UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Grafos cuasi-aleatorios y el lema de regularidad de Szemerédi

Felipe Andrés Sánchez Erazo

Profesor(a) Guía:
Hiệp Hàn

Trabajo de titulación para optar al título profesional de Ingeniero Matemático

Santiago - Chile
2024

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Grafos cuasi-aleatorios y el lema de regularidad de Szemerédi

Felipe Andrés Sánchez Erazo

Trabajo de Titulación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al título de **Ingeniero Matemático**.
Este trabajo de Graduación fue presentado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Hiệp Hàn, del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia.

Dr. Hiệp Hàn
Profesor Guía

Dr. Marcos Kiwi Krauskopf
Profesor Informante

Pablo Marín Álvarez
Director del Departamento

Dr. Sebastián Barbieri Lemp
Profesor Informante

A mi abuelo, Sergio Sánchez

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi madre, por ser una figura y pilar fundamental en mi vida, que me ha brindado una comprensión y cariño que no se puede medir. A mi padre, por su apoyo completamente incondicional en todas las decisiones que he tomado, y por despertar mi curiosidad por los saberes de este mundo. A mi hermano, mi compañero de viaje, mi cómplice, gracias por traer alegrías a cada lugar que vas. Te amo y admiro mucho, y aunque este logro es personal, espero que solo sea uno de muchos en nuestro andar.

También agredecer a los otros miembros de mi familia, quienes en todo momento me dieron palabras de aliento, y que de algún u otro modo, fueron parte de mi motivación en la elaboración de esta tesis.

Quiero dar una mención especial y profunda gratitud a mi amada, Lourdes. Sin su constante apoyo, los días habrían sido más grises en el desarrollo de este trabajo. Gracias por tu admirable empatía al entender mis problemas y tristezas, incluso cuando yo no les hallaba. Te agradezco por hacer que mis momentos de alegrías tengan muchos más colores.

Mil gracias a aquellas personas que fueron parte de mi etapa universitaria y de la vida, hicieron que la travesía estuviese llena de momentos bellos. En particular, agradecer a Rodrigo, infinito amigo, quien ha estado en todos los momentos más importantes de mi vida, y esta vez no fue la excepción. Cristian, por mostrarme lo lindas que pueden ser las coincidencias en la vida y la amistad duradera que a veces traen consigo. Catalina, por el Apoyo, Risas, Afecto y Motivación en la recta final de este trabajo. Ailine, por nuestras conversaciones terapéuticas y todas las veces que me dijiste “Amigo, tú puedes”. Camilo, por mostrarme que la amistad puede ir más allá que el ser compañeros de trabajo, por tu dedicación, y por ser un referente para mí como profesional.

Doy gracias a mis amistades de la música por mantener viva esta gran pasión que compartimos. En especial, a mis cofrades de la Tuna Mayor de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. ¡Aúpa Tuna!.

Quiero agradecer a mi profesor guía Hiệp Hàn por su buena disposición, paciencia, y su inmensa comprensión y calidad humana. Aprecio mucho las conversaciones de la vida que tuvimos tomando un café. Fue realmente un honor trabajar con usted.

Finalmente, agradezco al proyecto FONDECYT 1231599 por financiar esta tesis.

“Adiós, adiós, adiós, ciudad de mi querer, donde con ilusión mi carrera estudié. Adiós, mi universidad, cuyo reloj no volveré a escuchar...”

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Esta tesis tiene lugar en la *combinatoria extremal*, que en la actualidad, es una de las ramas más populares en la matemática discreta. Una figura destacada del área es el matemático húngaro Endre Szemerédi, cuyo logro más conocido es su demostración de lo que hoy se conoce como *teorema de Szemerédi* (1975), pero que antes era una famosa conjetura con décadas de antigüedad propuesta por Erdös y Turán. Sus aportes fueron tales que, en 2012, fue nombrado ganador del premio Abel con la siguiente cita:

> *"Por sus contribuciones fundamentales a las matemáticas discretas y la informática teórica, y en reconocimiento al profundo y duradero impacto de sus aportaciones sobre la teoría aditiva de números y la teoría ergódica."*

Uno de los ingredientes en la demostración del teorema de Szemerédi es el hoy denominado *lema de regularidad*, el cual se ha singularizado como un potente instrumento con múltiples aplicaciones y ha sido analizado desde diversas perspectivas. Antes del lema de regularidad, los grafos se consideraban como objetos carentes de estructura, después de todo, al especificar un grafo se decide para cada par de vértices si unirlos con una arista, y no hay restricción en absoluto sobre la desición. No obstante, Szemerédi notó que con la aleatoriedad se puede dar una descripción estructural útil a cualquier grafo completamente arbitrario. De manera muy general, el lema dice lo siguiente: dado cualquier grafo, existe una forma de dividir sus vértices en un número finito de conjuntos de tal manera que si se observan las aristas que unen a dos de esos conjuntos, parecen haber sido elegidas al azar. En otras palabras, cada grafo está compuesto por un número acotado de “grafos similares a aleatorios”. Esto nos indica que se puede dar una buena descripción de un grafo utilizando una cantidad pequeña de datos, puesto que una vez se han encontrado los conjuntos que proporciona el lema, solo hay que decir aproximadamente cuántas aristas hay entre cada par de esos conjuntos, y sabemos de antemano que estarán distribuidas de manera que parezcan aleatorias.

La tesis se divide esencialmente en tres partes. En la primera de ellas, se establecen las bases para las dos siguientes, abordando conceptos elementales de la teoría clásica y espectral de grafos, álgebra lineal, y la noción de un grafo aleatorio. La segunda, fundamenta la frase “grafos similares a aleatorios” con la idea de *cuasi-aleatoriedad*, es decir, el estudio de estructuras discretas deterministas que tienen propiedades con comportamientos esperados según su contraparte aleatoria. En particular, se presenta y demuestra rigurosamente el célebre teorema de Chung, Graham y Wilson, el cual entrega una extensa lista de propiedades equivalentes a la noción de cuasi-aleatoriedad. Por último, en la tercera parte, se exponen dos demostraciones del lema de regularidad de Szemerédi; la versión clásica vía *incremento de energía*, y otra propuesta por Terence Tao usando un enfoque espectral. Seguido de esto, se estudia cómo utilizar el lema de regularidad en dos resultados particulares, los cuales prueban de manera independiente un caso particular del teorema de Szemerédi, el teorema de Roth.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 1.1 repasa las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 1.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 1.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 2.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero, recuerde que la DCS establece que todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \right)^2 . \tag{1.1}$$

Entonces, si $\boldsymbol{b} = (1, ..., 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right)^2 . \tag{1.2}$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, ..., \alpha_k > 0$ y $\beta_1, ...\beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}. \tag{1.3}$$

Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n:

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) \to 0$, se dice que $f = o(g)$.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

1.1. Teoría de grafos

Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, ..., n\}$. También, si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de r elementos de S.

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices**, y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Dado un grafo G, se escribe $V(G)$ como su conjunto de vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de aristas presentes en el grafo.

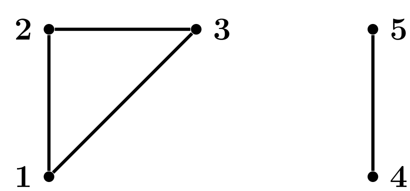


Figura 1.1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a v (o viceversa) si y solamente si $uv \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente disjuntos, se define el conjunto de tuplas que forman una arista en G de la siguiente manera:

$$e(X,Y) := \Big|\{(x,y) \in X \times Y : xy \in E\}\Big|. \tag{1.4}$$

Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X,Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y, y cuando $X \cap Y \neq \emptyset$, $e(X,Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en $X \cap Y$. Se entenderá por **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices adyacentes a u, es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \tag{1.5}$$

Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X, se define el **grado** de un vértice $u \in V$ con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente manera:

$$\deg(u;Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

Una propiedad elemental en teoría de grafos es la relación que guarda la suma del grado de todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

Proposición 1. *Dado un grafo $G = (V,E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \tag{1.6}$$

Demostración. Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u, y otra por v. $\square$

En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices del grafo $G = (V,E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesariamente diferentes mediante:

$$\operatorname{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu)\mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, la cual será de utilidad en la sección 2.

Proposición 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \operatorname{codeg}(v, v').$$

Demostración. Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv)\mathbb{1}_E(uv') \\
&= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu)\mathbb{1}_E(v'u) \\
&= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \operatorname{codeg}(v, v').
\end{aligned}$$

□

Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \operatorname{codeg}(u, v). \tag{1.7}$$

A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta tesis. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es k-**partito** si V se puede dividir en k subconjuntos disjuntos $V_1, V_2, ..., V_k$ tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$. En particular, a un grafo 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

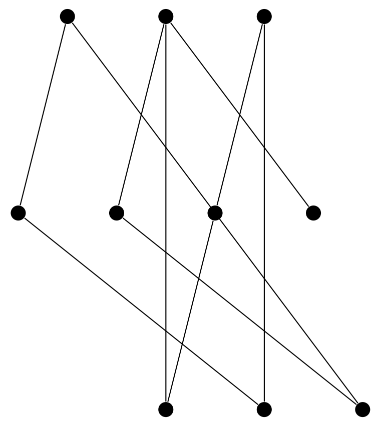


Figura 1.2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n, es un grafo en el cual todos sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta. Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito completo** con n y m elementos en sus respectivos conjuntos de vértices. Observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo d-**regular** es aquel que presenta todos sus vértices con grado d.

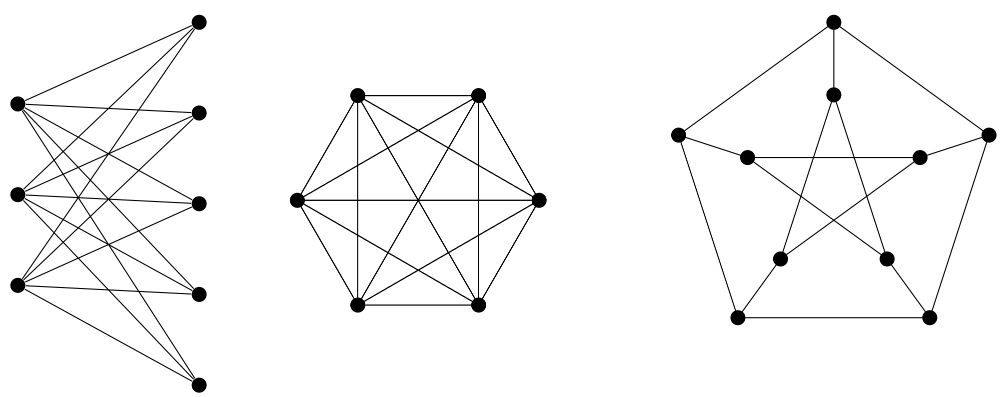
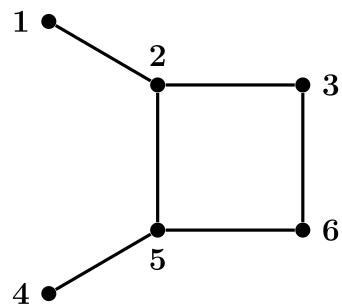


Figura 1.3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

Otro término relevante en este trabajo son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos $v_0, v_1, ..., v_k$ tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que esta posea.

- Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k, que coincide con v_0. Se denotará por C_k al ciclo de largo k.



125456 $\equiv$ caminata de largo 5.

23652 $\equiv$ ciclo de largo 4.

Figura 1.4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \to V(G)$ tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfos.

Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G, como la aplicación inyectiva $f : V(H) \to V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$. En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G.

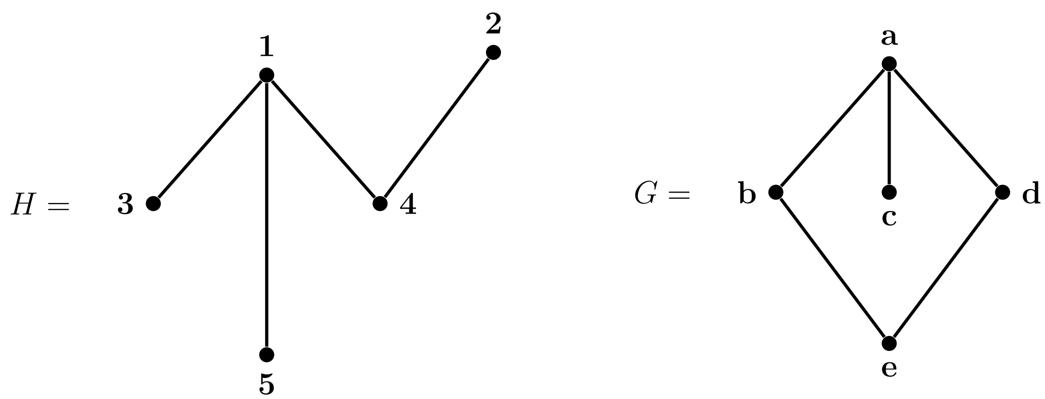


Figura 1.5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \to V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

1.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T a la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ con entrada 1 en la posición i. Además, $\|\cdot\|$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usales de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de los elementos de su diagonal principal. Esto es,

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de dichas matrices. En efecto,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \mathrm{Tr}(BA).$$

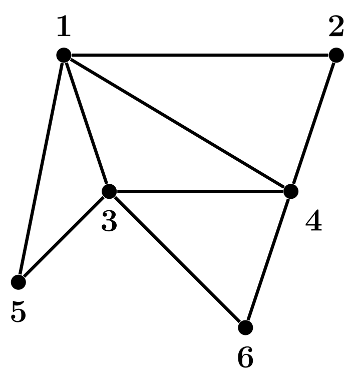
Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación, se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo y se goza de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

Definición 3. *Dado un grafo G sobre n vértices, se define su* ***matriz de adyacencia*** $A_G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *de la siguiente manera:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A.

$G =$



$$A_G = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.6: Ejemplo de la representación de un grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A, se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

.

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 3, es que nos permite reescribir la ecuación (1.4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{v}_X^T A \boldsymbol{v}_Y. \tag{1.9}$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\boldsymbol{v}_X = \sum_{i \in X} \boldsymbol{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t-ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j.

Proposición 4. *Sea A la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$. La (i, j)-ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t, cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.*

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier caminata de largo $t+1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j, digamos k. Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t+1$ desde i hasta t es exactamente

$$\sum_{k\in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A, se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t en el grafo por medio de la traza, $\mathrm{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\mathrm{Tr}(A^2) = 2e_G$. Con esencialmente la misma demostración, se enuncia el siguiente corolario que nos será de utilidad más adelante.

Corolario 5. *Sea la matriz cuadrada* $F = (f_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*, entonces* $\mathrm{Tr}(F^2) = \sum_{(i,j)\in[n]^2} f_{ij}^2$.

Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el vector no nulo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular. Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G, siempre será con respecto a su matriz de adyacencia A. Por ejemplo. si G es un grafo d-regular, entonces con la igualdad (1.8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G.

Proposición 6. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos* *valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios define una base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio de A y $\boldsymbol{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su conjugado (denotado por $\overline{z}$ al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{cc} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} & A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \overline{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x} = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 & \boldsymbol{x}^T A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2. \end{array}$$

Además, como A es simétrica,

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^T\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T A\overline{\boldsymbol{x}}.$$

Así, ya que $\boldsymbol{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \overline{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios de A son números reales.

Por otro lado, considere $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A^T\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mu\boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

De esta manera, $\lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ si y solamente si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de A, defina $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que $\mathcal{B}$ constituye una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Para esto, sean $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + ... + c_n\boldsymbol{u}_n = 0.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por $\boldsymbol{u}_i^T$,

$$\boldsymbol{u}_i^T(c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_n\boldsymbol{u}_n) = c_i\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. □

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 7. *(Teorema espectral) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que*

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T. \tag{1.10}$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A, y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A.

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (1.10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe cómo se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^TP)DP^T = PD^2P^T.$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^kP^T$. Esta propiedad resulta altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición 8 y el Corolario 9 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios del mismo.

Proposición 8. *La traza de toda matriz simétrica* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es igual a la suma de sus valores propios.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sus valores propios, y $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_i.$$

Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T \right) \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|\boldsymbol{v}_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.
\end{aligned}$$

□

El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de una matriz real simétrica.

Corolario 9. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matriz simétrica y* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sus valores propios, entonces se cumple* $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Demostración. El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}([PDP^T]^k) = \mathrm{Tr}(P[D^kP^T]) = \mathrm{Tr}([D^kP^T]P) = \mathrm{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

□

De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se simplifica a solo calcular la suma de la k-ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante, en la sección 2, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left|\binom{G}{C_k}\right| = \mathrm{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k + o(n^k) \tag{1.11}$$

Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

Teorema 10. *(Teorema de Courant-Fischer) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, y $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,*

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\{\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_{k-1}\} \\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\{\boldsymbol{v}_{k+1},...,\boldsymbol{v}_{n}\} \\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

Corolario 11. *Sea λ_1 el valor propio más grande de la matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\lambda_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Demostración. Si $\boldsymbol{v}_1$ un vector propio de A correspondiente a λ_1, entonces

$$\lambda_1 = \frac{\|A\boldsymbol{v}_1\|}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \leq \sup_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|x\|}.$$

Por otro lado, observando que el valor propio más grande de A^2 es λ_1^2, se concluye para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A^T A\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}\rangle \leq \lambda_1^n \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \lambda_1^2 \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

□

Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

Proposición 12. *El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d-regular, el primer valor propio coincide con d.*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 10:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \geq \frac{\langle \boldsymbol{1}, A\boldsymbol{1}\rangle}{\langle \boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (1.8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$ cada vez que G es un grafo d-regular. □

1.3. Grafos aleatorios

El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios.*

Intuitivamente, se podría pensar en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de seleccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n. En 1959, P. Erdös y A. Rényi [7] (también E. Gilbert [11]) proponen dicha selección de la siguiente manera: comenzando con un grafo sin aristas $G = ([n], \emptyset)$, decidir sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad p establecida. En cada repetición del proceso anterior se genera un nuevo grafo de n vértices, que contribuye a la creación del espacio de probabilidad conocido como $G(n, p)$, y se denomina modelo binomial. Entonces, considerando $\mathcal{G}^n$ como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 13. *(Modelo binomial) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad $(\mathcal{G}^n, \mathcal{P}(\mathcal{G}^n), \mathbb{P})$, con*

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G}(1-p)^{\binom{n}{2}-e_G} \quad , \quad \forall G \sim G(n, p).$$

Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad $\mathcal{P}_n$ **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \to 1$ cuando $n \to \infty$. Dicho esto, se probará que $G(n, p)$ posee una distribución de aristas en el siguiente sentido:

Proposición 14. *Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \sim G(n, p)$, entonces satisface con alta probabilidad la siguiente propiedad:*

$$\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon} := \{G \in \mathcal{G}^n : \big|e(A, B) - p|A||B|\big| \leq \varepsilon n^2 \ , \ \forall A, B \subset V(G)\}.$$

Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de Chernov. Existiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se utiliza el resultado para el caso en que cada variable aleatoria solo toma los valores 0 o 1, como se plantea en [15], en la ecuación (2.12) de la observación 2.5.

Teorema 15. *(Desigualdad de Chernov) Sean $X_1, ..., X_N$ variables aleatorias independientes tales que $X_i = 1$ con probabilidad p, y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, se satisface*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Con esto, damos paso a la demostración prometida.

Demostración Proposición 14. Dado $p \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n,p)$ y $A, B \subset V(G)$. Defina la variable aleatoria $X = e(A,B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X en sumas de variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2 \sum_{ab \in \binom{A \cap B}{2}} X_{ab} \quad , \text{ y } X_2 = \sum_{\substack{a \in A, b \in B \\ a \neq b \\ ab \notin \binom{A \cap B}{2}}} X_{ab}.$$

Al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p\tbinom{|A \cap B|}{2} \quad , \text{ y } \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p\left(|A||B| - |A \cap B| - 2\tbinom{|A \cap B|}{2}\right).$$

Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3}n^2$ sobre $i \in \{1,2\}$ para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(|X_i-\mu_i|>\frac{\varepsilon}{3}n^2\right) &\leq 2\exp\left(-\frac{2\left(\frac{\varepsilon}{3}n^2\right)^2}{|A||B|}\right)\\ &\leq 2\exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right). \qquad (1.12)\end{aligned}$$

Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1-\mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$ y $|X_2-\mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$, entonces

$$\Big|X_1+X_2-(\mu_1+\mu_2)\Big| \leq \frac{2}{3}\varepsilon n^2 \ , \ \forall A, B \in V(G).$$

Y así, como $\mu_1+\mu_2 = p(|A||B|-|A\cap B|) = p|A||B| \pm \varepsilon n$, se tendrá que todo $A, B \subset V(G)$ satisface $\Big|X - p|A||B|\Big| \leq \varepsilon n^2$.

Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}1-\mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon}) &= \mathbb{P}\left(\exists A, B\subset V(G) : \Big|X-p|A||B|\Big| > \varepsilon n^2\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B\subset V(G) : |X_1-\mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \vee |X_2-\mu_2| > \varepsilon n^2\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B\subset V(G) : |X_1-\mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \mathbb{P}\left(|X_2-\mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right)\\ &\leq \sum_{\substack{A\subset V(G)\\ B\subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_1-\mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \sum_{\substack{A\subset V(G)\\ B\subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_2-\mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right)\\ &\overset{(1.12)}{\leq} 2^{2n+1}\exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Cuasi-aleatoriedad

Trabajar con estructuras discretas aleatorias brinda una amplia gama de propiedades ideales y deseables, lo que las convierte en piezas fundamenteles tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo aleatorio binomial goza de una distribución uniforme de aristas, buenas propiedades y es robusto. El tema ahora es cómo capturar las propiedades esenciales de la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la noción de cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas discretas. En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características deterministas que son propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es interesante por sí misma, su estudio ha revelado profundas conexiones entre varias ramas de la matemática y ciencias de la computación, encontrando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría ergódica, geometría, y algoritmos y complejidad.

Como se verá a detalle más adelante en la sección 3, una de las razones principales por las cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica, es el hecho de que existe un teorema de partición que permite la aproximación de cualquier objeto discreto por otros cuasi-aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre lema de regularidad de Szemerédi, que establece que todo grafo se puede aproximar mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo la conexión entre un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por V. Rödl [20] y A. Thomason [27], y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas* para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo.

