



1

2

3

Grafos cuasi-aleatorios y lema de regularidad de Szemerédi

4

5

Estudiante:
Felipe Sánchez Erazo

6

Profesor Guía:

7

Dr. Hiệp Hàn

8

9

Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático de la Universidad de Santiago de Chile

10

11

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación
Universidad de Santiago de Chile

A mi abuelo, Sergio Sánchez.

1. Introducción

2. Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 2.1 da un paseo por las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 2.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 2.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 14.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero recuerde que la DCS establece que todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

Entonces, si $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (2)$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (3)$$

Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n :

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) \rightarrow 0$, se dice que $f = o(g)$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

2.1. Teoría de grafos

Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. También, si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de r elementos de S .

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices**, y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Dado un grafo G , se escribe $V(G)$ como su conjunto de vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de aristas presentes en el grafo.

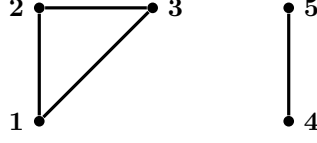


Figura 1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

38 Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a v (o viceversa)
 39 si y solamente si $uv \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente disjuntos, se define
 40 el conjunto de tuplas que forman una arista en G de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\} \right|. \quad (4)$$

41 Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y , y cuando $X \cap Y \neq \emptyset$,
 42 $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en $X \cap Y$. Se entenderá por
 43 **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices adyacentes a u , es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \quad (5)$$

44 Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X , se define el **grado** de un vértice $u \in V$
 45 con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

46 En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

47 Una propiedad elemental en teoría de grafos, es la relación que guarda la suma del grado de
 48 todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

49 **Proposición 1.** *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (6)$$

50 *Demostración.* Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u , y
 51 otra por v . □

52 En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices
 53 del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesaria-
 54 mente diferentes mediante:

$$\text{cogdeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu) \mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

55 Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será
 56 de utilidad en la sección 14.

57 **Proposición 2.** Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').$$

58 *Demostración.* Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene
59 de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv) \mathbb{1}_E(uv') \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu) \mathbb{1}_E(v'u) \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v'). \end{aligned}$$

60 □

61 Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (7)$$

62 A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta tesis. Di-
63 remos que un grafo $G = (V, E)$ es **k -partito** si V se puede dividir en k subconjuntos disjuntos
64 V_1, V_2, \dots, V_k tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$. En particular, a un grafo
65 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

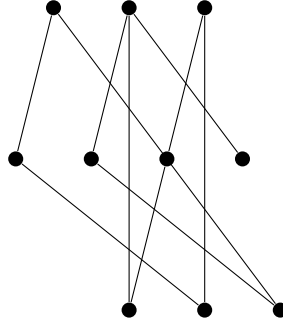


Figura 2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

66 Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n , es un grafo en el cual todos sus vértices son
67 adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta.
68 Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito completo** con n y m elementos en sus
69 respectivos conjuntos de vértices. Observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son
70 exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo **d -regular** es aquel que presenta
71 todos sus vértices con grado d .

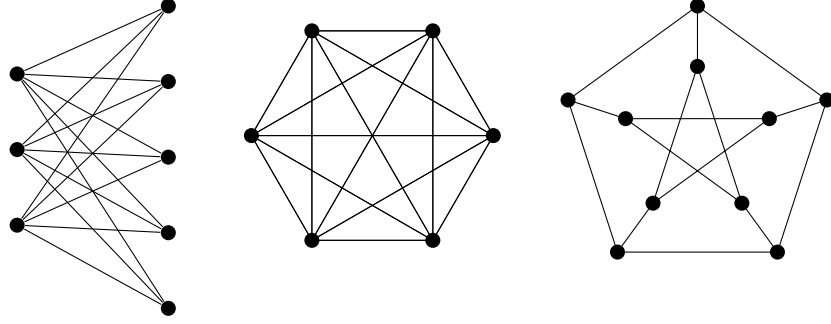


Figura 3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

Otro concepto relevante en este trabajo, son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos v_0, v_1, \dots, v_k tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.
- Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k , que coincide con v_0 . Se denotará por C_k al ciclo de largo k .

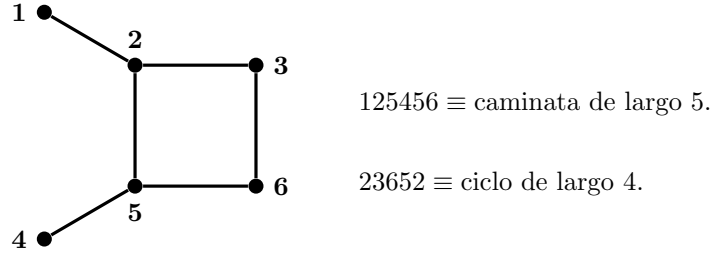


Figura 4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfismos.

Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G , como la aplicación inyectiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$. En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G .

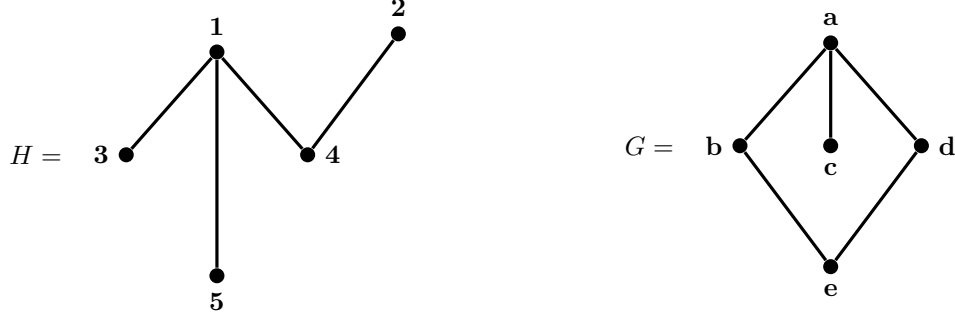


Figura 5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \rightarrow V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

2.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T como la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de \mathbb{R}^n con entrada 1 en la posición i . Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usuales de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n , según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de sus elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de dichas matrices. En efecto,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \text{Tr}(BA).$$

Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo, y se gozan de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

Definición 3. Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacencia** $A_G \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A .

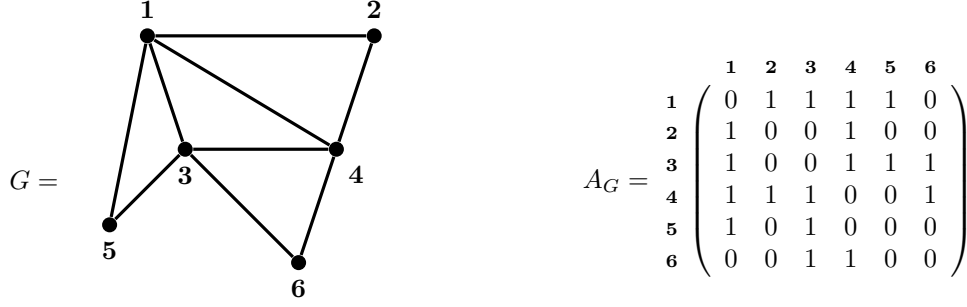


Figura 6: Ejemplo de representación de un grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 4, es que nos permite reescribir la ecuación (4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y. \quad (9)$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\mathbf{v}_X = \sum_{i \in X} \mathbf{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j .

