



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos
Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro
Dezembro de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ



SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

Prof. Roney Leon Thompson, Ph.D.

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2020

Alves, Felipe Rodrigues de Mello

Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio/
Felipe Rodrigues de Mello Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2020.

X, 8 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. ?? – ??.

1. Equação do calor. 2. Método de elementos finitos.
3. Discos de freio. I. Rabello dos Anjos, Gustavo *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Solução da equação transiente do calor através do método de elementos finitos aplicado a discos de freio.

*À minha família por todo o
suporte e compreensão.*

Agradecimentos

Sou muito grato ao investimento financeiro e educacional fornecido pelos meus pais Eduardo e Isabel e o apoio da minha dinda Daize na formação profissional. Agradeço ao suporte de todos os meus amigos de fora da faculdade que perceberam meus momentos difíceis e foram capazes de me apoiar mesmo sem entender bem a realidade do curso e a meus amigos de faculdade que foram grandes companheiros em momentos de extrema importância. Um agradecimento enorme à equipe Icarus de Formula SAE por me proporcionar a paixão pela engenharia mecânica e me ensinar a ser um engenheiro mais completo.

Um agradecimento especial à minha companheira de vida por me dar o abraço mais significativo para mim durante toda a graduação, que simbolizou apoio, compreensão e superação.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TRANSIENTE DO CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISCOS DE FREIO

Felipe Rodrigues de Mello Alves

Dezembro/2020

Orientadores: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um código capaz de calcular soluções aproximadas para o problema térmico aplicado a discos de freio submetidos à situações críticas de frenagem de um protótipo de competição tipo formula utilizando o método de elementos finitos. A solução da equação transiente de calor aplicada a um disco de freios fornece uma alternativa aos softwares de altos investimentos financeiros e capacidades computacionais no momento do estudo da dissipação de calor, resultando em um parâmetro de escolha de materiais para fabricação e geometrias a serem consideradas.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

SOLUTION OF THE TRANSIENT HEAT EQUATION USING THE FINITE
ELEMENT ANALYSIS APPLIED TO BRAKE DISCS

Felipe Rodrigues de Mello Alves

December/2020

Advisors: Gustavo Rabello dos Anjos

Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

Eigenvalues and eigenvectors of linear operators are important in many Applied Mathematics areas. In Civil Engineering, especially in Structural Analysis, eigen-systems have a fundamental importance. A typical example is in dynamic analysis, where the eigenvalues represent the natural frequencies and eigenvectors the mode shape. The increasing demand for efficient numeric evaluation of eigenvalues and eigenvectors motivated the search for new methods for the solution of complex eigen-systems.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivo	2
1.3 Metodologia	2
1.4 Organização da tese	2
2 Revisão Bibliográfica	3
3 Método Proposto	5
3.1 O Algoritmo	5
4 Resultados e Discussões	6
4.1 Metodologia para avaliação do Método	6
4.2 Validação da rotina implementada	6
4.2.1 Problema de autovalor padrão – Caso I	6
5 Conclusões	7
A Código Fonte	8

Lista de Figuras

1.1	Modelagem de problemas reais para solução numérica	1
3.1	Deusa Minerva.	5

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do teste realizado com a matriz de Wilkinson, 3 autovalores computados.	6
-----	--	---

Capítulo 1

Introdução

Para transformar um problema real em um modelo compatível com soluções computacionais existem algumas metodologias de idealização do fenômeno físico - onde traduzimos suas características através de modelos matemáticos - a fim de discretizá-lo e resolvê-lo, como esquematizado na Figura 1.1.



Figura 1.1: Modelagem de problemas reais para solução numérica

Fonte: Elaborada pelo autor.

As simulações computacionais fazem uso de diferentes métodos e técnicas para calcular soluções envolvendo os problemas típicos da ciência e engenharia, como: método de diferenças finitas, método de elementos finitos e método de volumes finitos. O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento que busca soluções aproximadas para os modelos numéricos e se aplica a uma grande variedade de problemas físicos. Sua acurácia e estabilidade estão largamente estudados, o que confere ao método uma robustez e sólida confiabilidade.