Definición 16. *Sea $p \in (0,1)$ y $(G_n)_{n\to\infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n vértices. Entonces el grafo G_n es* ***cuasi-aleatorio*** *si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$ se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,*

$$e(X,Y) = p|X||Y| + o(n^2). \tag{2.1}$$

En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece que, hasta el término de error $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo aleatorio $G(n,p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabilidad en un grafo aleatorio $G(n,p)$, sino que también se considera como una de sus características distintivas.

2.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson [4]. Ellos presentaron una extensa lista de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 2.

En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto a una demostración formal.

Teorema 17. *(Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0,1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p+o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son equivalentes:*

DISC_p : *Para todo* $X, Y \subseteq (G_n)$,

$$\Big|e(X,Y) - p|X||Y|\Big| = o(n^2).$$

DISC'_p : *Para todo* $X \subseteq V(G_n)$,

$$\Big|e(X) - p\tbinom{|X|}{2}\Big| = o(n^2).$$

COUNT_p : *Para cada grafo* H*, la cantidad de copias etiquetadas de* H *en* G_n *está dada por*

$$\big|\tbinom{G_n}{H}\big| = \left(p^{e(H)} + o(1)\right) n^{(H)}.$$

$\mathrm{COUNT}_{C4,p}$: *La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo 4 es*

$$\Big|\tbinom{G_n}{C_4}\Big| = (p^4 + o(1))n^4.$$

CODEG_p :

$$\sum_{u,v \in V(G_n)} \Big|\mathrm{codeg}(u,v) - p^2 n\Big| = o(n^3).$$

EIG_p : *Si* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *son los valores propios de la matriz de adyacencia de* G_n*, entonces*

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 17, se ha utilizado notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias para cada par de propiedades. Entonces, se replantean equivalentemente las propiedades con una versión cuantitativa, asociando algún parámetro de error ε en todo grafo específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande. Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 17, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ satisface DISC_p, y luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\mathrm{DISC}_p(\varepsilon): \quad e(X,Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface la propiedad $P_{x_1,\dots,x_k}$[1] si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1,\dots,x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad $Q_{y_1,\dots,y_\ell}$ implica la propiedad $P_{x_1,\dots,x_k}$ si y solamente si $P_{x_1,\dots,x_k}(\varepsilon)$ implica $Q_{y_1,\dots,y_\ell}(\delta)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1,\dots,y_\ell}(\delta)$ cada vez que satisfaga la propiedad $P_{x_1,\dots,x_k}(\varepsilon)$. Se desarrollará la demostración formal del Teorema 17 utilizando notación ε-δ, mostrando que cada par de propiedades $P_{x_1,\dots,x_k}$ y $Q_{y_1,\dots,y_\ell}$ son equivalentes entre sí con un cambio polinomial en el error, esto es, $P_{x_1,\dots,x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1,\dots,y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de constantes $C, c > 0$.

Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

La demostración del Teorema fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{DISC}'_p \arrow[r, Rightarrow, "\text{Prop. 20.}"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Prop. 18 y 19.}"] & \mathrm{COUNT}_p \arrow[r, Rightarrow, "\text{Prop. 21.}"] & \mathrm{COUNT}_{C4,p} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Prop. 24. y 25.}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Prop. 22.}"] & \mathrm{EIG}_p \\
\mathrm{DISC}_p & & \mathrm{CODEG}_p. \arrow[ll, Rightarrow, "\text{Prop. 23.}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Con esto en mente, damos paso a la demostración de cada proposición considerada en el esquema (2.2).

[1]Los parámetros $x_1, \dots, x_k$ pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 17 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

Proposición 18. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface* $\mathrm{DISC'}_p(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla con* $\mathrm{DISC}_p(\delta)$. *En particular,*

$$\mathrm{DISC}_p \Rightarrow \mathrm{DISC'}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces, considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\mathrm{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, se utiliza la propiedad $\mathrm{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p\frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p\binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

Las igualdades anteriores consideran, por definición, $e(X,X) = 2e(X)$, y la aproximación $\binom{|X|}{2} = \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. □

Proposición 19. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface* $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla con* $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$. *En particular,*

$$\mathrm{DISC'}_p \Rightarrow \mathrm{DISC}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$.

En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X,Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \tag{2.3}$$

Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza la propiedad $\mathrm{DISC}'_p(\delta)$ sobre la identidad (2.3) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X,Y) &= p\left(\binom{|X\cup Y|}{2} + \binom{|X\cap Y|}{2} - \binom{|X\setminus Y|}{2} - \binom{|Y\setminus X|}{2}\right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 20. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *y* $p \in (0,1)$*, existe* $\delta > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que el grafo* G *sobre* $n \geq n_0$ *vértices satisface* $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla con* $\mathrm{DISC}'_p(\delta)$*. En otras palabras,*

$$\mathrm{DISC}'_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0,1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V,E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la propiedad $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$.

Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su cantidad de aristas para probar que

$$\left|\binom{G}{F}\right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4 e_F \delta n^\ell. \tag{2.4}$$

Una vez probada la ecuación (2.4), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F\delta n^\ell \leq 4\binom{\ell}{2}\delta n^\ell \leq 4\delta\left(\frac{\ell^2}{2} + \delta\ell^2\right) n^\ell \leq 6\delta\ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left|\binom{G}{F}\right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G

que forman una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F. Es decir,

$$\left|\binom{G}{F}\right| = 2e_G(n-2)(n-3)\cdots(n-\ell+1).$$

Luego, si aplicamos la propiedad $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$ sobre V, se obtiene que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

Así, con $\left|\binom{G}{F}\right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea F un grafo con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (2.4) en cualquier grafo con una cantidad de aristas menor que e_F. Para desarrollar la inducción, suponga que $ij \in E(F)$ y considere la siguiente notación:

i) F^- corresponde al grafo producido por eliminar la arista ij de F.

ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista ij en F.

Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G, es decir, T^- se corresponde una aplicación inyectiva $f : V(F^-) \to V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez que $uv \in E(F^-)$. Entonces, considerando $e_{T^-} := f(i)f(j)$, se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera conveniente para utilizar la hipótesis inductiva como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\left|\binom{G}{F}\right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p\left|\binom{G}{F^-}\right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&\overset{(2.4)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

En este punto, es suficiente probar que el segundo sumando de la igualdad (2.5) es pequeño. Para esto, considere T^* una copia de F^*, y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar de F^- los vértices j e i respectivamente. Con esto, defina los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V \ : \ T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V \ : \ T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}
$$

Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$ añadida a T^* se obtiene una copia de F^-. Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad (2.5) convenientemente y utilizando la propiedad $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p]\right| &= \left|\sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p]\right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left|\sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p]\right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left|e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p|A_i^{T^*}||A_j^{T^*}|\right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^{\ell}.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. $\square$

Proposición 21. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\mathrm{COUNT}_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_{C_4,p}.$$

Demostración. Se trata de un caso particular de COUNT_p, en donde $H = C_4$ y $\delta < \epsilon$. $\square$

Proposición 22. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\mathrm{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{COUNT}_{C_4,p} \Rightarrow \mathrm{CODEG}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$.

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)$ y $\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz vista en (1.2). Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado (1.7) se obtiene la primera de las cotas:

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v) &= \sum_{x\in V(G)} \deg(x)^2 \\
&\overset{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n}\left(\sum_{x\in V(G)} \deg(x)\right)^2 \\
&= \frac{4e_G^2}{n} \\
&\geq \frac{4}{n}\left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2\right)^2 \\
&\geq p^2n^3 - 4\delta n^3.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)^2 = \left|\tbinom{G}{C_4}\right| \pm \delta n^4 \leq p^4n^4 + 2\delta n^4.$$

Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V(G)} \left|\operatorname{codeg}(u,v) - p^2n\right| &\overset{\text{DCS}}{\leq} n\left(\sum_{u,v\in V(G)} (\operatorname{codeg}(u,v) - p^2n)^2\right)^{1/2} \\
&= n\left(\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)^2 - 2p^2n\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v) + \sum_{u,v\in V(G)} p^4n^2\right)^{1/2} \\
&\leq n\left(p^4n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2n(4\delta n^3 - p^2n^3) + p^4n^4\right)^{1/2} \\
&= n((2+8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
&\leq 4\delta^{1/2}n^3.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 23. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{CODEG}_p \Rightarrow \mathrm{DISC}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0,1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$.

En primera instancia, note que la propiedad $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración en los grados de los vértices de G. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V(G)} \Big| \deg(x) - pn \Big| &\overset{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\overset{(1.7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \Big| \operatorname{codeg}(u,v) - p^2 n \Big| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3 \right)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/2} n^2.
\end{aligned}$$

Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de forma conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}\Big|e(X,Y)-p|X||Y|\Big| &= \left|\sum_{x\in X}(\deg(x;Y)-p|Y|)\right| \\ &\overset{DCS}{\leq} n^{1/2}\left(\sum_{x\in X}(\deg(x;Y)-p|Y|)^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo, lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera, usando a la cota proveniente de la concentración de los grados en los vértices de G, se prueba el resultado continuando desde (2.6):

$$\begin{aligned}\Big|e(X,Y)-p|X||Y|\Big| &\leq n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)}(\deg(x;Y)-p|Y|)^2\right)^{1/2} \\ &= n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)}\deg(x;Y)^2-2p|Y|\sum_{x\in V(G)}\deg(x;Y)+\sum_{x\in V(G)}p^2|Y|^2\right)^{1/2} \\ &= n^{1/2}\Bigg(2p^2n|Y|^2-p^2n|Y|^2+2p|Y||Y|pn-2p|Y||Y|pn \\ &\qquad +\sum_{y,y'\in Y}\operatorname{codeg}(y,y')-2p|Y|\sum_{y\in Y}\deg(y)\Bigg)^{1/2} \\ &= n^{1/2}\left(\sum_{y,y'\in Y}(\operatorname{codeg}(y,y')-p^2n)-2p|Y|\sum_{y\in Y}(\deg(y)-pn)\right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2}\left(\left|\sum_{y,y'\in Y}(\operatorname{codeg}(y,y')-p^2n)\right|+\left|2p|Y|\sum_{y\in Y}(\deg(y)-pn)\right|\right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2}\left(\sum_{u,v\in V(G)}\Big|\operatorname{codeg}(u,v)-p^2n\Big|+2p|Y|\sum_{x\in V(G)}\Big|\deg(x)-pn\Big|\right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2}\left(\delta n^3+6p\delta^{1/2}n^3\right)^{1/2} \\ &< 3\delta^{1/4}n^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 24. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface* $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla con* $\mathrm{EIG}_p(\delta)$. *En particular,*

$$\mathrm{EIG}_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_{C_4,p}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_p(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G, y $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ los valores propios de A.

Como vimos en la ecuación (1.11), la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4 que no son C_4 en G, se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas de C_4 en G. Con esto, junto al Lema 4 y el Corolario 9 se obtiene lo siguiente:

$$\left|\binom{G}{C_4}\right| = \mathrm{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \tag{2.7}$$

Luego, recordando que $\mathrm{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\mathrm{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \leq \max_{i\neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \mathrm{Tr}(A^2) \leq \delta n^2(pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \tag{2.8}$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\mathrm{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer valor propio y la cota mostrada en (2.8). Entonces, continuando desde la ecuación (2.7),

$$\left|\binom{G}{C_4}\right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

Proposición 25. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface* $\mathrm{EIG}_p(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla la propiedad* $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$. *Es decir,*

$$\mathrm{COUNT}_{C_4,p} \Rightarrow \mathrm{EIG}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G, y $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ los valores propios de A.