Proposición 4. Sea A la matriz de adyacencia de grafo $G = ([n], E)$. La (i, j) -ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t , cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier

126 caminata de largo $t + 1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j ,
 127 digamos k . Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre
 128 i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t + 1$ desde i hasta j es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

129

□

130 Una consecuencia directa de la proposición anterior, es que en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con
 131 matriz de adyacencia A se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t por
 132 medio de la traza, $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$.

133 Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el
 134 vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio**
 135 $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular.
 136 Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En
 137 este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G , siempre será
 138 con respecto a su matriz de adyacencia A . Por ejemplo, si G es un grafo d -regular, entonces con
 139 la igualdad (8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de
 140 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G .

141 **Proposición 5.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios*
 142 *son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos*
 143 *son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios define una base ortonormal de*
 144 \mathbb{R}^n .

145 *Demostración.* Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio
 146 de A y $\mathbf{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su conjugado (denotado por \bar{z} al complejo
 147 conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ccc} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} & & A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 & & \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2. \end{array}$$

148 Además, como A es simétrica,

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}}.$$

149 Así, ya que $\mathbf{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \bar{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios
 150 de A son números reales.

151 Por otro lado, considere $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios
 152 $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

153 De esta manera, $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y solamente si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad
 154 de los vectores propios de A , defina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios

normalizados de A para probar que \mathcal{B} constituye una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para esto, sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por \mathbf{u}_i^T ,

$$\mathbf{u}_i^T (c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) = c_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que \mathcal{B} es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . \square

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 6. (*Teorema espectral*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (10)$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A , y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A .

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe como se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^T P)DP^T = PD^2 P^T.$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^k P^T$. Esta propiedad resulta altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición 7 y el Corolario 8 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios del mismo.

Proposición 7. La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma de sus valores propios.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i.$$

Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j.
\end{aligned}$$

181

□

182 El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de una matriz real
183 simétrica.

184 **Corolario 8.** Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios, entonces se
185 cumple $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

186 *Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es
187 invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}([PDP^T]^k) = \text{Tr}(P[D^k P^T]) = \text{Tr}([D^k P^T]P) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

188

□

189 De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se
190 simplifica a solo calcular la suma de la k -ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante,
191 en la sección 14, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de
192 la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En
193 particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left| \binom{G}{C_k} \right| = \text{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k + o(n^k) \quad (11)$$

194 Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del
195 teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

196 **Teorema 9.** (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos
197 valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbf{x} \perp \{v_1, \dots, v_{k-1}\} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\mathbf{x} \perp \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

Proposición 10. *El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d -regular, el primer valor propio coincide con d .*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 9:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$ cada vez que G es un grafo d -regular. \square

2.3. Grafos aleatorios

El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios*.

Intuitivamente, se podría pensar en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de seleccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n . En 1959, Erdős-Rényi y Edgar Gilbert* [referencia *](#) proponen dicha selección de la siguiente manera: comenzando con un grafo sin aristas $G = ([n], \emptyset)$, decidir sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad p previamente establecida. En cada repetición del proceso anterior se genera un nuevo grafo de n vértices, que contribuye a la creación del espacio de probabilidad conocido como $G(n, p)$, y se denomina modelo binomial. Entonces, considerando \mathcal{G}^n como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 11. (*Modelo binomial*) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad $(\mathcal{G}^n, \mathcal{P}(\mathcal{G}^n), \mathbb{P})$, con

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G} (1-p)^{\binom{n}{2} - e_G}, \quad \forall G \sim G(n, p).$$

Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad \mathcal{P}_n **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho esto, se probará que $G(n, p)$ posee una distribución de aristas en el siguiente sentido:

223 **Proposición 12.** Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \sim G(n, p)$, entonces satisface con alta probabilidad
 224 la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_n^{p, \varepsilon} := \{G \in \mathcal{G}^n : |e(A, B) - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2, \forall A, B \subset V(G)\}.$$

225 Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de Chernov. Exis-
 226 tiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se utiliza el resultado para el caso
 227 en que cada variable aleatoria solo toma los valores 0 o 1, como se plantea en * referencia * en la
 228 ecuación (2.12) de la observación 2.5.

229 **Teorema 13.** (Desigualdad de Chernov) Sean X_1, \dots, X_N variables aleatorias independientes tales
 230 que $X_i = 1$ con probabilidad p , y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^N X_i$, se
 231 satisface

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

232 Con esto, damos paso a la demostración prometida.

233 *Demostración Proposición 12.* Dado $p \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n, p)$ y $A, B \subset V(G)$.
 234 Defina la variable aleatoria $X = e(A, B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

235 Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X en sumas de
 236 variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2 \sum_{ab \in \binom{A \cap B}{2}} X_{ab}, \quad \text{y} \quad X_2 = \sum_{\substack{a \in A, b \in B \\ a \neq b \\ ab \notin \binom{A \cap B}{2}}} X_{ab}.$$

237 Ahora, al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p \binom{|A \cap B|}{2}, \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p \left(|A||B| - |A \cap B| - 2 \binom{|A \cap B|}{2} \right).$$

238 Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3} n^2$ sobre $i \in \{1, 2\}$
 239 para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(|X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3} n^2 \right) &\leq 2 \exp \left(-\frac{2 \left(\frac{\varepsilon}{3} n^2 \right)^2}{|A||B|} \right) \\ &\leq 2 \exp \left(-\frac{2}{9} \varepsilon^2 n^2 \right). \end{aligned} \tag{12}$$

240 Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1 - \mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3} n^2$ y $|X_2 - \mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3} n^2$, entonces

$$\left| X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2) \right| \leq \frac{2}{3} \varepsilon n^2, \quad \forall A, B \in V(G).$$

Y así, como $\mu_1 + \mu_2 = p(|A||B| - |A \cap B|) = p|A||B| \pm \varepsilon n$, se tendrá que todo $A, B \subset V(G)$ satisface $|X - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2$.

Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon}) &= \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X - p|A||B|| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \vee |X_2 - \mu_2| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\
&\leq \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\
&\stackrel{(12)}{\leq} 2^{2n+1} \exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

□

3. Cuasi-aleatoriedad

Trabajar con estructuras discretas aleatorias brinda una amplia gama de propiedades ideales y/o deseables, lo que las convierte en piezas fundamentales tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo aleatorio binomial goza de una distribución uniforme de aristas, buenas propiedades y es robusto. La cuestión ahora es cómo capturar las propiedades esenciales de la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la noción de cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas discretas. En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características deterministas que son propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es interesante por sí misma, su estudio ha revelado profundas conexiones entre varias ramas de la matemática y ciencias de la computación, encontrando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría ergódica, geometría, y algoritmos y complejidad.

Como se verá a detalle más adelante en la sección 4, una de las razones principales por las cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica, es el hecho de que existe un teorema de partición que permite la aproximación de cualquier objeto discreto por otros cuasi-aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre lema de regularidad de Szemerédi, que establece que todo grafo se puede aproximar mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo la conexión entre un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por Rödl *referencia* y Thomason *referencia*, y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas* para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo. *Buscar año...*

Definición 14. Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n vértices. Entonces el grafo G_n es **cuasi-aleatorio** si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$ se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,

$$e(X, Y) = p|X||Y| + o(n^2). \quad (13)$$

269 En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece, que hasta el término de error
 270 $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo
 271 aleatorio $G(n, p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabi-
 272 lidad en un grafo aleatorio $G(n, p)$, sino que también se considera como una de sus características
 273 distintivas.

274 3.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

275 Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan
 276 Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson * [referencia](#) *. Ellos presentaron una extensa lista
 277 de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al
 278 concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 14.

