



1

2

3

Grafos cuasi-aleatorios y lema de regularidad de Szemerédi

4

5

Estudiante:
Felipe Sánchez Erazo

6

Profesor Guía:

7

Dr. Hiệp Hàn

8

9

Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático de la Universidad de Santiago de Chile

10

11

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación
Universidad de Santiago de Chile

A mi abuelo, Sergio Sánchez.

1. Introducción

2. Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 2.1 da un paseo por las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 2.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 2.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 3.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero recuerde que la DCS establece que todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

Entonces, si $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (2)$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (3)$$

Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n :

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) \rightarrow 0$, se dice que $f = o(g)$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

2.1. Teoría de grafos

Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. También, si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de r elementos de S .

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices**, y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Dado un grafo G , se escribe $V(G)$ como su conjunto de vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de aristas presentes en el grafo.

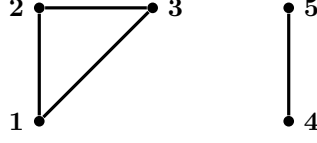


Figura 1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

38 Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a v (o viceversa)
 39 si y solamente si $uv \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente disjuntos, se define
 40 el conjunto de tuplas que forman una arista en G de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\} \right|. \quad (4)$$

41 Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y , y cuando $X \cap Y \neq \emptyset$,
 42 $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en $X \cap Y$. Se entenderá por
 43 **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices adyacentes a u , es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \quad (5)$$

44 Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X , se define el **grado** de un vértice $u \in V$
 45 con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

46 En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

47 Una propiedad elemental en teoría de grafos, es la relación que guarda la suma del grado de
 48 todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

49 **Proposición 1.** *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (6)$$

50 *Demostración.* Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u , y
 51 otra por v . □

52 En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices
 53 del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesaria-
 54 mente diferentes mediante:

$$\text{cogdeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu) \mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

55 Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será
 56 de utilidad en la sección 3.

57 **Proposición 2.** Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').$$

58 *Demostración.* Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene
59 de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv) \mathbb{1}_E(uv') \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu) \mathbb{1}_E(v'u) \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v'). \end{aligned}$$

60 □

61 Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (7)$$

62 A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta tesis. Di-
63 remos que un grafo $G = (V, E)$ es **k -partito** si V se puede dividir en k subconjuntos disjuntos
64 V_1, V_2, \dots, V_k tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$. En particular, a un grafo
65 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

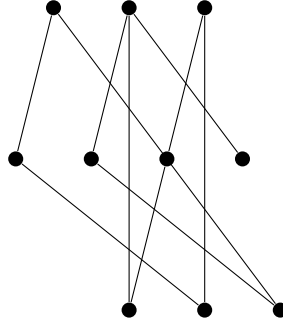


Figura 2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

66 Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n , es un grafo en el cual todos sus vértices son
67 adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta.
68 Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito completo** con n y m elementos en sus
69 respectivos conjuntos de vértices. Observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son
70 exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo **d -regular** es aquel que presenta
71 todos sus vértices con grado d .

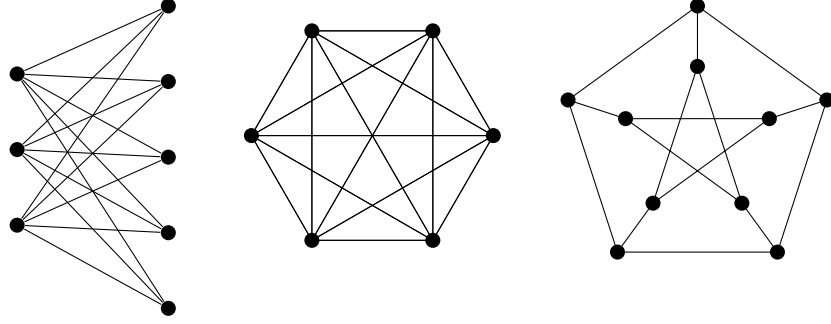


Figura 3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

Otro concepto relevante en este trabajo, son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos v_0, v_1, \dots, v_k tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.
- Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k , que coincide con v_0 . Se denotará por C_k al ciclo de largo k .

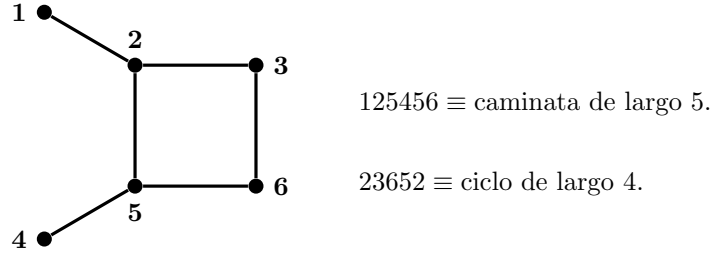


Figura 4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfismos.

Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G , como la aplicación inyectiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$. En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G .

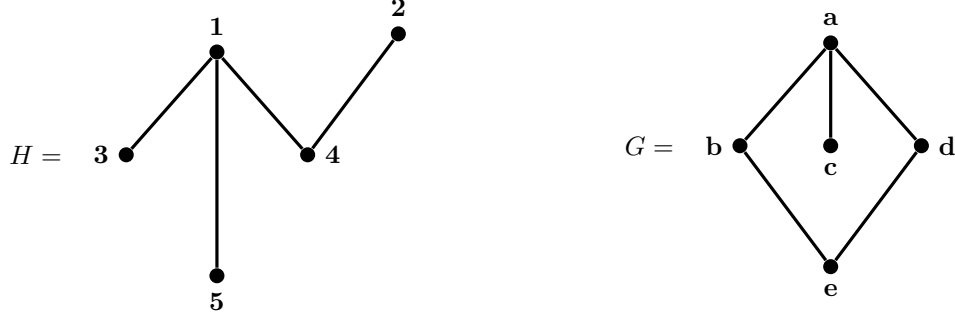


Figura 5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \rightarrow V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

2.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T como la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de \mathbb{R}^n con entrada 1 en la posición i . Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usuales de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n , según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de sus elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de dichas matrices. En efecto,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \text{Tr}(BA).$$

Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo, y se gozan de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

Definición 3. Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacencia** $A_G \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A .

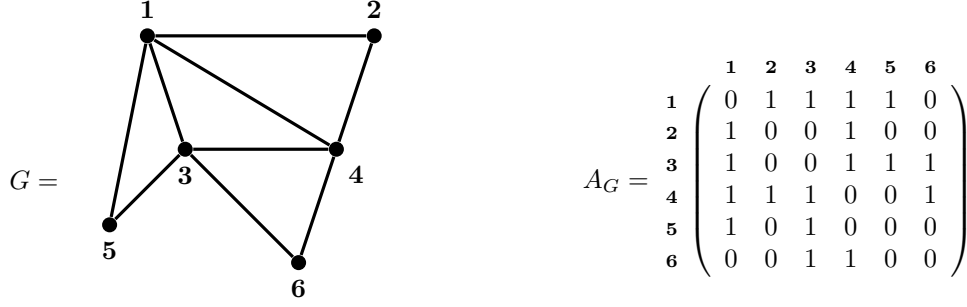


Figura 6: Ejemplo de representación de un grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 4, es que nos permite reescribir la ecuación (4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y. \quad (9)$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\mathbf{v}_X = \sum_{i \in X} \mathbf{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j .

Proposición 4. Sea A la matriz de adyacencia de grafo $G = ([n], E)$. La (i, j) -ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t , cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier

126 caminata de largo $t + 1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j ,
 127 digamos k . Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre
 128 i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t + 1$ desde i hasta j es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

129

□

130 Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de
 131 adyacencia A , se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t en el grafo
 132 por medio de la traza, $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$. Con esencialmente
 133 la misma demostración, enuncia el siguiente corolario que nos será de utilidad más adelante.

134 **Corolario 5.** *Sea una matriz $F = (f_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces $\text{Tr}(F^2) = \sum_{(i,j) \in [n]^2} f_{ij}^2$.*

135 Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el
 136 vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio**
 137 $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular.
 138 Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En
 139 este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G , siempre será
 140 con respecto a su matriz de adyacencia A . Por ejemplo, si G es un grafo d -regular, entonces con
 141 la igualdad (8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de
 142 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G .

143 **Proposición 6.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios*
 144 *son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos*
 145 *son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios define una base ortonormal de*
 146 \mathbb{R}^n .

147 *Demostración.* Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio
 148 de A y $\mathbf{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su conjugado (denotado por \bar{z} al complejo
 149 conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ccc} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} & & A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 & & \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2. \end{array}$$

150 Además, como A es simétrica,

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}}.$$

151 Así, ya que $\mathbf{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \bar{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios
 152 de A son números reales.

153 Por otro lado, considere $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios
 154 $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

De esta manera, $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y solamente si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de A , defina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que \mathcal{B} constituye una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para esto, sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por \mathbf{u}_i^T ,

$$\mathbf{u}_i^T (c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) = c_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que \mathcal{B} es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . \square

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 7. (*Teorema espectral*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (10)$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A , y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A .

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe como se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^T P)DP^T = PD^2 P^T.$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^k P^T$. Esta propiedad resulta altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición 8 y el Corolario 9 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios del mismo.

