

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN



1 Grafos cuasi-aleatorios y el Lema de regularidad 2 de Szemerédi

3 Felipe Andrés Sánchez Erazo

4 Profesor(a) Guía:
Hiệp Hàn

5 Trabajo de titulación para optar al
título profesional de Ingeniero
Matemático

6 Santiago - Chile

7 2024

8 © Felipe Andrés Sánchez Erazo.

9 Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra con fines académicos, por cual-
10 quier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica
11 del documento.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN



Grafos cuasi-aleatorios y el Lema de regularidad de Szemerédi

Felipe Andrés Sánchez Erazo

Trabajo de Titulación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial
de los requisitos exigidos para optar al título de **Ingeniero Matemático**.
Este trabajo de Graduación fue presentado bajo la supervisión del profesor guía
Dr. Hiệp Hàn, del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la
Facultad de Ciencia.

Dr. Hiệp Hàn
Profesor Guía

Dr. Marcos Kiwi Krauskopf
Profesor Informante

Pedro Marín Álvarez
Director del Departamento

Dr. Sebastián Barbieri Lemp
Profesor Informante

A mi abuelo, Sergio Sánchez

24 Agradecimientos

25 Primero quiero agradecer a mi madre, por ser una figura y pilar fundamental en
26 mi vida, que me ha brindado una comprensión y cariño que no se puede medir. A
27 mi padre, por su apoyo completamente incondicional en todas las decisiones que he
28 tomado, y por despertar mi curiosidad por los saberes de este mundo. A mi hermano,
29 mi compañero de viaje, mi cómplice, gracias por traer alegrías a cada lugar que vas.
30 Te amo y admiro mucho, y aunque este logro es personal, espero que solo sea uno de
31 muchos en nuestro andar.

32 También agradecer a los otros miembros de mi familia, quienes en todo momento
33 me dieron palabras de aliento, y que de algún u otro modo, fueron parte de mi
34 motivación en la elaboración de esta tesis.

35 Quiero dar una mención especial y profunda gratitud a mi amada, Lourdes. Sin
36 su constante apoyo, los días habrían sido más grises en el desarrollo de este trabajo.
37 Gracias por tu admirable empatía al entender mis problemas y tristezas, incluso
38 cuando yo no les hallaba. Te agradezco por hacer que mis momentos de alegrías
39 tengan muchos más colores.

40 Mil gracias a aquellas personas que fueron parte de mi etapa universitaria y de
41 la vida, hicieron que la travesía estuviese llena de momentos bellos. En particular,
42 agradecer a Rodrigo, infinito amigo, quien ha estado en todos los momentos más
43 importantes de mi vida, y esta vez no fue la excepción. Cristian, por mostrarme lo
44 lindas que pueden ser las coincidencias en la vida y la amistad duradera que a veces
45 traen consigo. Catalina, por el Apoyo, Risas, Afecto y Motivación en la recta final de

46 este trabajo. Ailine, por nuestras conversaciones terapéuticas y todas las veces que
47 me dijiste “Amigo, tú puedes”. Camilo, por mostrarme que la amistad puede ir más
48 allá que el ser compañeros de trabajo, por tu dedicación, y por ser un referente para
49 mí como profesional.

50 Doy gracias a mis amistades de la música por mantener viva esta gran pasión
51 que compartimos. En especial, a mis cofrades de la Tuna Mayor de Ciencia de la
52 Universidad de Santiago de Chile. ¡Aúpa Tuna!

53 Quiero agradecer a mi profesor guía Hiệp Hàn por su buena disposición, paciencia,
54 y su inmensa comprensión y calidad humana. Aprecio mucho las conversaciones de
55 la vida que tuvimos tomando un café. Fue realmente un honor trabajar con usted.

56 Finalmente, agradezco al proyecto FONDECYT 1231599 por financiar esta tesis.

57 *“Adiós, adiós, adiós, ciudad de mi querer, donde con ilusión mi carrera*
58 *estudié. Adiós, mi universidad, cuyo reloj no volveré a escuchar...”*

Índice general

59		
60	Agradecimientos	IV
61	Índice de figuras	VII
62	Introducción	1
63	1. Preliminares	3
64	1.1. Teoría de grafos	4
65	1.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos	9
66	1.3. Grafos aleatorios	16
67	2. Grafos cuasi-aleatorios	19
68	2.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson	19
69	2.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW	30
70	3. Lema de regularidad de Szemerédi	36
71	3.1. Demostración por incremento de energía	39
72	3.2. Demostración espectral	48
73	3.3. Aplicaciones	53
74	3.3.1. Eliminación de triángulos	55

75	3.3.2. Emparejamiento inducido	57
76	3.3.3. Teorema de Roth	60
77	Bibliografía	64

78 Índice de figuras

79	1.1. Ejemplo de un grafo	4
80	1.2. Ejemplo de un grafo 3-partito	6
81	1.3. Ejemplos de un grafo especial $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular	7
82	1.4. Ejemplo de una caminata y un ciclo en un grafo	8
83	1.5. Ejemplo de una copia etiquetada	8
84	1.6. Ejemplo de la matriz de adyacencia de un grafo	10
85	2.1. Esquema de un contraejemplo	31
86	3.1. Ilustración del procedimiento de refinamiento simultaneo	45
87	3.2. Ejemplo de un emparejamiento y un emparejamiento inducido	58
88	3.3. Esquema construcción grafo en demostración del teorema de Roth . .	61
89	3.4. Ejemplo de emparejamiento generado por una clase de equivalencia .	62
90	3.5. Esquema de esquina formada en el teorema de Ajtai-Szemerédi	63

Introducción

Los grafos cuasi-aleatorios y la aproximación regular son dos conceptos íntimamente relacionados. A grandes rasgos, un grafo cuasi-aleatorio es un grafo determinista que muestra el comportamiento que se esperaría de su contraparte aleatoria. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es un objeto de estudio interesante por sí mismo, ha revelado tener profundas conexiones en varias ramas de la matemática y ciencias de la computación.

Por su parte, la aproximación regular, establece que *cualquier* grafo puede ser aproximado por un número *constante* de grafos cuasi-aleatorios. Fue desarrollada originalmente por Endre Szemerédi en 1975, introducida como una herramienta auxiliar para demostrar su famoso teorema sobre progresiones aritméticas en subconjuntos de enteros con densidad superior positiva. Hoy es conocida como el lema de regularidad, y se ha singularizado como un potente instrumento con múltiples aplicaciones. Por este y otros aportes en la matemática, Szemerédi fue nombrado ganador del premio Abel en 2012.

Antes del lema de regularidad los grafos se consideraban como objetos carentes de estructura, después de todo, al especificar un grafo se decide para cada par de vértices si unirlos con una arista, y no hay restricción en lo absoluto sobre la decisión. No obstante, Szemerédi notó que con la aleatoriedad se puede dar una buena aproximación estructural a cualquier grafo completamente arbitrario.

Esta tesis tiene el objetivo de abordar los dos tópicos mencionados anteriormente. Para lograrlo, su estructura está dividida esencialmente en tres partes. En la primera

113 de ellas, se establecen las bases para profundizar en ambos temas, abarcando concep-
114 tos elementales de la teoría clásica y espectral de grafos, álgebra lineal, así como la
115 noción de un grafo aleatorio. La segunda parte presenta y demuestra rigurosamente
116 el célebre teorema de Chung, Graham y Wilson, el cual entrega una extensa lista de
117 propiedades equivalentes que caracterizan la idea de los grafos cuasi-aleatorios. Por
118 último, en la tercera parte, se exponen dos demostraciones del lema de regularidad de
119 Szemerédi; la versión clásica vía *incremento de energía*, y otra propuesta por Terence
120 Tao usando un enfoque espectral. Seguido de esto, se estudia cómo usar el lema de
121 regularidad en dos resultados particulares, que serán utilizados independientemente
122 para probar el teorema de Roth con aproximaciones regulares.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 1.1 repasa las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 1.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 1.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 2.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero, recuerde que la DCS establece que todo $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2. \quad (1.1)$$

Entonces, si $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (1.2)$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (1.3)$$

138 Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica. Por esto, se define la notación
 139 considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n :

140 ■ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) \rightarrow 0$, se dice que $f = o(g)$.

141 ■ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

1.1. Teoría de grafos

143 Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. También,
 144 si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto
 145 de todos los subconjuntos de r elementos de S . Un **grafo** es un par $G = (V, E)$,
 146 donde V representa el conjunto de **vértices**, y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Para
 147 representar una arista, escribiremos uv en vez de $\{u, v\}$. Dado un grafo G , denotamos
 148 por $V(G)$ a su conjunto de vértices, $E(G)$ a su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$
 a la cantidad de aristas presentes en el grafo. Si $G = (V, E)$ es un grafo cualquiera y

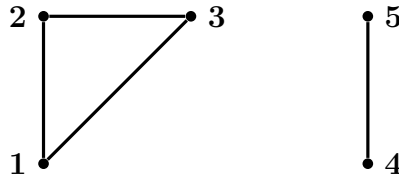


Figura 1.1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

149
 150 $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a v (o viceversa) si y solamente si $uv \in E$. Si
 151 $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente disjuntos, se define el conjunto
 152 de tuplas que forman una arista de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\} \right|. \quad (1.4)$$

153 Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y , y cuando
 154 $X \cap Y \neq \emptyset$, $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en

155 $X \cap Y$. Se entenderá por **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices
 156 adyacentes a u , es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \quad (1.5)$$

157 Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X , se define el **grado** de un vértice
 158 $u \in V$ con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

159 En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

160 Una propiedad elemental en teoría de grafos es la relación que guarda la suma del
 161 grado de todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

162 **Proposición 1.** *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (1.6)$$

163 *Demostración.* Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contri-
 164 bución por u , y otra por v . □

165 En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que com-
 166 parten dos vértices del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par
 167 de vértices $u, v \in V$ no necesariamente diferentes mediante:

$$\text{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu) \mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

168 Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogra-
 169 do, la cual será de utilidad en la sección 2.