279 En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto a una demos-
 280 tración formal.

281 **Teorema 15.** (*Chung, Graham y Wilson*) Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos
 282 $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son
 283 equivalentes:

284 DISC_p : Para todo $X, Y \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

285 DISC'_p : Para todo $X \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2).$$

286 COUNT_p : Para cada grafo H , la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = \left(p^{e(H)} + o(1) \right) n^{v(H)}.$$

287 $\text{COUNT}_{C_4, p}$: La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de orden 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

288 CODEG_p :

$$\sum_{u, v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

289 EIG_p : Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los autovalores de la matriz de adyacencia de G_n , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 15, se ha utilizado notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias entre dos propiedades. Entonces, se replantea equivalentemente cada propiedad con una versión cuantitativa asociando algún parámetro de error ε para todo grafo específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande. Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 15, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ satisface DISC_p . Luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} ¹ si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad Q_{y_1, \dots, y_ℓ} implica la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} si y solamente si $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ implica Q_{y_1, \dots, y_ℓ} . Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$ cada vez que satisfaga la propiedad $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$.

Se desarrollará la demostración formal del teorema de Chung, Graham y Wilson utilizando notación ε - δ , mostrando que cada par de propiedades P_{x_1, \dots, x_k} y Q_{y_1, \dots, y_ℓ} son equivalentes entre sí con un cambio polinomial en el error. Esto es, $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de constantes $C, c > 0$.

Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

La demostración del Teorema 15 fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 18.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 19.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xRightarrow{\text{Prop. 22. y 23.}} & \text{EIG}_p \\ \updownarrow \text{Prop. 16 y 17.} & & & & \downarrow \text{Prop. 20.} & & \\ \text{DISC}_p & & \xleftarrow{\text{Prop. 21.}} & & \text{CODEG}_p. & & \end{array} \quad (14)$$

Así, damos paso a la demostración de cada proposición considerada en el esquema 14.

Proposición 16. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces, considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, se utiliza la propiedad $\text{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

¹Los parámetros x_1, \dots, x_k pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 15 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\text{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

317 Las igualdades anteriores consideran $e(X, X) = 2e(X)$, por definición, y la aproximación $\binom{|X|}{2} =$
 318 $\frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. \square

319 **Proposición 17.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 320 $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En particular,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

321 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere
 322 también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}'_p(\delta)$.

323 En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de
 324 vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran
 325 en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (15)$$

326 Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los
 327 vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$
 328 sobre la identidad (15) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left(\binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

329 \square

330 **Proposición 18.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 331 $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

332 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$
 333 suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la
 334 propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$.

335 Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su
 336 cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (16)$$

337 Una vez probada la ecuación (16), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para
 338 conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4\binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left(\frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

339 Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left| \binom{G}{F} \right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G que forman
 340 una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

341 Luego, si aplicamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre V , se obtiene que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

342 Así, con $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea F un grafo
343 con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (16) en cualquier grafo con una cantidad
344 de aristas menor que e_F . Para desarrollar la inducción, suponga que $\{i, j\} \in E(F)$ y considere la
345 siguiente notación:

- 346 i) F^- corresponde es el grafo producido por eliminar la arista $\{i, j\}$ de F .
- 347 ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista $\{i, j\}$ en F .

348 Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G , es decir, a T^- se corresponde una aplicación inyectiva
349 $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$ tal que $\{f(u), f(v)\} \in E(T^-)$ cada vez que $\{u, v\} \in E(F^-)$. Entonces,
350 considerando $e_{T^-} := \{f(i), f(j)\}$, se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera
351 conveniente para utilizar la hipótesis inductiva como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left| \binom{G}{F} \right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\ &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\ &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\ &= p \left| \binom{G}{F^-} \right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\ &\stackrel{(16)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell. \end{aligned} \tag{17}$$

352 Ahora, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad (17) es pequeño. Para
353 esto, considere T^* una copia de F^* , y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar de
354 F^- los vértices j e i respectivamente. Defina los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_i^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\ A_j^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}. \end{aligned}$$

356 Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$
357 añadida a T^* se obtiene una copia de F^- . Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad
358 (17) convenientemente y utilizando la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p|A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. \square

Proposición 19. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

Demostración. Se trata de un caso particular de COUNT_p , en donde $H = C_4$ y $\delta < \varepsilon$. \square

Proposición 20. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. En particular,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$.

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$ y $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado visto en (7) se obtiene la primera de las cotas:

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\
&\stackrel{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\
&= \frac{4e_G^2}{n} \\
&\geq \frac{4}{n} \left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\
&\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3.
\end{aligned}$$

372 Por otro lado, usando $\text{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

373 Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n \left(\sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u,v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\
&= n \left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\
&\leq n (p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n(4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4)^{1/2} \\
&= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
&\leq 4\delta^{1/2} n^3.
\end{aligned}$$

374

□

375 **Proposición 21.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
376 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{CODEG}_p(\delta)$.
377 En particular,

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

378 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea
379 G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$.

380 En primera instancia note que la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración en los grados
381 de los vértices de G . En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\stackrel{(7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/2} n^2.
\end{aligned}$$

382 Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresi3n de la propiedad DISC_p de forma
383 conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

384 En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo,
385 lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera, usando a la cota proveniente de
386 la concentraci3n de los grados en los v3rtices de G , se prueba el resultado continuando desde (18):

$$\begin{aligned}
|e(X, Y) - p|X||Y|| &\leq n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y) \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\sum_{u, v \in V(G)} |\text{codeg}(u, v) - p^2n| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} |\deg(x) - pn| \right)^2 \\
&\leq n^{1/2} \left(\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3 \right)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/4}n^2.
\end{aligned}$$

387

□

388 **Proposición 22.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
389 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{EIG}_p(\delta)$.
390 En particular,

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

391 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Conside-
392 ramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$,
393 $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

394 Recuerde que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4, que no son C_4 ,
395 en G se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas
396 de C_4 en G . Con esto, junto al Lema 4 y el Corolario 8 se obtiene lo siguiente:

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \quad (19)$$

397 Luego, recordando que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\text{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \quad (20)$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer autovalor y la cota mostrada en (20). Entonces, continuando desde la ecuación (19),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

Proposición 23. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{EIG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

En lo que respecta al primer autovalor, sabemos por un lado que éste es al menos el promedio de los grados gracias al Lema 10. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \quad (21)$$

Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 8 y la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4. \quad (22)$$

La desigualdad (22) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$, y en combinación con la cota vista en (21), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$.

Por último, observe por las cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned} \max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\ &= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\ &\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\ &= 4\delta n^4. \end{aligned}$$

De esta manera, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4}n$. □

3.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas según la Definición 14 contempla verificar si todo par de subconjuntos de vértices del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En otras palabras, se requiere verificar un número exponencial de subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo DISC'_p), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es que la propiedad más débil $\text{COUNT}_{C_4,p}$, que solo requiere que la condición de conteo sea verdadera para el ciclo C_4 , sea suficientemente sólida para implicar la afirmación de conteo de la propiedad COUNT_p ; que dice que el número etiquetadas de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

* **Cambiar el enfoque de este párrafo.** * Una pregunta natural al observar la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}$ es: ¿Podemos debilitar la condición para un conteo esperado de copias etiquetadas de K_3 ? La respuesta es no, de hecho, la propiedad puede ser extendida a $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ con $t \geq 2$. Es decir, para el grafo G ,

$$\text{COUNT}_{C_{2t},p} : \left| \binom{G}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

Se expone un bosquejo de la demostración de la extensión de $\text{COUNT}_{C_4,p}$ a la propiedad $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$.