Proposición 8. La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma de sus valores propios.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i.$$

182 Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j.
\end{aligned}$$

183 □

184 El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de una matriz real
185 simétrica.

186 **Corolario 9.** Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios, entonces se
187 cumple $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

188 *Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es
189 invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}([PDP^T]^k) = \text{Tr}(P[D^k P^T]) = \text{Tr}([D^k P^T]P) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

190 □

191 De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se
192 simplifica a solo calcular la suma de la k -ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante,
193 en la sección 3, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de
194 la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En
195 particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left| \binom{G}{C_k} \right| = \text{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k + o(n^k) \quad (11)$$

196 Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del
197 teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

198 **Teorema 10.** (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos
199 valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

200 **Corolario 11.** Sea λ_1 el valor propio más grande de la matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\lambda_1 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

201 *Demostración.* Si \mathbf{v}_1 un vector propio de A correspondiente a λ_1 , entonces

$$\lambda_1 = \frac{\|A\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

202 Por otro lado, observando que el valor propio más grande de A^2 es λ_1^2 , se concluye para cualquier
203 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^2 \mathbf{x} \rangle \leq \lambda_1^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_1^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

204

□

205 Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de
206 estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

207 **Proposición 12.** El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el
208 promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d -regular, el primer valor propio coincide
209 con d .

210 *Demostración.* Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla
211 en función del Teorema 10:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

212 Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$
213 cada vez que G es un grafo d -regular. □

214 2.3. Grafos aleatorios

215 El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más
216 adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios*.

217 Intuitivamente, se podría pensar en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de se-
218 leccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n . En 1959, Erdős-Rényi y Edgar Gilbert*
219 [referencia](#) * proponen dicha selección de la siguiente manera: comenzando con un grafo sin aristas

220 $G = ([n], \emptyset)$, decidir sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad
 221 p establecida. En cada repetición del proceso anterior se genera un nuevo grafo de n vértices, que
 222 contribuye a la creación del espacio de probabilidad conocido como $G(n, p)$, y se denomina modelo
 223 binomial. Entonces, considerando \mathcal{G}^n como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define
 224 formalmente.

225 **Definición 13.** (*Modelo binomial*) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad
 226 $(\mathcal{G}^n, \mathcal{P}(\mathcal{G}^n), \mathbb{P})$, con

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G} (1-p)^{\binom{n}{2} - e_G}, \quad \forall G \sim G(n, p).$$

227 Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más
 228 aún, G satisface la propiedad \mathcal{P}_n **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho
 229 esto, se probará que $G(n, p)$ posee una distribución de aristas en el siguiente sentido:

230 **Proposición 14.** Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \sim G(n, p)$, entonces satisface con alta probabilidad
 231 la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_n^{p, \varepsilon} := \{G \in \mathcal{G}^n : |e(A, B) - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2, \quad \forall A, B \subset V(G)\}.$$

232 Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de Chernov. Exis-
 233 tiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se utiliza el resultado para el caso
 234 en que cada variable aleatoria solo toma los valores 0 o 1, como se plantea en [* referencia *](#) en la
 235 ecuación (2.12) de la observación 2.5.

236 **Teorema 15.** (*Desigualdad de Chernov*) Sean X_1, \dots, X_N variables aleatorias independientes tales
 237 que $X_i = 1$ con probabilidad p , y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^N X_i$, se
 238 satisface

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

239 Con esto, damos paso a la demostración prometida.

240 *Demostración Proposición 14.* Dado $p \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n, p)$ y $A, B \subset V(G)$.
 241 Defina la variable aleatoria $X = e(A, B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

242 Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X en sumas de
 243 variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2 \sum_{ab \in \binom{A \cap B}{2}} X_{ab}, \quad \text{y } X_2 = \sum_{\substack{a \in A, b \in B \\ a \neq b \\ ab \notin \binom{A \cap B}{2}}} X_{ab}.$$

244 Al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p \binom{|A \cap B|}{2}, \text{ y } \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p \left(|A||B| - |A \cap B| - 2 \binom{|A \cap B|}{2} \right).$$

245 Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3}n^2$ sobre $i \in \{1, 2\}$
 246 para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(|X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) &\leq 2 \exp \left(-\frac{2 \left(\frac{\varepsilon}{3}n^2 \right)^2}{|A||B|} \right) \\ &\leq 2 \exp \left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

247 Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1 - \mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$ y $|X_2 - \mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$, entonces

$$\left| X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2) \right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon n^2, \quad \forall A, B \in V(G).$$

248 Y así, como $\mu_1 + \mu_2 = p(|A||B| - |A \cap B|) = p|A||B| \pm \varepsilon n$, se tendrá que todo $A, B \subset V(G)$
 249 satisface $\left| X - p|A||B| \right| \leq \varepsilon n^2$.