170 **Proposición 2.** *Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices,*
 171 *entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').$$

172 *Demostración.* Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resulta-
 173 do se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv) \mathbb{1}_E(uv') \\
 &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu) \mathbb{1}_E(v'u) \\
 &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').
 \end{aligned}$$

174

□

175 Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (1.7)$$

176 A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta
 177 tesis. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **k -partito** si V se puede dividir en k
 178 subconjuntos disjuntos V_1, V_2, \dots, V_k tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$,
 179 con $i \neq j$. En particular, a un grafo 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

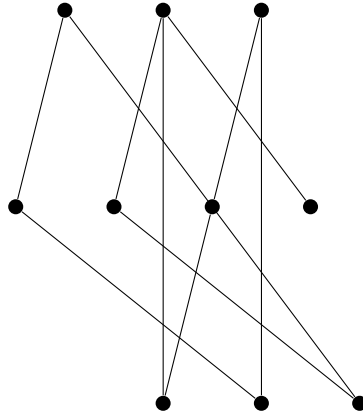


Figura 1.2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

180 Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n , es un grafo en el cual todos
 181 sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee
 182 una arista que los conecta. Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito**
 183 **completo** con n y m elementos en sus respectivos conjuntos de vértices. Observe

184 que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y
 185 $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo d -**regular** es aquel que presenta todos sus
 186 vértices con grado d .

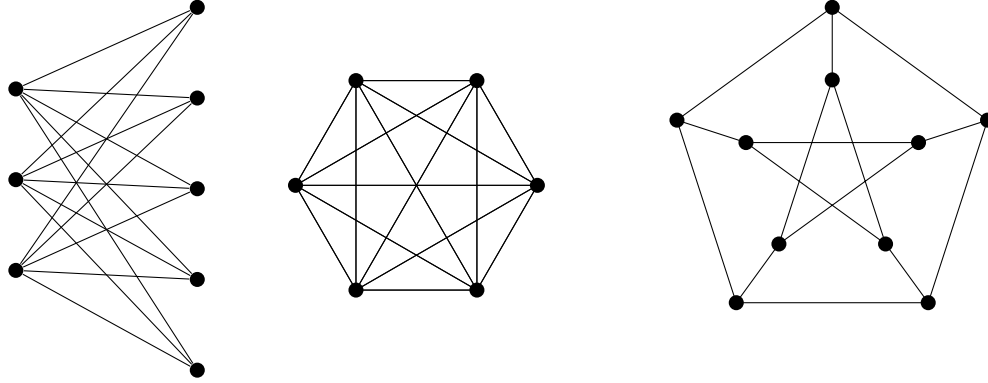


Figura 1.3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

187 Otro término relevante en este trabajo son las diferentes nociones de rutas que
 188 se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo.
 189 Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes
 190 conceptos:

- 191 ■ Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos
 192 v_0, v_1, \dots, v_k tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que
 193 es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por
 194 la cantidad de aristas que esta posea.
- 195 ■ Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k , que
 196 coincide con v_0 . Se denotará por C_k al ciclo de largo k .

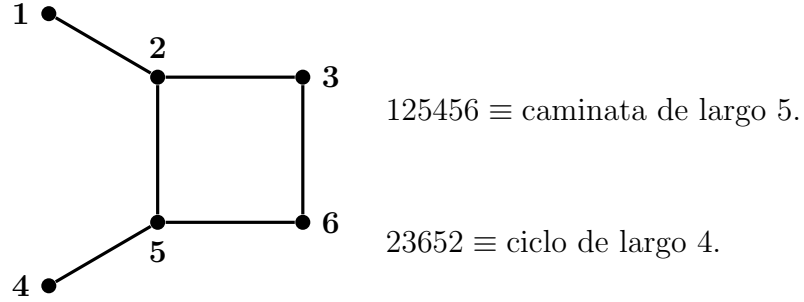


Figura 1.4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

197 Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se
 198 define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \rightarrow V(G)$
 199 tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos
 200 que H y G son isomorfos.

201 Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G , como la aplica-
 202 ción inyectiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$.
 203 En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las
 204 aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G .

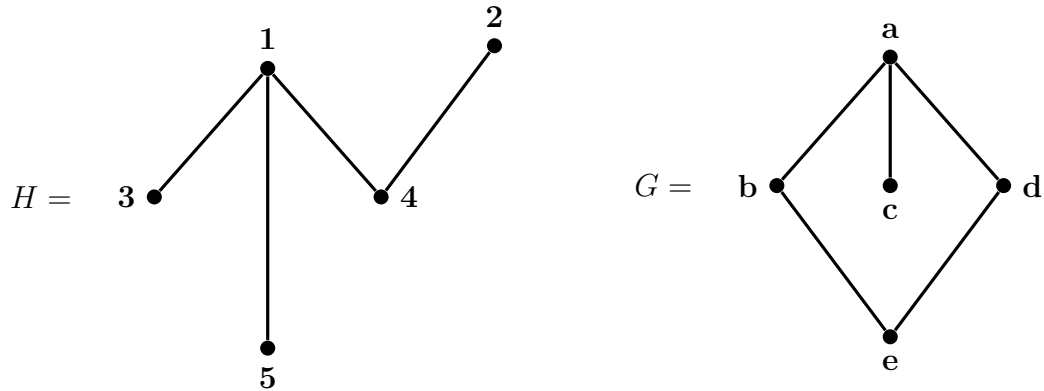


Figura 1.5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \rightarrow V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

1.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T a la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de \mathbb{R}^n con entrada 1 en la posición i . Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usuales de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n , según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de los elementos de su diagonal principal. Esto es,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de dichas matrices. En efecto,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \text{Tr}(BA).$$

Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación, se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo y se goza de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

Definición 3. Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacencia** $A_G \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A .

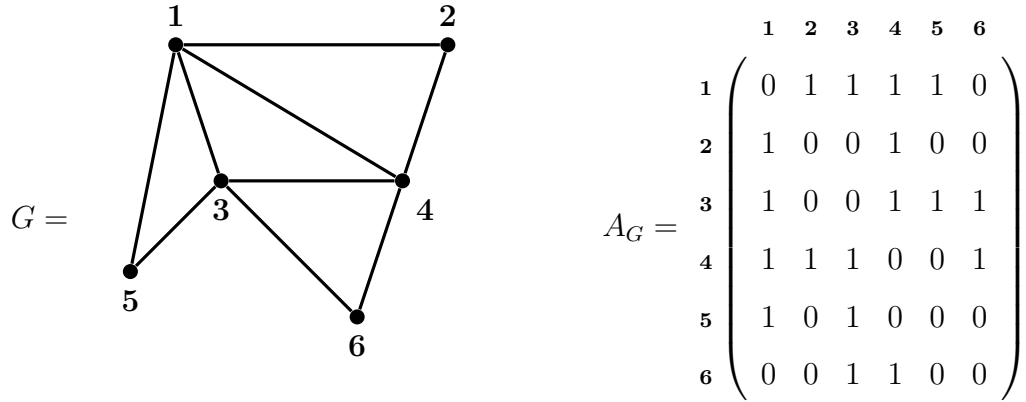


Figura 1.6: Ejemplo de la representación de un grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 3, es que nos permite reescribir la ecuación (1.4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y. \quad (1.9)$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\mathbf{v}_X = \sum_{i \in X} \mathbf{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j .

Proposición 4. Sea A la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$. La (i, j) -ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t , cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier caminata de largo $t + 1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j , digamos k . Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t + 1$ desde i hasta j es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t en el grafo por medio de la traza, $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$.

Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular. Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G , siempre será con respecto a su matriz de adyacencia A . Por ejemplo, si G es un grafo d -regular,

entonces con la igualdad (1.8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G .

Proposición 5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios define una base ortonormal de \mathbb{R}^n .*

Demostración. Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio de A y $\mathbf{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su conjugado (denotado por \bar{z} al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ccc} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} & & A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 & & \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2. \end{array}$$

Además, como A es simétrica,

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}}.$$

Así, ya que $\mathbf{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \bar{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios de A son números reales.

Por otro lado, considere $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

De esta manera, $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y solamente si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de A , defina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que \mathcal{B} constituye una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para esto, sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = 0.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por \mathbf{u}_i^T ,

$$\mathbf{u}_i^T(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) = c_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que \mathcal{B} es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . \square

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 6. (*Teorema espectral*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (1.10)$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A , y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A .

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (1.10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe cómo se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^TP)DP^T = PD^2P^T.$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^kP^T$. Esta propiedad resulta altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición 7 y el Corolario 8 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios del mismo.

307 **Proposición 7.** *La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma*
 308 *de sus valores propios.*

309 *Demostración.* Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,
 310 y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente
 311 manera:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i.$$

312 Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j. \end{aligned}$$

313

□

314 El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de
 315 una matriz real simétrica.

316 **Corolario 8.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores pro-*
 317 *prios, entonces se cumple $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.*

318 *Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos
 319 matrices es invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}([PDP^T]^k) = \text{Tr}(P[D^k P^T]) = \text{Tr}([D^k P^T]P) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

320

□

De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se simplifica a solo calcular la suma de la k -ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante, en la sección 2, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left| \binom{G}{C_k} \right| = \text{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k + o(n^k) \quad (1.11)$$

Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

Teorema 9. (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Corolario 10. Sea λ_1 el valor propio más grande de la matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\lambda_1 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Demostración. Si \mathbf{v}_1 un vector propio de A correspondiente a λ_1 , entonces

$$\lambda_1 = \frac{\|A\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Por otro lado, observando que el valor propio más grande de A^2 es λ_1^2 , se concluye para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^2\mathbf{x} \rangle \leq \lambda_1^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_1^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

Proposición 11. *El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d -regular, el primer valor propio coincide con d .*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 9:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (1.8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$ cada vez que G es un grafo d -regular. \square

1.3. Grafos aleatorios

En 1959, P. Erdős y A. Rényi [7] (también E. Gilbert [11]) proponen un modelo de grafo aleatorio de la siguiente manera: comenzando con un grafo vacío sin aristas $G = ([n], \emptyset)$, decidir independientemente sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad previamente establecida p . Entonces, considerando \mathcal{G}^n como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 12. *(Modelo binomial) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad \mathcal{G}^n con la siguiente medida:*

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G} (1 - p)^{\binom{n}{2} - e_G}, \quad \forall G \in \mathcal{G}^n.$$

Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad \mathcal{P}_n **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho esto, se probará que $G(n, p)$ posee una distribución uniforme de aristas en el siguiente sentido:

360 **Proposición 13.** Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \sim G(n, p)$, entonces satisface con alta
 361 probabilidad la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_\varepsilon^{p,n} := \{G \in \mathcal{G}^n : |e(A, B) - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2, \forall A, B \subset V(G)\}.$$

362 Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de
 363 Chernov. Existiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se
 364 utiliza el resultado para el caso en que cada variable aleatoria solo toma los valores
 365 0 o 1, como se plantea en [17], en la ecuación (2.12) de la observación 2.5.

