c_7 > 0$ tal que

$$|u_{tt}^N(x,0)|_{L^2(\Omega)} \leq c_7; \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.30}$$

Logo, de (4.11), (4.28) e (4.30) temos

$$|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) \leq c_8 + c_9 \int_0^t \{\|u_t^N\|^2 + |u_{tt}^N|^2\}(s)\, ds.$$

Novamente pelo Lema de Gronwall:

$$|u_{tt}^N|^2(t) + \|u_t^N\|^2(t) \leq c; \quad \forall \ t \in [0,T]; \ \forall N \in \mathbb{N}, \tag{4.31}$$

donde resulta que

$$u_t^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{4.32}$$
$$u_{tt}^N \text{ é limitada em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{4.33}$$

4.3. **Passagem ao Limite.** Das estimativas feitas em (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.32) e (4.33), podemos extrair uma subsequência u^ν de u^N tal que

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{4.34}$$
$$u^\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^p(Q) \tag{4.35}$$
$$u_t^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \tag{4.36}$$
$$u_t^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{4.37}$$
$$u_{tt}^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{4.38}$$

Seja $\theta \in D(0,T)$ e $\nu > j$. De (4.9) podemos escrever

$$\int_0^T (u_{tt}^\nu, w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T ((u^\nu, w_j))\theta(t)\,dt$$

$$+\int_0^T \{\int_\Omega |u^\nu|^\rho u^\nu w_j\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)\,dt. \tag{4.39}$$

Observamos que de (4.15), (4.17) e pelo Teorema de Aubin - Lions, podemos extrair uma subsequência u^μ de u^ν de modo que

$$u^\mu \to u \text{ em } L^2(Q).$$

Resulta daí que existe uma subsequência de u^μ que persistimos em usar a mesma notação, tal que

$$u^\mu \to u \;\text{ q. s. em } Q.$$

Pela continuidade da aplicação $F(\lambda) = |\lambda|^\rho\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, e da última convergência vem que

$$|u^\mu|^\rho u^\mu \to \;\; |u|^\rho u \;\text{ q. s. em } Q. \tag{4.40}$$

De (4.18), (4.40) e em virtude do Lema 1.3, capítulo 1 de [22], obtemos

$$|u^\mu|^\rho u^\mu \rightharpoonup |u|^\rho u \text{ em } L^2(Q). \tag{4.41}$$

Assim, as convergências de (4.34), (4.38) e (4.41) nos permite passar o limite em (4.39)

$$\int_0^T (u_{tt}, w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T ((u, w_j))\theta(t)\,dt$$
$$+\int_0^T \{\int_\Omega |u|^\rho u, w_j\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)\,dt.$$

Pela densidade das combinações lineares finitas dos elementos da base (w_ν) em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, segue que

$$\int_0^T (u_{tt}, v)\theta(t)\,dt + \int_0^T ((u, v))\theta(t)\,dt$$

$$+\int_0^T \{\int_\Omega |u|^\rho uv\,dx\}\theta(t)\,dt = \int_0^T (f, v)\theta(t)\,dt, \tag{4.42}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, resultando em

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f \ \ \text{em } D'(0,T;L^2\Omega),$$

e por [23] obtemos

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f \ \ \text{em } L^2(0,T;L^2\Omega). \tag{4.43}$$

De (4.43) e (4.34) temos

$$-\Delta u \in L^2(\Omega) \ \ \text{q. s. em } (0,T), \tag{4.44}$$

$$u \in H_0^1(\Omega) \tag{4.45}$$

e por resultados de regularidade dos problemas elípticos temos

$$u \in H^2(\Omega) \ \ \text{para q. t.} \quad t \in (0,T). \tag{4.46}$$

E ainda como

$$f \in C([0,T];L^2(\Omega)), \ |u|^\rho u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ e } u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

segue de (4.43) que

$$\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.47}$$

Novamente considerando a regularidade dos problemas elípticos, temos

$$suppess_{t\in(0,T)}\|u\|_{H^2(\Omega)} = Csuppess_{t\in(0,T)}|\Delta u|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Portanto

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{4.48}$$

As Condições Iniciais são provadas de modo análogo ao Capítulo 3.