250 Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p, \varepsilon}) &= \mathbb{P} \left(\exists A, B \subset V(G) : \left| X - p|A||B| \right| > \varepsilon n^2 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \vee |X_2 - \mu_2| > \varepsilon n^2 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) + \mathbb{P} \left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) \\ &\leq \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P} \left(|X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) + \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P} \left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) \\ &\stackrel{(12)}{\leq} 2^{2n+1} \exp \left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

251

□

252 3. Cuasi-aleatoriedad

253 Trabajar con estructuras discretas aleatorias brinda una amplia gama de propiedades ideales
 254 y deseables, lo que las convierte en piezas fundamentales tanto en matemáticas como en ciencias
 255 de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo aleatorio binomial goza de una distribución
 256 uniforme de aristas, buenas propiedades y es robusto. La cuestión ahora es cómo capturar las
 257 propiedades esenciales de la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la
 258 noción de cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas discretas.
 259 En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características deterministas que son
 260 propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es interesante por
 261 sí misma, su estudio ha revelado profundas conexiones entre varias ramas de la matemática y

ciencias de la computación, encontrando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría ergódica, geometría, y algoritmos y complejidad.

Como se verá a detalle más adelante en la sección 4, una de las razones principales por las cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica, es el hecho de que existe un teorema de partición que permite la aproximación de cualquier objeto discreto por otros cuasi-aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre lema de regularidad de Szemerédi, que establece que todo grafo se puede aproximar mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo la conexión entre un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por Rödl *referencia* y Thomason *referencia*, y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas* para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo. *Buscar año...*

Definición 16. Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n vértices. Entonces el grafo G_n es **cuasi-aleatorio** si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$ se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,

$$e(X, Y) = p|X||Y| + o(n^2). \quad (13)$$

En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece que, hasta el término de error $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo aleatorio $G(n, p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabilidad en un grafo aleatorio $G(n, p)$, sino que también se considera como una de sus características distintivas.

3.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson *referencia*. Ellos presentaron una extensa lista de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 3.

En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto a una demostración formal.

Teorema 17. (Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son equivalentes:

DISC_p: Para todo $X, Y \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

DISC'_p: Para todo $X \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2).$$

COUNT_p: Para cada grafo H , la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = \left(p^{e(H)} + o(1) \right) n^{v(H)}.$$

294 $\text{COUNT}_{C4,p}$: La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

295 CODEG_p :

$$\sum_{u,v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

296 EIG_p : Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los valores propios de la matriz de adyacencia de G_n , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

297 Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 17, se ha utilizado
 298 notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro
 299 las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias cada par de propiedades. Enton-
 300 ces, se replantean equivalentemente las propiedades con una versión cuantitativa, asociando algún
 301 parámetro de error ε en todo grafo específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande.
 302 Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 17, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ satisface
 303 DISC_p , y luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo
 304 G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : \quad e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

305 De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface
 306 la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} ¹ si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G
 307 con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad Q_{y_1, \dots, y_ℓ} implica la
 308 propiedad P_{x_1, \dots, x_k} si y solamente si $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ implica $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$,
 309 existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$ cada vez que
 310 satisfaga la propiedad $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Se desarrollará la demostración formal del Teorema 17 utilizando
 311 notación ε - δ , mostrando que cada par de propiedades P_{x_1, \dots, x_k} y Q_{y_1, \dots, y_ℓ} son equivalentes entre
 312 sí con un cambio polinomial en el error, esto es, $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de
 313 constantes $C, c > 0$.

314 Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

315 La demostración del Teorema fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la
 316 equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 20.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 21.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xRightarrow{\text{Prop. 24. y 25.}} & \text{EIG}_p \\ \updownarrow \text{Prop. 18 y 19.} & & & & \downarrow \text{Prop. 22.} & & \\ \text{DISC}_p & & \xleftarrow{\text{Prop. 23.}} & & \text{CODEG}_p. & & \end{array} \quad (14)$$

¹Los parámetros x_1, \dots, x_k pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 17 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\text{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

317 Con esto en mente, damos paso a la demostración de cada proposición considerada en el esquema
318 (14).

319 **Proposición 18.** *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre*
320 *$n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}_p(\delta)$. En particular,*

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

321 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces,
322 considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, se utiliza la
323 propiedad $\text{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

324 Las igualdades anteriores consideran $e(X, X) = 2e(X)$, por definición, y la aproximación $\binom{|X|}{2} =$
325 $\frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. □

326 **Proposición 19.** *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre*
327 *$n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En particular,*

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

328 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere
329 también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}'_p(\delta)$.

330 En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de
331 vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran
332 en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (15)$$

333 Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los
334 vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$
335 sobre la identidad (15) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left(\binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

336 □

337 **Proposición 20.** *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre*
338 *$n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

339 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$
 340 suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la
 341 propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$.