Proposición 24. Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ y EIG_p son equivalentes.

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición 22 y 23 tras notar el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (20) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

Con estas observaciones el resultado queda demostrado. \square

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de orden par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los autovalores de G , eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

445 A continuación, se expone la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad
 446 de copias etiquetadas esperadas de K_3 , pero no cumple las condiciones para ser casi-aleatorio. La
 447 idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que
 448 la esperada de copias etiquetadas de K_3 , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces
 449 independientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2, n_2} tales que su unión disjunta forma el grafo
 450 $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

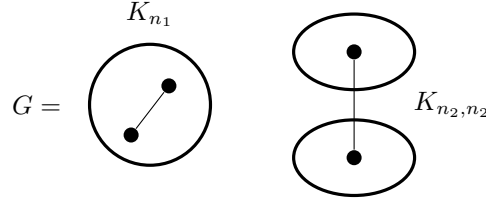


Figura 7: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo.
 Aquí, $\bullet\text{---}\bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G .

451 Sobre K_{n_1} y K_{n_2, n_2} , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de K_3 son:

$$e_{K_{n_1}} \approx \frac{n_1^2}{2} \quad , \quad \left| \binom{K_{n_1}}{K_3} \right| \approx n_1^3 \quad ,$$

$$e_{K_{n_2, n_2}} \approx \frac{(n - n_1)^2}{4} \quad , \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{K_3} \right| = 0.$$

452

453 Ahora, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que el grafo G posea la cantidad
 454 esperada de aristas y copias etiquetadas de K_3 , acorde a un grafo aleatorio binomial con densidad
 455 p . Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n - n_1)^2}{4}, \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

456

457 Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Dicha configuración, en
 458 efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

459

460 Como también,

$$\left| \binom{G}{K_3} \right| = \left(\frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

461

462 Sin embargo, el grafo G no es casi-aleatorio debido a que no existen aristas entre K_{n_1} y K_{n_2, n_2}
 463 ni dentro de los conjuntos que conforman a K_{n_2, n_2} .

464 Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos
 465 y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d -regular. En nuestro contexto, se verá
 466 que toda secuencia $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ de grafos d -regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple
 467 con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

468 **Teorema 25.** (*Expander Mixing Lemma*) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d -regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq$
 469 $\dots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G . Se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

470

471 Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n} \right) \left(1 - \frac{|Y|}{n} \right)}. \quad (23)$$

472 *Demostración.* Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n compuesta por los vectores propios
 473 de A . Utilizando la descomposición espectral, se denota

$$A_1 = \lambda_1 v_1 v_1^T \text{ y } \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

474

475 de manera que $A = A_1 + \Delta$.

476 Conforme a la ecuación (9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = v_X^T A v_Y = v_X^T A_1 v_Y + v_X^T \Delta v_Y. \quad (24)$$

477

478 De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que
 479 el segundo el factor de error. Para esto, se representan los vectores v_X y v_Y según la base \mathcal{B} . Es
 480 decir,

$$v_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \text{ y } v_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i,$$

481

482 donde $\alpha_i = v_X^T v_i$ y $\beta_i = v_Y^T v_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_X, v_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j \in X} \mathbb{1}_j, v_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbb{1}_j, v_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= |X|.
\end{aligned}$$

483

484 Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$.

485 Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (24) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned}
v_X^T A_1 v_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T (\lambda_1 v_1 v_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^T \right) (v_1 v_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (v_i^T v_1) (v_1^T v_j) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{25}$$

486

487 Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$v_X^T \Delta v_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j v_j v_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{26}$$

488

489 Luego, dado que G es un grafo d -regular, $\lambda_1 = d$ y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ son valor y vector propio
490 respectivamente de A . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

491

492 Así, la ecuación (25) resulta en $v_X^T A_1 v_Y = \frac{d}{n} |X||Y|$.

493 Para el término de error, recordando la definición de λ , se desarrolla el valor absoluto de la
 494 ecuación (26) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
 |v_X^T \Delta v_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\
 &\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\
 &\stackrel{\text{CS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\
 &= \lambda \sqrt{(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2) (\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2)} \\
 &= \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
 \end{aligned}$$

495

496 Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (24)
 497 de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - v_X^T A_1 v_Y| = |v_X^T \Delta v_Y|.$$

498

□

499 El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d -regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de
 500 vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$.
 501 En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$.
 502 Entonces, si G satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 25:

$$\begin{aligned}
 \left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\
 &< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\
 &< \varepsilon n^2.
 \end{aligned}$$

503

504 Finalmente, en un grafo d -regular, la equivalencia entre las propiedades $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se
 505 completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (14).

4. Lema de regularidad de Szemerédi

* Aquí debo ingresar una breve descripción del lema de regularidad de Szemerédi y la fuerza que toma al combinarlo con el teorema de Chung-Graham-Wilson y comentar la aplicación que se mostrará. (Quizás también hablar de las dos demostraciones de este lema, usual y espectral.) *

4.1. Enunciado y demostración

Se tratará el concepto de regularidad de una manera un poco diferente a como es tradicionalmente conocida. En particular, se permite intersección entre pares de subconjuntos de vértices de un grafo en las futuras definiciones.

Definición 26. Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X, Y) es un **par ε -regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple

$$|d(A, B) - d(X, Y)| \leq \varepsilon$$

Cuando (X, Y) no es un par ε -regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $|d(A, B) - d(X, Y)| > \varepsilon$.

Notaremos que la noción de un par ε -regular es, de hecho, una analogía de la propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$ y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$|e(X, Y) - p|X||Y|| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \forall Y \subset W. \quad (27)$$

En efecto, si (U, W) es un par ε -regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que $|A| \geq \varepsilon|U|$ y $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε -regular no es suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W| < 0 \leq e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

De esta manera, tomando $p = d(U, W)$, se obtiene la analogía planteada.

Por otro lado, con el espíritu del Teorema 15, es posible expresar un resultado análogo a la propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ utilizando el concepto de par ε -regular. Dicho resultado, para $H = K_3$ es conocido como el lema de conteo de triángulos.

533 **Lema 27.** (*Lema de conteo de triángulos*) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los conjuntos no
 534 necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares (X, Y) , (Y, Z) y (X, Z) son ε -regular.
 535 Entonces,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\}| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

536 *Demostración.* Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Propo-
 537 sición 18 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$. Cuando el grafo no posee
 538 aristas, entonces

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\}| = |X||Y||Z|.$$

539

540 También, recordando que la condición de un par ε -regular es equivalente a $\text{BI} - \text{DISC}_p(\varepsilon)$ para
 541 algún $p \in (0, 1)$, cuando el grafo presenta una arista,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\}| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

542

543 Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$|\{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

544

545 Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del grafo
 546 $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la aplicación inyectiva $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$. Con esto, se desarrolla
 547 inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\}| &= \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Z)] \\ &= d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| \\ &\quad + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \quad (28)$$

548

549 En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (28) se corresponde
 550 con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton $\{2\}$ en G , y considere los
 551 siguientes conjuntos:

$$A_1^{T^*} = \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}.$$

$$A_3^{T^*} = \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}.$$

De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X, Z) ε -regular con versión bipartita de la propiedad $\text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ vista en (27), se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| &\leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\ &= \sum_{T^*} \left| e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z) |A_1^{T^*}| |A_3^{T^*}| \right| \\ &\leq \sum_{T^*} \varepsilon |X| |Z| \\ &\leq \varepsilon |X| |Y| |Z|. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (28) se prueba lo prometido. \square

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X, Y) y (X, Z) son ε -regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε -regular para el que lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 27 (y Proposición 18), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H . Se enuncia sin demostración.