En lo que respecta al primer valor propio, sabemos por un lado que este es al menos el promedio de los grados gracias al Lema 12. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x\in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n}\left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2\right) \geq pn - 2\delta n. \tag{2.9}$$

Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 9 y la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 = \mathrm{Tr}(A^4) = \left|\binom{G}{C_4}\right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n. \tag{2.10}$$

La desigualdad (2.10) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4} n$, y en combinación con la cota vista en (2.9), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4} n$. Por último, observe por las cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned}
\max_{i\neq 1} |\lambda_1|^4 &\leq \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\
&= \mathrm{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\
&\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\
&= 4\delta n^4.
\end{aligned}$$

Así, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i\neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4} n$. $\square$

2.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas según la Definición 2 contempla verificar que si todo par de subconjuntos de vértices del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En otras palabras, se requiere comprobar un número exponencial de subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo $\mathrm{DISC'}_p$), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es que la propiedad más débil $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}$, que solo requiere que la condición de conteo sea verdadera para el ciclo C_4, sea suficientemente sólida para implicar la afirmación de conteo de la propiedad COUNT_p; que dice que el número de copias etiquetadas de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

A continuación mostraremos que no es suficiente que la condición de conteo sea verdadera para ciclos de largo inferior a 4 para determinar la cuasi-aleatoriedad de un grafo. Para ver esto, se realiza la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad de copias etiquetadas esperadas de C_3, pero que no cumple con las condiciones para ser cuasi-aleatorio.

Proposición 26. *Existe un grafo $G = ([n], E)$ con $\left(\frac{1}{3}\right)^3 n^3 + o(n^3)$ copias etiquetadas de C_3, pero que no es cuasi-aleatorio.*

Demostración. La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que la esperada en un grafo aleatorio $G(n, p)$ de copias etiquetadas de C_3, y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces independientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2,n_2} tales que su unión disjunta forma el grafo $G = K_{n_1} \cup K_{n_2,n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

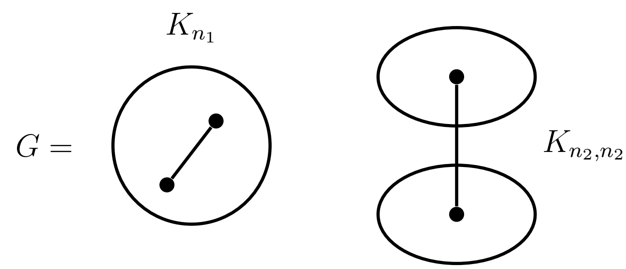


Figura 2.1: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo. Aquí, •—• representa las aristas permitidas dentro del grafo G.

En K_{n_1} y K_{n_2,n_2}, observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de C_3 son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} &, \quad \left|\tbinom{K_{n_1}}{C_3}\right| &\approx n_1^3 \quad ,\\
e_{K_{n_2,n_2}} &\approx \frac{(n-n_1)^2}{4} &, \quad \left|\tbinom{K_{n_2,n_2}}{C_3}\right| &= 0.
\end{aligned}
$$

Bajo esta configuración, se encontrará el parámetro $p \in (0,1)$ de manera tal que el grafo G posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de C_3 según lo haría un grafo aleatorio $G(n,p)$. Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
p\frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n-n_1)^2}{4}, \\
p^3 n^3 = n_1^3.
\end{cases}
$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Esta construcción, en efecto, presenta

$$
e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3}\binom{n}{2} + o(n^2),
$$

Como también,

$$
\left|\tbinom{G}{C_3}\right| = \left(\frac{n}{3}\right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 n^3 + o(n^3).
$$

Sin embargo, el grafo G no es cuasi-aleatorio debido a que no existen aristas entre K_{n_1} y K_{n_2,n_2} ni dentro de los conjuntos de vértices que conforman a K_{n_2,n_2}. □

Lo expuesto se enfoca en el caso muy particular en el que $p = \frac{1}{3}$, pero es importante destacar la técnica utilizada. En específico, la interpolación de dos grafos arbitrarios con una cantidad esperada menor y mayor de copias etiquetadas de C_3 según $G(n, p)$ produce un nuevo contraejemplo.

Más aún, es posible extender la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}$ a $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ con $t \geq 2$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_{2t},p} : \ \left|\binom{G_n}{C_{2t}}\right| = \left(p^{2t} + o(1)\right) n^{2t} \ , \ \forall t \geq 2.$$

Se expone un bosquejo de la demostración.

Proposición 27. *Sea $p \in (0,1)$ y $(G_n)_{n\to\infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ y EIG_p son equivalentes.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición 24 y 25 tras el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t} = \left|\binom{G_n}{C_{2t}}\right| + O(n^{2t-1}).$$

También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (2.8) como sigue:

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{2t} \leq \max_{i\neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \max_{i\neq 1} \lambda_i^{2t-2}\text{Tr}(A^2).$$

Con estas observaciones el resultado queda demostrado. □

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de largo par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los valores propios de G, eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d-regular. En nuestro contexto, se verá que toda secuencia $(G_n)_{n\to\infty}$ de grafos d-regular satisface la propiedad $\mathrm{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple con $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 28. *(Expander Mixing Lemma) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d-regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G. Si se denota:*

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X,Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ compuesta por los vectores propios de A. Utilizando la descomposición espectral, denotamos

$$A_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T \ \text{ y } \ \Delta = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T,$$

de manera que $A = A_1 + \Delta$.

Conforme a la ecuación (1.9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X,Y) = \boldsymbol{v}_X^T A \boldsymbol{v}_Y = \boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y + \boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y. \tag{2.12}$$

De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que el segundo el factor de error. Para ver esto, se representan los vectores $\boldsymbol{v}_X$ y $\boldsymbol{v}_Y$ según la base $\mathcal{B}$. Es decir,

$$\boldsymbol{v}_X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v}_Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{v}_i,$$

donde $\alpha_i = \boldsymbol{v}_X^T \boldsymbol{v}_i$ y $\beta_i = \boldsymbol{v}_Y^T \boldsymbol{v}_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}_X, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j \in X} \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{v}_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= |X|.
\end{aligned}$$

Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = |Y|$.

Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (2.12) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \right)^T \left(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j \right) \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i^T \right) \left(\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left(\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_1 \right) \left(\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_j \right) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$\boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T\right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{2.14}$$

Luego, dado que G es un grafo d-regular, $\lambda_1 = d$ y $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, ..., 1)^T$ son valor y vector propio respectivamente de A. En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \text{ y } \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

Así, la ecuación (2.13) resulta en $\boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y = \frac{d}{n}|X||Y|$.

Para el término de error, recordando la definición de λ, se desarrolla el valor absoluto de la ecuación (2.14) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y\right| &= \left|\sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i\right| \\
&\leq \lambda \left|\sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i\right| \\
&\overset{\text{DCS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2} \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{\left(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2\right)\left(\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2\right)} \\
&= \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (2.12) de la siguiente manera:

$$\left|e(X,Y) - \boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y\right| = \left|\boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y\right|.$$

□

El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d-regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\mathrm{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$. Entonces, si G satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 28:

$$\begin{aligned}\left|e(X,Y) - \frac{d}{n}|X||Y|\right| &\leq \lambda\sqrt{|X||Y|\left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\ &< \delta n\sqrt{|X||Y|} \\ &< \varepsilon n^2.\end{aligned}$$

Finalmente, en un grafo d-regular, la equivalencia entre las propiedades $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\mathrm{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (2.2).

Capítulo 3

Lema de regularidad de Szemerédi

El lema de regularidad de Szemerédi ha mostrado ser un resultado muy poderoso e importante en la teoría extremal de grafos. Sus aplicaciones no solo se restringen a la teoría de grafos, sino que también las tiene en teoría de números combinatorios, geometría discreta y ciencias de la computación. A continuación, un poco de historia de su origen.

P. Erdös y P. Turán [8] conjeturaron en 1936 que todo conjunto de números enteros suficientemente grande posee una progresión aritmética de longitud arbitraria, digamos k. En 1953, K. Roth [21] da el primer resultado positivo a la conjetura para el caso en que $k = 3$ utilizando análisis de Fourier, dando paso al teorema de Roth. Más adelante, en 1969, E. Szemerédi [24] extiende el teorema de Roth a progresiones aritméticas de largo 4 vía métodos combinatorios. Seis años después, en 1975, Szemerédi [25] demuestra la conjetura de Erdös-Turán para progresiones aritméticas de longitud arbitraria, lo que se conoce actualmente como el teorema de Szemerédi.

Teorema 29. *(Teorema de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| > \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión aritmética de largo k no trivial cada vez que $n \geq n_0$.*

La demostración que propone Szemerédi es considerada una obra maestra del razonamiento combinatorio. El siguiente esquema entrega una noción de la complejidad de la idea.

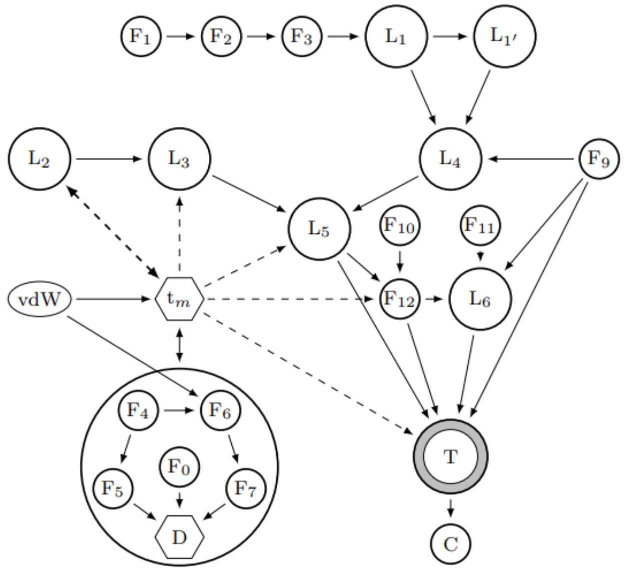


Figura 3.1: El esquema representa el diagrama de flujo utilizado en la demostración del teorema de Szemerédi ([25], página 202). Algunos de los símbolos involucrados significan lo siguiente: $F_k \equiv$ Hecho k, $L_k \equiv$ Lema k, $T \equiv$ Teorema, $C \equiv$ Corolario, $D \equiv$ Definiciones varias, etc.

Probablemente la dificultad de tal demostración motivó a otros matemáticos en encontrar nuevas formas de probar el teorema. Poco después, en 1977, H. Furstenberg [10] obtiene una demostración fundamentada en la teoría ergódica. También, en 2001, T. Gowers [13] entrega una tercera demostración por medio de análisis de Fourier, extendiendo el camino iniciado por Roth para progresiones aritméticas de largo 3.