342 Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su
 343 cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (16)$$

344 Una vez probada la ecuación (16), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para
 345 conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4 \binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left(\frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

346 Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left| \binom{G}{F} \right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G que forman
 347 una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

348 Luego, si aplicamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre V , se obtiene que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

349 Así, con $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea F un grafo
 350 con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (16) en cualquier grafo con una cantidad de
 351 aristas menor que e_F . Para desarrollar la inducción, suponga que $ij \in E(F)$ y considere la siguiente
 352 notación:

- 353 i) F^- corresponde es el grafo producido por eliminar la arista ij de F .
- 354 ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista ij en F .

355 Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G , es decir, T^- se corresponde una aplicación inyectiva
 356 $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez que $uv \in E(F^-)$. Entonces,
 357 considerando $e_{T^-} := f(i)f(j)$, se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera
 358 conveniente para utilizar la hipótesis inductiva como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left| \binom{G}{F} \right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p \left| \binom{G}{F^-} \right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&\stackrel{(16)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell. \tag{17}
\end{aligned}$$

359 En este punto, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad (17) es pequeño.
360 Para esto, considere T^* una copia de F^* , y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar
361 de F^- los vértices j e i respectivamente. Con esto, defina los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}$$

363 Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$
364 añadida a T^* se obtiene una copia de F^- . Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad
365 (17) convenientemente y utilizando la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p|A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

366 De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. \square

367 **Proposición 21.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 368 $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

369 *Demostración.* Se trata de un caso particular de COUNT_p , en donde $H = C_4$ y $\delta < \varepsilon$. \square

370 **Proposición 22.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G
 371 sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con
 372 $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. En particular,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

373 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También
 374 considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$.

375 La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$
 376 y $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de
 377 Cauchy-Schwarz vista en (2). Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado (7) se obtiene
 378 la primera de las cotas:

$$\begin{aligned} \sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\ &\stackrel{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\ &= \frac{4e_G^2}{n} \\ &\geq \frac{4}{n} \left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\ &\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3. \end{aligned}$$

379 Por otro lado, usando $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

380 Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n \left(\sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u,v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\
&= n \left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\
&\leq n (p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n(4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4)^{1/2} \\
&= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
&\leq 4\delta^{1/2} n^3.
\end{aligned}$$

381

□

382 **Proposición 23.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
383 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{CODEG}_p(\delta)$.
384 En particular,

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

385 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea
386 G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$.

387 En primera instancia note que la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración en los grados
388 de los vértices de G . En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\stackrel{(7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/2} n^2.
\end{aligned}$$

389 Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de forma
390 conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \stackrel{DCS}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

391 En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo,
 392 lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera, usando a la cota proveniente de
 393 la conentración de los grados en los vértices de G , se prueba el resultado continuando desde (18):

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &\leq n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} (2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn \\ &\quad + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y))^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left(\sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left(\left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left(\sum_{u, v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2n \right| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} (\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3)^{1/2} \\ &< 3\delta^{1/4}n^2. \end{aligned}$$

394 □

395 **Proposición 24.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 396 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{EIG}_p(\delta)$.
 397 En particular,

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

398 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Conside-
 399 ramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$,
 400 $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

Recuerde que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4, que no son C_4 , en G se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas de C_4 en G . Con esto, junto al Lema 4 y el Corolario 9 se obtiene lo siguiente:

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \quad (19)$$

Luego, recordando que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\text{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \quad (20)$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer valor propio y la cota mostrada en (20). Entonces, continuando desde la ecuación (19),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

Proposición 25. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{EIG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

En lo que respecta al primer valor propio, sabemos por un lado que éste es al menos el promedio de los grados gracias al Lema 12. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \quad (21)$$

Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 9 y la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4. \quad (22)$$

La desigualdad (22) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$, y en combinación con la cota vista en (21), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$. Por último, observe por las cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned}
\max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\
&= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\
&\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\
&= 4\delta n^4.
\end{aligned}$$

De esta manera, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4} n$. \square

3.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas según la Definición 3 contempla verificar que si todo par de subconjuntos de vértices del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En otras palabras, se requiere comprobar un número exponencial de subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo DISC'_p), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es que la propiedad más débil $\text{COUNT}_{C_4, p}$, que solo requiere que la condición de conteo sea verdadera para el ciclo C_4 , sea suficientemente sólida para implicar la afirmación de conteo de la propiedad COUNT_p ; que dice que el número de copias etiquetadas de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

A continuación mostraremos que no es suficiente que la condición de conteo sea verdadera para ciclos de largo inferior a 4 para determinar la cuasi-aleatoriedad de un grafo. Para ver esto, en primer lugar se la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad de copias etiquetadas esperadas de C_3 , pero que no cumple con las condiciones para ser cuasi-aleatorio.