4.4. **Unicidade.** Vamos mostrar que a solução forte do Problema (4.1) – (4.3), obtida na secção anterior, é única desde que $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$, ou $0 < \rho < \infty$ se $n = 1, 2$. Ressaltamos ainda que a demonstração da unicidade poderia ser feita de modo análogo ao capítulo anterior (Secção 3.5). Aqui oferecemos uma demonstração diferente, aplicando o Método da Energia, o qual neste caso é mais vantajoso devido a regularidade da solução obtida.

Suponhamos u e v duas soluções fortes de (4.1) – (4.3) e consideremos $w = u - v$. Então w satisfaz

$$w_{tt} - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u \quad \text{q. s. em } \ Q, \tag{4.49}$$

$$w(x,t)|_\Sigma = 0 \tag{4.50}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0. \tag{4.51}$$

Compondo (4.49) com w_t obtemos

$$(w_{tt}, w_t) + (-\Delta w, w_t) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u, w_t).$$

Como $w \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $w_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ e em virtude do Teorema de Green

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u, w_t). \tag{4.52}$$

Estimando o segundo membro de (4.52) de modo análogo a (3.57), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t) \tag{4.53}$$

$$\leq c(\rho)\int_\Omega \{|u| + |v|\}^\rho |w||w_t|\, dx.$$

Pelo Teorema de Imersão de Sobolev:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall \ q \ \leq \frac{2n}{n-2}. \tag{4.54}$$

Por hipótese $0 < \rho < \frac{2}{n-2}$, ou seja, $\rho n < \frac{2n}{n-2}$. Disto e de (4.54) resulta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \tag{4.55}$$

Agora, como u e $v \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0,T)$, segue da cadeia acima que

$$|u|^\rho,\ |v|^\rho\ \in L^n(\Omega);\ w \in L^q(\Omega)\ \text{ q.s. em }\ (0,T). \tag{4.56}$$

Mas como $\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1$ e em virtude da desigualdade de Hölder generalizada

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)$$

$$\leq c_1\{\|u\|^\rho_{L^n(\Omega)}+\|v\|^\rho_{L^n(\Omega)}\}|w_t|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^q(\Omega)}(t)\ \text{ q. s. em } (0,T).$$

Mas de (4.55), e do fato que $u,v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_t|^2(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2(t)$$
$$\leq c_2|w_t|_{L^2(\Omega)}\|w\|(t)\ \text{ q. s. em } (0,T).$$

Integrando a última desigualdade de 0 a $t,\ t\in[0,T]$:

$$|w_t|^2(t)+\|w\|^2(t)\leq |w_t|^2(x,0)+\|w\|^2(x,0)+c_3\int_0^t|w_t|^2\|w\|^2(s)\,ds$$

$$\leq c_4\int_0^t\{|w|^2+\|w\|^2(s)\}\,ds,$$

e por Gronwall

$$|w_t|^2(t)+\|w\|^2(t)\leq 0,\ \forall\ t\in[0,T].$$

Donde concluímos

$$w=0 \text{ em } H_0^1(\Omega),\ \forall\ t\in[0,T],$$

ou seja, $w=0$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

$\square$

5. Problema não linear para Equação do Fluxo Transônico do Gás

O Problema (5.1) – (5.3) abaixo, descreve um fluxo transônico de gás em um tubo com paredes perfuradas quando a velocidade do gás passa de valores subsônico quando $t = 0$ para supersônico quando $t = T$ [28, 17], onde $T > 0$ é um número real arbirário e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Γ suficientemente regular. Consideremos

$$k(x,t)u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t = f(x,t), \text{ em } \ Q = \Omega \times (0,T), \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \text{ em } \ \Omega, \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + F(x,t,u_t) \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \tag{5.3}$$

onde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ denota a derivada de u na direção do vetor normal exterior de Ω, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, $\alpha > 0$ uma constante e $k : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $f : Q \to \mathbb{R}$ são funções dadas, com $k(x,t) \in C^1(\overline{Q})$ e F satisfazendo:

(A1) $F(x,t,u_t) \in C^1(\overline{\Sigma} \times \mathbb{R})$.