Lema 28. (Lema de conteo de grafos) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε -regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

Ya conociendo el concepto de regularidad entre pares de subconjuntos de vértices, estudiamos la regularidad en una partición del conjunto de vértices del grafo.

Definición 29. Dado un grafo G , una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ es una **partición ε -regular** si

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

572

573 *Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε -regular salvo una*
 574 *fracción ε de pares de vértices.*

575 Note que si una partición ε -regular de k partes es en particular una equipartición, entonces a lo
 576 más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε -regular.

577 Ya con todo lo necesario, se introduce el lema de regularidad de Szemerédi. Intuitivamente, el
 578 lema permite particionar el conjunto de vértices de todo grafo en una cantidad finita de partes,
 579 satisfaciendo que la mayoría de sus pares de partes son ε -regular. Enunciamos el célebre lema, y se
 580 dará prueba formal más adelante.

581 **Teorema 30.** *(Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$*
 582 *tal que todo grafo admite una partición ε -regular de a lo más M partes.*

583 Para dar prueba a este teorema, se utilizará una técnica llamada *argumento de incremento de*
 584 *energía*. Para todo grafo G , la técnica funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

- 585 1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
- 586 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 587 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que
 588 evidencian la irregularidad de cada par.
 - 589 (b) Refinar \mathcal{P} utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par
 590 (V_i, V_j) no ε -regular para obtener \mathcal{Q} .
 - 591 (c) Actualizar \mathcal{P} con \mathcal{Q} .

592 Siendo \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} si
 593 cada parte de \mathcal{Q} está contenida en una parte de \mathcal{P} . En lo que resta de esta sección mostraremos
 594 que el algoritmo tiene un fin, y que entrega una partición ε -regular en un número de iteraciones
 595 que solo depende de ε .

596 **Definición 31.** *(Energía) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer*
 597 *lugar*

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

598

599 *Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de Y , se define*

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

600

601 Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, se define la **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

602 Observe que en toda partición \mathcal{P} de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

603

604 La última observación es crucial en la demostración del Teorema 30, puesto que los Lemas 32,
605 33 y 34 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por conse-
606 cuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, entregando
607 una partición ε -regular.

608 El siguiente lema muestra que la energía no disminuye al particionar o refinar arbitrariamente
609 un conjunto o partición respectivamente.

610 **Lema 32.** Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, \mathcal{P}_X y \mathcal{P}_Y particiones de X e Y respectivamente, entonces
611 $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, dadas dos particiones de vértices \mathcal{P} y \mathcal{P}' de G , $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada
612 vez que \mathcal{P}' refina a \mathcal{P} .

613 *Demostración.* Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones
614 $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente. En primera instancia, se utiliza
615 la desigualdad (3) para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
&\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
&= q(X, Y).
\end{aligned} \tag{29}$$

616

617 Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de \mathcal{P} .
618 Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(29)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

619

□

620 Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε -regular de un grafo G , mediante los subconjuntos
621 que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

622 **Lema 33.** Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε -regular,
623 existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

624 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos
625 tales que el par (X, Y) no es ε -regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que
626 evidencian la irregularidad del par (X, Y) , y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon |X| \quad \text{y} \quad |Y_1| \geq \varepsilon |Y|. \tag{30}$$

627

628 Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$,
629 cual por definición de par ε -regular, satisface* Aquí quedé *

$$|\eta| > \varepsilon. \quad (31)$$

630 Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

631 De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \quad (32)$$

632 Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

633 Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (33)$$

634 Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y , desarrollamos,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i||Y_j|} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \right) \\ &\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j|} \right) \\ &\stackrel{(32) \text{ y } (33)}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

635 Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1|. \quad (35)$$

636 Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (34) como sigue, * Me podré saltar un
 637 espacio más pequeño abajo? *

$$\begin{aligned}
 n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
 &\stackrel{(35)}{=} \frac{1}{|X_1||Y_1|} \left(\frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \left(\frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X||Y|} e(X, Y) - \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\
 &= \frac{|X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1||Y_1| \\
 &\quad + \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
 &= \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1| \left(1 + \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right) \\
 &\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1|. \tag{36}
 \end{aligned}$$

640 Finalmente, utilizando las cotas (30) y (31), podemos concluir desde la desigualdad (36),

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\
 &= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\
 &> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.
 \end{aligned}$$

641 □

642 Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε -regular por medio de sus subconjuntos
 643 que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al
 644 paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar
 645 simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε -regular de un grafo produce un aumento estricto
 646 de al menos ε^5 en la energía.

647 **Lema 34.** Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ no ε -regular de $V(G)$. Entonces
 648 existe un refinamiento \mathcal{Q} de \mathcal{P} , en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

649 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ una partición no ε -regular del conjunto de n vértices
650 de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε -regular,
651 existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que para cada
652 V_i , podemos encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los
653 pares (V_i, V_j) no ε -regular. Consideremos ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ que refina a \mathcal{P} , en
654 la que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos
655 los subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular. En
656 consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

657 Por simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$. Luego, como
658 la partición \mathcal{P} no es ε -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (37)$$

659 Así, junto a los lemas probados previamente, damos prueba al resultado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\ &= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\ &\stackrel{\text{Lema 32}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\ &\stackrel{\text{Lema 33}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\ &\stackrel{(37)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5. \end{aligned}$$

660 * Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 5, cuando lo cambio se me descuadra :c
661 * □

662 Ya con todo lo necesario, damos prueba formal al Teorema 30 mediante la técnica de *argumento*
663 *de incremento de energía*.

664 *Demostración del Teorema 30.* Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G , elegimos inicialmente la partición trivial
665 del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actualizando \mathcal{P}), aplicaremos el Lema
666 34 cada vez que la partición actual no sea ε -regular. Observe que por cada aplicación del Lema 34 se
667 consigue un aumento de al menos ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada
668 superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será
669 necesariamente una partición ε -regular debido a la cota de la energía.

670 Para una partición no ε -regular con k elementos, el Lema 34 encuentra un refinamiento de a lo
671 más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento*
672 *de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada

673 paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las
674 tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso
675 tras aplicar el Lema 34.

$$\begin{aligned} 1^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 1 &\rightarrow 2 < 2^2 && \text{partes.} \\ 2^{\text{da}} \text{ Iteración: } 2^2 &\rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^{2^2}} && \text{partes.} \\ 3^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 2^{2^{2^2}} &\rightarrow (2^{2^{2^2}}) 2^{(2^{2^{2^2}})} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} && \text{partes.} \end{aligned}$$

676 Así, como el algoritmo debe luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad de partes al final de
677 proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\dots^2}} \left. \vphantom{2^{2^{\dots^2}}} \right\} \text{Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

678 □

679 Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la siguiente manera,

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\dots^2}} \left. \vphantom{2^{2^{\dots^2}}} \right\} \text{Altura } k. \quad (38)$$

680

681 * En esta parte me gustaría dejar un comentario sobre lo grande que es la cota y el resultado
682 que encontró Gowers en 1997 de cota inferior, pero no lo entiendo :c *

683 Una de las peculiaridades del lema de regularidad de Szemerédi es la flexibilidad que posee su
684 enunciado, adaptando su aplicación a diferentes contextos. Por ejemplo, si en la demostración del
685 Teorema 30 tomamos una partición inicial arbitraria en vez de la partición trivial del conjunto de
686 vértices del grafo, se logra obtener la siguiente variante del lema de regularidad.

