



# Grafos cuasi-aleatorios y lema de regularidad de Szemerédi

Estudiante:  
Felipe Sánchez Erazo

Profesor Guía:

Dr. Hiệp Hàn

Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático de la Universidad de Santiago de Chile

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación  
Universidad de Santiago de Chile

# 1. Introducción

Para adentrarnos en esta historia, debemos de saber que las estructuras pseudo-aleatorias son objetos determinísticos que tienen comportamientos, o bien, lucen como un objeto aleatorio\* **objetos aleatorios?** \*. A lo largo de la historia, la formalización de este concepto se ha vuelto una herramienta muy útil en diferentes áreas, tales como teoría de números, teoría de grafos, combinatorial extremal, diseño de algoritmos, teoría de complejidad, entre otras. Estas contribuciones son debidas, en general, a que si un objeto es pseudo-aleatorio \* **cuasi-aleatorio en vez de pseudo-aleatorio** \*, entonces goza de muchas propiedades satisfacidas por su contraparte aleatoria.

El trabajo fundamental sobre la pseudo-aleatoriedad se ha desarrollado en grafos, probablemente por lo natural que muchas veces resulta modelar un problema utilizándolos. Un *grafo pseudo-aleatorio*  $G = (V, E)$  es un grafo que se comporta como un verdadero grafo aleatorio  $G = (|V|, p)$  con la misma densidad de aristas  $p = |E| / \binom{|V|}{2}$ . Si bien la sentencia anterior nos entrega una idea inicial de este concepto, no logra ser demasiado satisfactoria en el sentido de que no nos dice en qué aspecto el comportamiento del grafo pseudo-aleatorio es similar al un grafo aleatorio, y tampoco nos otorga ninguna medida cuantitativa de esta semejanza.

A mediados de los 80, Andrew Thomason introdujo la noción de "Grafos-revuelos", los cuales hacen posible medir en términos cuantitativos la similitud entre la distribución de aristas de los grafos pseudo-aleatorios y los aleatorios. Su investigación también nos otorgó ejemplos de grafos pseudo-aleatorios con discusiones de sus propiedades.

Sin duda alguna, una contribución clave fue la de Chung, Graham y Wilson, quienes en 1989 logran caracterizar la noción de pseudo-aleatoriedad de formas superficialmente distintas, pero equivalentes entre sí. Este resultado abrió muchos nuevos horizontes mostrando nuevas facetas de la pseudo-aleatoriedad.

Con estos avances, otros objetos combinatorios fueron incluidos al estudio de la pseudo-aleatoriedad, como lo son los subconjuntos de  $\mathbb{Z}_n$ , hipergrafos, grupos finitos, permutaciones, y recientemente las palabras (i.e, secuencias de letras de un alfabeto finito).

El objeto de estudio principal en este trabajo son las palabras pseudo-aleatoria, enfocándonos en una equivalencia en particular, análoga a las planteadas en el teorema de Chung, Graham y Wilson. Para evidenciar el objetivo, daremos un paseo por la teoría clásica en grafos de pseudo-aleatoriedad y culminaremos planteando la formulación del problema en cuestion.

## 2. Preliminares

### 2.1. Notaciones y convenciones

\* De momento, en esta sección solo voy a enumerar lo que voy necesitando o me voy acordando \*

1. Escribiremos  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ .
2. Para un conjunto cualquiera  $A$ , representamos su cardinalidad por  $|A|$ .
3. Denotamos al ciclo de largo  $k$  por  $C_k$ .
4.  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  corresponde a la matriz de  $n$  filas y  $m$  columnas definida sobre el cuerpo de los reales.
5.  $\mathbb{1}_X$  representa la función indicatriz. Es decir,

$$\mathbb{1}_X(y) = \begin{cases} 1 & \text{Si } y \in X \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

6.  $\mathbb{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  representa el vector de solo entradas 1.

7.  $e_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  corresponde a un vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , en donde todas sus entradas son cero salvo en la posición  $i$ , donde toma el valor 1.
8. Dado un grafo  $G = ([n], E)$  y un subconjunto de vértices  $X \subset [n]$ , se define

$$v_X = \sum_{i \in X} e_i.$$

9.  $\text{Tr}(A)$  representa la traza de la matriz cuadrada  $A$ . \* En esta sección debería poner la propiedad  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ? \* Esto sería para  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  y  $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n B_{ij} A_{ji} = \text{Tr}(BA).$$

10.  $A^T$  denota la matriz traspuesta de  $A$ .
- 11.

**Definición 1.** Diremos que  $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  es una **partición** del conjunto  $X$  si:

- a)  $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$ .
- b)  $X_i \cap X_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in [k]$ .

Cuando  $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_k| = |X_1| + 1$ , llamaremos a  $\mathcal{P}$  como una **equipartición**. En particular, cada parte posee  $\lceil |X|/k \rceil$  o  $\lfloor |X|/k \rfloor$  elementos.

12.  $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  denota la matriz identidad.

## 2.2. Nociones básicas

Un grafo es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  representa el conjunto de vértices (o *nodos*, o *puntos*), y  $E \subseteq V \times V$  el conjunto de aristas (o *líneas*). Dado un grafo  $G$ , se escribe  $V(G)$  como su conjunto de vértices,  $E(G)$  como su conjunto de aristas, y sus respectivas cardinalidades como  $\nu_G := |V(G)|$  y  $e_G := |E(G)|$ .

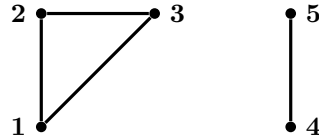


Figura 1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y conjunto de aristas  $E = \{12, 23, 13, 45\}$ .

Siendo  $u, v \in V(G)$  dos vértices del grafo  $G$ , se dirá que  $u$  y es **adyacente** con  $v$  (o viceversa) si y solamente si  $uv \in E(G)$ . Además, si  $e = uv \in E(G)$ , entonces se dice que los vértices  $u$  y  $v$  son **incidentes** a  $e$ . En algunas ocasiones el conjunto de vértices de un grafo será considerado ordenado, es decir,  $V(G) = [n]$  cuando el grafo  $G$  posea  $n$  vértices.

**Definición 2.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, y  $X, Y \subset V$  subconjuntos no necesariamente disjuntos de  $V$ . Se define

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\} \right|. \quad (1)$$

Cuando  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $e(X, Y)$  cuenta el número de aristas entre  $X$  e  $Y$ , y cuando  $X \cap Y \neq \emptyset$  realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en  $X \cap Y$ . Además, se define la **densidad de aristas** entre  $X$  e  $Y$  mediante

$$d(X, Y) := \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}. \quad (2)$$

En un grafo  $G$ , la **vecindad** de un vértice  $u \in V(G)$  se define como el conjunto de todos los vértices que est n conectados directamente con  $u$  por medio de una arista. Es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \quad (3)$$

Este concepto resulta relevante para trabajar y comprender las conexiones locales de un grafo. Con esto, se introducen conceptos relacionados con la medida de conectividad de cada vértice.

**Definición 3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, el **grado** de un vértice  $u \in V$  con respecto a algún conjunto de vértices  $Y \subseteq V$  está definido por

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv).$$

En particular, cuando  $Y = V$ ,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

Se define también el **cogrado** de un par de vértices  $u, v \in V$  mediante,

$$\text{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu) \mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

Es importante destacar que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será de utilidad en la sección 3.

**Proposición 1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo e  $Y \subset V$  un subconjunto de vértices, entonces

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v, v' \in Y \subseteq V} \text{codeg}(v, v').$$

*Demostración.* Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v, v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv) \mathbb{1}_E(uv') \\ &= \sum_{v, v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu) \mathbb{1}_E(v'u) \\ &= \sum_{v, v' \in Y} \text{codeg}(v, v'). \end{aligned}$$

□

Observe que en particular, cuando  $Y = V$ , se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u, v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (4)$$

Otra propiedad elemental que se utilizará a menudo, es la conexión entre la suma del grado de todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

**Proposición 2.** *Dado un grafo  $G = (V, E)$ , entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (5)$$

*Demostración.* Cada arista  $uv \in E$  será contada dos veces en la suma, una contribución por  $u$  y otra por  $v$ .  $\square$

A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en este documento. Diremos que un grafo  $G = (V, E)$  es **k-partito** si existe una partición de  $V$  en  $k$  subconjuntos disjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$  tales que  $uv \in E$  si y solamente si  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$ , con  $i \neq j$ . En particular, cuando un grafo es 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

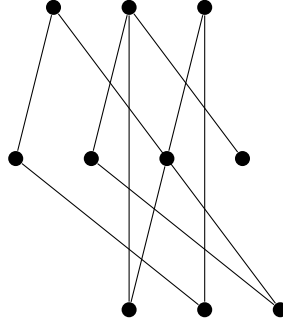


Figura 2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

Un **grafo completo** de  $n$  vértices, denotado por  $K_n$ , es un grafo en el cual todos sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta. Similarmente, se denota por  $K_{n,m}$  al **grafo bipartito completo** con  $n$  y  $m$  elementos en sus respectivos conjuntos de vértices. De esta manera, observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente  $e_{K_n} = \binom{n}{2}$  y  $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$ . Por otro lado, un grafo **d-regular** es aquel que presenta todos sus vértices con grado  $d$ .

Otro concepto relevante en este trabajo son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una secuencia de determinadas aristas de un grafo.

**Definición 4.** *Dado un grafo  $G$  con  $n \geq k$  vértices, se define*

- Una **caminata** es una secuencia de vértices no necesariamente distintos  $v_0, v_1, \dots, v_k$  tales que  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  para todo  $i \in [k]$ . Si  $v_0 = v_k$ , se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.
- Un **camino** es una caminata con todos los vértices  $v_i$  distintos.
- Un **ciclo** es un camino con  $k \geq 2$ , en el cual además  $v_0 v_k \in E(G)$ . En específico,  $v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$  es un ciclo. Se denota por  $C_k$  al ciclo de largo  $k$ .

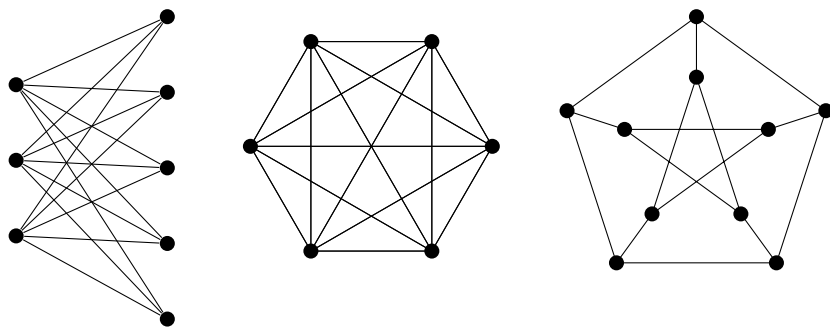


Figura 3: Ejemplos grafos  $K_{3,5}$ ,  $K_6$  y 3-regular.

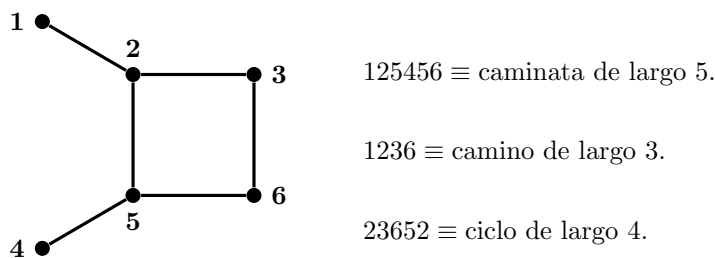


Figura 4: Ejemplo de caminata, camino y ciclo.