(A2) $|F(x,t,u_t)| + |F_t(x,t,u_t)| \leq C(1 + |u_t|^{\rho+1}),\ C > 0,\ \rho \geq 0$.

(A3) $F(x,t,u_t)u_t \geq C_0 |u_t|^{\rho+2},\ C_0 > 0$.

(A4) $\int_0^{u_t} F(x,t,s)ds \geq 0$.

(A5) $\left(\frac{\partial F}{\partial u_t}\right) \geq C_0(1 + |u_t|^{\rho})$.

(A6) $2\alpha - |k_t(x,t)| > 0$ em $\overline{Q}$.

(A7) $k(x,0) < 0$.

(A8) $k(x,T) > 0, x \in \Omega$.

A dificuldade principal desse problema é que, visto as hipóteses (A7) e (A8), o operador diferencial em (5.1) – (5.3) muda o tipo durante o período de $t = 0$ à $t = T$: quando $t = 0$, temos que (5.1) é uma equação elíptica e quando $t = T$, a equação (5.1) torna - se hiperbólica. Portanto, as condições (5.2) e (5.3), geralmente não garantem que o problema (5.1) – (5.3) esteja bem posto. Além disso, condições como (5.2) e (5.3), não são típicas nem para equações elípticas, nem para as hiperbólicas mesmo separadamente, fato que torna o problema ainda mais complicado.

Neste capítulo iremos aplicar novamente o Método de Galerkin para demonstrar a existência de uma solução generalizada do problema (5.1) – (5.3):

Definição 5.1. *Uma função* $u(x,t)$, $u \in H^1(Q)$, $u(x,0) = 0$, $u_t \in L^{\rho+2}(\Sigma) \cap H^1(Q)$, *é uma solução generalizada para o Problema (5.1) – (5.3) se para q.t.* $t \in (0,T)$ *e para toda* $v \in L^{\rho+2}(\Gamma) \cap H^1(\Omega)$ *tem - se*

$$(ku_{tt}, v) + (\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma F(x,t,u_t) v \, d\Gamma + (\alpha u_t, v) = (f, v). \tag{5.4}$$

O principal resultado desta última parte do nosso trabalho é o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Sejam satisfeitas as condições (A1) – (A8). Então para cada* $f \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$ *existe uma função* $u : Q \to \mathbb{R}$, *que é solução do problema (5.1) – (5.3) no sentido da definição 5.1.*

Para achar a solução de (5.1) – (5.3), encontramos a seguinte dificuldade: utilizando as idéias da secção 2.3, obtemos um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias que não está na forma normal, o que não permite o uso de resultados clássicos de EDO para solucionarmos o sistema. Então, regularizando o sistema por um de ordem maior e adicionando uma condição de fronteira, utilizamos o Método de Galerkin para provar existência de solução para o sistema regularizado. Passando o limite no parêmetro de regularização, obtemos uma solução aproximada (aproximação de Faedo - Galerkin) para (5.1) – (5.3). E com suficientes estimativas a priori, provaremos a convergência da solução aproximada para a solução exata.

5.1. **Construção da Solução Aproximada.** Uma solução aproximada para o problema (5.1) – (5.3) será da forma

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x), \tag{5.5}$$

onde $\{w_j(x)\}$ é uma base para $L^{\rho+2}(\Gamma) \cap H^1(\Omega)$, ortonormal em $L^2(\Omega)$, e as funções $g_j^N(t)$ são soluções do sistema de Equações Diferencias Ordinárias

$$(ku_{tt}^N, w_j) + (\nabla u^N, \nabla w_j) + \int_\Gamma F(x,t,u_t^N) w_j \, d\Gamma + (\alpha u_t^N, w_j) = (f, w_j), \tag{5.6}$$

$$u^N(x,0) \equiv g_j^N(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{5.7}$$

Notemos que o sistema (5.6) com condições iniciais (5.7) não é um problema clássico de Cauchy, pois temos apenas uma condição inicial para um sistema de segunda ordem. Queremos construir a solução deste problema globalmente, ou seja no intervalo inteiro $(0,T)$.