En esta tesis, nos enfocaremos en uno de los elementos que compone la demostración entregada por Szemerédi del Teorema 29, el hoy conocido como *lema de regularidad de Szemerédi*. A grandes rasgos, el lema dice que el conjunto de vértices de todo grafo puede ser particionado en una cantidad finita de partes que muestran comportamientos *regulares* (o cuasi-aleatorios) entre la mayoría de los pares de partes. Este hecho permite entender cualquier grafo con menos información, y se aprovechan cada una de las propiedades equivalentes vistas en el Teorema 17.

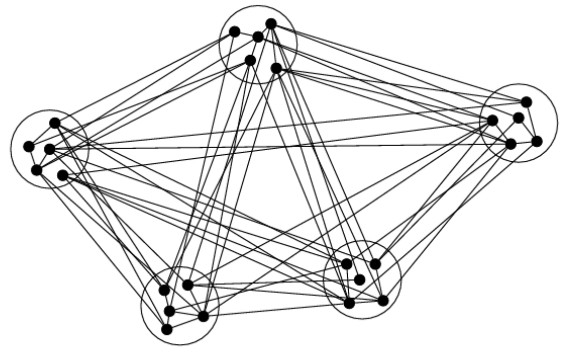


Figura 3.2: Ejemplo ilustrativo con cinco partes del resultado del lema de regularidad de Szemerédi sobre un grafo.

Hasta enunciar formalmente el lema de regularidad, se definirán los conceptos necesarios para su buena comprensión. Dado un grafo G y los subconjuntos de vértices $X, Y \subset V(G)$, se define la **densidad de aristas** entre X e Y de la siguiente manera:

$$d(X,Y) = \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}. \tag{3.1}$$

Diremos que $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ es una **partición** del conjunto X si:

i) $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$.

ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i, j \in [k]$.

Cuando $|X_1| \leq |X_2| \leq ... \leq |X_k| = |X_1| + 1$, llamaremos a $\mathcal{P}$ como una **equipartición**. En particular, cada parte posee $\lceil |X|/k \rceil$ o $\lfloor |X|/k \rfloor$ elementos.

También, es necesario conocer en qué sentido los pares de partes entregados por el lema son regulares.

Definición 30. *Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X,Y) es un **par ε-regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple*

$$\Big| d(A,B) - d(X,Y) \Big| \leq \varepsilon.$$

Cuando (X, Y) no es un par ε-regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\Big|d(A, B) - d(X, Y)\Big| > \varepsilon$.

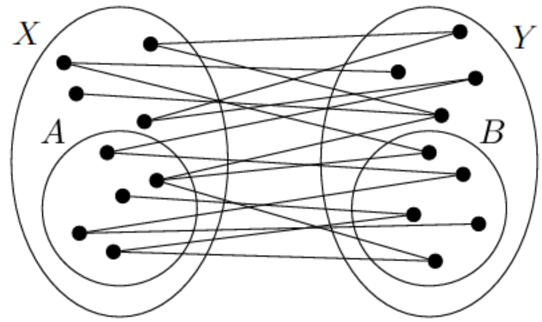


Figura 3.3: Ejemplo del par (X, Y) ε-regular, cuando $X \cap Y = \emptyset$.
Las densidades $d(X, Y)$ y $d(A, B)$ no varían demasiado.

Notaremos que la noción de un par ε-regular es, de hecho, una analogía de la propiedad $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$ y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\Big|e(X, Y) - p|X||Y|\Big| = o(|U||W|)\ ,\ \forall X \subset U,\ \forall Y \subset W. \tag{3.2}$$

En efecto, si (U, W) es un par ε-regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que $|A| \geq \varepsilon|U|$ y $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε-regular no es suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

Luego, notando que $e(A, B) > d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W|$, se obtiene la analogía planteada con $p = d(U, W)$.

Por último, debemos saber la noción de regularidad en una partición del conjunto de vértices de un grafo.

Definición 31. *Dado un grafo G, una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ es una* ***partición ε-regular*** *si*

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[k]^2 \\ (V_i,V_j) \text{ no } \varepsilon-\text{regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon|V(G)|^2.$$

Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε-regular salvo una fracción ε de pares de vértices.

Note que si una partición ε-regular de k partes es en particular una equipartición, entonces a lo más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε-regular.

Ya con todo lo requerido, se enuncia formalmente el lema de regularidad.

Teorema 32. *(Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una partición ε-regular de a lo más M partes.*

Otra forma de encontrar el resultado es cuando todas las partes de la partición poseen aproximadamente el mismo tamaño.

Teorema 33. *(Regularidad de Szemerédi - Equipartición) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε-regular de su conjunto de vértices de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.*

Lo poderoso del lema de regularidad es que la cota de partes que entrega no depende del tamaño del grafo, sino que únicamente del parámetro ε. Esto se debe a que en grafos más grandes, el tamaño de las partes podría ser considerablemente mayor.

En la subsección 3.1 se demostrará rigurosamente el Teorema 32 desde una mirada clásica, y se expondrá la manera de probar el Teorema 33. Más adelante, en la sección 3.2, nos limitaremos a mostrar una forma novedosa e ingeniosa de demostrar el Teorema 32 desde una perspectiva espectral. Finalmente, la subsección 3.3 tiene el objetivo de demostrar de dos maneras diferentes el teorema de Roth utilizando el lema de regularidad de Szemerédi.

3.1. Demostración por incremento de energía

Se empleará una técnica llamada *argumento de incremento de energía*, la cual para todo grafo G, funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
2. Mientras la partición actual $\mathcal{P}$ no es ε-regular:
   (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε-regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad del par.
   (b) Refinar $\mathcal{P}$ utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par (V_i, V_j) no ε-regular para obtener $\mathcal{Q}$.
   (c) Actualizar $\mathcal{P}$ con $\mathcal{Q}$.

Siendo $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que $\mathcal{Q}$ **refina** a $\mathcal{P}$ si cada parte de $\mathcal{Q}$ está contenida en una parte de $\mathcal{P}$. En lo que resta de esta subsección, mostraremos que el algoritmo tiene un fin y que entrega una partición ε-regular en un número de iteraciones que solo depende de ε.

Definición 34. *(Energía) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer lugar*

$$q(X,Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X,Y)^2 = \frac{e(X,Y)^2}{n^2|X||Y|}.$$

Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, ..., X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, ..., Y_\ell\}$ de Y, se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

*Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$, se define su **energía** mediante*

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

Observe que en toda partición $\mathcal{P}$ de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{k} |V_i| \sum_{j=1}^{k} |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

La última observación es crucial en la demostración del Teorema 32, puesto que los Lemas 35, 36 y 37 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, y entregará una partición ε-regular. Dicho esto, procedemos a enunciar y demostrar cada uno de los lemas mencionados para probar clásicamente el Teorema 32.

El primero de los lemas, afirma que la energía de una partición no decrece bajo cualquier refinamiento arbitrario.

Lema 35. *Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, y $\mathcal{P}_X$ y $\mathcal{P}_Y$ particiones de X e Y respectivamente, entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son dos particiones de vértices de G, entonces $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que $\mathcal{P}'$ refina a $\mathcal{P}$.*

Demostración. Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, ..., X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, ..., Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente.

En primera instancia, se utiliza la desigualdad (1.3) proveniente de Cauchy-Schwarz para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X,Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i,Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\ &\overset{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} e(X_i,Y_j)\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}|X_i||Y_j|} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{e(X,Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^{k}|X_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\ell}|Y_j|\right)} \\ &= \frac{e(X,Y)^2}{n^2|X||Y|} \\ &= q(X,Y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, ..., \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de $\mathcal{P}$. Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} q(V_i, V_j) \overset{(3.3)}{\leq} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

□

Ahora, veremos que refinar un par (X,Y) no ε-regular de un grafo G, mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

Lema 36. *Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X,Y) no es un par ε-regular, existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que*

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X,Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos tales que el par (X, Y) no es ε-regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que evidencian la irregularidad del par (X, Y), y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon|X| \ \text{ y } \ |Y_1| \geq \varepsilon|Y|. \tag{3.4}$$

Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$, el cual por definición de par ε-regular, satisface

$$|\eta| > \varepsilon. \tag{3.5}$$

Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \tag{3.6}$$

Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \tag{3.7}$$

Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y, desarrollamos,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q(X_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2|X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_i||Y_j|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|}\right) \\
&\overset{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j)\right)^2}{\sum_{i+j>2}|X_i||Y_j|}\right) \\
&\overset{(3.6) \text{ y } (3.7)}{=} \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta|X_1||Y_1|. \tag{3.9}$$

Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (3.8) como sigue:

$$\begin{aligned}
n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
&\overset{(3.9)}{=} \frac{1}{|X_1||Y_1|}\left(\frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta|X_1||Y_1|\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\left(\frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X||Y|}e(X, Y) - \eta|X_1||Y_1|\right)^2 \\
&= \frac{|X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2}e(X, Y)^2 + 2\frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|}\eta e(X, Y) + \eta^2|X_1||Y_1| \\
&\quad + \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2}e(X, Y)^2 - 2\frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|}\eta e(X, Y) + \frac{\eta^2|X_1|^2|Y_1|^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2|X_1||Y_1|\left(1 + \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\right) \\
&\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2|X_1||Y_1|.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente, utilizando las cotas (3.4) y (3.5), podemos concluir desde la desigualdad (3.10),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X,Y)^2}{n^2|X||Y|} + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\ &= q(X,Y) + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\ &> q(X,Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε-regular por medio de sus subconjuntos que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε-regular de un grafo produce un aumento estricto de al menos ε^5 en la energía.

Lema 37. *Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ no ε-regular de $V(G)$. Entonces existe un refinamiento $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$, en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que*

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ una partición no ε-regular del conjunto de n vértices de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε-regular, existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que en cada V_i se podrían encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε-regular. Considere ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, ..., Q_k\}$ que refina a $\mathcal{P}$, en la que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos los subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε-regular (ver Figura 3.4). En consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

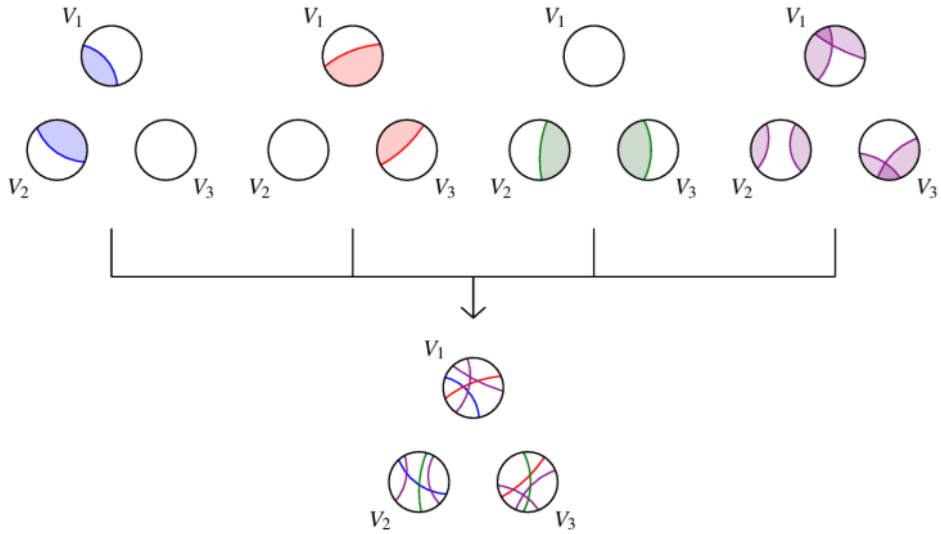


Figura 3.4: Ejemplo del refinamiento simultaneo por todos los subconjuntos que evidencian la irregularidad usando tres conjuntos de vértices ([28], página 59).