Ahora, con ideas de posteriormente estudiar propiedades estructurales de los grafos, se introduce el concepto de isomorfismo entre grafos. Este último establece una correspondencia biyectiva entre los conjunto de vértices de dos grafos que preserve las relaciones de adyacencia.

**Definición 5.** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos. Un **isomorfismo**  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  es una biyección desde  $V_1$  hasta  $V_2$  tal que  $uv \in E_1$  si y solamente si  $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$ . Diremos que  $G_1$  es isomorfo a  $G_2$  si existe un isomorfismo entre ellos.

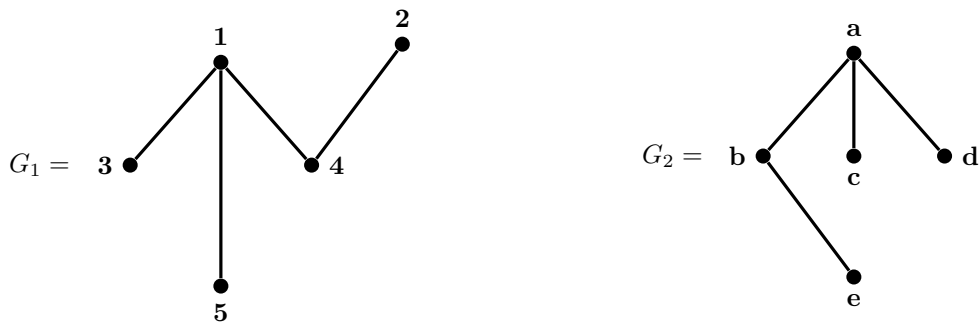


Figura 5: Ejemplo de grafos isomorfos mediante la función  $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  definida por  $\varphi(1) = a$ ,  $\varphi(2) = e$ ,  $\varphi(3) = c$ ,  $\varphi(4) = b$  y  $\varphi(5) = d$ .

Observe que un isomorfismo establece una relación de equivalencia entre grafos. Es decir,

- Todo grafo es isomorfo con él mismo (*reflexividad*).
- Si  $G_1$  es isomorfo a  $G_2$ , entonces  $G_2$  es isomorfo con  $G_1$  (*simetría*).
- Si  $G_1$  es isomorfo a  $G_2$  y  $G_2$  es isomorfo a  $G_3$ , entonces  $G_1$  es isomorfo con  $G_3$  (*transitividad*).

Dado dos grafos  $H$  y  $G$ , diremos que  $H$  es **subgrafo** de  $G$  si se puede obtener  $H$  a partir de  $G$  únicamente eliminando algunos vértices y aristas. Formalmente,  $H$  es subgrafo de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Por último, es necesario comprender los diferentes puntos de vista que se pueden adoptar en la noción de una *copia* de un grafo.

**Definición 6.** Sean  $H$  y  $G$  grafos,

- Una **copia** de  $H$  en  $G$  es un subgrafo de  $G$  isomorfo a  $H$ .
- Una **copia etiquetada** de  $H$  en  $G$  es una aplicación inyectiva  $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$  tal que  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$  cada vez que  $uv \in E(H)$ .
- Una **copia inducida** de  $H$  en  $G$  es una aplicación inyectiva  $\varphi : V(H) \rightarrow V(G)$  tal que  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$  si y solamente si  $uv \in E(H)$ .

Para reforzar el concepto recién visto, si un grafo posee  $\ell$  copias de  $K_3$ , entonces el grafo cuenta con  $6\ell$  copias etiquetadas de  $K_3$ . En lo que concierne a este trabajo, se estudiarán propiedades relacionadas con la cantidad de copias etiquetadas de algún grafo determinado. Por esto, denotamos por  $\binom{G}{H}$  al conjunto de copias etiquetadas de  $H$  en  $G$ .

### 2.3. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Muchas veces, en la teoría de grafos extremal y en combinatoria, la desigualdad de Cauchy-Schwarz juega un papel fundamental en la prueba de algunos resultados.

**Proposición 3.** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sean  $a, b \in \mathbb{R}^k$ , entonces se satisface

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2.$$

En lo que respecta a este trabajo, la desigualdad de Cauchy-Schwarz será utilizada como alguna de las siguientes variantes. Por un lado, si uno de los vectores se identifica con el vector constante  $b_i = 1$  para todo  $i \in [k]$ , entonces

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (6)$$

Por otro lado, para los reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$  y  $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$ , consideramos  $a_i = \sqrt{\alpha_i}$  y  $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$  para obtener

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^k \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (7)$$

Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, asignando 1 para las conexiones de vértices y 0 en la ausencia de aristas. Bajo esta representación se consigue una visión clara y eficiente de las relaciones de un grafo, y se goza de las propiedades que nos ofrece el álgebra lineal.

**Definición 7.** Dado un grafo  $G$  sobre  $n$  vértices, se define su **matriz de adyacencia**  $A_G \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  de la siguiente manera,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por  $A$ .

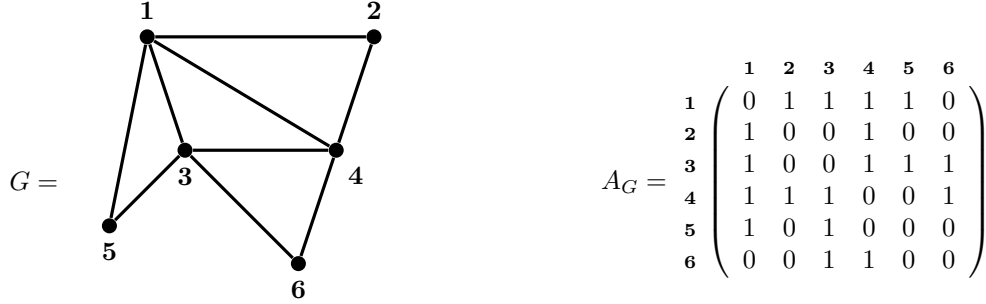


Figura 6: Ejemplo de representación mediante la matriz de adyacencia de un grafo.

Observe que la representación anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir,  $A_G^T = A_G$ . Además, en todo grafo  $G = ([n], E)$ , cuya matriz de adyacencia es  $A$ , se puede obtener un vector con los grados de cada vértice del grafo aplicando el operador  $A$  al vector de 1-entradas  $\mathbb{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ . Es decir,

$$A\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Un aspecto interesante de ésta, es que nos permite reescribir la definición 2 en función de ella. Para ver esto, consideramos la matriz de adyacencia  $A$  del grafo  $G = ([n], E)$ , y los vértices  $i, j \in [n]$ . Luego, por la construcción de  $A$ ,

$$e(\{i\}, \{j\}) = e_i^T A e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto  $X, Y \subset [n]$ .

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} e_i^T A e_j = v_X^T A v_Y. \quad (9)$$

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición  $ij$  de la  $t$ -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo  $k$  entre los vértices  $i$  y  $j$ .

**Proposición 4.** Sea  $A$  la matriz de adyacencia de grafo  $G = ([n], E)$ . La  $(i, j)$ -ésima entrada  $a_{ij}^{(t)}$  de  $A^t$ , cuenta la cantidad de caminatas de largo  $t$  que comienzan y terminan en los vértices  $i$  y  $j$  respectivamente.



*Demostración.* Cuando  $t = 1$ , existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices  $i$  y  $j$  si y solamente si  $a_{ij}^{(1)} = 1$ . Ahora, asuma que el lema se cumple para algún  $t > 1$  fijo. Note que cualquier caminata de largo  $t + 1$  entre  $i$  y  $j$  contiene una caminata de largo  $t$  desde  $i$  hasta un vecino de  $j$ , digamos  $k$ . Entonces si  $k \in N(j)$ , por la asunción del lema, el número de caminatas de largo  $t$  entre  $i$  y  $k$  es  $a_{ik}^{(t)}$ . Por lo tanto, el número total de caminatas de largo  $t + 1$  desde  $i$  hasta  $j$  es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo  $G = ([n], E)$  con matriz de adyacencia  $A$ , se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo  $t$  en el grafo por medio de la traza,  $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$ . Con esto, note que  $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$ .

Por otro lado, recuerde que  $v \in \mathbb{R}^n$  es un vector propio de alguna matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  con valor propio  $\lambda \in \mathbb{R}$  si  $Av = \lambda v$ . Esto significa que  $\lambda$  es un valor propio si y solo si  $\lambda I_n - A$  es una matriz singular. Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico  $\det(xI_n - A)$ . En este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo  $G$ , siempre será con respecto a su matriz de adyacencia  $A$ .

Por ejemplo, si  $G$  es un grafo  $d$ -regular, entonces con la igualdad (8) se puede deducir que  $d$  es el valor propio asociado al vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia  $A_G$ .

**Proposición 5.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios definen una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Se comienza probando que los valores propios de  $A$  son reales. Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  y  $x \neq 0$  su correspondiente vector propio, satisfaciendo  $Ax = \lambda x$ . Tomando su conjugado, se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ll} Ax = \lambda x & A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \bar{x}^T Ax = \lambda \|x\|^2 & x^T A\bar{x} = \bar{\lambda} \|x\|^2. \end{array}$$

Además, como  $A$  es simétrica,

$$\bar{x}^T Ax = (Ax)^T \bar{x} = x^T A\bar{x}.$$

Así, ya que  $x \neq 0$ , debe ocurrir que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , permitiendo concluir que todos los valores propios de  $A$  son números reales.

Por otro lado, considere  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vectores propios distintos de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\begin{aligned} \lambda \langle u, v \rangle &= \langle \lambda u, v \rangle \\ &= \langle Au, v \rangle \\ &= \langle u, A^T v \rangle \\ &= \langle u, Av \rangle \\ &= \langle u, \mu v \rangle \\ &= \mu \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

De esta manera,  $\lambda\langle u, v \rangle = \mu\langle u, v \rangle$  si y solamente si  $\langle u, v \rangle = 0$ . Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de  $A$ , defina  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  como el conjunto de vectores propios normalizados de  $A$  para probar que  $\mathcal{B}$  constituye una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Para esto, sean  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$  tales que

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0.$$

Entonces, para algún  $i \in [n]$ , multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por  $u_i^T$ ,

$$u_i^T (c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = c_i v_i^T v_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . □

A continuación se enunciará sin demostración uno de los teoremas más relevantes del álgebra lineal, el *teorema espectral*. Con él, podremos representar una matriz de adyacencia por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral. También, se estudiará la estrecha relación que posee la traza de la matriz de adyacencia de un grafo con sus valores propios.

**Teorema 1.** (*Teorema espectral*) Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz real simétrica. Entonces existen matrices  $P$  ortogonal y  $D$  diagonal tales que

$$A = P D P^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T. \quad (10)$$

En donde la matriz diagonal  $D$  está compuesta por los valores propios  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  de  $A$ , y las columnas de  $P$  son los vectores propios normalizados  $v_i \in \mathbb{R}^n$  de  $A$ .

De cara a la cantidad de caminatas entre dos vértices de un grafo, la descomposición espectral (10) nos permite trabajar eficientemente con las potencias de su respectiva matriz de adyacencia, puesto a que el problema se reduce a calcular la potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, observe en primera instancia,

$$\begin{aligned} A^2 &= (P D P^T)(P D P^T) \\ &= P D (P^T P) D P^T \\ &= P D^2 P^T. \end{aligned}$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que  $A^k = P D^k P^T$ . Adicionalmente, se expone la relación que guarda la traza de una matriz real simétrica con sus valores propios.

**Proposición 6.** La traza de toda matriz simétrica  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es igual a la suma de sus autovalores.