5.2. **Problema Regularizado.** Para encontrarmos as $g_j^N(t)$, primeiro iremos resolver o problema regularizado:

$$L_\mu g_{j\mu} = -\mu g_{\mu jttt} + (ku_{\mu tt}^N, w_j) + (\nabla u_\mu^N, \nabla w_j) \tag{5.8}$$

$$+ \int_\Gamma F(x,t,u_{\mu t}^N) w_j \, d\Gamma + (\alpha u_{\mu t}^N, w_j) = (f, w_j).$$

$$g_{\mu j}(0) = 0, \qquad g_{\mu jtt}(0) = g_{\mu jtt}(T) = 0, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{5.9}$$

onde $\mu > 0$.

Utilizaremos o Método de Galerkin para encontrar as soluções $g_{\mu j}(t)$. Tome

$$g_{\mu jt}^M(t) = \sum_{i=1}^M \beta_{ij} Z_i(t), \quad g_{\mu j}^M(0) = 0, \tag{5.10}$$

onde as funções $Z_i : (0,T) \to \mathbb{R}$ definidas como solução do problema de contorno

$$Z_{itt} + \nu_i Z_i = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_i > 0, \quad i = 2, 3, \ldots,$$

$$Z_{it}(0) = Z_{it}(T) = 0, \quad i = 2, \ldots, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{T}} \ ,$$

$$\int_0^T Z_i(t) Z_l(t) dt = \delta_{il}, \quad i, l = 1, \ldots, M, \ j = 1, \ldots, N$$

formam uma base em $H^2(0,T)$.

Assim, de (5.10) obtemos

$$u^{NM}(x,t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \beta_{ij}^N Z_i(t) w_j(x) \, dt, \tag{5.11}$$

onde as constantes β_{ij} são soluções do sistema algébrico de NM equações não lineares

$$-\mu \int_0^T \sum_{i=1}^M \beta_{ij} Z_{itt} Z_l \, dt + \int_0^T ((ku_{\mu tt}^{NM}, w_j) + \alpha(u_{\mu t}^{NM}, w_j)) Z_l \, dt \tag{5.12}$$

$$+ \int_0^T \{(\nabla u_\mu^{NM}, \nabla w_j) + \int_\Gamma F(x,t,u_{\mu t}^{NM}) w_j \, d\Gamma\} Z_l \, dt$$

$$= \int_0^T (f, w_j) Z_l \, dt, \quad j = 1, \ldots, N, \quad l = 1, \ldots, M.$$

Para encontrarmos a solução de (5.12), utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 5.1. Ângulo Agudo. *O sistema não linear de equações*

$$A_j(c_1, \ldots, c_k) = h_{ij}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

tem uma solução para cada $h = (h_1, \ldots, h_k)$ *se*

(**i**) *As funções*

$$A_j(c) = A_j(c_1, \ldots, c_k) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

são contínuas;

(**ii**) *Existem constantes* $a_0 > 0$ *e* $a_1 > 0$ *tais que vale a desigualdade*

$$(A(c), c) = \sum_{j=1}^{k} A_j(c)c_j \geq a_0|c|^{1+\epsilon} - a_1 > 0$$

para algum $\epsilon > 0$.

A demonstração encontra - se em [38].

O Sistema Algébrico (5.12) satisfaz a condição (**ii**) do lema do Ângulo Agudo, devido a primeira estimativa a priori. Para isto, precisamos dos dois lemas a seguir.

5.3. **Solução de** (5.12)**.**

Lema 5.2. *Assumindo (A6) e (A7), valem as seguintes desigualdades*

$$2\alpha - |k_t(x,t)| \geq 2\delta > 0 \quad em\ \overline{Q}, \tag{5.13}$$

$$k(x,0) \leq -2\eta < 0 \quad em\ \ \overline{\Omega}, \tag{5.14}$$

onde δ, η *são números positivos.*

De fato, sendo $\overline{\Omega}$ e $\overline{Q}$ compactos e $k \in C^1(\overline{Q})$, ou seja, k uniformente contínua em $\overline{Q}$ e assumindo (A6), existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$2\alpha - |k_t(x,t)| \geq 2\delta > 0 \quad \text{em } \overline{Q}.$$