366 **Teorema 14.** (*Desigualdad de Chernov*) Sean X_1, \dots, X_N variables aleatorias inde-
 367 pendientes tales que $X_i = 1$ con probabilidad p , y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$.
 368 Entonces, si $X = \sum_{i=1}^N X_i$, se satisface

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

369 Con esto, damos paso a la demostración prometida.

370 *Demostración Proposición 13.* Dado $p \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n, p)$ y
 371 $A, B \subset V(G)$. Defina la variable aleatoria $X = e(A, B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

372 Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X en
 373 sumas de variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2 \sum_{ab \in \binom{A \cap B}{2}} X_{ab}, \quad X_2 = \sum_{\substack{a \in A, b \in B \\ a \neq b \\ ab \notin \binom{A \cap B}{2}}} X_{ab}.$$

374 Al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p \binom{|A \cap B|}{2}, \quad \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p \left(|A||B| - |A \cap B| - 2 \binom{|A \cap B|}{2} \right).$$

375 Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3}n^2$
 376 sobre $i \in \{1, 2\}$ para obtener lo siguiente:

$$\mathcal{P}\left(|X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2\left(\frac{\varepsilon}{3}n^2\right)^2}{|A||B|}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right).$$

377 Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1 - \mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$ y $|X_2 - \mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$, entonces
 378 para algún $A, B \subset V(G)$ se satisface

$$\left|X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2)\right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon n^2.$$

379 Y así, como $\mu_1 + \mu_2 = p(|A||B| - |A \cap B|) = p|A||B| \pm n$, se cumple $\left|X - p|A||B|\right| \leq \varepsilon n^2$.

380 Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon}) &= \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : \left|X - p|A||B|\right| > \varepsilon n^2\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2, i \in \{1, 2\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\ &\leq \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\ &\stackrel{(1.3)}{\leq} 2^{2n+2} \exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

382 Capítulo 2

383 Grafos cuasi-aleatorios

384 Comenzamos este capítulo estableciendo que un grafo es cuasi-aleatorio si cumple
385 ciertas propiedades que los grafos aleatorios satisfacen con alta probabilidad. El
386 estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por V. Rödl [23] y A.
387 Thomason [33], y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de*
388 *aristas*, la cual llamaremos *discrepancia*: sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de
389 grafos con $V(G_n) = n$, entonces

$$\text{DISC}_p : \quad \left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2) , \quad \forall X, Y \subset V(G_n).$$

390 La idea de distribución uniforme de las aristas propuesta por los autores establece que
391 hasta el término de error $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices del grafo
392 G_n posee tantas aristas como las del grafo aleatorio $G(n, p)$ según la Proposición 13.

393 2.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

394 Una contribución fundamental en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989
395 por Fan Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson [4]. Ellos presentaron una
396 extensa lista de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que
397 todas son equivalentes al concepto de cuasi-aleatoriedad entendido inicialmente.

398 En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto

399 a una demostración formal.

400 **Teorema 15.** *(Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Para cualquier secuen-*
 401 *cia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las*
 402 *siguientes propiedades son equivalentes:*

403 DISC_p : Para todo $X, Y \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

404 DISC'_p : Para todo $X \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2).$$

405 COUNT_p : Para cada grafo H , la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está
 406 dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = (p^{e(H)} + o(1)) n^{(H)}.$$

407 $\text{COUNT}_{C_4, p}$: La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

CODEG_p :

$$\sum_{u, v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

408 EIG_p : Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los valores propios de la matriz de adyacencia de
 409 G_n , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

410 Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 15, se ha
 411 utilizado notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no
 412 queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias
 413 para cada par de propiedades. Entonces, se replantean equivalentemente las propie-
 414 dades con una versión cuantitativa, asociando algún parámetro de error ε en todo

415 grafo específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande. Por ejemplo,
 416 bajo los supuestos del Teorema 15, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ sa-
 417 tisface DISC_p , y luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe
 418 $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : \quad e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

419 De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$
 420 satisface la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} ¹ si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$
 421 tal que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la
 422 propiedad Q_{y_1, \dots, y_ℓ} implica la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} si y solamente si $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ implica
 423 $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo
 424 G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$ cada vez que satisfaga la propiedad
 425 $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Se desarrollará la demostración formal del Teorema 15 utilizando nota-
 426 ción ε - δ , mostrando que cada par de propiedades P_{x_1, \dots, x_k} y Q_{y_1, \dots, y_ℓ} son equivalentes
 427 entre sí con un cambio polinomial en el error, esto es, $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$
 428 para algún par de constantes $C, c > 0$.

429 Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

430 La demostración del Teorema fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales
 431 mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 18.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 19.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xLeftrightarrow{\text{Prop. 22. y 23.}} & \text{EIG}_p \\
 \Updownarrow \text{Prop. 16 y 17.} & & & & & & \Downarrow \text{Prop. 20.} \\
 \text{DISC}_p & & \xLeftrightarrow{\text{Prop. 21.}} & & \text{CODEG}_p & &
 \end{array} \tag{2.1}$$

432 Con esto en mente, damos paso a la demostración de cada proposición considerada
 433 en el esquema (2.1).

¹Los parámetros x_1, \dots, x_k pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad sim-
 bolizada. En las propiedades del Teorema 15 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad
 $\text{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

Proposición 16. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces, considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, se utiliza la propiedad $\text{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

Las igualdades anteriores consideran, por definición, $e(X, X) = 2e(X)$, y la aproximación $\binom{|X|}{2} = \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. \square

Proposición 17. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En particular,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}'_p(\delta)$.

En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (2.2)$$

Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza

la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre la identidad (2.2) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left(\binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 18. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$.

Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (2.3)$$

Una vez probada la ecuación (2.3), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4 \binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left(\frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left| \binom{G}{F} \right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G que forman una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

Luego, si aplicamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre V , se obtiene que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

Así, con $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea F un grafo con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (2.3) en cualquier grafo con una cantidad de aristas menor que e_F . Para desarrollar la inducción, suponga que $ij \in E(F)$ y considere la siguiente notación:

- i) F^- corresponde al grafo producido por eliminar la arista ij de F .
- ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista ij en F .

Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G , es decir, T^- se corresponde una aplicación inyectiva $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez que $uv \in E(F^-)$. Entonces, considerando $e_{T^-} := f(i)f(j)$, se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera conveniente para utilizar la hipótesis inductiva como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \left| \binom{G}{F} \right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
 &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
 &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
 &= p \left| \binom{G}{F^-} \right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
 &\stackrel{(2.3)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell. \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

En este punto, es suficiente probar que el segundo sumando de la igualdad (2.4) es pequeño. Para esto, considere T^* una copia de F^* , y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar de F^- los vértices j e i respectivamente. Con esto, defina los siguientes conjuntos:

$$A_i^{T^*} := \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\}$$

$$A_j^{T^*} := \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.$$

Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$ añadida a T^* se obtiene una copia de F^- . Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad (2.4) convenientemente y utilizando la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} |e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p| |A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. \square

Proposición 19. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

Demostración. Se trata de un caso particular de COUNT_p , en donde $H = C_4$ y $\delta < \varepsilon$. \square

Proposición 20. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. En particular,*

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$.

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$ y $\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz vista en (1.2). Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado (1.7) se obtiene la primera de las cotas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\
 &\stackrel{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\
 &= \frac{4e_G^2}{n} \\
 &\geq \frac{4}{n} \left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\
 &\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, usando $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n \left(\sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u, v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\
 &= n \left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq n \left(p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n(4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4 \right)^{1/2} \\
 &= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
 &\leq 4\delta^{1/2} n^3.
 \end{aligned}$$

□

Proposición 21. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{CODEG}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

512 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 513 grande. Sea G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la
 514 propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$.

515 En primera instancia, note que la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentra-
 516 ción en los grados de los vértices de G . En efecto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\
 &= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{(1.7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
 &\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u, v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
 &\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\
 &< 3\delta^{1/2} n^2.
 \end{aligned}$$

517 Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de
 518 forma conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
 \left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &= \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \\
 &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

519 En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre
 520 no negativo, lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera,
 521 usando a la cota proveniente de la concentración de los grados en los vértices de G ,

se prueba el resultado continuando desde (2.5):

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &\leq n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn \right. \\
&\quad \left. + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y) \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\sum_{u, v \in V(G)} |\text{codeg}(u, v) - p^2n| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} |\deg(x) - pn| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} (\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/4}n^2.
\end{aligned}$$

□

Proposición 22. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{EIG}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

531 Como vimos en la ecuación (1.11), la cantidad de copias etiquetadas de caminatas
 532 cerradas de largo 4 que no son C_4 en G , se encuentran dentro de un error de a lo
 533 más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas de C_4 en G . Con esto, junto
 534 al Lema 4 y el Corolario 8 se obtiene lo siguiente:

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \quad (2.6)$$

535 Luego, recordando que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\text{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \quad (2.7)$$

536 Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer valor propio
 537 y la cota mostrada en (2.7). Entonces, continuando desde la ecuación (2.6),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

538

□

539 **Proposición 23.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el
 540 grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{EIG}_p(\varepsilon)$ cada vez
 541 que cumpla la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

542 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 543 grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que
 544 satisface la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G ,
 545 y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

546 En lo que respecta al primer valor propio, sabemos por un lado que este es al
 547 menos el promedio de los grados gracias al Lema 11. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \quad (2.8)$$

548 Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 8 y la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4. \quad (2.9)$$

La desigualdad (2.9) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$, y en combinación con la cota vista en (2.8), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$. Por último, observe por las cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned}
 \max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\
 &= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\
 &\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\
 &= 4\delta n^4.
 \end{aligned}$$

Así, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4}n$. □

2.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas según la Definición 2 contempla verificar que si todo par de subconjuntos de vértices del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En otras palabras, se requiere comprobar un número exponencial de subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo DISC'_p), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es que la propiedad más débil $\text{COUNT}_{C_4, p}$, que solo requiere que la condición de conteo sea verdadera para el ciclo C_4 , sea suficientemente sólida para implicar la afirmación de conteo de la propiedad COUNT_p ; que dice que el número de copias etiquetadas de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

A continuación mostraremos que no es suficiente que la condición de conteo sea verdadera para ciclos de largo inferior a 4 para determinar la cuasi-aleatoriedad de un grafo. Para ver esto, se realiza la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad de copias etiquetadas esperadas de C_3 , pero que no cumple con las condiciones para ser cuasi-aleatorio.