687 **Teorema 35.** (*Regularidad de Szemerédi - Partición inicial arbitraria*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un
688 entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo G con una partición inicial \mathcal{P}_0 de $V(G)$ admite una partición
689 ε -regular \mathcal{P} de $V(G)$ que refina cada parte de \mathcal{P}_0 en a lo más M partes.

690 Es posible fortalecer un poco más el lema de regularidad exigiendo que el resultado sea una
691 equipartición del conjunto de vértices de un grafo G . Es decir, una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ tal
692 que $|V_1| \leq |V_2| \leq \dots \leq |V_k| = |V_1| + 1$.

693 **Teorema 36.** (*Regularidad de Szemerédi - Equipartición*) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe un
694 entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε -regular de su conjunto de vértices
695 de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.

696 * Comentar que cuando tenemos esta versión del teorema (que es la clásica), entonces la defini-
697 ción de una partición ε -regular se traduce en $\dots \leq \varepsilon k^2$. También hablar un poco de m_0 , cual ayuda
698 a que ninguna de las partes sea demasiado grande. *

La idea de la demostración del Teorema 36 consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Para todo grafo G , la modificación del algoritmo es la siguiente:

1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria \mathcal{P} de $V(G)$ con m_0 partes.
2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de cada par.
 - (b) Refinar \mathcal{P} usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener la partición \mathcal{Q} , cual divide cada parte de \mathcal{P} en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.
 - (c) Modificar la partición \mathcal{Q} refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$ utilizando alguna elección apropiada del entero $m = m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de \mathcal{Q} que no fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
 - (d) Actualizar \mathcal{P} con la modificación de \mathcal{Q} .

El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G . En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande.² En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición de a lo más $\text{torre}(\varepsilon^{-5})$ partes.

4.2. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son desarrolladas en base a los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices del grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** el grafo eliminando aristas con mal comportamiento según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
 - i) Irregularidad.
 - ii) Baja densidad.
 - iii) Al menos una de las partes es demasiado pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio utilizando algún lema de conteo.

^{2*} Aquí quiero hacer un comentario/ejemplo de m . Yufei sugiere $m = \lfloor 100|\mathcal{Q}\varepsilon^{-5}| \rfloor$, pero tampoco lo entiendo mucho. *

Teniendo esta fórmula en mente, damos paso a la primera aplicación del lema de regularidad, cual plantea intuitivamente que todo grafo con *pocas* triángulos puede convertirse en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

Teorema 37. (*Lema de eliminación de triángulos*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 30 para obtener la constante $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más εn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 30, se asegura la existencia de una partición ε_r -regular $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_M\}$.

Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [M]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i y V_j cuando

(a) (V_i, V_j) no es un par ε_r -regular,

(b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

(c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{M}\varepsilon_r$.

De esta manera, como la partición es ε_r -regular, las aristas removidas por la condición (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [M]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{M}\varepsilon_r$ vértices en a lo más M subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$M \cdot \frac{n}{M}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos. Para esto, observe que la condición de eliminación de aristas (a) nos asegura que cada par (V_i, V_j) es ε_r -regular, y que se satisface la hipótesis del lema de conteo de grafos. Entonces, si luego de la limpieza del grafo aún

758 existe un triángulo $(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell$, el Lema 27 nos dice que incluso hay más triángulos. En
 759 particular, gracias a la eliminación de las aristas por la condición (b) y (c),

$$\begin{aligned}
 |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{M^3} \\
 &> \delta n^3.
 \end{aligned}$$

760

761 Finalmente, con nuestra elección de δ , el resultado se prueba formulando la siguiente contradic-
 762 ción: si existe un triángulo en el grafo limpio G' , el lema de conteo de triángulos nos dice que en
 763 realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos,
 764 por lo que se concluye que el grafo G' obtenido desde G es libre de triángulos removiendo a lo más
 765 εn^2 aristas. \square

766 Denotaremos por k -PA a una progresión aritmética de k elementos. En particular, diremos que
 767 un conjunto de números naturales A es libre de 3-PA si no existen los elementos $x, x+y, x+2y \in A$,
 768 con $y \neq 0$. Cuando $y = 0$, diremos que la 3-PA es trivial.

769 **Teorema 38.** (Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $A \subset [n]$
 770 posee $|A| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces A contiene una 3-PA no trivial cada vez que $n \geq n_0$.

771 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $A \subset [n]$ con $|A| \geq \varepsilon n$ elementos. La idea es construir
 772 un grafo 3-partito de manera conveniente para posteriormente utilizar el lema de eliminación de
 773 triángulos. Considere el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en
 774 donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$, y son disjuntos entre cada par de ellos. Así, G tiene $6n$
 775 vértices, y se definen las aristas de la siguiente manera:

- 776 1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in A$.
- 777 2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in A$.
- 778 3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in A$.

779 Luego, la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in A$,
 780 $k - j \in A$ y $\frac{k-i}{2} \in A$, o bien, $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$ es una 3-PA en A con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$. En
 781 específico, diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $a \in A$ se
 782 satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = a$.

783 Ahora, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, a) \in V_1 \times A$, la
 784 cantidad de triángulos triviales es exactamente $n|A| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen
 785 triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se puede eliminar dos triángulos triviales
 786 removiendo solo una arista. En consecuencia, debemos eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para
 787 hacer de G libre de triángulos.

Utilizando el lema eliminación de triángulos eligiendo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{36}$, existen $\delta_0 > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $6n \geq n'_0$ vértices y a lo más $\delta_0(6n)^3$ triángulos, se convierte en libre de triángulos eliminando a lo más $\varepsilon_0(6n)^2$ aristas. Entonces, estableciendo $\delta = 216\delta_0$, note que existen como máximo $\delta n^3 - \varepsilon n^2$ triángulos no triviales. Sabiendo esto, aseguramos la existencia de un triángulo no trivial cuando $n > \frac{\varepsilon+1}{\delta}$. En efecto,

$$n > \frac{\varepsilon+1}{\delta} \Rightarrow \delta n - \varepsilon > 1 \Rightarrow n^2(\delta n - \varepsilon) > 1.$$

793

Finalmente, el resultado queda demostrado tomando $n_0 > \max \left\{ \frac{n'_0}{6}, \frac{\varepsilon+1}{\delta} \right\}$ suficientemente grande. \square

Definición 39. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $M \subseteq E$ es un **emparejamiento** en G si no existen un par de aristas en M que compartan algún vértice. Diremos que M es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y toda arista de G con un vértice en $V(M)$ es una arista en M .

* Usar k o M para la cantidad de partes?, aquí se me confunde con el emparejamiento, pero en TRL y demo espectral de regularidad usé M como las partes. De momento en esta parte lo dejaré con k . *

Teorema 40. (Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 30 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema 30, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r -regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G' . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

814

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido M en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrían a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

Se define $U_i := V_i \cap V(M)$ como el subconjunto de vértices de M que comparte elementos con V_i , y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(M)$ que

comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i . Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de $V(M)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

De esta manera, recordando que $|V(M)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$. Además, como también $|M| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una arista en M . Luego, dada la limpieza de G , dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r -regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (39)$$

Ahora, como que M es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$ debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

Sin embargo, la desigualdad (39) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\ &\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\ &\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a M , por lo que se contradice la hipótesis de que M es un emparejamiento inducido. \square

* Comentar que el siguiente teorema será utilizado para demostrar alternativamente el Teorema de Roth. *

Teorema 41. (Ajtai-Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$ para algún $a, b, d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.