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n e_i^T A e_i.$$

Así, se concluye utilizando la descomposición espectral,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n e_i^T \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j v_j^T \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i^T v_j v_j^T e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_i, v_j \rangle \langle v_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|v_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j.
\end{aligned}$$

□

Es posible extender este resultado sobre cualquier potencia de la matriz real simétrica.

**Corolario 1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sus autovalores, entonces se cumple  $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ .

*Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es invariante bajo orden del producto,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A^k) &= \text{Tr}([PDP^T]^k) \\
&= \text{Tr}(P[D^k P^T]) \\
&= \text{Tr}([D^k P^T]P) \\
&= \text{Tr}(D^k) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.
\end{aligned}$$

□

Con este hecho, obtener la cantidad de caminatas cerradas de largo  $k$  entre dos vértices de un grafo se reduce únicamente a calcular la suma de la  $k$ -ésima potencia de todos sus valores propios. Dichos valores propios pueden ser caracterizados explícitamente por medio del *teorema de Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

**Teorema 2.** (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz real simétrica, cuyos valores propios son  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , y  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  sus vectores propios que forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{x \perp \{v_1, \dots, v_{k-1}\} \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{x \perp \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Usualmente el primer autovalor de todo grafo juega un papel protagónico en algunas de sus propiedades. Para los fines de este trabajo, es necesario establecer una cota inferior del primer autovalor.

**Proposición 7.** *El primer autovalor de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es  $d$ -regular, el primer autovalor coincide con  $d$ .*

*Demostración.* Considerando  $A$  como la matriz de adyacencia del grafo  $G = ([n], E)$ , se desarrolla en función del Teorema 2,

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \frac{\langle \mathbb{1}, A\mathbb{1} \rangle}{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n}.$$

\* Me queda un poquito de dudas para agregar la parte del grafo  $d$ -regular, de hecho, creo que solo lo necesito para el expander mixing lemma y aún no sé como hilar CGW con EML. \*  $\square$

### 3. Teorema de Chung, Graham y Wilson

#### 3.1. Grafos aleatorios

El objetivo de esta subsección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *casi-aleatorios*. Para esto, se asumirán los conceptos asociados a la teoría de la probabilidad.

En primera instancia se puede pensar en un *grafo aleatorio* sobre  $n$  vértices como la selección de un subconjunto de  $E(K_n)$  de manera aleatoria. El cómo se selecciona dicho subconjunto determina el tipo de modelo de grafo aleatorio. Existen dos tipos de modelos clásicos; *modelo uniforme*  $G(n, m)$  propuesto por Paul Erdős y Alfréd Rényi \* referencia \* y el *modelo binomial*  $G(n, p)$ , propuesto por Gilbert \* referencia \*. Veremos que ambos modelos representan un espacio de probabilidad.

En el modelo uniforme  $G(n, m)$ , cada posible grafo sobre  $n$  vértices y  $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$  aristas es elegido aleatoriamente con la misma probabilidad. Observe que cada grafo en  $G(n, m)$  corresponde a la selección de  $m$  aristas de las  $\binom{n}{2}$  que hay en  $K_n$ , por lo que existen  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$  grafos con  $n$  vértices y  $m$  aristas.

**Definición 8.** (*Modelo uniforme*) Sea  $G_n^m$  el conjunto de todos los grafos sobre  $n$  vértices enumerados y  $m$  aristas. Se define  $G(n, m)$  como el espacio de probabilidad  $(G_n^m, \mathcal{P}(G_n^m), \mathbb{P})$ , con

$$\mathbb{P}(G(n, m) = G) = \left( \binom{\binom{n}{2}}{m} \right)^{-1}, \quad \forall G \in G_n^m.$$

Si bien el modelo anterior resulta bastante intuitivo, eventualmente puede traer dificultades para realizar determinados cálculos debido a que la elección de las aristas no son independientes unas de otras. El problema es solventado con el modelo de grafo aleatorio binomial, cual considera una elección de aristas independientes unas de otras.

**Definición 9.** (*Modelo binomial*) Sea  $G^n$  el conjunto de todos los grafos sobre  $n$  vértices enumerados, y  $p \in (0, 1)$ <sup>1</sup>. Se define  $G(n, p)$  como el espacio de probabilidad  $(G^n, \mathcal{P}(G^n), \mathbb{P})$ , con

$$\mathbb{P}(G(n, p) = G) = p^{e_G} (1 - p)^{\binom{n}{2} - e_G}, \quad \forall G \in G(n, p).$$

En esta tesis adoptaremos el **modelo binomial** como referencia para trabajar más adelante con el concepto de un grafo *casi-aleatorio*. Una de las características más importantes de este modelo es que podemos conocer la distribución de aristas que existen en cada subconjunto de vértices.

**Proposición 8.** Sea  $p \in (0, 1)$ ,  $G \in G(n, p)$  y  $U \subset V(G)$ . Entonces la cantidad de aristas esperadas en  $U$  es  $p \binom{|U|}{2}$ .

*Demostración.* Enumere las aristas del grafo completo  $K_{|U|}$  desde 1 hasta  $\binom{|U|}{2}$  y, para cada arista  $1 \leq i \leq \binom{|U|}{2}$ , considere  $X_i$  como la siguiente variable aleatoria indicadora:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E(G) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Así, la variable aleatoria  $X = \sum_{i=1}^{\binom{|U|}{2}} X_i$  cuenta el número total de aristas que existen en  $U$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{\binom{|U|}{2}} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\binom{|U|}{2}} \mathbb{P}(X_i = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\binom{|U|}{2}} p \\ &= p \binom{|U|}{2}. \end{aligned}$$

□

### 3.2. Enunciado y demostración

Ya familiarizados con la noción de un grafo aleatorio, intuitivamente, diremos que un grafo casi-aleatorio es aquel que luce como uno verdaderamente aleatorio dentro de un marco determinístico. En otras palabras, es casi-aleatorio si asintóticamente satisface las propiedades que posee un grafo aleatorio casi seguramente. Formalmente:

**Definición 10.** Sea  $p \in (0, 1)$  y  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  una secuencia de grafos, en donde cada  $G_n$  posee  $n$  vértices. Entonces el grafo  $G_n$  es **casi-aleatorio** si en todo subconjunto  $X \subset V(G_n)$  se encuentra una distribución de aristas similar, i.e.,

$$\left| e(X) - p \binom{|X|}{2} \right| = o(n^2), \quad \forall X \in V(G).$$

---

<sup>1</sup> $p$  podría depender de  $n$ ,  $p = p(n)$ .

La definición anterior está basada en el modelo binomial según la distribución de aristas que se pueden encontrar en cualquier subconjunto de vértices del grafo. Más adelante, en 1989, Chung, Graham y Wilson [\\* referencia \\*](#) muestran que existen diversas maneras equivalentes de caracterizar la noción de un grafo casi-aleatorio desde diferentes perspectivas.

**Teorema 3.** (Chung, Graham y Wilson) Sea  $p \in (0, 1)$  fijo. Para cualquier secuencia de grafos  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  sobre  $|V(G_n)| = n$  vértices y  $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$  aristas, las siguientes propiedades son equivalentes:

$\text{DISC}_p$ : Para todo  $X, Y \subseteq V(G_n)$ ,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

$\text{DISC}'_p$ : Para todo  $X \subseteq V(G_n)$ ,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2), \quad \forall X \subseteq V(G_n).$$

$\text{COUNT}_p$ : Para cada grafo  $H$ , la cantidad de copias etiquetadas de  $H$  en  $G_n$  está dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = (p^{e(H)} + o(1)) n^{v(H)}.$$

$\text{COUNT}_{C_4, p}$ : La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de orden 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

$\text{CODEG}_p$ :

$$\sum_{u, v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

$\text{EIG}_p$ : Si  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  son los autovalores de la matriz de adyacencia de  $G_n$ , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n), \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

Para una comprensión preliminar, el Teorema 3 fue enunciado utilizando notación asintótica. Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores entre cada una de las propiedades. Entonces, se replantea equivalentemente cada propiedad con una versión cuantitativa asociando algún parámetro de error  $\varepsilon$  para todo grafo  $G$  con un conjunto de vértices suficientemente grande.

Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 3, asuma que la sucesión de grafos  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  satisface  $\text{DISC}_p$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : \quad e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

De manera general, diremos que una secuencia de grafos  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  con  $|V(G_n)| = n$  satisface la propiedad  $P_{x_1, \dots, x_k}$ <sup>2</sup> si para cada elección de  $\varepsilon > 0$ , existe algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que el grafo  $G$  con  $n \geq n_0$  vértices satisface  $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ . Más aún, se dirá que la propiedad  $Q_{y_1, \dots, y_\ell}$  implica la propiedad  $P_{x_1, \dots, x_k}$  si y solamente si  $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$  implica  $Q_{y_1, \dots, y_\ell}$ . Es decir, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  con  $n \geq n_0$  vértices cumple con  $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$  cada vez que satisfaga la propiedad  $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ .

Se desarrollará la demostración formal del teorema de Chung, Graham y Wilson utilizando notación  $\varepsilon$ - $\delta$ , mostrando que cada par de propiedades  $P_{x_1, \dots, x_k}$  y  $Q_{y_1, \dots, y_\ell}$  son equivalentes entre sí con un cambio polinomial en el error. Esto es,  $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$  para algún par de constantes  $C, c > 0$ .

## Demostración Teorema 2 (Chung, Graham y Wilson).

La demostración de este teorema será descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 11.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 12.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xLeftrightarrow{\text{Prop. 15. y 16.}} & \text{EIG}_p \\
 \Downarrow \text{Prop. 9 y 10.} & & & & \Downarrow \text{Prop. 13.} & & \\
 \text{DISC}_p & & \xLeftrightarrow{\text{Prop. 14.}} & & \text{CODEG}_p. & & 
 \end{array} \tag{11}$$

Así, damos paso a las pruebas de cada proposición.

**Proposición 9.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices satisface  $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{DISC}_p(\delta)$ . En particular,*

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Considere el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices que satisface  $\text{DISC}_p(\delta)$  y  $X \subset V(G)$ , entonces utilizamos la propiedad  $\text{DISC}_p(\delta)$  para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

Las igualdades anteriores consideran  $e(X, X) = 2e(X)$ , por definición, y la aproximación  $\binom{|X|}{2} = \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$ .  $\square$

**Proposición 10.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices satisface  $\text{DISC}_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{DISC}'_p(\delta)$ . En particular,*

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

---

<sup>2</sup>Los parámetros  $x_1, \dots, x_k$  pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 3 se utiliza  $k = 1$  con  $x_1 = p$  salvo en la propiedad  $\text{COUNT}_{C4,p}$ , en donde  $k = 2$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Consideramos el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices que satisface  $\text{DISC}'_p(\delta)$ .

En primera instancia, llevaremos el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de vértices, a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran en un subconjunto único de vértices. Es decir, para  $X, Y \subset V(G)$ ,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (12)$$

Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre  $X$  e  $Y$  es doble cuando los vértices que componen las aristas pertenecen a  $X \cap Y$ . Luego, utilizamos la propiedad  $\text{DISC}'_p(\delta)$  sobre la identidad (12) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left( \binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

□

**Proposición 11.** Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices satisface  $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{DISC}'_p(\delta)$ . En otras palabras,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in (0, 1)$  y  $H$  un grafo sobre  $\ell$  vértices, elegimos  $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Considere también el grafo  $G = (V, E)$  con  $n \geq n_0$  vértices que satisface la propiedad  $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ .

Dado cualquier grafo  $F$  con  $\ell$  vértices y  $e_F \geq 1$  aristas, razonamos por inducción sobre su cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (13)$$

Una vez probada la ecuación (13), el resultado seguirá de tomar  $F = H$  y la elección de  $\delta$  para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4 \binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left( \frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Cuando  $e_F = 1$ ,  $\left| \binom{G}{F} \right|$  es el número de pares ordenados de vértices de  $G$  que forman una arista junto a cualquier combinación de  $\ell - 2$  vértices para completar una copia de  $F$ . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

Luego, si aplicamos la propiedad  $\text{DISC}'_p(\delta)$  sobre  $V$ , tendremos que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$



Así, con  $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$ , se prueba el caso inicial de la inducción.

Ahora, sea  $F$  un grafo con  $e_F > 1$  aristas y asumiremos que se satisface la ecuación (13) sobre cualquier grafo con una cantidad de aristas menor que  $e_F$ . Entonces, para desarrollar la inducción, vamos a considerar la siguiente notación:

- i)  $F^- := ([\ell], E(F) \setminus \{ij\})$ , es el grafo producido por eliminar la arista  $ij$  de  $F$ .
- ii)  $F^* := F[[\ell] \setminus \{i, j\}]$ , es el grafo inducido por  $[\ell] \setminus \{i, j\}$ , i.e, grafo producido de eliminar los vértices de  $ij$  en  $F$ .

Sea  $T^-$  una copia etiquetada de  $F^-$  en  $G$ , es decir,  $T^-$  se corresponde con una aplicación inyectiva  $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$  tal que  $f(u)f(v) \in E(T^-)$  cada vez que  $uv \in E(F^-)$ . De esta manera, se define  $e_{T^-}$  como la tupla  $(f(i), f(j))$  resultante de la imagen de los vértices  $i, j \in V(F^-)$ .

Se escribe la cantidad de copias etiquetadas de  $F$  en  $G$  de manera conveniente y se utilizará la hipótesis de inducción como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left| \binom{G}{F} \right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p \left| \binom{G}{F^-} \right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ahora, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad (14) es pequeño. Para esto, considere  $T^*$  una copia de  $F^*$ , y denote por  $F_i^*$  y  $F_j^*$  a los grafos resultantes de eliminar de  $F^-$  los vértices  $j$  e  $i$  respectivamente. Definan los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}$$

Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla  $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$  añadida a  $T^*$  se obtiene una copia de  $F^-$ . Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad (14) convenientemente y utilizando la propiedad  $\text{DISC}'_p(\delta)$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p |A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando la elección de  $\delta$  y  $F = H$  se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 12.** Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices satisface  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{COUNT}_p(\delta)$ . En otras palabras,

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

*Demostración.* Se trata de un caso particular de  $\text{COUNT}_p$ , en donde  $H = C_4$  y  $\delta < \varepsilon$ .  $\square$

**Proposición 13.** Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas satisface  $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$ . En particular,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , elegimos  $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. También considere el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas que satisface  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$ .

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para  $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$  y  $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$ , y la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Entonces, por un lado, utilizando la relación entre el grado y el cogrado visto en (4),

$$\begin{aligned}
\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\
&\stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{1}{n} \left( \sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\
&= \frac{4e_G^2}{n} \\
&\geq \frac{4}{n} \left( \frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\
&\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando  $\text{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$ ,

$$\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{CS}}{\leq} n \left( \sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u,v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\ &= n \left( \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\ &\leq n (p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n (4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4)^{1/2} \\ &= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\ &\leq 4\delta^{1/2} n^3. \end{aligned}$$

□

**Proposición 14.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0,1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas satisface  $\text{DISC}_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{CODEG}_p(\delta)$ . En particular,*

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in (0,1)$ , seleccionamos  $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Sea  $G$  un grafo de  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas que satisface la propiedad  $\text{CODEG}_p(\delta)$ .

En primera instancia note que la propiedad  $\text{CODEG}_p(\delta)$  induce una concentración en los grados de los vértices de  $G$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{CS}}{\leq} n^{1/2} \left( \sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left( \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(4)}{=} n^{1/2} \left( \left( \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left( \left( \sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left( \delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\ &< 3\delta^{1/2} n^2. \end{aligned}$$

Luego, para todo  $X, Y \in V(G)$ , se reescribe la expresión de la propiedad  $\text{DISC}_p$  de forma conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \stackrel{c-s}{\leq} n^{1/2} \left( \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (15)$$

En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo, lo que permite extender su dominio de  $X$  a  $V(G)$ . De esta manera, usando a la cota proveniente de la concentración de los grados en los vértices de  $G$ , se prueba el resultado continuando desde (15):

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &\leq n^{1/2} \left( \sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left( \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left( 2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y) \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left( \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left( \left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left( \sum_{u, v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2n \right| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left( \delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3 \right)^{1/2} \\ &< 3\delta^{1/4}n^2. \end{aligned}$$

□

**Proposición 15.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas satisface  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$  cada vez que cumpla con  $\text{EIG}_p(\delta)$ . En particular,*

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , se elige  $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Consideramos el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas que satisface la propiedad  $\text{EIG}_p(\delta)$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  como la matriz de adyacencia de  $G$ , y  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  los valores propios de  $A$ .

Observe que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4 que no son  $C_4$  en  $G$  se encuentran dentro de un error de a lo más  $\delta n^4$  con respecto al número de copias etiquetadas de  $C_4$  en  $G$ . De esta observación, utilizando el Lema 4 y el Corolario 1,

$$\begin{aligned}
\left| \binom{G}{C_4} \right| &= \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \\
&= \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4.
\end{aligned} \tag{16}$$

Luego, recordando que  $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$ , y usando  $\text{EIG}_p(\delta)$ ,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \tag{17}$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad  $\text{EIG}_p(\delta)$  sobre el primer autovalor y la cota mostrada en (17). Continuando desde la ecuación (16),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

**Proposición 16.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que el grafo  $G$  sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas satisface  $\text{EIG}_p(\varepsilon)$  cada vez que cumpla la propiedad  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$ . Es decir,*

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  y  $p \in (0, 1)$ , escogemos  $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Sea también  $G$  un grafo sobre  $n \geq n_0$  vértices y  $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$  aristas que satisface la propiedad  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  la matriz de adyacencia de  $G$ , y  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  los valores propios de  $A$ .

En lo que respecta al primer autovalor, sabemos por un lado que éste es al menos el promedio de los grados gracias al Lema 7. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left( \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \tag{18}$$

Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 1 y la propiedad  $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$ ,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4. \tag{19}$$

La desigualdad (19) implica que  $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$ , y en combinación con la cota vista en (18), se obtiene que  $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$ .

Por último, observe por las cotas vistas anteriormente,

$$\begin{aligned}
\max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\
&= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\
&\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\
&= 4\delta n^4.
\end{aligned}$$

De esta manera, se logra probar el resultado determinando que  $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4} n$ .  $\square$

### 3.3. Aspectos adicionales

La noción inicial de un grafo casi-aleatorio por distribución de aristas presentada en la Definición 10 contempla verificar si todos los subconjuntos de vértices del grafo satisfacen su condición para determinar la casi-aleatoriedad de un grafo. Es decir, se debe corroborar sobre  $2^{|X|}$  subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que la propiedad, aparentemente más débil,  $\text{COUNT}_{C_4,p}$  sea una caracterización equivalente a todas las condiciones de casi-aleatoriedad que establece el teorema, puesto a que se verifica de manera polinomial. \* En verdad las otras también, pero siento que quizás le deba dar más énfasis a C4. Modifico el párrafo anterior?? \*

Una pregunta natural al observar la propiedad  $\text{COUNT}_{C_4,p}$  es: ¿Podemos debilitar la condición para un conteo esperado de copias etiquetadas de  $K_3$ ? La respuesta es no, de hecho, la propiedad puede ser extendida a  $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$  con  $t \geq 2$ . Es decir, para el grafo  $G$ ,

$$\text{COUNT}_{C_{2t},p} : \left| \binom{G}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

Se expone un bosquejo de la demostración de la extensión de  $\text{COUNT}_{C_4,p}$  a la propiedad  $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ .

**Proposición 17.** Sea  $p \in (0,1)$  y  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  una secuencia de grafos con  $|V(G_n)| = n$  vértices y  $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$  aristas, entonces las propiedades  $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$  y  $\text{EIG}_p$  son equivalentes.

*Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición 15 y 16 tras notar el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo  $2t$  que no son  $C_{2t}$  en  $G_n$  están dentro de un error  $O(n^{2t-1})$ , es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (17) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

Con estas observaciones el resultado queda demostrado.  $\square$

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de orden par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los autovalores de  $G$ , eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

A continuación, se expone la construcción de un contraejemplo de un grafo que posea la cantidad de copias etiquetadas esperadas de  $K_3$ , pero no cumple las condiciones para ser casi-aleatorio. La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que la esperada de copias etiquetadas de  $K_3$ , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces independientemente los grafos completos  $K_{n_1}$  y  $K_{n_2, n_2}$  tales que su unión disjunta forma el grafo  $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$  con  $n_1 + 2n_2 = n$  vértices.

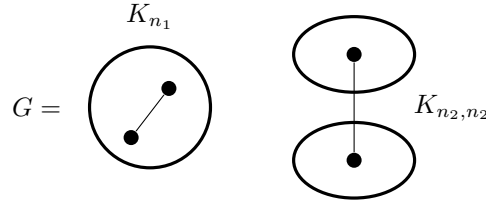


Figura 7: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo. Aquí,  $\bullet\text{---}\bullet$  representa las aristas permitidas dentro del grafo  $G$ .

Sobre  $K_{n_1}$  y  $K_{n_2, n_2}$ , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de  $K_3$  son:

$$\begin{aligned} e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} & , & \quad \left| \binom{K_{n_1}}{K_3} \right| \approx n_1^3 \quad , \\ e_{K_{n_2, n_2}} &\approx \frac{(n - n_1)^2}{4} & , & \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{K_3} \right| = 0. \end{aligned}$$

Ahora, se encontrará el parámetro  $p \in (0, 1)$  de manera tal que el grafo  $G$  posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de  $K_3$ , acorde a un grafo aleatorio binomial con densidad  $p$ . Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n - n_1)^2}{4} \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que  $p = \frac{1}{3}$  y  $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$ . Dicha configuración, en efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

Como también,

$$\left| \binom{G}{K_3} \right| = \left( \frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left( \frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

Sin embargo, el grafo  $G$  no es casi-aleatorio debido a que no existen aristas entre  $K_{n_1}$  y  $K_{n_2, n_2}$  ni dentro de los conjuntos que conforman a  $K_{n_2, n_2}$ .

Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo  $d$ -regular. En nuestro contexto, se verá que toda secuencia  $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$  de grafos  $d$ -regular satisface la propiedad  $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$  si y solo si cumple con  $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ . Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

**Teorema 4.** (*Expander Mixing Lemma*) Sea  $G = ([n], E)$  un grafo  $d$ -regular, y  $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  los valores propios asociados a la matriz de adyacencia  $A$  de  $G$ . Se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

Entonces, para cada  $X, Y \subset [n]$ ,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}. \quad (20)$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  la base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  compuesta por los vectores propios de  $A$ . Utilizando la descomposición espectral, se denota

$$A_1 = \lambda_1 v_1 v_1^T \quad \text{y} \quad \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

de manera que  $A = A_1 + \Delta$ .