862 Para simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i,j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$.
863 Luego, como la partición $\mathcal{P}$ no es ε-regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j)\notin\Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \tag{3.11}$$

864 Así, junto a los lemas probados previamente, se da prueba al resultado de la
865 siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in\Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&\overset{\text{Lema } 35}{\geq} \sum_{(i,j)\in\Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\
&\overset{\text{Lema } 36}{\geq} \sum_{(i,j)\in\Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\
&= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\
&\overset{(3.11)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.
\end{aligned}
$$

* Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 33, cuando lo cambio se me descuadra :c * □

Este último Lema culmina lo que se necesita para dar prueba formal del lema de regularidad de Szemerédi mediante el argumento de incremento de energía.

Demostración del Teorema 32. Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G, elegimos inicialmente la partición trivial del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actualizando $\mathcal{P}$), aplicaremos el Lema 37 cada vez que la partición actual no sea ε-regular. Observe que por cada aplicación del Lema 37 se consigue un aumento de al menos ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será necesariamente una partición ε-regular debido a la cota de la energía.

Para una partición no ε-regular con k elementos, el Lema 37 encuentra un refinamiento de a lo más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar el Lema 37.

$$\begin{array}{llcll}
1^{\underline{\text{ra}}} \text{ Iteración:} & 1 & \to & 2 < 2^2 & \text{partes.} \\
2^{\underline{\text{da}}} \text{ Iteración:} & 2^2 & \to & \left(2^2\right) 2^{\left(2^2\right)} < 2^{2^{2^2}} & \text{partes.} \\
3^{\underline{\text{ra}}} \text{ Iteración:} & 2^{2^{2^2}} & \to & \left(2^{2^{2^2}}\right) 2^{\left(2^{2^{2^2}}\right)} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} & \text{partes.}
\end{array}$$

Finalmente, como el algoritmo debe terminar luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad de partes al final del proceso será

$$M(\varepsilon) \leq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

□

Desde ahora en adelante, vamos a definir y considerar una *torre de altura* k de la siguiente manera:

$$\text{torre}(k) := \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{Altura } k.$$

Durante la demostración del Teorema 32 se utilizó una cota que podría parecer exagerada para encontrar la cantidad de partes que devuelve el algoritmo implementado, por sobre todo, considerando lo rápido que crece a medida que ε se hace más pequeño. Sorprendentemente, en 1997, T. Gowers [12] prueba que tal límite inferior de partes es necesario. Más precisamente, mostró que es posible encontrar una constante $c > 0$ tal que para todo suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$, existe un grafo sin partición ε-regular siempre que posea una cantidad menor que $\text{torre}(\lceil \varepsilon^{-c} \rceil)$ partes (ver G. Moshkovitz y A. Shapira [19] para una demostración corta).

Finalmente, se expone la forma de probar el Teorema 33. La idea de la demostración consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Entonces, para todo grafo G, la modificación del algoritmo es la siguiente:

1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria $\mathcal{P}$ de $V(G)$ con m_0 partes.
2. Mientras la partición actual $\mathcal{P}$ no es ε-regular:
   (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε-regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de los pares.
   (b) Refinar $\mathcal{P}$ usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener la partición $\mathcal{Q}$, cual divide cada parte de $\mathcal{P}$ en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.
   (c) Modificar la partición $\mathcal{Q}$ refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$, dada alguna elección apropiada del entero $m = m(|Q|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de $\mathcal{Q}$ que no fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
   (d) Actualizar $\mathcal{P}$ con la modificación de $\mathcal{Q}$.

El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G. En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande. En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición de a lo más torre$(\lceil \varepsilon^{-5} \rceil)$ partes.

3.2. Demostración espectral

En 2012, T. Tao [26] publica en su blog una prueba del lema de regularidad de Szemerédi usando la descomposición espectral de la matriz de adyacencia. La idea original de la demostración proviene de los autores A. Frieze y R. Kannan [9], a quienes Tao les da el crédito en su publicación. Más adelante, en 2013, S. Cioba y R. Martin [5] escribieron la demostración con más detalles. La prueba que se expone en esta sección está basada esencialmente en la publicación de Cioba y Martin.

Demostración espectral del Teorema 32. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$F(\ell) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^{4\ell} \right\rceil .$$

Denotaremos por $F^{(i)}$ a la i-ésima composición de F con ella misma, y escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Sea $G = ([n], E)$ un grafo con $n \geq n_0$ vértices, y A su matriz de adyacencia. Ordenamos los valores propios $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$ de A de manera decreciente y consideramos $\boldsymbol{u}_1, ...\boldsymbol{u}_n$ los vectores propios correspondientes, que forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Por la Proposición 4 y el Corolario 9, se satisface

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1^2 = 2e_G \leq n^2. \tag{3.12}$$

De lo anterior, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^{i} \lambda_j^2 \leq n^2$, se encuentra la cota

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}} \ , \ \forall i \in [n]. \tag{3.13}$$

Consideramos también los intervalos $I_1, \ldots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \subset [n]$ definidos por

- $I_1 = \{1, 2, \ldots, F^{(1)}(1) - 1\}$ y

- $I_k = \{F^{(k-1)}(1), \ldots, F^k(1) - 1\}$ para todo $k = 2, \ldots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil}$.

Con esta construcción, debe existir un natural $1 \leq L \leq \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil$ que cumple con

$$\sum_{L \leq j < F(L)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2, \tag{3.14}$$

porque de lo contrario, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geq \sum_{k=1}^{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \sum_{i \in I_k} \lambda_i^2 > \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil \cdot \varepsilon^3 n^2 > n^2,$$

que contradice la desigualdad (3.12).

Ahora, usando L, separamos la matriz A en tres matrices simétricas:

$$A = S + F + Q,$$

donde la matriz S se intepretará como la componente *estructural*,

$$S = \sum_{i<L} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T,$$

la matriz F como la componente de *error*,

$$F = \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T,$$

y la matriz Q como la componente *cuasi-aleatoria*,

$$Q = \sum_{i \geq F(L)} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T.$$

Usaremos los vectores propios $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_{L-1}$ de S para definir una partición de $V(G)$ como mostraremos a continuación. Consideramos el intervalo de $\mathbb{R}$ de longitud

$2\sqrt{(L/\varepsilon)} \cdot n^{-1/2}$ centrado en el origen y lo particionamos en $t = 2(L/\varepsilon)^2$ subintervalos $J_1, ..., J_t$ de longitud $(\varepsilon/L)^{3/2} n^{-1/2}$ cada uno. Luego, clasificamos los vértices $v \in V(G)$ según su valor $\boldsymbol{u}_i(v)$ de la siguiente manera:

$$V_i^j = \left\{ v \in V(G) : \boldsymbol{u}_i(v) \in J_j \right\}, \; 1 \leq j \leq t.$$

Con esto, tomamos el refinamiento de todos estos conjuntos $\left\{ V_i^j \neq \emptyset : i \in [L-1], j \in [t] \right\}$ para obtener los conjuntos $V_0, V_1, ..., V_M$, en donde $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$. El resultado anterior considera un conjunto excepcional de vértices V_0 que está definido como sigue:

$$V_0 = \left\{ v \in V(G) : |\boldsymbol{u}_i(v)| > \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} n^{-1/2} \text{ para algún } i \in [L-1] \right\}.$$

Mostraremos que el conjunto excepcional V_0 es suficientemente pequeño. En efecto, observando que

$$L - 1 = \sum_{i=1}^{L-1} \|\boldsymbol{u}_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{v \in V(G)}^{n} \boldsymbol{u}_i(v)^2 \geq |V_0| \left(\frac{L}{\varepsilon n} \right),$$

se determina que $|V_0| < \varepsilon n$.

Probaremos que la partición construida del conjunto de vértices del grafo $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, ..., V_M\}$ es ε-regular. Comenzamos identificando los pares excepcionales. Para esto, sea $F = (f_{xy})$ y defina

$$\Sigma_F = \left\{ (i,j) : \sum_{(x,y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon |V_i||V_j| \right\}$$

Entonces, por la definición de F y el Corolario 5, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^3 n^2 \geq \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i^2 = \operatorname{Tr}(F^2) = &\sum_{(x,y)\in V(G)^2} f_{xy}^2 \\
\geq &\sum_{(i,j)\in\Sigma_F} \sum_{(x,y)\in V_i\times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon \sum_{(i,j)\in\Sigma_F} |V_i||V_j|.
\end{aligned}
$$

y por consecuencia

$$
\varepsilon^2 n^2 \geq \sum_{(i,j)\in\Sigma_F} |V_i||V_j|. \tag{3.15}
$$

Además, sea

$$
\Sigma_Q = \Big\{(i,j) : \text{mín}\{|V_i|, |V_j|\} < \frac{\varepsilon}{M} n\Big\} \cup \big\{(i,j) : i = 0 \text{ o } j = 0\big\},
$$

y observe que

$$
\sum_{(i,j)\in\Sigma_Q} |V_i||V_j| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M} n + 2|V_0| n < 4\varepsilon n.
$$

Ahora, sea $(i,j) \notin \Sigma_F \cup \Sigma_Q$, y $d_{ij} = d(V_i, V_j)$ la densidad del par (V_i, V_j). Entonces, dado los subconjuntos $X \subset V_i$ e $Y \subset V_j$, note la siguiente descomposición:

$$
\begin{aligned}
\Big|e(X,Y) - d_{ij}|X||Y|\Big| &= \Big|\boldsymbol{v}_X^T A \boldsymbol{v}_Y - d_{ij}|X||Y|\Big| \\
&\leq \Big|\boldsymbol{v}_X^T S \boldsymbol{v}_Y - d_{ij}|X||Y|\Big| + \Big|\boldsymbol{v}_X^T F \boldsymbol{v}_Y\Big| + \Big|\boldsymbol{v}_X^T Q \boldsymbol{v}_Y\Big|.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

En este punto, el objetivo es encontrar cotas para cada uno de los sumandos anteriores.