Agora, pelo Lema de Heine - Borel e (A7) vem que

$$k(x,0) \leq -2\eta < 0 \quad \text{em } \ \overline{\Omega}.$$

$\square$

Lema 5.3. *Existe um número positivo $T_0 > 0$ tal que em $\overline{Q}_0 = \overline{\Omega \times [0, T_0]}$ tem - se*

$$k(x,t) \leq -\eta. \tag{5.15}$$

Com efeito, pela continuidade uniforme de $k(x,t)$ no compacto $\overline{Q}$ e por (5.14) obtemos $k(x,t) \leq -\eta$ em $\overline{Q}_0$.

$\square$

5.4. **Estimativas a priori.**

- **Estimativa I:** Neste capítulo adotamos a notação $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(Q)}$.

  Multiplicando a jl-ésima equação de (5.12) por β_{jl}, somando em l e j, considerando (5.10) e (5.11) obtemos

$$2\mu\|u^{NM}_{\mu jtt}\|^2 + \int_Q (2\alpha - k_t)(u^{NM}_{\mu t})^2\, dQ + \int_\Omega |\nabla u^{NM}_\mu(x,T)|^2\, dx$$
$$+2\int_0^T \int_\Gamma F(x,t,u^{NM}_{\mu t})u^{NM}_{\mu t}\, dx\, dt = 2\int_Q f u^{NM}_{\mu t}\, dQ.$$

  Usando (5.13), (A3) e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\mu\|u^{NM}_{\mu jtt}\|^2 + \delta\|u^{NM}_{\mu t}\|^2 + C_0\int_0^T \int_\Gamma |u^{NM}_{\mu t}|^{\rho+2}\, d\Gamma\, dt \leq C\|f\|^2. \tag{5.16}$$

  Note que ainda não podemos estimar $\|u^{NM}_{\mu tt}\|$ devido a constante μ que esta multiplicando.

Lema 5.4. *Para quaisquer inteiros finitos N, M, a função $u^{NM}_\mu(x,t)$ da forma* (5.11) *que satisfaz* (5.12) *é única.*

De fato, sejam u^{NM} e v^{NM} duas soluções distintas de (5.12), então $s = u^{NM} - v^{NM}$ satisfaz

$$-2\mu\|s_{tt}\|^2 + \int_Q (2\alpha - k_t)s_t^2\, dQ + \int_\Omega |\nabla s(x,T)|^2\, dx$$
$$+\int_0^T \int_\Gamma [F(x,t,u^{NM}_{\mu t}) - F(x,t,v^{NM}_{\mu t})](u_t - v_t)\, d\Gamma\, dt = 0.$$

Da última igualdade obtemos $\|s_t\| = 0$ em Q, ou seja, $s(x,t)$ é constante em Q. Mas $s(x,0) = 0$, logo $s(x,t) \equiv 0$ em Q.

$\square$

- **Estimativa II:** Aqui vamos obter uma estimativa que não depende de M. Multiplicando (5.12) por $\nu_l = Z_{ltt}/Z_l$, usando as propriedades de base (5.10) e depois multiplicando por β_{jl}, somando em l e j e integrando por partes obtemos

$$2\int_0^T \mu(u_{\mu ttt}^{NM})^2\,dt + \int_Q (k_t + 2\alpha)(u_{\mu tt}^{NM})^2\,dQ + 2\int_Q \nabla u_{\mu t}^{NM}\nabla u_{jtt}^{NM}\,dQ$$
$$+2\int_0^T \int_\Gamma \{F_t(x,t,u_{\mu t}^{NM})u_{jtt}^{NM} + \frac{\partial F}{\partial u_t}(x,t,u_t^{NM})(u_{tt}^{NM})^2\}\,d\Gamma\,dt = 2\int_Q f_t u_{tt}^{NM}\,dQ.$$