Proposición 26. *Existe un grafo $G = ([n], E)$ con $(\frac{1}{3})^3 n^3 + o(n^3)$ copias etiquetadas de C_3 , pero que no es cuasi-aleatorio.*

Demostración. La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que la esperada en un grafo aleatorio $G(n, p)$ de copias etiquetadas de C_3 , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces independientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2, n_2} tales que su unión disjunta forma el grafo $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

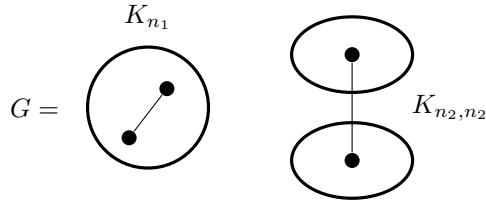


Figura 7: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo. Aquí, $\bullet - \bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G .

En K_{n_1} y K_{n_2, n_2} , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de C_3 son las siguientes:

$$e_{K_{n_1}} \approx \frac{n_1^2}{2}, \quad \left| \binom{K_{n_1}}{C_3} \right| \approx n_1^3, \\ e_{K_{n_2, n_2}} \approx \frac{(n - n_1)^2}{4}, \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{C_3} \right| = 0.$$

443 Bajo esta configuración, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que el grafo G
444 posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de C_3 según lo haría un grafo aleatorio
445 $G(n, p)$. Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n - n_1)^2}{4}, \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

446 Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Esta construcción, en
447 efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

448 Como también,

$$\left| \binom{G}{C_3} \right| = \left(\frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

449 Sin embargo, el grafo G no es cuasi-aleatorio debido a que no existen aristas entre K_{n_1} y K_{n_2, n_2}
450 ni dentro de los conjuntos de vértices que conforman a K_{n_2, n_2} . \square

451 Lo expuesto se enfoca en el caso muy particular en el que $p = \frac{1}{3}$, pero es importante destacar la
452 técnica utilizada. En específico, la interpolación de dos grafos arbitrarios con una cantidad esperada
453 menor y mayor de copias etiquetadas de C_3 según $G(n, p)$ produce un nuevo contraejemplo.

454 De manera más general, es posible extender la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}$ a $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ con $t \geq 2$.
455 Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_{2t}, p} : \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

456 Se expone un bosquejo de la demostración.

457 **Proposición 27.** Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$ vértices y
458 $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ y EIG_p son equivalentes.

459 *Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición
460 24 y 25 tras el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etiquetadas
461 caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

462 También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (20) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

463 Con estas observaciones el resultado queda demostrado. \square

464 Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de
465 largo par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los valores propios de G ,
466 eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

467 Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos
468 y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d -regular. En nuestro contexto, se verá
469 que toda secuencia $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ de grafos d -regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple
470 con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

471 **Teorema 28.** (*Expander Mixing Lemma*) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d -regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq$
472 $\dots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G . Si se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

473 Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n} \right) \left(1 - \frac{|Y|}{n} \right)}. \quad (23)$$

474 *Demostración.* Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n compuesta por los vectores propios
475 de A . Utilizando la descomposición espectral, se denotamos

$$A_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T \text{ y } \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T,$$

476 de manera que $A = A_1 + \Delta$.

477 Conforme a la ecuación (9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y = \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y + \mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y. \quad (24)$$

478 De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que
479 el segundo el factor de error. Para ver esto, se representan los vectores \mathbf{v}_X y \mathbf{v}_Y según la base \mathcal{B} .
480 Es decir,

$$\mathbf{v}_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \text{ y } \mathbf{v}_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i,$$

481 donde $\alpha_i = \mathbf{v}_X^T \mathbf{v}_i$ y $\beta_i = \mathbf{v}_Y^T \mathbf{v}_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}_X, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j \in X} \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= |X|.
\end{aligned}$$

482 Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$.

483 Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (24) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i^T \right) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_j) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{25}$$

484 Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{26}$$

485 Luego, dado que G es un grafo d -regular, $\lambda_1 = d$ y $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ son valor y vector propio
486 respectivamente de A . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

487

488 Así, la ecuación (25) resulta en $\mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y = \frac{d}{n} |X| |Y|$.

489 Para el término de error, recordando la definición de λ , se desarrolla el valor absoluto de la
490 ecuación (26) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\
&\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\
&\stackrel{\text{DCS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2)(\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2)} \\
&= \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

491 Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (24)
492 de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y| = |\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y|.$$

493

□

494 El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d -regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de
495 vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$.
496 En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$.
497 Entonces, si G satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 28:

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\
&< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\
&< \varepsilon n^2.
\end{aligned}$$

498 Finalmente, en un grafo d -regular, la equivalencia entre las propiedades $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se
499 completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (14).