841 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \geq n_0$, y $S \subset [n]^2$ un subconjunto
842 con al menos εn^2 elementos. Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de
843 vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

844

845 Interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se puede definir una relación entre pares de
846 aristas en G en función de la distancia que abarca la suma de las coordenadas de sus respectivos
847 pares en S . Esto es,

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

848

849 ** Dibujito con 2 ejemplos de q . ** Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento
850 en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia
851 (cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E . En
852 efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$ comparten el vértice
853 w_j . Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la
854 misma arista.

855 Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2$, el Teorema 40 asegura que existe al menos un emparejamiento no
856 inducido. Esto significa que en un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim$
857 $u_k w_\ell$ puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i, j) , (k, ℓ) y (i, ℓ)
858 elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

859

860 Finalmente, el resultado se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para obtener $j = b + d$ y $k = a + d$.
861 ** Poner dibujito de la esquina ** □

862 ** Comentar que el Teorema de la esquina nos entrega otro camino para demostrar el Teorema*
863 *de Roth. **

864 *Segunda demostración Teorema 38.* Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para
865 $n \geq n_0$, sea $A \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in A\},$$

866

867 Observe que cada $a \in A$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = a$, permitiendo
868 determinar que $|B| = n|A| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 41 asegura la existencia de elementos de la
869 forma $\{(a, b), (a, b + d), (a + d, b)\}$ en B . Por consecuencia, se encuentra una 3-PA no trivial en A
870 tomando $x = a - b$, e $y = d$. □

* Explicar que ahora vamos a demostrar con teoría espectral el lema de regularidad de Szemerédi.
Comentar también que esta versión la realizó Terence Tao. *

Demostración espectral Teorema 30. Sea $\varepsilon > 0$, $G = ([n], E)$ un grafo y T su matriz de adyacencia. Consideramos además $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por los vectores propios de T , y $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ los valores propios de T ordenados de manera decreciente.

Por la Proposición 4 y el Corolario 8, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (40)$$

De esta manera, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$, es posible acotar cada valor propio de la siguiente manera:

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (41)$$

Al final de esta demostración se entregará una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que depende únicamente de ε y que satisface $f(i) > i$. Denotando por $f^{(k)}$ a la k -ésima composición de f con ella misma, consideramos una partición de $[n]$ en intervalos de la forma $[f^{(k-1)}(1), f^k(1)]$, para $k \in \{1, \dots, \frac{1}{\varepsilon^3}\}$. Con esta construcción, debe existir un natural $\ell = f^{(k-1)}(1)$ que cumple con

$$\sum_{\ell \leq j < f(\ell)} |\lambda_j|^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \quad (42)$$

De lo contrario, la suma de $|\lambda_j|^2$ sobre todos los intervalos definidos es estrictamente mayor que $\varepsilon^3 n^2$. Así, como son $\frac{1}{\varepsilon^3}$ intervalos, se contradice la desigualdad (40), pues

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 > \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \varepsilon^3 n^2 = n^2.$$

Ahora, usando el natural ℓ , separamos la matriz T en tres partes. En específico,

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Se interpretará T_1 como la componente *estructural*,

$$T_1 := \sum_{i < \ell} \lambda u_i u_i^T,$$

893 T_2 como la componente de *error*,

$$T_2 := \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T,$$

894

895 y T_3 como la componente *casi-aleatoria*,

$$T_3 := \sum_{i \geq f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T.$$

896

897 Pensamos cada vector propio de T como una función $u_i : [n] \rightarrow \mathbb{R}$. En otras palabras, todo
898 vector propio asigna un *peso* a cada vértice de G .

899 **Analizamos T_1 .** La idea es particionar el conjunto de vértices $[n]$ de manera tal que T_1 es
900 aproximadamente constante en la mayoría de las partes. Veremos que el número de partes será
901 $O_{\ell, \varepsilon}(1)$, es decir, un valor constante que depende solo de ℓ y ε .

902 Para cada $i \in [\ell - 1]$ ordenamos de manera creciente los vértices de G según la asignación de *pesos*
903 que otorga $u_i(\cdot)$. En primera instancia, se agrupa en un conjunto excepcional a aquellos vértices que
904 presenten un *peso* demasiado grande en magnitud. Dicho conjunto se define de la siguiente manera:

$$V_0^i := \left\{ k \in [n] : |u_i(k)| > \sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right\}.$$

905

906 Dado que $\|u_i\| = 1$, cada V_0^i no puede tener muchos elementos. En efecto, al observar que

$$|V_0^i| \left(\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right)^2 < \sum_{k=1}^n u_i(k)^2 = \|u_i\|^2 = 1,$$

907

908 es posible determinar que $|V_0^i| < \frac{\varepsilon}{\ell} n$.

909 Aquellos vértices que no están en V_0^i , serán agrupados particionando la recta de largo $2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}$
910 en subintervalos de tamaño a lo más $\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} \right) n^{-1/2}$. Esta configuración provoca gráficamente el
911 siguiente esquema para cada $u_i(\cdot)$.

912 * Poner dibujito... *

913 Por consecuencia, para $i \in [\ell - 1]$, la cantidad de partes que genera cada $u_i(\cdot)$ son a lo más

$$\frac{2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}}{\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2}} = \frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} = O_{\ell, \varepsilon}(1).$$

914

915 Para conseguir la partición deseada de $[n]$, por un lado, se toma la unión de todos los conjuntos
 916 excepcionales V_0^i para dar lugar al conjunto V_0 de tamaño a lo más $(\ell - 1) \cdot \frac{\varepsilon n}{\ell} < \varepsilon n$. Por otro lado,
 917 combine las particiones generadas por los $\ell - 1$ primeros vectores propios mediante un refinamiento
 918 usual. Así, se consigue una partición del conjunto de vértices de G de la forma $[n] = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$.
 919 Dada la construcción, la cantidad de partes que se obtienen son

$$M(\varepsilon) \leq \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^\ell \quad (43)$$

920

921 Ahora, intuitivamente, se mostrará que los valores de la matriz T_1 en cada bloque $V_i \times V_j$ son
 922 aproximadamente constante, i.e, no varían más que $o_\varepsilon(1)$. Para esto, como se hizo con los vectores
 923 propios, pensamos la matriz de adyacencia como una función $T : [n] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}$ para identificar sus
 924 entradas. De esta manera, para cada $i, j \in [M]$, $a, c \in V_i$, y $b, d \in V_j$,

$$\begin{aligned} |T_1(a, b) - T_1(c, d)| &= \left| \sum_{i < \ell} \lambda_i u_i(a) u_i(b) - \lambda_i u_i(c) u_i(d) \right| \\ &\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(a) u_i(b) - u_i(c) u_i(b) + u_i(c) u_i(b) - u_i(c) u_i(d)| \\ &\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(b)(u_i(a) - u_i(c)) + u_i(c)(u_i(b) - u_i(d))| \\ &\leq \sum_{i < \ell} n |u_i(b)| |u_i(a) - u_i(c)| + n |u_i(c)| |u_i(b) - u_i(d)| \\ &\leq \ell n \left(2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} + 2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} \right) \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

925

926 Luego, para $i, j \in [M]$, defina d_{ij} como el promedio de los valores del bloque $V_i \times V_j$ en T_1 y
 927 observe que se satisface

$$|T_1(a, b) - d_{ij}| \leq 4\varepsilon, \quad \forall a \in V_i, \forall b \in V_j.$$

928

929 En efecto, como d_{ij} es un promedio, deben existir los pares $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in V_i \times V_j$ tales
 930 que $T_1(x_0, y_0) \leq d_{ij}$ y $T_1(x_1, y_1) \geq d_{ij}$. Luego, si $|T_1(a, b) - d_{ij}| > 4\varepsilon$, entonces se encuentra una
 931 contradicción al determinar que $T_1(a, b) - T_1(x_0, y_0) > 4\varepsilon$, o bien $T_1(a, b) - T_1(x_1, y_1) < -4\varepsilon$.