Para viabilizar a solução, a modelagem divide uma geometria grande e complexa, que é submetida a carregamentos térmicos ou mecânicos em pequenas partes – denominadas *elementos* - os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. A filosofia por trás do método é reduzir um problema grande (seu objeto de estudo) em problemas menores (os *elementos*) e calcular também a relação entre

eles. O conjunto dos *elementos* e de seus pontos de contorno – denominados nós – é conhecido como *malha*. A *malha*, portanto, é composta por um número finito de *elementos* de comportamento bem definido. O método de elementos finitos é um método poderoso para discretização de geometrias complexas pois não exige esforço adicional comparado a sua utilização em geometrias regulares.

A precisão do método dos elementos finitos (MEF) depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número dos elementos em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise.

1.1 Motivação

Veículos de competição são submetidos a grandes esforços uma vez que o seu objetivo é ser mais eficaz em uma pista de corrida. As pistas planejadas para veículos de alta performance são compostas de diversos trechos curvos, principalmente as pistas de Formula SAE e a frenagem eficiente permite maior precisão nas entradas de curva. Sendo assim o sistema de freios é constantemente acionado, o que leva a um considerável aumento de temperatura dos seus componentes. O aumento descontrolado de temperatura nos discos de freio podem resultar em fadiga, vaporização do fluido de freio, rachaduras térmicas e vibrações prejudiciais ao funcionamento do sistema, o que compromete a segurança e performance do protótipo.

1.2 Objetivo

Estudar os fenômenos energéticos envolvendo os componentes dos freios e apresentar soluções computacionais a fim de proporcionar comparativos das influências das grandezas envolvidas no projeto.

1.3 Metodologia

1.4 Organização da tese

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Em um disco de freios ocorrem os três tipos de transferência de calor descrito por Frank P. Incropera [?]: condução, convecção e radiação. O autor define transferência de calor como energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura no espaço. Quando existe um gradiente de temperatura em um meio estacionário sólido ou fluido a condução ocorre quando há transferência de calor através do meio. Já a convecção ocorre quando há transferência de calor entre uma superfície e um fluido em movimento. Quando a troca de calor ocorre através de ondas eletromagnéticas que são emitidas por qualquer superfície com temperatura não nula, ocorre a radiação. O estudo desses fenômenos ocorre através de equações de taxas que quantificam a energia transferida por unidade de tempo.

A condução pode ser interpretada como um fenômeno difusivo onde ocorre transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas através das interações entre partículas. Em um sólido essas interações ocorrem através da combinação entre a vibração das moléculas dos retículos cristalinos e a movimentação dos elétrons livres. Para a condução a equação que descreve a taxa de transferência de calor é conhecida como a *lei de Fourier*.

$$\mathbf{q} = -k \nabla \mathbf{T} = -k \left(\mathbf{i} \frac{dT}{dx} + \mathbf{j} \frac{dT}{dy} + \mathbf{k} \frac{dT}{dz} \right)$$

sendo \mathbf{q} o fluxo de calor e k a condutividade térmica.

Denotemos o domínio por Ω . Seja $\partial\Omega$ o contorno de Ω .

$$|x| = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \geq 0; \\ -1 & , \text{ se } x < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Capítulo 3

Método Proposto

3.1 O Algoritmo

Vamo fazer um teste.



Figura 3.1: Deusa Minerva.

Isso foi um teste.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Metodologia para avaliação do Método

4.2 Validação da rotina implementada

4.2.1 Problema de autovalor padrão – Caso I

A Tabela 4.1 mostra as variações dos parâmetros escolhidos para análise.

Tabela 4.1: Parâmetros do teste realizado com a matriz de Wilkinson, 3 autovalores computados.

TValor de “m”	Nº de iterações	Tempo de CPU	Norma do Resíduo
6	100	0,09013	$7,1474 \times 10^{-12}$
10	28	0,09025	$1,5387 \times 10^{-13}$
20	10	0,100144	$5,9011 \times 10^{-14}$
40	6	0,16022	$8,67438 \times 10^{-14}$
50	3	0,24034	$1,51537 \times 10^{-15}$

Capítulo 5

Conclusões

Apêndice A

Código Fonte