570 **Proposición 24.** Existe un grafo $G = ([n], E)$ con $\left(\frac{1}{3}\right)^3 n^3 + o(n^3)$ copias etiquetadas
 571 de C_3 , pero que no es cuasi-aleatorio.

572 *Demostración.* La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos,
 573 uno con una cantidad mayor que la esperada en un grafo aleatorio $G(n, p)$ de copias
 574 etiquetadas de C_3 , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces indepen-
 575 dientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2, n_2} tales que su unión disjunta forma el
 576 grafo $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

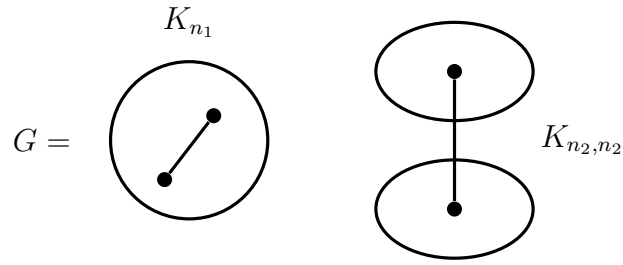


Figura 2.1: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo. Aquí, $\bullet\text{---}\bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G .

577 En K_{n_1} y K_{n_2, n_2} , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de
 578 C_3 son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} & , & \quad \left| \binom{K_{n_1}}{C_3} \right| \approx n_1^3 \quad , \\ e_{K_{n_2, n_2}} &\approx \frac{(n - n_1)^2}{4} & , & \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{C_3} \right| = 0. \end{aligned}$$

579 Bajo esta configuración, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que
 580 el grafo G posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de C_3 según
 581 lo haría un grafo aleatorio $G(n, p)$. Para ello, se plantea el siguiente sistema de
 582 ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n - n_1)^2}{4}, \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

583 Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Esta construc-

584 ción, en efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

585 Como también,

$$\left| \binom{G}{C_3} \right| = \left(\frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

586 Sin embargo, el grafo G no es cuasi-aleatorio debido a que no existen aristas entre
587 K_{n_1} y K_{n_2, n_2} ni dentro de los conjuntos de vértices que conforman a K_{n_2, n_2} . \square

588 Lo expuesto se enfoca en el caso muy particular en el que $p = \frac{1}{3}$, pero es im-
589 portante destacar la técnica utilizada. En específico, la interpolación de dos grafos
590 arbitrarios con una cantidad esperada menor y mayor de copias etiquetadas de C_3
591 según $G(n, p)$ produce un nuevo contraejemplo. Más aún, es posible extender la pro-
592 piedad $\text{COUNT}_{C_4, p}$ a $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ con $t \geq 2$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_{2t}, p} : \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

593 Se expone un bosquejo de la demostración.

594 **Proposición 25.** Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$
595 vértices y $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ y EIG_p
596 son equivalentes.

597 *Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de
598 la Proposición 22 y 23 tras el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la
599 cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n
600 están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

601 También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (2.7) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

602 Con estas observaciones el resultado queda demostrado. \square

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de largo par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los valores propios de G , eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d -regular. En nuestro contexto, se verá que toda secuencia $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ de grafos d -regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 26. (*Expander Mixing Lemma*) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d -regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G . Si se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n} \right) \left(1 - \frac{|Y|}{n} \right)}. \quad (2.10)$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n compuesta por los vectores propios de A . Utilizando la descomposición espectral, denotamos

$$A_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T \quad \text{y} \quad \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T,$$

de manera que $A = A_1 + \Delta$.

Conforme a la ecuación (1.9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y = \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y + \mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y. \quad (2.11)$$

De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que el segundo el factor de error. Para ver esto, se representan los vectores \mathbf{v}_X y \mathbf{v}_Y según la base \mathcal{B} . Es decir,

$$\mathbf{v}_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i,$$

623 donde $\alpha_i = \mathbf{v}_X^T \mathbf{v}_i$ y $\beta_i = \mathbf{v}_Y^T \mathbf{v}_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}_X, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j \in X} \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\
 &= |X|.
 \end{aligned}$$

624 Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$.

625 Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (2.11) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\
 &= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i^T \right) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\
 &= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_j) \\
 &= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

626 Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{2.13}$$

627 Luego, dado que G es un grafo d -regular, $\lambda_1 = d$ y $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ son valor y
 628 vector propio respectivamente de A . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \text{ y } \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

629 Así, la ecuación (2.12) resulta en $\mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y = \frac{d}{n} |X| |Y|$. Para el término de error,
 630 recordando la definición de λ , se desarrolla el valor absoluto de la ecuación (2.13)

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\
&\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\
&\stackrel{\text{DCS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2)(\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2)} \\
&= \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (2.11) de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y| = |\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y|.$$

□

El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d -regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$. Entonces, si G satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 26:

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\
&< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\
&< \varepsilon n^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, en un grafo d -regular, la equivalencia entre las propiedades $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (2.1).

643 Capítulo 3

644 Lema de regularidad de Szemerédi

645 El lema de regularidad de Szemerédi ha mostrado ser un resultado muy poderoso
646 e importante en la teoría extremal de grafos. Sus aplicaciones no solo se restringen
647 a la teoría de grafos, sino que también las tiene en teoría de números combinatorios,
648 geometría discreta y ciencias de la computación. A continuación, un poco de historia
649 de su origen.

650 P. Erdős y P. Turán [8] conjeturaron en 1936 que todo conjunto de números en-
651 teros suficientemente grande posee una progresión aritmética de longitud arbitraria,
652 digamos k . En 1953, K. Roth [26] da el primer resultado positivo a la conjetura para
653 el caso en que $k = 3$ utilizando análisis de Fourier, dando paso al teorema de Roth.
654 Más adelante, en 1969, E. Szemerédi [30] extiende el teorema de Roth a progresiones
655 aritméticas de largo 4 vía métodos combinatorios. Seis años después, en 1975, Sze-
656 merédi [31] demuestra la conjetura de Erdős-Turán para progresiones aritméticas de
657 longitud arbitraria, lo que se conoce actualmente como el teorema de Szemerédi.

658 **Teorema 27.** (*Teorema de Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si
659 el conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| > \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión
660 aritmética de largo k no trivial cada vez que $n \geq n_0$.

661 La demostración que propone Szemerédi es considerada una obra maestra del ra-
662 zonamiento combinatorio, pero de extrema complejidad. Quizás esto motivó a otros

matemáticos en encontrar nuevas formas de probar el teorema. En 1977, H. Furstenberg [10] obtiene una demostración fundamentada en la teoría ergódica. También, en 2001, T. Gowers [15] entrega una tercera demostración por medio de análisis de Fourier, extendiendo el camino iniciado por Roth para progresiones aritméticas de largo 3.

En esta tesis, nos enfocaremos en uno de los elementos que compone la demostración entregada por Szemerédi del Teorema 27, el hoy conocido como *lema de regularidad de Szemerédi*. A grandes rasgos, el lema dice que el conjunto de vértices de todo grafo puede ser particionado en una cantidad finita de partes que muestran comportamientos *regulares* (o cuasi-aleatorios) entre la mayoría de los pares de partes. Este hecho permite entender cualquier grafo con menos información, y se aprovechan cada una de las propiedades equivalentes vistas en el Teorema 15.

Hasta enunciar formalmente el lema de regularidad, se definirán los conceptos necesarios para su buena comprensión. Dado un grafo G y los subconjuntos de vértices $X, Y \subset V(G)$, se define la **densidad de aristas** entre X e Y de la siguiente manera:

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}. \quad (3.1)$$

Diremos que $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ es una **partición** del conjunto X si:

$$\text{i) } \bigcup_{i=1}^k X_i = X.$$

$$\text{ii) } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ para todo } i, j \in [k].$$

Cuando $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_k| = |X_1| + 1$, llamaremos a \mathcal{P} como una **equipartición**. En particular, cada parte posee $\lceil |X|/k \rceil$ o $\lfloor |X|/k \rfloor$ elementos.

También, es necesario conocer en qué sentido los pares de partes entregados por el lema son regulares.

Definición 28. Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X, Y) es un **par ε -regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple

$$\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| \leq \varepsilon.$$

688 Cuando (X, Y) no es un par ε -regular, entonces la irregularidad es evidenciada por
 689 algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\left|d(A, B) -\right.$
 690 $\left.d(X, Y)\right| > \varepsilon$.

691 Notaremos que la noción de un par ε -regular es, de hecho, una analogía de la
 692 propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$
 693 y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\left|e(X, Y) - p|X||Y|\right| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \quad \forall Y \subset W. \quad (3.2)$$

694 En efecto, si (U, W) es un par ε -regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que
 695 $|A| \geq \varepsilon|U|$ y $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

696 Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε -regular
 697 no es suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

698 Luego, notando que $e(A, B) > d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W|$, se obtiene la analogía plan-
 699 teada con $p = d(U, W)$.