Coforme a la ecuación (9), para todo  $X, Y \subset [n]$ , se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = v_X^T A v_Y = v_X^T A_1 v_Y + v_X^T \Delta v_Y. \quad (21)$$

De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que el segundo el factor de error. Para esto, se representan los vectores  $v_X$  y  $v_Y$  según la base  $\mathcal{B}$ . Es decir,

$$v_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{y} \quad v_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i,$$

donde  $\alpha_i = v_X^T v_i$  y  $\beta_i = v_Y^T v_i$ . Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned} \|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_X, v_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j \in X} \mathbb{1}_j, v_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbb{1}_j, v_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= |X|. \end{aligned}$$

Análogamente,  $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$ .

Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (21) por separado. Por un lado,



$$\begin{aligned}
v_X^T A_1 v_Y &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T (\lambda_1 v_1 v_1^T) \left( \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^T \right) (v_1 v_1^T) \left( \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (v_i^T v_1) (v_1^T v_j) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$v_X^T \Delta v_Y = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T \left( \sum_{j=2}^n \lambda_j v_j v_j^T \right) \left( \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{23}$$

Luego, dado que  $G$  es un grafo  $d$ -regular,  $\lambda_1 = d$  y  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$  son valor y vector propio respectivamente de  $A$ . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

Así, la ecuación (22) resulta en  $v_X^T A_1 v_Y = \frac{d}{n} |X| |Y|$ .

Para el término de error, recordando la definición de  $\lambda$ , se desarrolla el valor absoluto de la ecuación (23) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
|v_X^T \Delta v_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\
&\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\
&\stackrel{\text{CS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2) (\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2)} \\
&= \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (21) de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - v_X^T A_1 v_Y| = |v_X^T \Delta v_Y|.$$

□

El teorema anterior permite asegurar que todo grafo  $d$ -regular  $G = ([n], E)$  con un conjunto de vértices suficientemente grande que satisface la propiedad  $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$ , también cumple con  $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$ . En efecto, para todo  $\varepsilon > 0$  y  $X, Y \subset [n]$ , elija  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande y  $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$ . Entonces, si  $G$  satisface la propiedad  $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$ , por el Teorema 4:

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\ &< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\ &< \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

Finalmente, en un grafo  $d$ -regular, la equivalencia entre las propiedades  $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$  y  $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$  se completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (11).

## 4. Lema de regularidad de Szemerédi

\* Aquí debo ingresar una breve descripción del lema de regularidad de Szemerédi y la fuerza que toma al combinarlo con el teorema de Chung-Graham-Wilson y comentar la aplicación que se mostrará. (Quizás también hablar de las dos demostraciones de este lema, usual y espectral.) \*

### 4.1. Enunciado y demostración

Trataremos el concepto de regularidad de una manera un poco diferente a como es tradicionalmente conocida. En particular, vamos a permitir intersección entre pares de subconjuntos de vértices de un grafo en las futuras definiciones.

**Definición 11.** Sea  $G$  un grafo y  $X, Y \subset V(G)$  subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que  $(X, Y)$  es un **par  $\varepsilon$ -regular** en  $G$  si para todo  $A \subset X$  y  $B \subset Y$  con  $|A| \geq \varepsilon|X|$  y  $|B| \geq \varepsilon|Y|$ , se cumple

$$\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| \leq \varepsilon$$

Cuando  $(X, Y)$  no es un par  $\varepsilon$ -regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$  que satisfacen  $|A| \geq \varepsilon|X|$  y  $|B| \geq \varepsilon|Y|$ , pero  $\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| > \varepsilon$ .

Notaremos que la noción de un par  $\varepsilon$ -regular es una analogía de la propiedad  $\text{DISC}_p(\varepsilon)$  para grafos bipartitos. Es decir, si  $G$  es tal que  $V(G) = U \cup W$  y  $p \in (0, 1)$ ,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \quad \forall Y \subset W.$$

En efecto, si  $(U, W)$  es un par  $\varepsilon$ -regular, todo  $A \subset U$  y  $B \subset W$  tales que  $|A| \geq \varepsilon|U|$  y  $|B| \geq \varepsilon|W|$  satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par  $\varepsilon$ -regular no es suficientemente grande, digamos  $|A| < \varepsilon|X|$ , entonces

$$d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W| < 0 \leq e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

De esta manera, tomando  $p = d(U, W)$ , se obtiene la analogía planteada.

Por otro lado, con el espíritu del Teorema 3, se puede expresar un resultado análogo a la propiedad  $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$  utilizando el concepto de par  $\varepsilon$ -regular. En específico, si deseamos contar la cantidad de  $K_3$  en un grafo, el siguiente lema muestra la analogía de la propiedad  $\text{COUNT}_p$  con  $H = K_3$ .

**Lema 1.** (*Lema de conteo de triángulos*) Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $G = (V, E)$  un grafo, y los conjuntos no necesariamente disjuntos  $X, Y, Z \subset V$  tales que los pares  $(X, Y)$ ,  $(Y, Z)$  y  $(X, Z)$  son  $\varepsilon$ -regular. Entonces,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\}| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

*Demostración.* Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Proposición 11 sobre la cantidad de aristas del grafo  $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$ . Cuando el grafo no posee aristas, entonces

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\}| = |X||Y||Z|.$$

También, recordando que la condición de un par  $\varepsilon$ -regular es equivalente a  $\text{BI} - \text{DISC}_p(\varepsilon)$  para algún  $p \in (0, 1)$ , cuando el grafo presenta una arista,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\}| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

Ahora, se asume la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$|\{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Continuando inductivamente,

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\}| &= \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Z)] \\ &= d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| \\ &\quad + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \quad (24)$$

En donde  $T^-$  se corresponde con una copia etiquetada del grafo  $([3], \{12, 23\})$  en  $G$  bajo la aplicación inyectiva  $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$ , y  $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$ . Nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (24) se corresponde con un factor de error, para esto, sea  $T^*$  una copia del grafo singleton  $\{2\}$  en  $G$  y considere los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1^{T^*} &= \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}. \\ A_3^{T^*} &= \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}. \end{aligned}$$

De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par  $(X, Z)$   $\varepsilon$ -regular con  $\text{BI} - \text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ , se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| &\leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\
&= \sum_{T^*} \left| e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z) |A_1^{T^*}| |A_3^{T^*}| \right| \\
&\leq \sum_{T^*} \varepsilon |X| |Z| \\
&\leq \varepsilon |X| |Y| |Z|.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (24) se prueba lo prometido.  $\square$

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares  $(X, Y)$  y  $(X, Z)$  son  $\varepsilon$ -regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices puede no ser  $\varepsilon$ -regular para el que lema de conteo de triángulos funcione.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 1 (y Proposición 11), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo  $H$ . Enunciamos sin demostración.

**Lema 2.** (Lema de conteo de grafos) Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $H$  un grafo sobre  $k$  vértices, y  $G$  un grafo de  $n$  vértices con los subconjuntos disjuntos  $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$  tales que los pares  $(V_i, V_j)$  son  $\varepsilon$ -regular siempre que  $ij \in E(H)$ . Entonces, la cantidad de tuplas  $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$  tales que  $v_i v_j \in E(G)$  cada vez que  $ij \in E(H)$  es

$$\left( \prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left( \prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

Ya conociendo el concepto de regularidad entre pares de subconjuntos de vértices, estudiamos la regularidad en una partición del conjunto de vértices del grafo.

**Definición 12.** Dado un grafo  $G$ , una partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  del conjunto de vértices  $V(G)$  es una **partición  $\varepsilon$ -regular** si

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son  $\varepsilon$ -regular salvo una fracción  $\varepsilon$  de pares de vértices.

Note que si una partición  $\varepsilon$ -regular de  $k$  partes es en particular una equipartición, entonces a lo más  $\varepsilon k^2$  pares de elementos de la partición no son  $\varepsilon$ -regular.

Ya con todo lo necesario, se introduce el lema de regularidad de Szemerédi. Intuitivamente, el lema permite particionar el conjunto de vértices de todo grafo en una cantidad finita de partes, satisfaciendo que la mayoría de los pares de partes son regulares. Enunciamos el célebre lema y daremos prueba formal más adelante.

**Teorema 5.** (Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un entero  $M = M(\varepsilon)$  tal que todo grafo admite una partición  $\varepsilon$ -regular de a lo más  $M$  partes.

Para dar prueba a este teorema, utilizaremos una técnica llamada *argumento de incremento de energía*. Para todo grafo  $G$ , la técnica funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

1. Comenzar con la partición trivial de  $V(G)$ , i.e,  $\mathcal{P} = \{V(G)\}$ .
2. Mientras la partición actual  $\mathcal{P}$  no es  $\varepsilon$ -regular:
  - (a) Para cada par  $(V_i, V_j)$  no  $\varepsilon$ -regular, encontrar los subconjuntos  $A^{ij} \subset V_i$  y  $A^{ji} \subset V_j$  que evidencian la irregularidad de cada par.
  - (b) Refinar  $\mathcal{P}$  utilizando simultáneamente los conjuntos  $A^{ij}$  y  $A^{ji}$  encontrados de cada par  $(V_i, V_j)$  no  $\varepsilon$ -regular para obtener  $\mathcal{Q}$ .
  - (c) Actualizar  $\mathcal{P}$  con  $\mathcal{Q}$ .

Siendo  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que  $\mathcal{Q}$  refina a  $\mathcal{P}$  si cada parte de  $\mathcal{Q}$  está contenida en una parte de  $\mathcal{P}$ . En lo que resta de esta sección mostraremos que el algoritmo tiene un fin y entrega una partición  $\varepsilon$ -regular en un número de iteraciones que solo depende de  $\varepsilon$ .

**Definición 13.** (*Energía*) Sea  $G$  un grafo sobre  $n$  vértices y  $X, Y \subset V(G)$ . Se define en primer lugar

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

Luego, para particiones  $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$  de  $X$  y  $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$  de  $Y$ , se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

Finalmente, para una partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ , se define la **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

Observe que toda partición  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$  siempre se tendrá que  $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$ . En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

La última observación es crucial en la demostración del Teorema 5, puesto que los Lemas 3, 4 y 5 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, entregando una partición  $\varepsilon$ -regular.

El siguiente lema muestra que la energía no disminuye al particionar o refinar arbitrariamente un conjunto o partición respectivamente.