932 Usando lo anterior y la desigualdad triangular, para todo $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$, obtenemos la
 933 siguiente cota.

$$\begin{aligned}
|v_A^T(T_1 - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n})v_B| &\leq \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} |T_1(a, b) - d_{ij}| \\
&\leq 4\varepsilon |A| |B| \\
&\leq 4\varepsilon |V_i| |V_j|.
\end{aligned} \tag{44}$$

934

935 **Analizamos T_2 .** Observe en primer lugar, por construcción,

$$\text{Tr}(T_2^2) = \sum_{\ell \leq j < f(\ell)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2.$$

936

937 Adicionalmente, por la ortonormalidad de la base,

$$\begin{aligned}
\sum_{a, b \in [n]} T_2(a, b)^2 &= \sum_{a, b \in [n]} \left(\sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i(a) u_i(b) \right)^2 \\
&= \sum_{a, b \in [n]} \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j u_i(a) u_j(a) u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j \sum_{a \in [n]} u_i(a) u_j(a) \sum_{b \in [n]} u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i^2 \|u_i\|^4 \\
&= \text{Tr}(T_2^2).
\end{aligned}$$

938

939 Entonces, dada la igualdad anterior, se determina que

$$\sum_{a, b \in [n]} T_2(a, b)^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \tag{45}$$

940

941 Ahora, defina el conjunto $\Theta_1 \subset [M]^2$ de manera tal que todo par $(i, j) \notin \Theta_1$ satisface

$$\sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a, b)^2 \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \tag{46}$$

942

943 Más aún, para los pares $(i, j) \in \Theta_1$, la desigualdad (45) en particular establece que

$$\varepsilon^3 n^2 \geq \sum_{(i, j) \in \Theta_1} \sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a, b)^2 > \varepsilon \sum_{(i, j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j|.$$

944

945 Por consecuencia,

$$\sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon^2 n^2. \quad (47)$$

946

947 De esta manera, para $(i,j) \notin \Theta_1$, $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$, utilizamos la desigualdad (46) y Cauchy-
 948 Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned} |v_A^T T_2 v_B|^2 &= \left| \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b) \right|^2 \\ &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \left(\sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b)^2 \right) |A| |B| \\ &\leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |A| |B| \\ &\leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2. \end{aligned}$$

949

950 Así, se obtiene la cota asociada a T_2 .

$$|v_A^T T_2 v_B| \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (48)$$

951

952 **Analizamos T_3 .** Note que el valor propio más grande en magnitud de T_3 es $\lambda_{f(\ell)}$. Entonces,
 953 utilizando el operador norma * Definir... * de la matriz T_3 y el Teorema 9,

$$\frac{\|T_3 v_B\|}{\|v_B\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|T_3 x\|}{\|x\|} = |\lambda_{f(\ell)}| \leq \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

954

955 Como resultado,

$$\|T_3 v_B\| \leq \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

956

957 Usando la desigualdad anterior junto a Cauchy-Schwarz se obtiene la siguiente cota para T_3 .

$$\begin{aligned}
|v_A^T T_3 v_B| &= |\langle v_A, T_3 v_B \rangle| \\
&\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|v_A\| \|T_3 v_B\| \\
&\leq \|v_A\| \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&= \sqrt{|A||B|} \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&\leq \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}.
\end{aligned} \tag{49}$$

958

959 Ya con el control de T_1 , T_2 y T_3 , nos enfocamos en estudiar G de manera global. Consideramos
960 $\Theta \subset \{0, 1, \dots, M\}^2$ definido de la siguiente manera:

$$\Theta := \left\{ (i, j) \in \{0, 1, \dots, M\}^2 : (i, j) \in \Theta_1 \vee i = 0 \vee j = 0 \vee \min\{|V_i|, |V_j|\} \leq \frac{\varepsilon n}{M} \right\}.$$

961

962 Con esta definici3n, la desigualdad (47), y recordando que $|V_0| < \varepsilon n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in \Theta} |V_i| |V_j| &= \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j| + \sum_{j=0}^M |V_0| |V_j| + \sum_{i=0}^M |V_i| |V_0| + \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i| |V_j| + \sum_{|V_j| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i| |V_j| \\
&\leq \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j| + 2|V_0|n + 2 \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i| n \\
&\leq \varepsilon^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + 2M \frac{\varepsilon}{M} n^2 \\
&\leq 5\varepsilon n^2.
\end{aligned}$$

963

964 Al ver la cota anterior, Θ se interpreta como un conjunto excepcional de pocos elementos que
965 contiene los malos casos. Ahora bien, si $(i, j) \notin \Theta$, todo $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$ satisfacen la desigualdad

$$\begin{aligned}
\left| e(A, B) - d_{ij} |A| |B| \right| &= \left| v_A^T (T - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n}) v_B \right| \\
&\leq \left| v_A^T (T_1 - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n}) v_B \right| + \left| v_A^T T_2 v_B \right| + \left| v_A^T T_3 v_B \right| \\
&\leq 4\varepsilon |V_i| |V_j| + \varepsilon |V_i| |V_j| + \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}.
\end{aligned} \tag{50}$$

966

967 Observando la desigualdad en (50), para $(i, j) \notin \Theta$, se necesita que $\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \varepsilon|V_i||V_j|$ para
 968 asegurar que la partición $\{V_0, V_1, \dots, V_M\}$ de $[n]$ es (6ε) -regular. Para esto, gracias a que $|V_i|, |V_j| \geq$
 969 $\frac{\varepsilon n}{M}$, se cumple la desigualdad $\frac{\varepsilon^2 n^2}{M^2} \leq |V_i||V_j|$, y por consecuencia

$$\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{M^2|V_i||V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{f(\ell)}}.$$

970

971 Finalmente, para obtener la partición (6ε) -regular del conjunto de vértices del grafo G , es sufi-
 972 ciente asumir que $\frac{1}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{\varepsilon^3}{M^2}$. Así, recordando la cota vista en (43), basta elegir

$$f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2x^2}{\varepsilon^2} \right)^{4x}.$$

973

□

974 5. Bibliografía

- 975 [1] Krivelevich, M., Sudakov, B. (2006). Pseudo-random Graphs. In Bolyai Society Mathema-
 976 tical Studies (pp. 199–262). Springer Berlin Heidelberg.
- 977 [2] Chung, F. R. K., Graham, R. L., Wilson, R. M. (1989). Quasi-random graphs. Combinato-
 978 rica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing.
- 979 [3] Chan, T. F. N., Král', D., Noel, J. A., Pehova, Y., Sharifzadeh, M., Volec, J. (2020). Charac-
 980 terization of quasirandom permutations by a pattern sum. Random Structures Algorithms.
- 981 [4] Hàn, H., Kiwi, M., Pavez-Signé, M. (2021). Quasi-random words and limits of word sequen-
 982 ces. Journal Europeen de Combinatoire [European Journal of Combinatorics].