700 Por último, debemos saber la noción de regularidad en una partición del conjunto
 701 de vértices de un grafo.

702 **Definición 29.** Dado un grafo G , una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ del conjunto de
 703 vértices $V(G)$ es una **partición ε -regular** si

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon|V(G)|^2.$$

704 Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε -regular
 705 salvo una fracción ε de pares de vértices.

706 Note que si una partición ε -regular de k partes es en particular una equipartición,
 707 entonces a lo más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε -regular.

708 Ya con todo lo requerido, se enuncia formalmente el lema de regularidad.

709 **Teorema 30.** (*Lema de regularidad de Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero
 710 $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una partición ε -regular de a lo más M partes.

711 Otra forma de encontrar el resultado es cuando todas las partes de la partición
 712 poseen aproximadamente el mismo tamaño.

713 **Teorema 31.** (*Regularidad de Szemerédi - Equipartición*) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$,
 714 existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε -regular de
 715 su conjunto de vértices de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.

716 Lo poderoso del lema de regularidad es que la cota de partes que entrega no
 717 depende del tamaño del grafo, sino que únicamente del parámetro ε . Esto se debe
 718 a que en grafos más grandes, el tamaño de las partes podría ser considerablemente
 719 mayor.

720 En la subsección 3.1 se demostrará rigurosamente el Teorema 30 desde una mirada
 721 clásica, y se expondrá la manera de probar el Teorema 31. Más adelante, en la
 722 sección 3.2, nos limitaremos a mostrar una forma novedosa e ingeniosa de demostrar
 723 el Teorema 30 desde una perspectiva espectral. Finalmente, la subsección 3.3 tiene
 724 el objetivo de demostrar de dos maneras diferentes el teorema de Roth utilizando el
 725 lema de regularidad de Szemerédi.

726 3.1. Demostración por incremento de energía

727 Se empleará una técnica llamada *argumento de incremento de energía*, la cual
 728 para todo grafo G , funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

- 729 1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
- 730 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 731 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$
 732 y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad del par.

- 733 (b) Refinar \mathcal{P} utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados
 734 de cada par (V_i, V_j) no ε -regular para obtener \mathcal{Q} .
- 735 (c) Actualizar \mathcal{P} con \mathcal{Q} .

736 Siendo \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que \mathcal{Q}
 737 **refina** a \mathcal{P} si cada parte de \mathcal{Q} está contenida en una parte de \mathcal{P} . En lo que resta
 738 de esta subsección, mostraremos que el algoritmo tiene un fin y que entrega una
 739 partición ε -regular en un número de iteraciones que solo depende de ε .

740 **Definición 32.** (*Energía*) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define
 741 en primer lugar

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

742 Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de Y , se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

743 Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, se define su **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

744 Observe que en toda partición \mathcal{P} de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$.
 745 En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

746 La última observación es crucial en la demostración del Teorema 30, puesto que los
 747 Lemas 33, 34 y 35 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo
 748 refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento*
 749 *de energía* tendrá un fin, y entregará una partición ε -regular. Dicho esto, procedemos

750 a enunciar y demostrar cada uno de los lemas mencionados para probar clásicamente
751 el Teorema 30.

752 El primero de los lemas, afirma que la energía de una partición no decrece bajo
753 cualquier refinamiento arbitrario.

754 **Lema 33.** Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, y \mathcal{P}_X y \mathcal{P}_Y particiones de X e Y respecti-
755 vamente, entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, si \mathcal{P} y \mathcal{P}' son dos particiones de
756 vértices de G , entonces $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que \mathcal{P}' refina a \mathcal{P} .

757 *Demostración.* Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$,
758 y las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente.
759 En primera instancia, se utiliza la desigualdad (1.3) proveniente de Cauchy-Schwarz
760 para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
 &\stackrel{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
 &= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
 &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
 &= q(X, Y).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

761 Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refina-
762 miento de \mathcal{P} . Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar
763 el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(3.3)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε -regular de un grafo G , mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

Lema 34. Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε -regular, existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos tales que el par (X, Y) no es ε -regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que evidencian la irregularidad del par (X, Y) , y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon|X| \text{ y } |Y_1| \geq \varepsilon|Y|. \quad (3.4)$$

Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$, el cual por definición de par ε -regular, satisface

$$|\eta| > \varepsilon. \quad (3.5)$$

Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \quad (3.6)$$

Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (3.7)$$

781 Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y ,
 782 desarrollamos,

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i| |Y_j|} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i| |Y_j|} \right) \\
 &\stackrel{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i| |Y_j|} \right) \\
 &\stackrel{(3.6) \text{ y } (3.7)}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

783 Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1|. \quad (3.9)$$

784 Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (3.8) como sigue:

$$\begin{aligned}
 n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} \frac{1}{|X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} e(X, Y) - \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
 &= \frac{|X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1| |Y_1| \\
 &\quad + \frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
 &= \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1| \left(1 + \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right) \\
 &\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1|. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

785 Finalmente, utilizando las cotas (3.4) y (3.5), podemos concluir desde la desigualdad

786 (3.10),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X| |Y|} + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X| |Y|}{n^2}. \end{aligned}$$

787

□

788 Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε -regular por medio de sus
789 subconjuntos que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía.
790 Entonces, haciendo alusión al paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de*
791 *incremento de energía*, se mostrará que refinar simultáneamente todos los pares de
792 conjuntos no ε -regular de un grafo produce un aumento estricto de al menos ε^5 en
793 la energía.

794 **Lema 35.** Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ no ε -regular de
795 $V(G)$. Entonces existe un refinamiento \mathcal{Q} de \mathcal{P} , en el que cada V_i se particiona en
796 a lo más 2^k partes y es tal que

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

797 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ una partición no ε -regular del conjunto
798 de n vértices de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par
799 (V_i, V_j) no es ε -regular, existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su
800 irregularidad. Observe que en cada V_i se podrían encontrar a lo más k conjuntos no
801 vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular. Considere
802 ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ que refina a \mathcal{P} , en la que cada Q_i es una partición
803 resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos los subconjuntos
804 no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular (ver
805 Figura 3.1). En consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

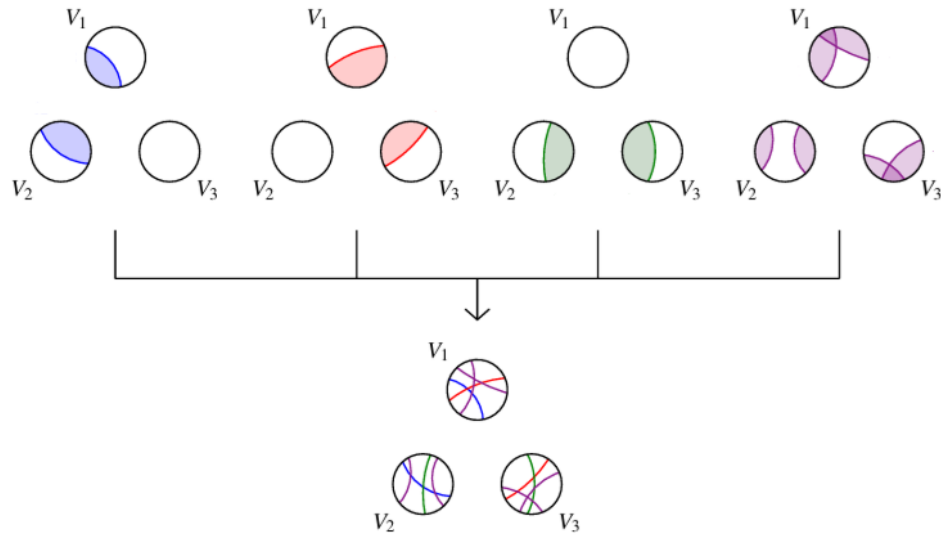


Figura 3.1: Ejemplo del refinamiento simultaneo por todos los subconjuntos que evidencian la irregularidad usando tres conjuntos de vértices ([34], página 59).

806 Para simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$.

807 Luego, como la partición \mathcal{P} no es ε -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (3.11)$$

808 Así, junto a los lemas probados previamente, se da prueba al resultado de la siguiente

809 manera:

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
 &= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
 &\stackrel{\text{Lema 33}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\
 &\stackrel{\text{Lema 34}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\
 &\stackrel{(3.11)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.
 \end{aligned}$$

810 * Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 33, cuando lo cambio se me
 811 descuadra :c * □

812 Este último Lema culmina lo que se necesita para dar prueba formal del lema de
 813 regularidad de Szemerédi mediante el argumento de incremento de energía.

814 *Demostración del Teorema 30.* Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G , elegimos inicialmente la
 815 partición trivial del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actua-
 816 lizando \mathcal{P}), aplicaremos el Lema 35 cada vez que la partición actual no sea ε -regular.
 817 Observe que por cada aplicación del Lema 35 se consigue un aumento de al menos
 818 ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente
 819 por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será
 820 necesariamente una partición ε -regular debido a la cota de la energía.

821 Para una partición no ε -regular con k elementos, el Lema 35 encuentra un refina-
 822 miento de a lo más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración
 823 del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes pro-
 824 ducidas las acotaremos crudamente en cada paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la
 825 partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del
 826 algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar

827 el Lema 35.

1^{ra} Iteración: $1 \rightarrow 2 < 2^2$ partes.

2^{da} Iteración: $2^2 \rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^2}$ partes.

3^{ra} Iteración: $2^{2^2} \rightarrow (2^{2^2}) 2^{(2^{2^2})} < 2^{2^{2^2}}$ partes.