$$\Longrightarrow 2\mu\int_0^T (u_{\mu ttt}^{NM})^2\,dt + \int_Q (k_t + 2\alpha)(u_{\mu tt}^{NM})^2 + \{\epsilon\|u_{tt}^{NM}\|^2 + C(\epsilon,N)\|u_t^{NM}\|^2\}\,dQ$$
$$+2\frac{\epsilon}{C_0}\int_0^T \int_\Gamma \{\frac{\partial F}{\partial u_t}(x,t,u_t^{NM})(u_{tt}^{NM})^2\}\,d\Gamma\,dt + C(\epsilon)\int_0^T \int_\Gamma \{1 + |u_t^{NM}|^{\rho+2}\}\,d\Gamma\,dt$$
$$+\int_0^T \int_\Gamma \{\frac{\partial F}{\partial u_t}(x,t,u_t^{NM})(u_{tt}^{NM})^2\}\,d\Gamma\,dt \le \epsilon\|f_t\|^2 + C(\epsilon)\|u_{tt}^{NM}\|^2.$$

Usando (5.13) e a estimativa (5.16), obtemos

$$\|u_{tt}^{NM}\|^2 \le C(N)\|f_t\|^2, \tag{5.17}$$

onde a constante $C(N)$ depende somente de N. Assim de (5.16) e (5.17)

$$\|g_{\mu j}^{NM}\|^2_{H^2(0,T)} \le C(N)\|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{5.18}$$

Lema 5.5. *Assumindo (A1)–(A8), para cada $N \in \mathbb{N}$ fixo e $\mu > 0$, existe uma única solução, $g_{\mu j} \in H^3(0,T)$, para (5.8) que satisfaz (5.18).*

Com efeito, integrando por partes o primeiro termo de (5.12) temos

$$-\mu\{g_{jtt}Z_l|_0^T - \int_0^T g_{jtt}z_{lt}\,dt\} + \int_0^T (k\sum_{i=1}^N g_{jtt}w_j, w_j)z_l\,dt$$
$$+\int_0^T \{(\sum_{i=1}^N g_i\nabla w_i, \nabla w_j) + \int_\Gamma F(x,t,\sum_{i=1}^N g_{it}w_i)w_j\,d\Gamma + (\alpha\sum_{i=1}^N g_{it}w_i, w_j)\}Z_l\,dt = \int_0^T (f,w_j)Z_l\,dt.$$

Fixando N e M, fazendo $M \to \infty$ e usando a densidade de $\{z_l\}$ em $H^1(0,T)$ obtemos

$$\mu\int_0^T g_{jtt}\varphi\,dt = -\int_0^T (ku_{\mu tt}^{NM}, w_j)\,dt + \int_0^T \{(\nabla u_\mu^{NM}, \nabla w_j) - (f,w_j) +$$

$$+\int_\Gamma F(x,t,u^{NM}_{\mu t})w_j\,d\Gamma + (\alpha(u_{tt},w_j)\}\varphi\,dt \equiv \int_0^T \varphi\Phi\,dt, \quad \phi \in L^2(0,T),\ \varphi \in H^1(0,T).$$

$$\Rightarrow g_{jttt} \in L^2(0,T),\ j = 1,\ldots,N.$$

O que prova a existência. A unicidade demonstra - se de modo análogo ao lema 5.4.

□

5.5. **Existência da Solução Aproximada.** Nos resultados que seguem, estaremos sempre assumindo as hipóteses (A1) – (A8).

Teorema 5.2. *Seja N um inteiro fixo positivo. Então para cada $f(x,t)$: $f,\ f_t \in L^2(Q)$, existe uma função $u^N(x,t),\ u^N \in H^2(0,T;L^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega)),\ ku^N_{tt} \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, satisfazendo* (5.6) *e* (5.7).

Vamos passar o limite quando $N \to +\infty$ para obtermos uma estimativa que não depende de N.

5.6. **Estimativas da aproximação de Galerkin.**

Lema 5.6. *Para cada $f \in L^2(Q)$ e $N \in \mathbb{N}$, a solução aproximada satisfaz a inequação*

$$\int_\Omega [k(x,t)(u^N_t)^2 + |\nabla u^N|^2]dx|_{t=T} + \int_\Omega |k(x,t)|(u^N_t)^2\,dx|_{t=0} \tag{5.19}$$
$$+\|u^N\|^2_{H^1(Q)} + \int_0^T \int_\Gamma |u^N_t|^{\rho+2}\,d\Gamma\,dt \le C\|f\|^2,$$

onde a constante C não depende de N.