500 4. Lema de regularidad de Szemerédi

501 El lema de regularidad de Szemerédi (1975) * referencia * ha mostrado ser un resultado muy
502 poderoso e importante en la teoría de grafos extremal. Sus aplicaciones no se restringen solo a la
503 teoría de grafos, si no que también las tiene en teoría de números combinatorios, geometría discreta
504 y ciencias de la computación. Originalmente, fue creado por Szemerédi como un lema auxiliar en
505 la demostración de la famosa conjetura de Erdős y Turán (1936) * referencia *, que establece que
506 todo conjunto de números enteros suficientemente grande debe contener una progresión aritmética
507 de cualquier longitud finita.

A grandes rasgos, el lema dice que el conjunto de vértices de todo grafo puede ser particionado en una cantidad finita de partes que muestran comportamientos *regulares* entre la mayoría de los pares de partes. Este hecho es importante debido a que permite entender cualquier grafo con menos información, y se aprovechan cada una de las propiedades equivalentes vistas en el Teorema 17.

Hasta enunciar formalmente el lema de regularidad, se definirán los conceptos necesarios para su buena comprensión. Dado un grafo G y los subconjuntos de vértices $X, Y \subset V(G)$, se define la **densidad de aristas** entre X e Y de la siguiente manera:

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}. \quad (27)$$

Diremos que $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ es una **partición** del conjunto X si:

- i) $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$.
- ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i, j \in [k]$.

Cuando $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_k| = |X_1| + 1$, llamaremos a \mathcal{P} como una **equipartición**. En particular, cada parte posee $\lceil |X|/k \rceil$ o $\lfloor |X|/k \rfloor$ elementos.

También, es necesario conocer en qué sentido los pares de partes entregados por el lema son regulares.

Definición 29. Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X, Y) es un **par ε -regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple

$$\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| \leq \varepsilon.$$

Cuando (X, Y) no es un par ε -regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| > \varepsilon$.

Notaremos que la noción de un par ε -regular es, de hecho, una analogía de la propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$ y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \quad \forall Y \subset W. \quad (28)$$

En efecto, si (U, W) es un par ε -regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que $|A| \geq \varepsilon|U|$ y $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε -regular no es suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W| < 0 \leq e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

De esta manera, tomando $p = d(U, W)$, se obtiene la analogía planteada.

Por último, debemos saber la noción de regularidad en una partición del conjunto de vértices de un grafo.

536 **Definición 30.** Dado un grafo G , una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ es
537 una **partición ε -regular** si

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

538 Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε -regular salvo una
539 fracción ε de pares de vértices.

540 Note que si una partición ε -regular de k partes es en particular una equipartición, entonces a lo
541 más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε -regular.

542 Ya con todo lo requerido, se enuncia formalmente el lema de regularidad.

543 **Teorema 31.** (Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$
544 tal que todo grafo admite una partición ε -regular de a lo más M partes.

545 Otra forma de encontrar el resultado, es cuando todas las partes de la partición poseen aproxi-
546 madamente el mismo tamaño.

547 **Teorema 32.** (Regularidad de Szemerédi - Equipartición) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe un
548 entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε -regular de su conjunto de vértices
549 de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.

550 Lo poderoso del lema de regularidad es que la cota de partes que entrega es independiente del
551 tamaño del grafo, y solo depende del parámetro ε . Esto ya que en grafo más grandes, el tamaño de
552 las partes podrían ser considerablemente más grandes.

553 En la subsección 4.1 se demostrará rigurosamente el Teorema 31 desde una mirada clásica, y se
554 expondrá la manera de probar el 32. Más adelante, en la sección 4.2, nos limitaremos a mostrar una
555 forma novedosa e ingeniosa de demostrar el Teorema 31 desde una perspectiva espectral. Finalmente,
556 en la subsección 4.3 se mostrarán las aplicaciones más famosas del lema de regularidad de Szemerédi.

557 4.1. Demostración por incremento de energía

558 Se empleará una técnica llamada *argumento de incremento de energía*, cual para todo grafo G ,
559 funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

- 560 1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
- 561 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 562 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que
563 evidencian la irregularidad del par.
 - 564 (b) Refinar \mathcal{P} utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par
565 (V_i, V_j) no ε -regular para obtener \mathcal{Q} .
 - 566 (c) Actualizar \mathcal{P} con \mathcal{Q} .

567 Siendo \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que \mathcal{Q} **refina** a \mathcal{P} si
568 cada parte de \mathcal{Q} está contenida en una parte de \mathcal{P} . En lo que resta de esta subsección mostraremos
569 que el algoritmo tiene un fin, y que entrega una partición ε -regular en un número de iteraciones
570 que solo depende de ε .