828 Finalmente, como el algoritmo debe terminar luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la
829 cantidad de partes al final del proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} \text{Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

830

□

831 Desde ahora en adelante, vamos a definir y considerar una *torre de altura* k de la
832 siguiente manera:

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}} \left. \vphantom{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}} \right\} \text{Altura } k.$$

833 Durante la demostración del Teorema 30 se utilizó una cota que podría parecer exa-
834 gerada para encontrar la cantidad de partes que devuelve el algoritmo implementado,
835 por sobre todo, considerando lo rápido que crece a medida que ε se hace más pe-
836 queño. Sorprendentemente, en 1997, T. Gowers [14] prueba que tal límite inferior
837 de partes es necesario. Más precisamente, mostró que es posible encontrar una cons-
838 tante $c > 0$ tal que para todo suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$, existe un grafo sin
839 partición ε -regular siempre que posea una cantidad menor que $\text{torre}(\lceil \varepsilon^{-c} \rceil)$ partes
840 (ver G. Moshkovitz y A. Shapira [21] para una demostración corta).

841 Finalmente, se expone la forma de probar el Teorema 31. La idea de la demos-
842 tración consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento
843 de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una
844 equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso
845 y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera.
846 Entonces, para todo grafo G , la modificación del algoritmo es la siguiente:

847 1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria \mathcal{P} de $V(G)$ con m_0 partes.

- 848 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
- 849 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$
850 y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de los pares.
- 851 (b) Refinar \mathcal{P} usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener
852 la partición \mathcal{Q} , cual divide cada parte de \mathcal{P} en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.
- 853 (c) Modificar la partición \mathcal{Q} refinando, si es posible, cada uno de sus elementos
854 para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$, dada alguna elección
855 apropiada del entero $m = m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de \mathcal{Q} que no
856 fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos
857 de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y
858 posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
- 859 (d) Actualizar \mathcal{P} con la modificación de \mathcal{Q} .

860 El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G .
861 En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al
862 menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin
863 embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande.
864 En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al
865 menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición
866 de a lo más $\text{torre}(\lceil \varepsilon^{-5} \rceil)$ partes.

867 3.2. Demostración espectral

868 En 2012, T. Tao [32] publica en su blog una prueba del lema de regularidad de
869 Szemerédi usando la descomposición espectral de la matriz de adyacencia. La idea
870 original de la demostración proviene de los autores A. Frieze y R. Kannan [9], a
871 quienes Tao les da el crédito en su publicación. Más adelante, en 2013, S. Cioba y
872 R. Martin [5] escribieron la demostración con más detalles. La prueba que se expone
873 en esta sección está basada esencialmente en la publicación de Cioba y Martin.

874 *Demostración espectral del Teorema 30.* Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función $F :$
 875 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$F(\ell) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^{4\ell} \right\rceil.$$

876 Denotaremos por $F^{(i)}$ a la i -ésima composición de F con ella misma, y escogemos
 877 $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

878 Sea $G = ([n], E)$ un grafo con $n \geq n_0$ vértices, y A su matriz de adyacencia. Orde-
 879 namos los valores propios $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ de A de manera decreciente y consideramos
 880 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ los vectores propios correspondientes, que forman una base ortonormal de
 881 \mathbb{R}^n .

882 Por la Proposición 4 y el Corolario 8, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (3.12)$$

883 De lo anterior, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$, se encuentra la cota

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (3.13)$$

884 Consideramos también los intervalos $I_1, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \subset [n]$ definidos por

885 ■ $I_1 = \{1, 2, \dots, F^{(1)}(1) - 1\}$ y

886 ■ $I_k = \{F^{(k-1)}(1), \dots, F^k(1) - 1\}$ para todo $k = 2, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil}$.

887 Con esta construcción, debe existir un natural $1 \leq L \leq \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil$ que cumple con

$$\sum_{L \leq j < F(L)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2, \quad (3.14)$$

888 porque de lo contrario, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \sum_{k=1}^{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \sum_{i \in I_k} \lambda_i^2 > \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil \cdot \varepsilon^3 n^2 > n^2,$$

889 que contradice la desigualdad (3.12).

Ahora, usando L , separamos la matriz A en tres matrices simétricas:

$$A = S + F + Q,$$

donde la matriz S se interpretará como la componente *estructural*,

$$S = \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

la matriz F como la componente de *error*,

$$F = \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

y la matriz Q como la componente *cuasi-aleatoria*,

$$Q = \sum_{i \geq F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T.$$

Usaremos los vectores propios $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{L-1}$ de S para definir una partición de $V(G)$ como mostraremos a continuación. Consideramos el intervalo de \mathbb{R} de longitud $2\sqrt{(L/\varepsilon)}$. $n^{-1/2}$ centrado en el origen y lo particionamos en $t = 2(L/\varepsilon)^2$ subintervalos J_1, \dots, J_t de longitud $(\varepsilon/L)^{3/2}n^{-1/2}$ cada uno. Luego, clasificamos los vértices $v \in V(G)$ según su valor $\mathbf{u}_i(v)$ de la siguiente manera:

$$V_i^j = \{v \in V(G) : \mathbf{u}_i(v) \in J_j\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Con esto, tomamos el refinamiento de todos estos conjuntos $\{V_i^j \neq \emptyset : i \in [L-1], j \in [t]\}$ para obtener los conjuntos V_0, V_1, \dots, V_M , en donde $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$. El resultado anterior considera un conjunto excepcional de vértices V_0 que está definido como sigue:

$$V_0 = \left\{ v \in V(G) : |\mathbf{u}_i(v)| > \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} n^{-1/2} \text{ para algún } i \in [L-1] \right\}.$$

Mostraremos que el conjunto excepcional V_0 es suficientemente pequeño. En efecto, observando que

$$L-1 = \sum_{i=1}^{L-1} \|\mathbf{u}_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{v \in V(G)} \mathbf{u}_i(v)^2 \geq |V_0| \left(\frac{L}{\varepsilon n} \right),$$

se determina que $|V_0| < \varepsilon n$.

Probaremos que la partición construida del conjunto de vértices del grafo $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_M\}$ es ε -regular. Comenzamos identificando los pares excepcionales. Para esto, sea $F = (f_{xy})$ y defina

$$\Sigma_F = \left\{ (i, j) : \sum_{(x,y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon |V_i| |V_j| \right\}$$

Entonces, por la definición de F y el Corolario ??, tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 n^2 &\geq \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i^2 = \text{Tr}(F^2) = \sum_{(x,y) \in V(G)^2} f_{xy}^2 \\ &\geq \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} \sum_{(x,y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|. \end{aligned}$$

y por consecuencia

$$\varepsilon^2 n^2 \geq \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|. \quad (3.15)$$

Además, sea

$$\Sigma_Q = \left\{ (i, j) : \min\{|V_i|, |V_j|\} < \frac{\varepsilon}{M} n \right\} \cup \{(i, j) : i = 0 \text{ o } j = 0\},$$

y observe que

$$\sum_{(i,j) \in \Sigma_Q} |V_i| |V_j| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M} n + 2|V_0|n < 4\varepsilon n.$$

Ahora, sea $(i, j) \notin \Sigma_F \cup \Sigma_Q$, y $d_{ij} = d(V_i, V_j)$ la densidad del par (V_i, V_j) . Entonces, dado los subconjuntos $X \subset V_i$ e $Y \subset V_j$, note la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - d_{ij} |X| |Y| \right| &= \left| \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y - d_{ij} |X| |Y| \right| \\ &\leq \left| \mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij} |X| |Y| \right| + \left| \mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y \right| + \left| \mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y \right|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En este punto, el objetivo es encontrar cotas para cada uno de los sumandos anteriores.

Para comenzar, por la definición de Σ_F y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene la primera de las cotas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y \right|^2 &= \left| \sum_{(x,y) \in X \times Y} f_{xy} \right|^2 \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \left(\sum_{(x,y) \in X \times Y} f_{xy}^2 \right) |X| |Y| \\ &\leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |X| |Y| \leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

919 Para la próxima cota, debemos observar por la construcción de Q y el Teorema 9
 920 que

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \|\mathbf{v}_X\| \|Q \mathbf{v}_Y\| \leq \|\mathbf{v}_X\| \|\mathbf{v}_Y\| \frac{n}{\sqrt{F(L)}} = \sqrt{|X||Y|} \frac{n}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}}.$$

921 Además, como $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$, concluimos de la elección de $F(\cdot)$ que $F(L) \geq \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2L^2}{\varepsilon^2}\right)^{4L} \geq$
 922 $\frac{1}{\varepsilon^6} M^4$. Y así, cuando $(i, j) \neq \Sigma_Q$, se tiene

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{M^2 |V_i| |V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{F(L)}} \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (3.18)$$

923 Por último, para la tercera cota, analizamos $S = (s_{xy})$. Sean s_{ab} y s_{cd} los valores
 924 mínimo y máximo de todos los s_{xy} sobre $(u, v) \in V_i \times V_j$. Entonces,

$$\begin{aligned} s_{cd} - s_{ab} &= \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \lambda_i \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \\ &\leq \sum_{i < L} |\lambda_i| \left| \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) + \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \right| \\ &\leq n \sum_{i < L} \left| \mathbf{u}_i(d) (\mathbf{u}_i(c) - \mathbf{u}_i(a)) + \mathbf{u}_i(a) (\mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(b)) \right| \\ &\leq n \sum_{i < L} |\mathbf{u}_i(b)| \left| \mathbf{u}_i(a) - \mathbf{u}_i(c) \right| + |\mathbf{u}_i(c)| \left| \mathbf{u}_i(b) - \mathbf{u}_i(d) \right| \\ &\leq Ln \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{\varepsilon n}} \cdot \frac{\varepsilon}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Ln}} \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

925 Ahora bien, como d_{ij} es el promedio de S sobre $V_i \times V_j$, tenemos que $s_{ab} \leq d_{ij} \leq s_{cd}$,
 926 y por ende, $|s_{xy} - d_{ij}| \leq s_{cd} - s_{ab}$ para cada $(u, v) \in V_i \times V_j$. Como resultado,

$$|\mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij} |V_i| |V_j|| \leq \sum_{(x,y) \in X \times Y} |s_{xy} - d_{ij}| \leq (s_{cd} - s_{ab}) |X| |Y| \leq 4\varepsilon |X| |Y|. \quad (3.19)$$

927 Utilizando las desigualdades (3.17), (3.18) y (3.19) en la expresión enunciada en
 928 (3.16) se concluye la demostración del teorema. \square

3.3. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son abordadas con el *método de regularidad* que se describe en los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices de un grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** las aristas del que tengan un “mal comportamiento” según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
 - (i) Irregularidad.
 - (ii) Baja densidad.
 - (iii) Al menos una de las partes demasiado pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio.