Para comenzar, por la definición de Σ_F y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene la primera de las cotas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{v}_X^T F \boldsymbol{v}_Y\right|^2 = \Big|\sum_{(x,y)\in X\times Y} f_{xy}\Big|^2 &\overset{\text{DCS}}{\leq} \Big(\sum_{(x,y)\in X\times Y} f_{xy}^2\Big)|X||Y| \\ &\leq \varepsilon^2|V_i||V_j||X||Y| \leq \varepsilon^2|V_i|^2|V_j|^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para la próxima cota, debemos observar por la construcción de Q y el Teorema 10 que

$$\left|\boldsymbol{v}_X^T Q \boldsymbol{v}_Y\right| \overset{\text{DCS}}{\leq} \|\boldsymbol{v}_X\|\|Q\boldsymbol{v}_Y\| \leq \|\boldsymbol{v}_X\|\|\boldsymbol{v}_Y\|\frac{n}{\sqrt{F(L)}} = \sqrt{|X||Y|}\frac{n}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}}.$$

Además, como $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$, concluimos de la elección de $F(\cdot)$ que $F(L) \geq \frac{1}{\varepsilon^6}\left(\frac{2L^2}{\varepsilon^2}\right)^{4L} \geq \frac{1}{\varepsilon^6}M^4$. Y así, cuando $(i,j) \neq \Sigma_Q$, se tiene

$$\left|\boldsymbol{v}_X^T Q \boldsymbol{v}_Y\right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{M^2|V_i||V_j|}{\varepsilon^2\sqrt{F(L)}} \leq \varepsilon|V_i||V_j|. \tag{3.18}$$

Por último, para la tercera cota, analizamos $S = (s_{xy})$. Sean s_{ab} y s_{cd} los valores mínimo y máximo de todos los s_{xy} sobre $(u,v) \in V_i \times V_j$. Entonces,

$$\begin{aligned} s_{cd} - s_{ab} &= \sum_{i<L} \lambda_i \boldsymbol{u}_i(c)\boldsymbol{u}_i(d) - \lambda_i \boldsymbol{u}_i(a)\boldsymbol{u}_i(b) \\ &\leq \sum_{i<L} |\lambda_i| \Big|\boldsymbol{u}_i(c)\boldsymbol{u}_i(d) - \boldsymbol{u}_i(a)\boldsymbol{u}_i(d) + \boldsymbol{u}_i(a)\boldsymbol{u}_i(d) - \boldsymbol{u}_i(a)\boldsymbol{u}_i(b)\Big| \\ &\leq n\sum_{i<L} \Big|\boldsymbol{u}_i(d)\big(\boldsymbol{u}_i(c) - \boldsymbol{u}_i(a)\big) + \boldsymbol{u}_i(a)\big(\boldsymbol{u}_i(d) - \boldsymbol{u}_i(b)\big)\Big| \\ &\leq n\sum_{i<L} |\boldsymbol{u}_i(b)| \Big|\boldsymbol{u}_i(a) - \boldsymbol{u}_i(c)\Big| + |\boldsymbol{u}_i(c)| \Big|\boldsymbol{u}_i(b) - \boldsymbol{u}_i(d)\Big| \\ &\leq Ln \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{\varepsilon n}} \cdot \frac{\varepsilon}{L}\sqrt{\frac{\varepsilon}{Ln}} \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, como d_{ij} es el promedio de S sobre $V_i \times V_j$, tenemos que $s_{ab} \leq d_{ij} \leq s_{cd}$, y por ende, $|s_{xy} - d_{ij}| \leq s_{cd} - s_{ab}$ para cada $(u,v) \in V_i \times V_j$. Como resultado,

$$\left|\boldsymbol{v}_X^T S \boldsymbol{v}_Y - d_{ij}|V_i||V_j|\right| \leq \sum_{(x,y)\in X\times Y} |s_{xy} - d_{ij}| \leq (s_{cd} - s_{ab})|X||Y| \leq 4\varepsilon|X||Y|. \tag{3.19}$$

Utilizando las desigualdades (3.17), (3.18) y (3.19) en la expresión enunciada en (3.16) se concluye la demostración del teorema. □

3.3. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son abordadas con el *método de regularidad* que se describe en los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices de un grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** las aristas del que tengan un "mal comportamiento" según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
   (i) Irregularidad.
   (ii) Baja densidad.
   (iii) Al menos una de las partes demasiado pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio.

Para el último paso se utilizará un resultado análogo a la propiedad $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$ del Teorema 17, pero con el concepto de par ε-regular. Las aplicaciones que se estudiarán en esta tesis solo necesitan el caso en que $H = K_3$, el cual es conocido como lema de conteo de triángulos.

Lema 38. *(Lema de conteo de triángulos) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los conjuntos no necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares $(X, Y), (Y, Z)$ y (X, Z) son ε-regular. Entonces,*

$$\Big|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\}\Big| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Demostración. Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Proposición 20 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$. Cuando el grafo no posee aristas, entonces

$$\Big|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\}\Big| = |X||Y||Z|.$$

También, como vimos en (3.2), recordamos que la condición de un par ε-regular es equivalente a la propiedad $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ en grafos bipartitos para algún $p \in (0, 1)$. Entonces, cuando el grafo presenta solo una arista,

$$\Big|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\}\Big| = \left(d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|\right)|Z|.$$

Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$\Big|\{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}\Big| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del grafo $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la apliación inyectiva $\varphi : [3] \to V(T^-) \subset V$. Con esto, se desarrolla inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned}\Big|\{(x,y,z)\in X\times Y\times Z : xy,yz,xz\in E\}\Big| &= \sum_{T^-}\big[\mathbb{1}_E(e^-)+d(X,Z)-d(X,Z)\big]\\ &= d(X,Y)d(Y,Z)d(X,Z)|X||Y||Z|+\sum_{T^-}\big(\mathbb{1}_E(e^-)-d(X,Z)\big)\pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.\end{aligned} \tag{3.20}$$

En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (3.20) se corresponde con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton $\{2\}$ en G, y considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1^{T^*} &= \{x\in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1,2\},\{12\}) \text{ en } G\}.\\ A_3^{T^*} &= \{z\in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2,3\},\{23\}) \text{ en } G\}.\end{aligned}$$

De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X,Z) ε-regular con versión bipartita de la propiedad $\mathrm{DISC}_{d(X,Z)}(\varepsilon)$ vista en (3.2), se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{T^-}\big(\mathbb{1}_E(e^-)\big)-d(X,Z)\right| &\le \sum_{T^*}\left|\sum_{f\in A_1^{T^*}\times A_3^{T^*}}(\mathbb{1}_E(f)-d(X,Z))\right|\\ &= \sum_{T^*}\left|e(A_1^{T^*},A_3^{T^*})-d(X,Z)|A_1^{T^*}||A_3^{T^*}|\right|\\ &\le \sum_{T^*}\varepsilon|X||Z|\\ &\le \varepsilon|X||Y||Z|.\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (3.20) se prueba lo prometido. □

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X,Y) y (X,Z) son ε-regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε-regular para que el lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 38 (y Proposición 20), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H. Se enuncia sin demostración.

Lema 39. *(Lema de conteo de grafos) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, ..., V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε-regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, ..., v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es*

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^{k} |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^{k} |V_\ell|.$$

En las siguientes subsecciones se discutirán dos aplicaciones del método de regularidad para entregar dos demostraciones alternativas al teorema de Roth.

3.3.1. Eliminación de triángulos

El lema de eliminación de triángulos fue probado por los autores I. Ruzsa y E. Szemerédi [22] en 1976, y es una de las primeras aplicaciones del método de regularidad. La intuición del lema dice que todo grafo con *pocos* triángulos se puede convertir en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

Teorema 40. *(Lema de eliminación de triángulos) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 32 con tal elección para obtener la constante $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más δn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 32, se asegura la existencia de una partición ε_r-regular $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$, con $k \leq M$.

Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [k]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i y V_j cuando

(a) (V_i, V_j) no es un par ε_r-regular,

(b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

(c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{k}\varepsilon_r$.

De esta manera, como la partición es ε_r-regular, las aristas removidas por la condición (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[k]^2 \\ (V_i,V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[k]^2 \\ d(V_i,V_j)<(4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j)\in[k]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{k}\varepsilon_r$ vértices en a lo más k subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$k \cdot \frac{n}{k}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos. Para esto, con nuestra elección de δ, buscaremos formular la siguiente contradicción: si existe un triángulo en el grafo limpio G', el lema de conteo de triángulos asegura que en realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, como el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos, se podrá concluir que el grafo G' es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.

Dicho esto, estudiamos la cantidad de triángulos en G'. Dada la eliminación de aristas según la condición (a), cada par (V_i, V_j) es ε-regular, y por ende se satisface la hipótesis del Lema 38. Entonces, gracias a la ausencia de las aristas que cumplían con las condiciones (b) y (c),

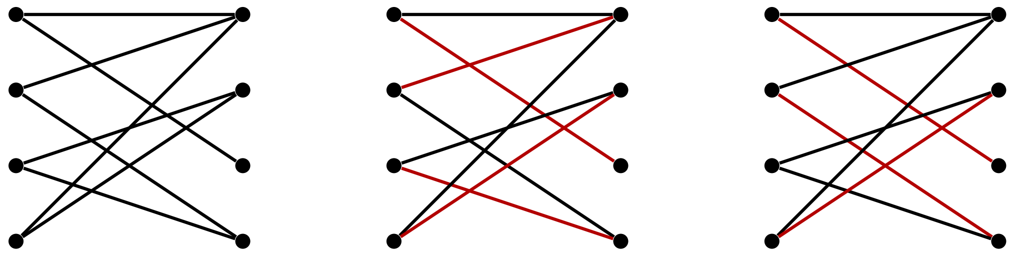
$$
\begin{aligned}
|\{(x,y,z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i,V_j)d(V_i,V_\ell)d(V_j,V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| \\
&\quad - 3\varepsilon_r |V_i||V_j||V_\ell| \\
&\geq \varepsilon_r |V_i||V_j||V_\ell| \\
&\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{k^3} \\
&> \delta n^3.
\end{aligned}
$$

Así, de la contradicción anterior, se determina que el grafo G es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas. $\square$

Otra forma de entender el Teorema 40 es de la siguiente manera: si se necesitan eliminar al menos εn^2 para hacer de G libre de trángulos, entonces G contiene al menos δn^3 triángulos.

3.3.2. Emparejamiento inducido

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $R \subset E$ es un **emparejamiento** en G si no existe un par de aristas en R que compartan algún vértice. Diremos que R es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y no existen un par de aristas en R que estén conectadas por una arista de G, es decir, no existen aristas en G entre cada par de vértices de R.



Grafo original G Emparejamiento en G Emparejamiento inducido en G

Figura 3.5: Ejemplo de un emparejamiento y un emparejamiento inducido.

La presente aplicación del método de regularidad responde a la pregunta: *¿Cuántas aristas puede tener un grafo que es la unión de emparejamientos inducidos?*. * No sabría si aquí agregar un comentario referente a que la intuición dice que deben ser "pocas" aristas, pero la prueba no es trivial *

Teorema 41. *(Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 32 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema 32, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r-regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando estos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G'. En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2} n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido R en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2} n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrán a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

Denotando por $V(R)$ al conjunto de vértices que componen las aristas de R, se define $U_i := V_i \cap V(R)$ como el subconjunto de vértices de R que comparte elementos con V_i, y $U := \bigcup_{i\in[k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(R)$ que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i. Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de $V(R)$, pues

$$\sum_{i\in[k]} |U_i| < \sum_{i\in[k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

De esta manera, recordando que $|V(R)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$. Además, como también $|R| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una arista en R. Luego, dada la limpieza de G, dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r-regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \tag{3.21}$$

Ahora, como R es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$ debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

Sin embargo, la desigualdad (3.21) implica que

$$
\begin{aligned}
e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\
&\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\
&\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\
&\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\
&> |U_t|.
\end{aligned}
$$

La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a R, por lo que se contradice la hipótesis de que R es un emparejamiento inducido. □

Otra mirada del Teorema 41 es la siguiente: si G posee al menos εn^2 aristas, entonces G tiene al menos un emparejamiento no inducido.