Lema 5.7. *Seja $f \in L^2(Q)$ e $N \in \mathbb{N}$. Então*

$$\|u^N_t\|^2_{H^1(Q_1)} \le C\|f\|^2_{L^2(Q)}, \tag{5.20}$$

$Q_1 = \Omega \times (0,T_1),\ T_1 > 0$ *e as constantes C e T_1 não dependem de N.*

Lema 5.8. *Seja $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ e $N \in \mathbb{N}$. Então*

$$\|u^N_t\|_{H^1(Q_2)} \le C\|f\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{5.21}$$

$Q_2 = \Omega \times (\frac{T_1}{2},T)$.

Lema 5.9. *Para cada* $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *a solução aproximada* u^N *satisfaz*

$$\|u^N\|_{H^1(Q)} + \|u_t^N\|_{H^1(Q)} + \|u_t^N\|_{L^{\rho+2}(\Sigma)} \leq C\|f\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{5.22}$$

onde a constante C *não depende de* N.

5.7. **Solução do problema 5.1 – 5.3.** O Lema 5.9, mostra que existe uma subsequência u^ρ de u^N e uma função $u(x,t)$ tal que

$$u^\rho \rightharpoonup u \text{ em } H^1(Q), \tag{5.23}$$

$$u_t^\rho \rightharpoonup u_t \text{ em } H^1(Q). \tag{5.24}$$

$$u_t^\rho \rightharpoonup u_t \text{ em } L^{\rho+2}(\Sigma), \tag{5.25}$$

Mas como $L^{\rho+2}(\Sigma) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Sigma)$, então

$$u_t^\rho \longrightarrow u_t \text{ q. s. em } L^2(\Sigma), \tag{5.26}$$

$$\Longrightarrow u_t^\rho \longrightarrow u_t \text{ q. s. em } \Sigma. \tag{5.27}$$

Por (5.22) temos que $u_t^N \in L^{\rho+2}(\Sigma)$, logo $F(u_t^N) \in (L^{\rho+2}(\Sigma))' = L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma)$. Assim, pela continuidade de F, obtemos

$$F(u_t^\rho) \rightharpoonup F(u_t) \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Sigma). \tag{5.28}$$

Com estes resultados, passando o limite quando $N \to +\infty$ em (5.6) e pela densidade dos $\{w_j(x)\}$ em $H^1(\Omega) \bigcap L^{\rho+2}(\Gamma)$, temos

$$(ku_{tt}, v) + (\nabla u, \nabla v) + \int_\Gamma F(x,t,u_t)v\, d\Gamma + (\alpha u_t, v) = (f, v), \tag{5.29}$$

para toda $v \in H^1(\Omega) \bigcap L^{\rho+2}(\Gamma)$.

A condição de fronteira é satisfeita devido a construção das funções u^N, e passando o limite em $H^1(Q)$.

Assim, está provada a existência do problema.

□

Referências

[1] Antropova V. I., *Remarks on M. V. Ostrogradskii's 'Memoir on heat diffusion in solid bodies'* , Istor. - Mat. Issled., 16 (1965), 97 – 126.

[2] Assan A. E., *Métodos dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*, UNICAMP, Campinas, 1999.

[3] Brézis H., *Análisis Funcional Teoría y Aplicações*, Alianza Ediorial, Madrid, 1984.

[4] Browder F. E., *Problèmes non - Linéaires*, Les Presses de L'Universitè de Montréal, Montréal, 1966.

[5] chazy Jean, *Mecanique Rationelle*, Gauthier - Villars, vol. II, p. 218, Paris, 1933.

[6] Coddington, E., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differntial Equations*, MacGraw-Hill, London, 1955.

[7] Cooper J. M., *Introdution to Partial differential Equations with MATLAB*, Birkhauser, 1998.