**Lema 3.** Sea  $G$  un grafo,  $X, Y \subset V(G)$ ,  $\mathcal{P}_X$  y  $\mathcal{P}_Y$  particiones de  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces  $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$ . Además, dadas dos particiones de vértices  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  de  $G$ ,  $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$  cada vez que  $\mathcal{P}'$  refina a  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Consideramos un grafo  $G$  sobre  $n$  vértices, los conjuntos  $X, Y \subset V(G)$ , y las particiones  $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$  y  $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$  de  $X$  e  $Y$  respectivamente. En primera instancia, utilizamos la desigualdad (7) para probar que  $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
&\stackrel{(7)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left( \sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left( \sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
&= q(X, Y).
\end{aligned} \tag{25}$$

Sea ahora la partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  de  $V(G)$  y  $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$  un refinamiento de  $\mathcal{P}$ . Podemos utilizar el resultado probado previamente para determinar que,

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(25)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

□

Ahora, veremos que refinar un par  $(X, Y)$  no  $\varepsilon$ -regular de un grafo  $G$ , mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

**Lema 4.** Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $G$  un grafo de  $n$  vértices y  $X, Y \subset V(G)$ . Si  $(X, Y)$  no es un par  $\varepsilon$ -regular, existen particiones  $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$  de  $X$  y  $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$  de  $Y$  tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , consideramos un grafo  $G$  sobre  $n$  vértices y  $X, Y \subset V(G)$  tales que el par  $(X, Y)$  no es  $\varepsilon$ -regular. Existen entonces los subconjuntos  $X_1 \subset X$  e  $Y_1 \subset Y$  que evidencian la irregularidad del par  $(X, Y)$  y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon |X| \text{ y } |Y_1| \geq \varepsilon |Y|. \tag{26}$$

Se definen adicionalmente los conjuntos  $X_2 := X \setminus X_1$  y  $Y_2 := Y \setminus Y_1$ , y  $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$ , cual por definición de par  $\varepsilon$ -regular, satisface

$$|\eta| > \varepsilon. \tag{27}$$

Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned}
e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\
&= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2).
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \tag{28}$$

Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned}|X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|.\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (29)$$

Ahora, definiendo las particiones  $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$  de  $X$  y  $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$  de  $Y$ , desarrollamos,

$$\begin{aligned}q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i||Y_j|} \\ &= \frac{1}{n^2} \left( \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \right) \\ &\stackrel{(7)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left( \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{\left( \sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j|} \right) \\ &\stackrel{(28) \text{ y } (29)}{=} \frac{1}{n^2} \left( \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right).\end{aligned} \quad (30)$$

Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1|. \quad (31)$$

Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (30) como sigue, \* Me podré saltar un espacio más pequeño abajo? \*

$$\begin{aligned}n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\ &\stackrel{(31)}{=} \frac{1}{|X_1||Y_1|} \left( \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \left( \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X||Y|} e(X, Y) - \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\ &= \frac{|X_1||Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1||Y_1| \\ &\quad + \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\ &= \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1| \left( 1 + \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right) \\ &\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1|.\end{aligned} \quad (32)$$

Finalmente, utilizando las cotas (26) y (27), podemos concluir desde la desigualdad (32),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X| |Y|} + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X| |Y|}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no  $\varepsilon$ -regular por medio de sus subconjuntos que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar simultáneamente todos los pares de conjuntos no  $\varepsilon$ -regular de un grafo produce un aumento estricto de al menos  $\varepsilon^5$  en la energía.

**Lema 5.** *Sea  $\varepsilon > 0$ , un grafo  $G$  y una partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  no  $\varepsilon$ -regular de  $V(G)$ . Entonces existe un refinamiento  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}$ , en el que cada  $V_i$  se particiona en a lo más  $2^k$  partes y es tal que*

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  una partición no  $\varepsilon$ -regular del conjunto de  $n$  vértices de un grafo  $G$ . Sabemos que para todos los  $(i, j) \in [k]^2$  tales que el par  $(V_i, V_j)$  no es  $\varepsilon$ -regular, existen los subconjuntos  $A^{ij} \subset V_i$  y  $A^{ji} \subset V_j$  testigos de su irregularidad. Observe que para cada  $V_i$ , podemos encontrar a lo más  $k$  conjuntos no vacíos  $A^{ij}$  que evidencian la irregularidad de los pares  $(V_i, V_j)$  no  $\varepsilon$ -regular. Consideremos ahora la partición  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$  que refina a  $\mathcal{P}$ , en la que cada  $Q_i$  es una partición resultante de dividir el conjunto  $V_i$  según la intersección de todos los subconjuntos no vacíos  $A^{ij}$  que atestiguan la irregularidad de los pares  $(V_i, V_j)$  no  $\varepsilon$ -regular. En consecuencia,  $|Q_i| \leq 2^k$ .

Por simplicidad en la notación, se define  $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$ . Luego, como la partición  $\mathcal{P}$  no es  $\varepsilon$ -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (33)$$

Así, junto a los lemas probados previamente, damos prueba al resultado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(Q_i, Q_j) \\ &= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(Q_i, Q_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(Q_i, Q_j) \\ &\stackrel{\text{Lema 3}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\ &\stackrel{\text{Lema 4}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left( q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \\ &\stackrel{(33)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5. \end{aligned}$$

\* Cambiar por  $>$  en la última línea y donde dice lema 5, cuando lo cambio se me descuadra :c \* □

Ya con todo lo necesario, damos prueba formal al Teorema 5 mediante la técnica de *argumento de incremento de energía*.



*Demostración del Teorema 5.* Dado  $\varepsilon > 0$  y un grafo  $G$ , elegimos inicialmente la partición trivial del conjunto de vértices  $\mathcal{P} = \{V(G)\}$ . Ahora, iterativamente (actualizando  $\mathcal{P}$ ), aplicaremos el Lema 5 cada vez que la partición actual no sea  $\varepsilon$ -regular. Observe que por cada aplicación del Lema 5 se consigue un aumento de al menos  $\varepsilon^5$  en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más  $\varepsilon^{-5}$  pasos. El resultado será necesariamente una partición  $\varepsilon$ -regular debido a la cota de la energía.

Para una partición no  $\varepsilon$ -regular con  $k$  elementos, el Lema 5 encuentra un refinamiento de a lo más  $k2^k$  partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada paso por  $k2^k < 2^{2^k}$ . Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar el Lema 5.

$$\begin{aligned} 1^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 1 &\rightarrow 2 < 2^2 && \text{partes.} \\ 2^{\text{da}} \text{ Iteración: } 2^2 &\rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^{2^2}} && \text{partes.} \\ 3^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 2^{2^{2^2}} &\rightarrow (2^{2^{2^2}}) 2^{(2^{2^{2^2}})} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} && \text{partes.} \end{aligned}$$

Así, como el algoritmo debe luego de a lo más  $\varepsilon^{-5}$  iteraciones, la cantidad de partes al final de proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

□

Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la siguiente manera,

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } k. \quad (34)$$

\* En esta parte me gustaría dejar un comentario sobre lo grande que es la cota y el resultado que encontré Gowers en 1997 de cota inferior, pero no lo entiendo :c \*

Una de las peculiaridades del lema de regularidad de Szemerédi es la flexibilidad que posee su enunciado, adaptando su aplicación a diferentes contextos. Por ejemplo, si en la demostración del Teorema 5 tomamos una partición inicial arbitraria en vez de la partición trivial del conjunto de vértices del grafo, se logra obtener la siguiente variante del lema de regularidad.

**Teorema 6.** (*Regularidad de Szemerédi - Partición inicial arbitraria*) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un entero  $M = M(\varepsilon)$  tal que todo grafo  $G$  con una partición inicial  $\mathcal{P}_0$  de  $V(G)$  admite una partición  $\varepsilon$ -regular  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$  que refina cada parte de  $\mathcal{P}_0$  en a lo más  $M$  partes.

Es posible fortalecer un poco más el lema de regularidad exigiendo que el resultado sea una equipartición del conjunto de vértices de un grafo  $G$ . Es decir, una partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  tal que  $|V_1| \leq |V_2| \leq \dots \leq |V_k| = |V_1| + 1$ .

**Teorema 7.** (*Regularidad de Szemerédi - Equipartición*) Para todo  $\varepsilon > 0$  y  $m_0 \in \mathbb{N}$ , existe un entero  $M = M(\varepsilon)$  tal que todo grafo admite una equipartición  $\varepsilon$ -regular de su conjunto de vértices de  $k$  partes, con  $m_0 \leq k \leq M$ .

\* Comentar que cuando tenemos esta versión del teorema (que es la clásica), entonces la definición de una partición  $\varepsilon$ -regular se traduce en  $\dots \leq \varepsilon k^2$ . También hablar un poco de  $m_0$ , cual ayuda a que ninguna de las partes sea demasiado grande. \*

La idea de la demostración del Teorema 7 consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener

una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Para todo grafo  $G$ , la modificación del algoritmo es la siguiente:

1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$  con  $m_0$  partes.
2. Mientras la partición actual  $\mathcal{P}$  no es  $\varepsilon$ -regular:
  - (a) Para cada par  $(V_i, V_j)$  no  $\varepsilon$ -regular, encontrar los subconjuntos  $A^{ij} \subset V_i$  y  $A^{ji} \subset V_j$  que evidencian la irregularidad de cada par.
  - (b) Refinar  $\mathcal{P}$  usando simultáneamente los conjuntos  $A^{ij}$  y  $A^{ji}$  para obtener la partición  $\mathcal{Q}$ , cual divide cada parte de  $\mathcal{P}$  en a lo más  $2^{|\mathcal{P}|}$  partes.
  - (c) Modificar la partición  $\mathcal{Q}$  refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar partes iguales de tamaño  $|V(G)|/m$  utilizando alguna elección apropiada del entero  $m = m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$ . Luego, los elementos de  $\mathcal{Q}$  que no fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño  $|V(G)|/m$ .
  - (d) Actualizar  $\mathcal{P}$  con la modificación de  $\mathcal{Q}$ .

El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo  $G$ . En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos  $\varepsilon^5$  en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con una elección de  $m$  suficientemente grande.<sup>3</sup> En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al menos  $\varepsilon^5/2$ , logrando terminar luego de a lo más  $2\varepsilon^{-5}$  pasos con una equipartición de a lo más  $\text{torre}(\varepsilon^{-5})$  partes.

## 4.2. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son desarrolladas en base a los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices del grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** el grafo eliminando aristas con mal comportamiento según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
  - i) Irregularidad.
  - ii) Baja densidad.
  - iii) Al menos una de las partes es demasiada pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio utilizando algún lema de conteo.

Teniendo esta fórmula en mente, damos paso a la primera aplicación del lema de regularidad, cual plantea intuitivamente que todo grafo con *pocos* triángulos puede convertirse en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

**Teorema 8.** (*Lema de eliminación de triángulos*) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todo grafo sobre  $n \geq n_0$  vértices con a lo más  $\delta n^3$  triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más  $\varepsilon n^2$  aristas.

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , elija  $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$  y utilice el Teorema 5 para obtener la constante  $M = M(\varepsilon_r)$ . Considere además  $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de manera tal que el grafo  $G = (V, E)$  con  $n \geq n_0$  vértices posee a lo más  $\varepsilon n^3$  triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 5, se asegura la existencia de una partición  $\varepsilon_r$ -regular  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_M\}$ .

Para limpiar el grafo, para cada  $(i, j) \in [M]^2$ , se eliminan todas las aristas entre  $V_i$  y  $V_j$  cuando

<sup>3\*</sup> Aquí quiero hacer un comentario/ejemplo de  $m$ . Yufei sugiere  $m = \lfloor 100|\mathcal{Q}\varepsilon^{-5}| \rfloor$ , pero tampoco lo entiendo mucho.

- (a)  $(V_i, V_j)$  no es un par  $\varepsilon_r$ -regular,
- (b)  $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$ , o
- (c)  $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{M}\varepsilon_r$ .

De esta manera, como la partición es  $\varepsilon_r$ -regular, las aristas removidas por la condición (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [M]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

Por último, debido a que cada vértice de  $G$  puede ser adyacente con a lo más  $\frac{n}{M}\varepsilon_r$  vértices en a lo más  $M$  subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$M \cdot \frac{n}{M}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

En total, en la limpieza, se eliminan a lo más  $\varepsilon n^2$  aristas.

Ahora, nos falta probar que el grafo limpio  $G' = (V, E')$  es libre de triángulos. Para esto, observe que la condición de eliminación de aristas (a) nos asegura que cada par  $(V_i, V_j)$  es  $\varepsilon_r$ -regular, y que se satisface la hipótesis del lema de conteo de grafos. Entonces, si luego de la limpieza del grafo aún existe un triángulo  $(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell$ , el Lema 1 nos dice que incluso hay más triángulos. En particular, gracias a la eliminación de las aristas por la condición (b) y (c),

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\ &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\ &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{M^3} \\ &> \delta n^3. \end{aligned}$$

Finalmente, con nuestra elección de  $\delta$ , el resultado se prueba formulando la siguiente contradicción: si existe un triángulo en el grafo limpio  $G'$ , el lema de conteo de triángulos nos dice que en realidad existen más de  $\delta n^3$  triángulos. No obstante, el grafo original posee a lo más  $\delta n^3$  triángulos, por lo que se concluye que el grafo  $G'$  obtenido desde  $G$  es libre de triángulos removiendo a lo más  $\varepsilon n^2$  aristas.  $\square$

Denotaremos por  $k$ -PA a una progresión aritmética de  $k$  elementos. En particular, diremos que un conjunto de números naturales  $A$  es libre de 3-PA si no existen los elementos  $x, x + y, x + 2y \in A$ , con  $y \neq 0$ . Cuando  $y = 0$ , diremos que la 3-PA es trivial.