3.3.3. Teorema de Roth

Como hemos visto en el comienzo de la sección 3, el teorema de Roth es un caso particular del teorema de Szemerédi, el cual en un principio fue demostrado utilizando análisis de Fourier.

Teorema 42. *(Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión aritmética no trivial de largo* 3.

En esta sección se entregarán dos demostraciones del teorema de Roth por medio del lema de regularidad de Szemerédi. Como el enunciado del Teorema 42 alude a la teoría de números, en ambas pruebas, la idea es traducir el problema al lenguaje de la teoría de grafos con la construcción de un grafo apropiado. La primera demostración se fundamenta en el Teorema 40.

Primera demostración del Teorema 42. Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $S \subset [n]$ con $|S| \geq \varepsilon n$ elementos. Escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Una manera natural de construir un grafo de n vértices utilizando el conjunto S, es definir una arista entre los vértices i y j si y solamente si $|i-j| \in S$. Sin embargo, con n elementos no podemos describir una progresión aritmética de largo 3 por medio de relaciones entre las aristas. Por esto, agregamos un poco de asimetría a la construcción. Para asegurar que las sumas siempre tengan la posibilidad de estar en S, consideramos el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$ son tales que $6n \geq n_0$. Las aristas de G son definidas de la siguiente manera:

1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in S$.
2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in S$.
3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in S$.

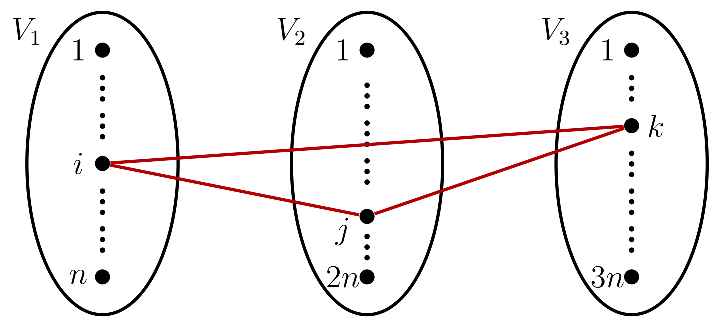


Figura 3.6: Esquema de relación entre un triángulo en G y una progresión aritmética de largo 3 en S.

Nótese que la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in S$, $k - j \in S$ y $\frac{k-i}{2} \in S$, o bien, $\left\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\right\}$ es una progresión aritmética de largo 3 en S con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$.

Diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $s \in S$ se satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = s$. Entonces, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, s) \in V_1 \times S$, la cantidad de estos es exactamente $n|S| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se pueden eliminar dos de ellos removiendo solo una arista. Por consecuencia, se tienen que eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos. Luego, utilizando el lema de eliminación de triángulos con $\frac{\varepsilon}{36}$, recibimos $\delta\left(\frac{\varepsilon}{36}\right)$, y aseguramos que existen al menos $\delta(6n)^3 = 216\delta n^3$ triángulos en G. De esta manera, existen al menos $216\delta n^3 - n^2$ triángulos no triviales. En conclusión, como $216\delta n^3 > n^2$, debe existir una progresión aritmética no trivial de largo 3 en S.

□

Para la segunda demostración del teorema de Roth, será necesario un resultado intermedio proporcionado por los autores M. Ajtai y E. Szemerédi [1]. Para su prueba, se utiliza el Teorema 41.

Teorema 43. *(Teorema de la esquina, Ajtai-Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a,b),(a+d,b),(a,b+d)\}$ para algún $a,b,d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $S \subset [n]^2$ con al menos εn elementos, y $n \geq n_0$.

Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de vértices $U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $W = \{w_1, ..., w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i,j) \in S.$$

Ahora, interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se define una relación entre pares de aristas de G de manera que se preserve cierta noción de distancia en la grilla. Esto es:

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia (cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E. En efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase u_iw_j y u_kw_j comparten el vértice w_j. Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que u_iw_j y u_kw_j son la misma arista.

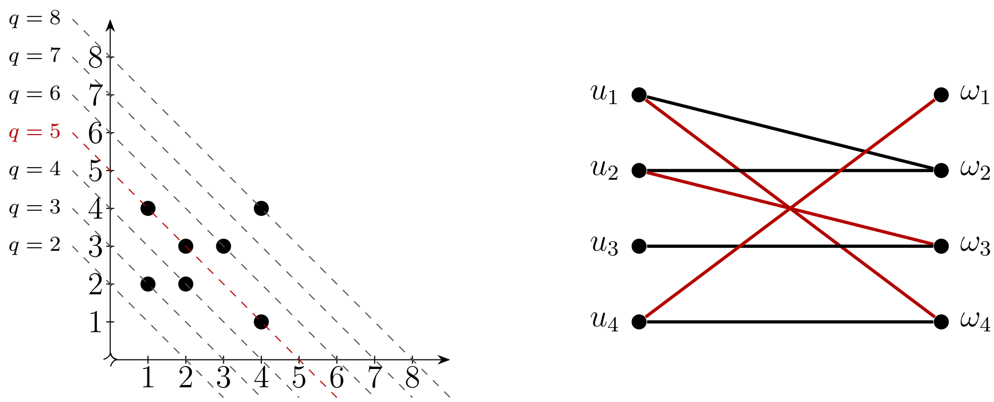


Figura 3.7: Ejemplo del emparejamiento generado por la clase de equivalencia asociada a $q = 5$, y $S = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,1),(4,4)\}$.

Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{4}(2n)^2$, el teorema de emparejamiento inducido asegura que existe al menos un emparejamiento no inducido. Esto significa que en al menos un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_iw_j \sim u_kw_\ell$ puede existir el trío de aristas u_iw_j, u_kw_ℓ y u_iw_ℓ. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i,j), (k,ℓ) y (i,ℓ) son elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

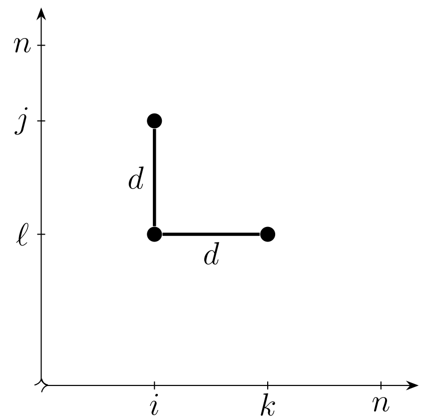


Figura 3.8: Esquema ilustrativo de la esquina formada en la demostración

Finalmente, la demostración del teorema se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para obtener $j = b + d$ y $k = a + d$. $\square$

El resultado anterior otorga lo necesario para la segunda demostración (J. Solymosi [23]) del teorema de Roth utilizando el lema de regularidad de Szemerédi.

Segunda demostración Teorema 42. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para $n \geq n_0$, sea $S \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in S\},$$

Observe que cada $s \in S$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = s$, permitiendo determinar que $|B| = n|S| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 43 asegura la existencia de elementos de la forma $\{(s, b), (s, b+d), (s+d, b)\}$ en B. Por consecuencia, se encuentra una progresión aritmética de largo 3 no trivial en A tomando $x = s - b$, e $y = d$. $\square$

Bibliografía

[1] Miklós Ajtai y Endre Szemerédi. “Sets of lattice points that form no squares”. En: *Stud. Sci. Math. Hungar* 9.1975 (1974), págs. 9-11.

[2] Béla Bollobás. *Random graphs*. Springer, 1998.

[3] Béla Bollobás. *Modern graph theory*. Vol. 184. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Fan R. K. Chung, Ronald L. Graham y Richard M. Wilson. “Quasi-random graphs”. En: *Combinatorica* 9 (1989), págs. 345-362.

[5] S CIOABA y RR MARTIN. “TAO’S SPECTRAL PROOF OF THE SZEMERÉDI REGULARITY LEMMA”. En: (2013).

[6] Reinhard Diestel. “Graph theory. fifth. vol. 173”. En: *Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin* (2018).

[7] P Erdös y A Rényi. “On random graphs I”. En: *Publ. math. debrecen* 6.290-297 (1959), pág. 18.

[8] Paul Erdös y Paul Turán. “On some sequences of integers”. En: *Journal of the London Mathematical Society* 1.4 (1936), págs. 261-264.

[9] Alan Frieze y Ravi Kannan. “The regularity lemma and approximation schemes for dense problems”. En: *Proceedings of 37th conference on foundations of computer science*. IEEE. 1996, págs. 12-20.

[10] Harry Furstenberg. “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”. En: *Journal d’Analyse Mathématique* 31.1 (1977), págs. 204-256.

[11] Edgar N Gilbert. “Random graphs”. En: *The Annals of Mathematical Statistics* 30.4 (1959), págs. 1141-1144.

[12] William T Gowers. “Lower bounds of tower type for Szemerédi’s uniformity lemma”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 7.2 (1997), págs. 322-337.

[13] William T Gowers. “A new proof of Szemerédi’s theorem”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 11.3 (2001), págs. 465-588.

[14] WT Gowers. “The work of Endre Szemerédi”. En: *Online* (2012). URL: http://www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php.

[15] Svante Janson, Tomasz Luczak y Andrzej Rucinski. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.

[16] János Komlós, Ali Shokoufandeh, Miklós Simonovits y Endre Szemerédi. “The regularity lemma and its applications in graph theory”. En: *Summer school on theoretical aspects of computer science* (2000), págs. 84-112.

[17] János Komlós y Miklós Simonovits. *Szemeredi”s Regularity Lemma and its applications in graph theory*. 1995.

[18] Michael Krivelevich y Benny Sudakov. “Pseudo-random graphs”. En: *More sets, graphs and numbers: A Salute to Vera Sos and András Hajnal*. Springer, 2006, págs. 199-262.

[19] Guy Moshkovitz y Asaf Shapira. “A short proof of Gowers’ lower bound for the regularity lemma”. En: *Combinatorica* 36.2 (2016), págs. 187-194.

[20] Vojtěch Rödl. “On universality of graphs with uniformly distributed edges”. En: *Discrete Mathematics* 59.1-2 (1986), págs. 125-134.

[21] Klaus F Roth. “On certain sets of integers”. En: *J. London Math. Soc* 28.104-109 (1953), pág. 3.

[22] Imre Z Ruzsa y Endre Szemerédi. “Triple systems with no six points carrying three triangles”. En: *Combinatorics (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 18.939-945 (1978), pág. 2.

[23] József Solymosi. “Note on a generalization of Roth’s theorem”. En: *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*. Springer, 2003, págs. 825-827.

[24] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression”. En: *Acta Mathematica Hungarica* 20.1-2 (1969), págs. 89-104.

[25] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression”. En: *Acta Arith* 27.199-245 (1975), pág. 2.

[26] Terence Tao. *The spectral proof of the Szemerédi regularity lemma*. [Consultado el 31 de marzo de 2024]. 2012. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2012/12/03/the-spectral-proof-of-the-szemeredi-regularity-lemma/`.

[27] Andrew Thomason. “Pseudo-random graphs”. En: *North-Holland Mathematics Studies*. Vol. 144. Elsevier, 1987, págs. 307-331.

[28] Yufei Zhao. *Graph theory and additive combinatorics: exploring structure and randomness*. Cambridge University Press, 2023.