[8] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, p. 174, Wiley - Intercience, 1953.

[9] Dautray R., Lions J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 1, Springer-Verlag, 1998.

[10] Faedo S., *Un Nuovo Metodo per L'Analisi Esistenziale e Quantitativa dei Problemi di Propagazione,* Annali della Scuola Norm. Sup , Roma (1949), 1–41.

[11] Figueiredo D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais,* Quarta edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[12] Fourier J. B. J., *Theorie Analytique de la Chauler,* F. Dudot, Paris (1822), 839.

[13] Fourier J. B. J., *Analyse des equations determinees,* F. Dudot, Paris (1831), 24–258.

[14] Galerkin B. G., *Barras e placas. As séries em algumas questões de equilíbrio elástico de barras e placas,* Notícias dos Engenheiros, vol. 1 (1915), 897–908 (em Rússo: *Sterzhni i plastinki. Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok*, Vestnik Ingenerov, vol. 1 (1915), 897–908).

[15] Jörgens K., *Das Anfangswertproblem in Grossen fur eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen,* Math. Zeitschr., 77 (1961), 295–308.

[16] Krylov A. N. et al., *Academician B. G. Galerkin: On the seventieth anniversary of his birth*, Vestnik Akademii nauk SSSR, 4 (1941), 91–94.

[17] Kuzmin A. G., *Non - classical equations of mixed type and their applications in gas dynamics*, International Series of Numerical Mathematics, 109, Basel: Birkhauser Verlag, 1992.

[18] Larkin N. A., *The Nonlinear Boundary Value Problem for the Equation of Mixed Type*, Funkcialaj Ekvacioj, 42 (1999), 491–506.

[19] Larkin N. A., *On One Problem of Transonic Gas Dynamics*, Matemática Contemporânea, Rio de Janeiro, vol. 15 (1998), 169–186.

[20] Larkin N. A., *Smooth Solutions for Transsonic Gas Dynamics*, Novosibirsk, Nauka, 1991.

[21] Lemos N. A., *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, São Paulo, 2004.

[22] Lions J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[23] Lions J. L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[24] Medeiros L. A., Miranda M. M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogeneos)*, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[25] Medeiros L. A., Mello E. A., *A integral de Lebesgue*, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[26] Medeiros L. A., *Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações*, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[27] Mijailov V. P., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* , Moscow, MIR, 1978.

[28] Napolitano D., Ryzhov O., *On analogy between nonequilibrium and viscous inertial flows with transonic velocities,* J. Comput. Math. Phys., 1 (1971), 1229 – 1261.

[29] O'Connor J. J., Robertson E. F., *Biography of B. G. Galerkin*, Dictionary of Scientific Biography, New York, 1990.

[30] Petrovsky I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, N. Y., 1954.

[31] Rakhimova I. K., *John William (Strutt) Rayleigh - initiator of the contemporary mathematical theory of vibrations*, In: Sketches on the history of mathematical physics, "Naukova Dumka", Kiev (1985), 141-147.

[32] Ritz W., *Neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben*, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. - physik. Klasse. Nachrichten, Gottingen, (1908).

[33] Ritz W., *Übereine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik,* , Journal für die reine und angewandte Mathematik, (1909), Bd 135.

[34] Schift L. I., *Non linear meson theory of nuclear forces*, Phys. Rev., 84 (1951), 1 – 9.

[35] Segal I. E., *The global Cauchy Problem for a relativistic scalar field with power interaction,* Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 129 – 135.

[36] Sokolovski V. V., *On the life and scientific career of academician B. G. Galerkin,* Izvestiya Akademii nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk, 8 (1951), 1159–1164.

[37] Thomas J. W., *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[38] Višik M. I., *Solution of System of Quasilinear Equations having Divergent form under Periodic Boundary conditions*, Dokl. Acad. Nauk, SSSR, 137 (1961), 502 – 505.

[39] Višik M. I., Ladyzhenskaya, O. A., *Boundary - value problems for partial differential equations and certain classes of operador equations*, Uspekhi Matem. Nauk, 6 (72) (1956), 41 – 97; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 10, 1958, 223 – 281.