Para el último paso se utilizará un resultado análogo a la propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ del Teorema 15, pero con el concepto de par ε -regular. Las aplicaciones que se estudiarán en esta tesis solo necesitan el caso en que $H = K_3$, el cual es conocido como lema de conteo de triángulos.

Lema 36. (*Lema de conteo de triángulos*) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los conjuntos no necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares (X, Y) , (Y, Z) y (X, Z) son ε -regular. Entonces,

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\} \right| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Demostración. Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Proposición 18 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$. Cuando el grafo no posee aristas, entonces

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\} \right| = |X||Y||Z|.$$

951 También, como vimos en (3.2), recordamos que la condición de un par ε -regular
 952 es equivalente a la propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ en grafos bipartitos para algún $p \in (0, 1)$.
 953 Entonces, cuando el grafo presenta solo una arista,

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\} \right| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

954 Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$\left| \{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\} \right| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

955 Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del
 956 grafo $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la aplicación inyectiva $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$. Con esto,
 957 se desarrolla inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} \left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\} \right| &= \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Z)] \\ &= d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

958 En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (3.20) se
 959 corresponde con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton
 960 $\{2\}$ en G , y considere los siguientes conjuntos:

$$961 \quad A_1^{T^*} = \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}.$$

$$A_3^{T^*} = \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}.$$

962 De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X, Z) ε -regular con
 963 versión bipartita de la propiedad $\text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ vista en (3.2), se consigue la siguiente
 964 desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| &\leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\ &= \sum_{T^*} |e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z)|A_1^{T^*}||A_3^{T^*}|| \\ &\leq \sum_{T^*} \varepsilon|X||Z| \\ &\leq \varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (3.20) se prueba lo prometido. \square

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X, Y) y (X, Z) son ε -regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε -regular para que el lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 36 (y Proposición 18), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H . Se enuncia sin demostración.

Lema 37. *(Lema de conteo de grafos) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε -regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es*

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

En las siguientes subsecciones se discutirán dos aplicaciones del método de regularidad para entregar dos demostraciones alternativas al teorema de Roth.

3.3.1. Eliminación de triángulos

El lema de eliminación de triángulos fue probado por los autores I. Ruzsa y E. Szemerédi [27] en 1976, y es una de las primeras aplicaciones del método de regularidad. La intuición del lema dice que todo grafo con *pocos* triángulos se puede convertir en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

Teorema 38. *(Lema de eliminación de triángulos) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.*

1988 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 30 con tal elec-
 1989 ción para obtener la constante $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$
 1990 suficientemente grande, de manera tal que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices
 1991 posee a lo más δn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 30, se asegura la
 1992 existencia de una partición ε_r -regular $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, con $k \leq M$.

1993 Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [k]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i
 1994 y V_j cuando

1995 (a) (V_i, V_j) no es un par ε_r -regular,

1996 (b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

1997 (c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{k}\varepsilon_r$.

1998 De esta manera, como la partición es ε_r -regular, las aristas removidas por la condición

1999 (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

1000 Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a
 1001 lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [k]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

1002 Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{k}\varepsilon_r$
 1003 vértices en a lo más k subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por
 1004 (c) son a lo más

$$k \cdot \frac{n}{k}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

1005 En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

1006 Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos.

1007 Para esto, con nuestra elección de δ , buscaremos formular la siguiente contradicción:

1008 si existe un triángulo en el grafo limpio G' , el lema de conteo de triángulos asegura

que en realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, como el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos, se podrá concluir que el grafo G' es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.

Dicho esto, estudiamos la cantidad de triángulos en G' . Dada la eliminación de aristas según la condición (a), cada par (V_i, V_j) es ε -regular, y por ende se satisface la hipótesis del Lema 36. Entonces, gracias a la ausencia de las aristas que cumplían con las condiciones (b) y (c),

$$\begin{aligned}
 |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\quad - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{k^3} \\
 &> \delta n^3.
 \end{aligned}$$

Así, de la contradicción anterior, se determina que el grafo G es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas. \square

Otra forma de entender el Teorema 38 es de la siguiente manera: si se necesitan eliminar al menos εn^2 para hacer de G libre de triángulos, entonces G contiene al menos δn^3 triángulos.

3.3.2. Emparejamiento inducido

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $R \subset E$ es un **emparejamiento** en G si no existe un par de aristas en R que compartan algún vértice. Diremos que R es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y no existen un par de aristas en R que estén conectadas por una arista de G , es decir, no existen aristas en G entre cada par de vértices de R .

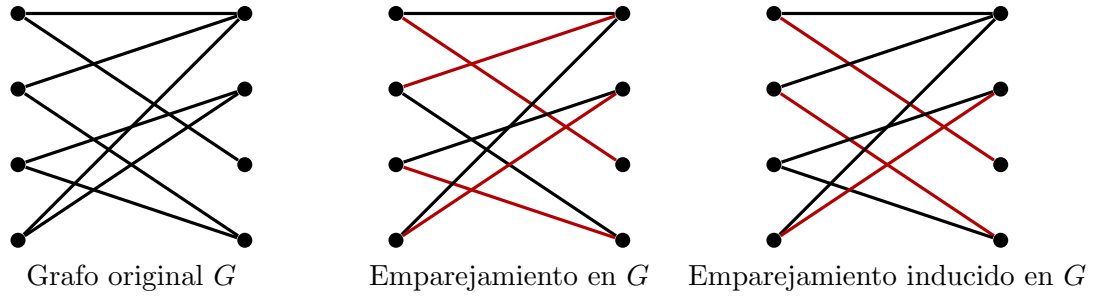


Figura 3.2: Ejemplo de un emparejamiento y un emparejamiento inducido.

La presente aplicación del método de regularidad responde a la pregunta: ¿Cuántas aristas puede tener un grafo que es la unión de emparejamientos inducidos? * No sabría si aquí agregar un comentario referente a que la intuición dice que deben ser “pocas” aristas, pero la prueba no es trivial *

Teorema 39. (Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 30 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema 30, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r -regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando estos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G' . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido R en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrían a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

Denotando por $V(R)$ al conjunto de vértices que componen las aristas de R , se define $U_i := V_i \cap V(R)$ como el subconjunto de vértices de R que comparte elementos con V_i , y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(R)$ que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i . Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10} n$ vértices de $V(R)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10} n.$$

De esta manera, recordando que $|V(R)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10} n = \frac{9}{10} \varepsilon n$. Además, como también $|R| \geq \frac{\varepsilon}{2} n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una arista en R . Luego, dada la limpieza de G , dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r -regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (3.21)$$

Ahora, como R es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$ debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

Sin embargo, la desigualdad (3.21) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell) |U_t| |U_\ell| \\ &\geq |U_t| |U_\ell| \varepsilon_r \\ &\geq |U_t| |V_\ell| \varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t| \frac{n}{k} \varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a R , por lo que se contradice la hipótesis de que R es un emparejamiento inducido. \square

Otra mirada del Teorema 39 es la siguiente: si G posee al menos εn^2 aristas, entonces G tiene al menos un emparejamiento no inducido.

1065 3.3.3. Teorema de Roth

1066 Como hemos visto en el comienzo de la sección 3, el teorema de Roth es un
 1067 caso particular del teorema de Szemerédi, el cual en un principio fue demostrado
 1068 utilizando análisis de Fourier.

1069 **Teorema 40.** (*Teorema de Roth*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el
 1070 conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión
 1071 aritmética no trivial de largo 3.

1072 En esta sección se entregarán dos demostraciones del teorema de Roth por medio
 1073 del lema de regularidad de Szemerédi. Como el enunciado del Teorema 40 alude a la
 1074 teoría de números, en ambas pruebas, la idea es traducir el problema al lenguaje de la
 1075 teoría de grafos con la construcción de un grafo apropiado. La primera demostración
 1076 se fundamenta en el Teorema 38.

1077 *Primera demostración del Teorema 40.* Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $S \subset [n]$ con $|S| \geq \varepsilon n$
 1078 elementos. Escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

1079 Una manera natural de construir un grafo de n vértices utilizando el conjunto
 1080 S , es definir una arista entre los vértices i y j si y solamente si $|i - j| \in S$. Sin
 1081 embargo, con n elementos no podemos describir una progresión aritmética de largo
 1082 3 por medio de relaciones entre las aristas. Por esto, agregamos un poco de asimetría
 1083 a la construcción. Para asegurar que las sumas siempre tengan la posibilidad de
 1084 estar en S , consideramos el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices
 1085 $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$ son tales que $6n \geq n_0$.
 1086 Las aristas de G son definidas de la siguiente manera:

- 1087 1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in S$.
- 1088 2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in S$.
- 1089 3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in S$.

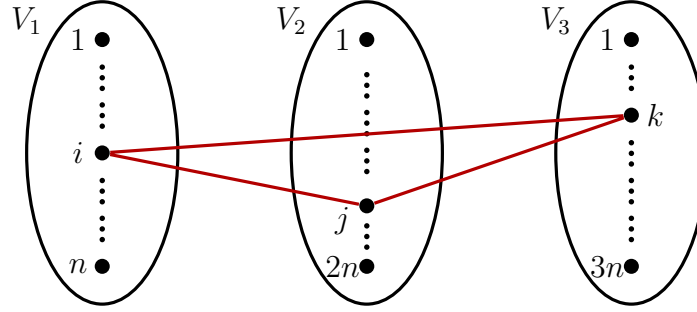


Figura 3.3: Esquema de relación entre un triángulo en G y una progresión aritmética de largo 3 en S .

Nótese que la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in S$, $k - j \in S$ y $\frac{k-i}{2} \in S$, o bien, $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$ es una progresión aritmética de largo 3 en S con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$.

Diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $s \in S$ se satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = s$. Entonces, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, s) \in V_1 \times S$, la cantidad de estos es exactamente $n|S| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se pueden eliminar dos de ellos removiendo solo una arista. Por consecuencia, se tienen que eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos. Luego, utilizando el lema de eliminación de triángulos con $\frac{\varepsilon}{36}$, recibimos $\delta\left(\frac{\varepsilon}{36}\right)$, y aseguramos que existen al menos $\delta(6n)^3 = 216\delta n^3$ triángulos en G . De esta manera, existen al menos $216\delta n^3 - n^2$ triángulos no triviales. En conclusión, como $216\delta n^3 > n^2$, debe existir una progresión aritmética no trivial de largo 3 en S . \square

Para la segunda demostración del teorema de Roth, será necesario un resultado intermedio proporcionado por los autores M. Ajtai y E. Szemerédi [1]. Para su prueba, se utiliza el Teorema 39.

Teorema 41. (Teorema de la esquina, Ajtai-Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$ para algún $a, b, d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.

1110 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $S \subset [n]^2$ con
 1111 al menos εn elementos, y $n \geq n_0$.

1112 Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de vértices
 1113 $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

1114 Ahora, interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se define una relación
 1115 entre pares de aristas de G de manera que se preserve cierta noción de distancia en
 1116 la grilla. Esto es:

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

1117 Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento en G debido a que no
 1118 existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia (cada
 1119 una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de
 1120 E . En efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$
 1121 comparten el vértice w_j . Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y
 1122 se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la misma arista.

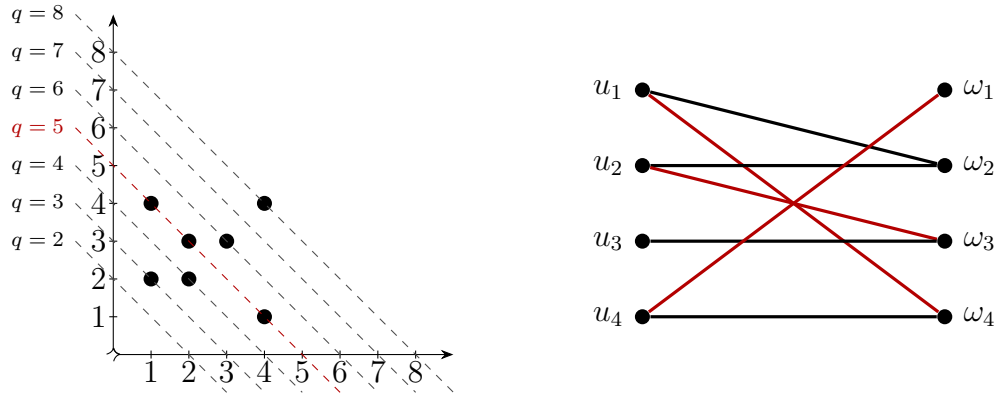


Figura 3.4: Ejemplo del emparejamiento generado por la
 clase de equivalencia asociada a $q = 5$, y $S =$
 $\{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.

1123 Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{4}(2n)^2$, el teorema de emparejamiento inducido
 1124 asegura que existe al menos un emparejamiento no inducido. Esto significa que en

1125 al menos un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim u_k w_\ell$
 1126 puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i, j) , (k, ℓ)
 1127 y (i, ℓ) son elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

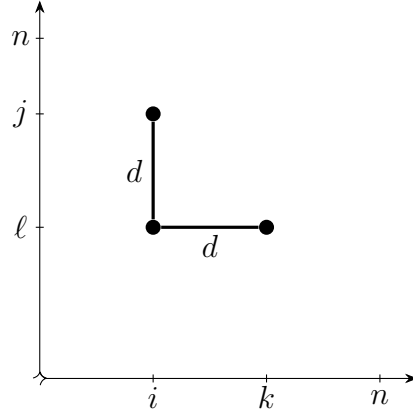


Figura 3.5: Esquema ilustrativo de la esquina formada en la demostración

1128 Finalmente, la demostración del teorema se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para
 1129 obtener $j = b + d$ y $k = a + d$. □

1130 El resultado anterior otorga lo necesario para la segunda demostración (J. Solymosi [28]) del teorema de Roth utilizando el lema de regularidad de Szemerédi.

1132 *Segunda demostración Teorema 40.* Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 1133 grande. Para $n \geq n_0$, sea $S \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se
 1134 define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in S\},$$

1135 Observe que cada $s \in S$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = s$,
 1136 permitiendo determinar que $|B| = n|S| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 41 asegura la
 1137 existencia de elementos de la forma $\{(s, b), (s, b+d), (s+d, b)\}$ en B . Por consecuencia,
 1138 se encuentra una progresión aritmética de largo 3 no trivial en A tomando $x = s - b$,
 1139 e $y = d$. □

Bibliografía

- [1] Miklós Ajtai y Endre Szemerédi. “Sets of lattice points that form no squares”. En: *Stud. Sci. Math. Hungar* 9.1975 (1974), págs. 9-11.
- [2] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.
- [3] Béla Bollobás. “Random Graphs”. En: *Modern Graph Theory*. Springer New York, 1998. ISBN: 978-1-4612-0619-4. DOI: [10.1007/978-1-4612-0619-4_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0619-4_7). URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0619-4_7.
- [4] Fan R. K. Chung, Ronald L. Graham y Richard M. Wilson. “Quasi-random graphs”. En: *Combinatorica* 9 (1989), págs. 345-362.
- [5] S. Cioaba y R.R. Martin. “Tao’s Spectral Proof of The Szemerédi Regularity Lemma”. En: 2013. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11284384>.
- [6] Reinhard Diestel. “Graph theory. fifth. vol. 173”. En: *Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin* (2018).
- [7] P Erdős y A Rényi. “On random graphs I”. En: *Publ. math. debrecen* 6.290-297 (1959), pág. 18.
- [8] Paul Erdős y Paul Turán. “On some sequences of integers”. En: *Journal of the London Mathematical Society* 1.4 (1936), págs. 261-264.
- [9] Alan Frieze y Ravi Kannan. “The regularity lemma and approximation schemes for dense problems”. En: *Proceedings of 37th conference on foundations of computer science*. IEEE. 1996, págs. 12-20.

- [10] Harry Furstenberg. “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”. En: *Journal d’Analyse Mathématique* 31.1 (1977), págs. 204-256.
- [11] Edgar N Gilbert. “Random graphs”. En: *The Annals of Mathematical Statistics* 30.4 (1959), págs. 1141-1144.
- [12] Chris Godsil y Gordon F Royle. *Algebraic graph theory*. Vol. 207. Springer Science & Business Media, 2001.
- [13] W Timothy Gowers. “Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem”. En: *Annals of Mathematics* (2007), págs. 897-946.
- [14] William T Gowers. “Lower bounds of tower type for Szemerédi’s uniformity lemma”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 7.2 (1997), págs. 322-337.
- [15] William T Gowers. “A new proof of Szemerédi’s theorem”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 11.3 (2001), págs. 465-588.
- [16] WT Gowers. “The work of Endre Szemerédi”. En: *Online* (2012). URL: <http://www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php>.
- [17] Svante Janson, Tomasz Łuczak y Andrzej Ruciński. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.
- [18] János Komlós, Ali Shokoufandeh, Miklós Simonovits y Endre Szemerédi. “The regularity lemma and its applications in graph theory”. En: *Summer school on theoretical aspects of computer science* (2000), págs. 84-112.
- [19] János Komlós y Miklós Simonovits. *Szemerédi’s Regularity Lemma and its applications in graph theory*. 1995.
- [20] Michael Krivelevich y Benny Sudakov. “Pseudo-random graphs”. En: *More sets, graphs and numbers: A Salute to Vera Sos and András Hajnal*. Springer, 2006, págs. 199-262.
- [21] Guy Moshkovitz y Asaf Shapira. “A short proof of Gowers’ lower bound for the regularity lemma”. En: *Combinatorica* 36.2 (2016), págs. 187-194.

- [22] Brendan Nagle, Vojtěch Rödl y Mathias Schacht. “The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs”. En: *Random Structures & Algorithms* 28.2 (2006), págs. 113-179.
- [23] Vojtěch Rödl. “On universality of graphs with uniformly distributed edges”. En: *Discrete Mathematics* 59.1-2 (1986), págs. 125-134.
- [24] VOJTECH Rödl y MATHIAS Schacht. “Regular partitions of hypergraphs”. En: *preprint* (2005).
- [25] Vojtěch Rödl y Jozef Skokan. “Regularity lemma for k -uniform hypergraphs”. En: *Random Structures & Algorithms* 25.1 (2004), págs. 1-42.
- [26] Klaus F Roth. “On certain sets of integers”. En: *J. London Math. Soc* 28.104-109 (1953), pág. 3.
- [27] Imre Z Ruzsa y Endre Szemerédi. “Triple systems with no six points carrying three triangles”. En: *Combinatorics (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 18.939-945 (1978), pág. 2.
- [28] József Solymosi. “Note on a generalization of Roth’s theorem”. En: *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*. Springer, 2003, págs. 825-827.
- [29] Daniel Spielman. “Spectral graph theory”. En: *Combinatorial scientific computing* 18 (2012), pág. 18.
- [30] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression”. En: *Acta Mathematica Hungarica* 20.1-2 (1969), págs. 89-104.
- [31] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression”. En: *Acta Arith* 27.199-245 (1975), pág. 2.
- [32] Terence Tao. *The spectral proof of the Szemerédi regularity lemma*. [Consultado el 31 de marzo de 2024]. 2012. URL: <https://terrytao.wordpress.com/2012/12/03/the-spectral-proof-of-the-szemerédi-regularity-lemma/>.
- [33] Andrew Thomason. “Pseudo-random graphs”. En: *North-Holland Mathematics Studies*. Vol. 144. Elsevier, 1987, págs. 307-331.

- 1216 [34] Yufei Zhao. *Graph theory and additive combinatorics: exploring structure and*
1217 *randomness*. Cambridge University Press, 2023.