**Teorema 9.** (Teorema de Roth) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si el conjunto  $A \subset [n]$  posee  $|A| \geq \varepsilon n$  elementos, entonces  $A$  contiene una 3-PA no trivial cada vez que  $n \geq n_0$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  y el conjunto  $A \subset [n]$  con  $|A| \geq \varepsilon n$  elementos. La idea es construir un grafo 3-partito de manera conveniente para posteriormente utilizar el lema de eliminación de triángulos. Considere el grafo 3-partito  $G = (V, E)$  con partición de vértices  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ , en donde  $V_1 = [n]$ ,  $V_2 = [2n]$  y  $V_3 = [3n]$ , y son disjuntos entre cada par de ellos. Así,  $G$  tiene  $6n$  vértices, y se definen las aristas de la siguiente manera:

1. Existe una arista desde  $i \in V_1$  hasta  $j \in V_2$  si y solamente si  $j - i \in A$ .
2. Existe una arista desde  $j \in V_2$  hasta  $k \in V_3$  si y solamente si  $k - j \in A$ .
3. Existe una arista desde  $i \in V_1$  hasta  $k \in V_3$  si y solamente si  $\frac{k-i}{2} \in A$ .

Luego, la tupla  $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$  define un triángulo en  $G$  si y solamente si  $j - i \in A$ ,  $k - j \in A$  y  $\frac{k-i}{2} \in A$ , o bien,  $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$  es una 3-PA en  $A$  con diferencia  $\frac{k-2j+i}{2}$ . En específico, diremos que un triángulo  $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$  es trivial en  $G$  si para algún  $a \in A$  se satisface que  $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = a$ .

Ahora, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par  $(i, a) \in V_1 \times A$ , la cantidad de triángulos triviales es exactamente  $n|A| \geq \varepsilon n^2$ . Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se puede eliminar dos triángulos triviales removiendo solo una arista. En consecuencia, debemos eliminar al menos  $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$  aristas para hacer de  $G$  libre de triángulos.

Utilizando el lema eliminación de triángulos eligiendo  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{36}$ , existen  $\delta_0 > 0$  y  $n'_0 \in \mathbb{N}$  tal que el grafo  $G$  con  $6n \geq n'_0$  vértices y a lo más  $\delta_0(6n)^3$  triángulos, se convierte en libre de triángulos eliminando a lo más  $\varepsilon_0(6n)^2$  aristas. Entonces, estableciendo  $\delta = 216\delta_0$ , note que existen como máximo  $\delta n^3 - \varepsilon n^2$  triángulos no triviales. Sabiendo esto, aseguramos la existencia de un triángulo no trivial cuando  $n > \frac{\varepsilon+1}{\delta}$ . En efecto,

$$n > \frac{\varepsilon+1}{\delta} \Rightarrow \delta n - \varepsilon > 1 \Rightarrow n^2(\delta n - \varepsilon) > 1.$$

Finalmente, el resultado queda demostrado tomando  $n_0 > \max \left\{ \frac{n'_0}{6}, \frac{\varepsilon+1}{\delta} \right\}$  suficientemente grande.  $\square$

**Definición 14.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un conjunto  $M \subseteq E$  es un **emparejamiento** en  $G$  si no existen un par de aristas en  $M$  que compartan algún vértice. Diremos que  $M$  es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y toda arista de  $G$  con un vértice en  $V(M)$  es una arista en  $M$ .

\* Usar  $k$  o  $M$  para la cantidad de partes?, aquí se me confunde con el emparejamiento, pero en TRL y demo espectral de regularidad usé  $M$  como las partes. De momento en esta parte lo dejaré con  $k$ . \*

**Teorema 10.** (*Emparejamiento inducido*) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que todo grafo  $G = (V, E)$  de  $n \geq n_0$  vértices que está compuesto por la unión de  $n$  emparejamientos inducidos, posee a lo más  $\varepsilon n^2$  aristas.

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , aplique el Teorema 5 con  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$  para obtener la constante  $M(\varepsilon_r)$ . Considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, y asuma que el grafo  $G = (V, E)$  con  $n \geq n_0$  vértices y compuesto por  $n$  emparejamientos inducidos satisface  $e_G > \varepsilon n$ . Nuevamente, por el Teorema 5, se asegura la existencia de la partición  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$  con  $k \leq M(\varepsilon)$  partes que es  $\varepsilon_r$ -regular.

Para cada  $(i, j) \in [k]^2$  se eliminan todas las aristas entre los conjuntos  $V_i$  y  $V_j$  cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que  $2\varepsilon_r$ , o al menos uno de los conjuntos es menor que  $\frac{n}{k}\varepsilon_r$ . En total, el proceso de limpieza remueve a lo más  $4\varepsilon_r n^2$  aristas de  $G$  para obtener un nuevo grafo  $G'$ . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido  $M$  en  $G'$  con al menos  $\frac{\varepsilon}{2}n$  aristas (y al menos  $\varepsilon n$  vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrán a lo más  $\frac{\varepsilon}{2}n$  aristas, por lo que  $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$ .

Se define  $U_i := V_i \cap V(M)$  como el subconjunto de vértices de  $M$  que comparte elementos con  $V_i$ , y  $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$ . Es decir,  $U$  es la unión de todos los conjuntos  $U_i \subset V(M)$  que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con  $V_i$ . Note que podemos obtener el conjunto  $U$  removiendo a lo más  $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$  vértices de  $V(M)$ , pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

De esta manera, recordando que  $|V(M)| \geq \varepsilon n$ , se determina que  $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$ . Además, como también  $|M| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$ , debe existir al menos un vértice en  $U$  que sea parte de una arista en  $M$ . Luego, dada la limpieza de  $G$ , dicha arista debe pertenecer a algún par  $U_t \times U_\ell$  que satisfacen  $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$  y  $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$ , y son tales que su correspondiente par  $(V_t, V_\ell)$  es  $\varepsilon_r$ -regular con densidad  $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$ . Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (35)$$

Ahora, como que  $M$  es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos  $A, B \subset V(M)$  debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

Sin embargo, la desigualdad (35) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\ &\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\ &\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre  $U_k$  y  $U_\ell$  que no pertenece a  $M$ , por lo que se contradice la hipótesis de que  $M$  es un emparejamiento inducido.  $\square$

\* Comentar que el siguiente teorema será utilizado para demostrar alternativamente el Teorema de Roth. \*

**Teorema 11.** (Ajtai-Szemerédi) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que siempre que  $n \geq n_0$ , todo subconjunto  $S \subset [n]^2$  con  $|S| \geq \varepsilon n^2$  posee elementos de la forma  $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$  para algún  $a, b, d \in \mathbb{N}$ , con  $d \neq 0$ .

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $n \geq n_0$ , y  $S \subset [n]^2$  un subconjunto con al menos  $\varepsilon n^2$  elementos. Vamos a construir un grafo bipartito  $G = (U \cup W, E)$  con conjunto de vértices  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  y  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

Interpretando a  $[n]^2$  como una grilla bidimensional, se puede definir una relación entre pares de aristas en  $G$  en función de la distancia que abarca la suma de las coordenadas de sus respectivos pares en  $S$ . Esto es,

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

*\* Dibujito con 2 ejemplos de  $q$ .* \* Observe que para cada  $2 \leq q \leq 2n$  se define un emparejamiento en  $G$  debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia (cada una asociada a algún  $q$ ) de la relación forman una partición de emparejamientos de  $E$ . En efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase  $u_i w_j$  y  $u_k w_j$  comparten el vértice  $w_j$ . Entonces, como  $i + j = k + j$ , se determina que  $u_i = u_k$  y se concluye que  $u_i w_j$  y  $u_k w_j$  son la misma arista.

Luego, como  $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2$ , el Teorema 10 asegura que existe al menos un emparejamiento no inducido. Esto significa que en un emparejamiento que contiene las aristas con la relación  $u_i w_j \sim u_k w_\ell$  puede existir el trío de aristas  $u_i w_j$ ,  $u_k w_\ell$  y  $u_i w_\ell$ . Así, para algún  $d \in \mathbb{N}$ ,  $(i, j)$ ,  $(k, \ell)$  y  $(i, \ell)$  elementos de  $S$  que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

Finalmente, el resultado se consigue tomando  $(i, \ell) = (a, b)$  para obtener  $j = b + d$  y  $k = a + d$ . *\* Poner dibujito de la esquina \**  $\square$

*\* Comentar que el Teorema de la esquina nos entrega otro camino para demostrar el Teorema de Roth. \**

*Segunda demostración Teorema 9.* Dado  $\varepsilon > 0$ , escogemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Para  $n \geq n_0$ , sea  $A \subset [n]$  un conjunto que posee al menos  $\varepsilon n$  elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in A\},$$

Observe que cada  $a \in A$  da lugar a exactamente  $n$  elementos en  $B$  con  $x - y = a$ , permitiendo determinar que  $|B| = n|A| \geq \varepsilon n^2$ . Luego, el Teorema 11 asegura la existencia de elementos de la forma  $\{(a, b), (a, b + d), (a + d, b)\}$  en  $B$ . Por consecuencia, se encuentra una 3-PA no trivial en  $A$  tomando  $x = a - b$ , e  $y = d$ .  $\square$

*\* Explicar que ahora vamos a demostrar con teoría espectral el lema de regularidad de Szemerédi. Comentar también que esta versión la realizó Terence Tao. \**

*Demostración espectral Teorema 5.* Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $G = ([n], E)$  un grafo y  $T$  su matriz de adyacencia. Consideramos además  $\{u_1, \dots, u_n\}$  la base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  formada por los vectores propios de  $T$ , y  $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  los valores propios de  $T$  ordenados de manera decreciente.

Por la Proposición 4 y el Corolario 1, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (36)$$

De esta manera, al notar que  $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$ , es posible acotar cada valor propio de la siguiente manera:

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (37)$$

Al final de esta demostración se entregará una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que depende únicamente de  $\varepsilon$  y que satisface  $f(i) > i$ . Denotando por  $f^{(k)}$  a la  $k$ -ésima composición de  $f$  con ella misma, consideramos una partición de  $[n]$  en intervalos de la forma  $[f^{(k-1)}(1), f^k(1)]$ , para  $k \in \{1, \dots, \frac{1}{\varepsilon^3}\}$ . Con esta construcción, debe existir un natural  $\ell = f^{(k-1)}(1)$  que cumple con

$$\sum_{\ell \leq j < f(\ell)} |\lambda_j|^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \quad (38)$$

De lo contrario, la suma de  $|\lambda_j|^2$  sobre todos los intervalos definidos es estrictamente mayor que  $\varepsilon^3 n^2$ . Así, como son  $\frac{1}{\varepsilon^3}$  intervalos, se contradice la desigualdad (36), pues

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 > \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \varepsilon^3 n^2 = n^2.$$

Ahora, usando el natural  $\ell$ , separamos la matriz  $T$  en tres partes. En específico,

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Se interpretará  $T_1$  como la componente *estructural*,

$$T_1 := \sum_{i < \ell} \lambda u_i u_i^T,$$

$T_2$  como la componente de *error*,

$$T_2 := \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T,$$

y  $T_3$  como la componente *casi-aleatoria*,

$$T_3 := \sum_{i \geq f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T.$$

Pensamos cada vector propio de  $T$  como una función  $u_i : [n] \rightarrow \mathbb{R}$ . En otras palabras, todo vector propio asigna un *peso* a cada vértice de  $G$ .

**Analizamos  $T_1$ .** La idea es particionar el conjunto de vértices  $[n]$  de manera tal que  $T_1$  es aproximadamente constante en la mayoría de las partes. Veremos que el número de partes será  $O_{\ell, \varepsilon}(1)$ , es decir, un valor constante que depende solo de  $\ell$  y  $\varepsilon$ .

Para cada  $i \in [\ell - 1]$  ordenamos de manera creciente los vértices de  $G$  según la asignación de *pesos* que otorga  $u_i(\cdot)$ . En primera instancia, se agrupa en un conjunto excepcional a aquellos vértices que presenten un *peso* demasiado grande en magnitud. Dicho conjunto se define de la siguiente manera:

$$V_0^i := \left\{ k \in [n] : |u_i(k)| > \sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right\}.$$

Dado que  $\|u_i\| = 1$ , cada  $V_0^i$  no puede tener muchos elementos. En efecto, al observar que

$$|V_0^i| \left( \sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right)^2 < \sum_{k=1}^n u_i(k)^2 = \|u_i\|^2 = 1,$$

es posible determinar que  $|V_0^i| < \frac{\varepsilon}{\ell} n$ .

Aquellos vértices que no est n en  $V_0^i$ , serán agrupados particionando la recta de largo  $2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}$  en subintervalos de tamaño a lo más  $\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}}\right) n^{-1/2}$ . Esta configuración provoca gráficamente el siguiente esquema para cada  $u_i(\cdot)$ .

\* Poner dibujito... \*

Por consecuencia, para  $i \in [\ell - 1]$ , la cantidad de partes que genera cada  $u_i(\cdot)$  son a lo más

$$\frac{2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}}{\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2}} = \frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} = O_{\ell, \varepsilon}(1).$$

Para conseguir la partición deseada de  $[n]$ , por un lado, se toma la unión de todos los conjuntos excepcionales  $V_0^i$  para dar lugar al conjunto  $V_0$  de tamaño a lo más  $(\ell - 1) \cdot \frac{\varepsilon n}{\ell} < \varepsilon n$ . Por otro lado, combine las particiones generadas por los  $\ell - 1$  primeros vectores propios mediante un refinamiento usual. Así, se consigue una partición del conjunto de vértices de  $G$  de la forma  $[n] = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$ . Dada la construcción, la cantidad de partes que se obtienen son

$$M(\varepsilon) \leq \left( \frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^\ell \quad (39)$$

Ahora, intuitivamente, se mostrará que los valores de la matriz  $T_1$  en cada bloque  $V_i \times V_j$  son aproximadamente constante, i.e, no varón más que  $o_\varepsilon(1)$ . Para esto, como se hizo con los vectores propios, pensamos la matriz de adyacencia como una función  $T : [n] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}$  para identificar sus entradas. De esta manera, para cada  $i, j \in [M]$ ,  $a, c \in V_i$ , y  $b, d \in V_j$ ,

$$\begin{aligned} |T_1(a, b) - T_1(c, d)| &= \left| \sum_{i < \ell} \lambda_i u_i(a) u_i(b) - \lambda_i u_i(c) u_i(d) \right| \\ &\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(a) u_i(b) - u_i(c) u_i(b) + u_i(c) u_i(b) - u_i(c) u_i(d)| \\ &\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(b) (u_i(a) - u_i(c)) + u_i(c) (u_i(b) - u_i(d))| \\ &\leq \sum_{i < \ell} n |u_i(b)| |u_i(a) - u_i(c)| + n |u_i(c)| |u_i(b) - u_i(d)| \\ &\leq \ell n \left( 2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} + 2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} \right) \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, para  $i, j \in [M]$ , defina  $d_{ij}$  como el promedio de los valores del bloque  $V_i \times V_j$  en  $T_1$  y observe que se satisface

$$|T_1(a, b) - d_{ij}| \leq 4\varepsilon, \quad \forall a \in V_i, \forall b \in V_j.$$



En efecto, como  $d_{ij}$  es un promedio, deben existir los pares  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in V_i \times V_j$  tales que  $T_1(x_0, y_0) \leq d_{ij}$  y  $T_1(x_1, y_1) \geq d_{ij}$ . Luego, si  $|T_1(a, b) - d_{ij}| > 4\varepsilon$ , entonces se encuentra una contradicción al determinar que  $T_1(a, b) - T_1(x_0, y_0) > 4\varepsilon$ , o bien  $T_1(a, b) - T_1(x_1, y_1) < -4\varepsilon$ .

Usando lo anterior y la desigualdad triangular, para todo  $A \subset V_i$  y  $B \subset V_j$ , obtenemos la siguiente cota.

$$\begin{aligned} |v_A^T(T_1 - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n})v_B| &\leq \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} |T_1(a, b) - d_{ij}| \\ &\leq 4\varepsilon |A| |B| \\ &\leq 4\varepsilon |V_i| |V_j|. \end{aligned} \tag{40}$$

**Analizamos  $T_2$ .** Observe en primer lugar, por construcción,

$$\text{Tr}(T_2^2) = \sum_{\ell \leq j < f(\ell)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2.$$

Adicionalmente, por la ortonormalidad de la base,

$$\begin{aligned} \sum_{a, b \in [n]} T_2(a, b)^2 &= \sum_{a, b \in [n]} \left( \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i(a) u_i(b) \right)^2 \\ &= \sum_{a, b \in [n]} \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j u_i(a) u_j(a) u_i(b) u_j(b) \\ &= \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j \sum_{a \in [n]} u_i(a) u_j(a) \sum_{b \in [n]} u_i(b) u_j(b) \\ &= \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i^2 \|u_i\|^4 \\ &= \text{Tr}(T_2^2). \end{aligned}$$

Entonces, dada la igualdad anterior, se determina que

$$\sum_{a, b \in [n]} T_2(a, b)^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \tag{41}$$

Ahora, defina el conjunto  $\Theta_1 \subset [M]^2$  de manera tal que todo par  $(i, j) \notin \Theta_1$  satisfice

$$\sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a, b)^2 \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \tag{42}$$

Más aún, para los pares  $(i, j) \in \Theta_1$ , la desigualdad (41) en particular establece que

$$\varepsilon^3 n^2 \geq \sum_{(i, j) \in \Theta_1} \sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a, b)^2 > \varepsilon \sum_{(i, j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j|.$$

Por consecuencia,

$$\sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon^2 n^2. \quad (43)$$

De esta manera, para  $(i, j) \notin \Theta_1$ ,  $A \subset V_i$  y  $B \subset V_j$ , utilizamos la desigualdad (42) y Cauchy-Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned} |v_A^T T_2 v_B|^2 &= \left| \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b) \right|^2 \\ &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \left( \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b)^2 \right) |A| |B| \\ &\leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |A| |B| \\ &\leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2. \end{aligned}$$

Así, se obtiene la cota asociada a  $T_2$ .

$$|v_A^T T_2 v_B| \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (44)$$

**Analizamos  $T_3$ .** Note que el valor propio más grande en magnitud de  $T_3$  es  $\lambda_{f(\ell)}$ . Entonces, utilizando el operador norma \* Definir... \* de la matriz  $T_3$  y el Teorema 2,

$$\frac{\|T_3 v_B\|}{\|v_B\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|T_3 x\|}{\|x\|} = |\lambda_{f(\ell)}| \leq \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

Como resultado,

$$\|T_3 v_B\| \leq \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

Usando la desigualdad anterior junto a Cauchy-Schwarz se obtiene la siguiente cota para  $T_3$ .

$$\begin{aligned} |v_A^T T_3 v_B| &= |\langle v_A, T_3 v_B \rangle| \\ &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|v_A\| \|T_3 v_B\| \\ &\leq \|v_A\| \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\ &= \sqrt{|A| |B|} \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\ &\leq \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Ya con el control de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , nos enfocamos en estudiar  $G$  de manera global. Consideramos  $\Theta \subset \{0, 1, \dots, M\}^2$  definido de la siguiente manera:

$$\Theta := \left\{ (i, j) \in \{0, 1, \dots, M\}^2 : (i, j) \in \Theta_1 \vee i = 0 \vee j = 0 \vee \min\{|V_i|, |V_j|\} \leq \frac{\varepsilon n}{M} \right\}.$$

Con esta definición, la desigualdad (43), y recordando que  $|V_0| < \varepsilon n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \Theta} |V_i||V_j| &= \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i||V_j| + \sum_{j=0}^M |V_0||V_j| + \sum_{i=0}^M |V_i||V_0| + \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| + \sum_{|V_j| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i||V_j| + 2|V_0|n + 2 \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i|n \\ &\leq \varepsilon^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + 2M \frac{\varepsilon}{M} n^2 \\ &\leq 5\varepsilon n^2. \end{aligned}$$

Al ver la cota anterior,  $\Theta$  se interpreta como un conjunto excepcional de pocos elementos que contiene los malos casos. Ahora bien, si  $(i, j) \notin \Theta$ , todo  $A \subset V_i$  y  $B \subset V_j$  satisfacen la desigualdad

$$\begin{aligned} \left| e(A, B) - d_{ij}|A||B| \right| &= \left| v_A^T (T - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n}) v_B \right| \\ &\leq \left| v_A^T (T_1 - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n}) v_B \right| + \left| v_A^T T_2 v_B \right| + \left| v_A^T T_3 v_B \right| \\ &\leq 4\varepsilon |V_i||V_j| + \varepsilon |V_i||V_j| + \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Observando la desigualdad en (46), para  $(i, j) \notin \Theta$ , se necesita que  $\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \varepsilon |V_i||V_j|$  para asegurar que la partición  $\{V_0, V_1, \dots, V_M\}$  de  $[n]$  es  $(6\varepsilon)$ -regular. Para esto, gracias a que  $|V_i|, |V_j| \geq \frac{\varepsilon n}{M}$ , se cumple la desigualdad  $\frac{\varepsilon^2 n^2}{M^2} \leq |V_i||V_j|$ , y por consecuencia

$$\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{M^2 |V_i||V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{f(\ell)}}.$$

Finalmente, para obtener la partición  $(6\varepsilon)$ -regular del conjunto de vértices del grafo  $G$ , es suficiente asumir que  $\frac{1}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{\varepsilon^3}{M^2}$ . Así, recordando la cota vista en (39), basta elegir

$$f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon^6} \left( \frac{2x^2}{\varepsilon^2} \right)^{4x}.$$

□

## 5. Bibliografía

- [1 ] Krivelevich, M., Sudakov, B. (2006). Pseudo-random Graphs. In Bolyai Society Mathematical Studies (pp. 199–262). Springer Berlin Heidelberg.
- [2 ] Chung, F. R. K., Graham, R. L., Wilson, R. M. (1989). Quasi-random graphs. Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing.
- [3 ] Chan, T. F. N., Král', D., Noel, J. A., Pehova, Y., Sharifzadeh, M., Volec, J. (2020). Characterization of quasirandom permutations by a pattern sum. Random Structures Algorithms.
- [4 ] Hàn, H., Kiwi, M., Pavez-Signé, M. (2021). Quasi-random words and limits of word sequences. Journal Européen de Combinatoire [European Journal of Combinatorics].