571 **Definición 33.** (Energía) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer
572 lugar

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

573 Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de Y , se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell q(X_i, Y_j).$$

574 Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, se define su **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

575 Observe que en toda partición \mathcal{P} de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

576 La última observación es crucial en la demostración del Teorema 31, puesto que los Lemas
577 34, 35 y 36 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por
578 consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, y
579 entregará una partición ε -regular. Dicho esto, procedemos a enunciar y demostrar cada uno de los
580 lemas mencionados para probar clásicamente el Teorema 31.

581 El priero de los lemas, afirma que la energía de una partición no decrece bajo cualquier refina-
582 miento arbitrario.

583 **Lema 34.** Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, y \mathcal{P}_X y \mathcal{P}_Y particiones de X e Y respectivamente,
584 entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, si \mathcal{P} y \mathcal{P}' son dos particiones de vértices de G , entonces
585 $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que \mathcal{P}' refina a \mathcal{P} .

586 *Demostración.* Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones
587 $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente. En primera instancia, se utiliza
588 la desigualdad (3) proveniente de Cauchy-Schwarz para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para
589 esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
&\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
&= q(X, Y).
\end{aligned} \tag{29}$$

590 Sea ahora la partici3n $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de \mathcal{P} .
591 Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(29)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

592 □

593 Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε -regular de un grafo G , mediante los subconjuntos
594 que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energa.

595 **Lema 35.** Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n v3rtices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε -regular,
596 existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

597 *Demostraci3n.* Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n v3rtices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos
598 tales que el par (X, Y) no es ε -regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que
599 evidencian la irregularidad del par (X, Y) , y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon |X| \quad \text{y} \quad |Y_1| \geq \varepsilon |Y|. \tag{30}$$

600 Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$,
601 cual por definici3n de par ε -regular, satisface

$$|\eta| > \varepsilon. \tag{31}$$

602 Por un lado, observe la siguiente descomposici3n,

$$\begin{aligned}
e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\
&= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2).
\end{aligned}$$

603 De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \quad (32)$$

604 Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned}
|X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\
&= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|.
\end{aligned}$$

605 Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (33)$$

606 Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y , desarrollamos,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \right) \\
&\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j|} \right) \\
&\stackrel{(32) \text{ y } (33)}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right). \quad (34)
\end{aligned}$$

607 Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1|. \quad (35)$$

608 Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (34) como sigue:

$$\begin{aligned}
n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
&\stackrel{(35)}{=} \frac{1}{|X_1||Y_1|} \left(\frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \left(\frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X||Y|} e(X, Y) - \eta |X_1||Y_1| \right)^2 \\
&= \frac{|X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1||Y_1| \\
&\quad + \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1| \left(1 + \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \right) \\
&\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2 |X_1||Y_1|. \tag{36}
\end{aligned}$$

609 Finalmente, utilizando las cotas (30) y (31), podemos concluir desde la desigualdad (36),

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\
&= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\
&> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.
\end{aligned}$$

610 □

611 Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε -regular por medio de sus subconjuntos
612 que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al
613 paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar
614 simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε -regular de un grafo produce un aumento estricto
615 de al menos ε^5 en la energía.

616 **Lema 36.** *Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ no ε -regular de $V(G)$. Entonces*
617 *existe un refinamiento \mathcal{Q} de \mathcal{P} , en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que*

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

618 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ una partición no ε -regular del conjunto de n vértices
619 de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε -regular,
620 existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que en cada
621 V_i se podrían encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los
622 pares (V_i, V_j) no ε -regular. Considere ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ que refina a \mathcal{P} , en la
623 que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos los

subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular. En consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

Para simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$. Luego, como la partición \mathcal{P} no es ε -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (37)$$

Así, junto a los lemas probados previamente, se da prueba al resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\ &= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\ &\stackrel{\text{Lema 34}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\ &\stackrel{\text{Lema 35}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\ &\stackrel{(37)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5. \end{aligned}$$

* Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 33, cuando lo cambio se me descuadra :c
*

Este último Lema culmina lo que se necesita para dar prueba formal del lema de regularidad de Szemerédi mediante el argumento de incremento de energía.

Demostración del Teorema 31. Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G , elegimos inicialmente la partición trivial del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actualizando \mathcal{P}), aplicaremos el Lema 36 cada vez que la partición actual no sea ε -regular. Observe que por cada aplicación del Lema 36 se consigue un aumento de al menos ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será necesariamente una partición ε -regular debido a la cota de la energía.

Para una partición no ε -regular con k elementos, el Lema 36 encuentra un refinamiento de a lo más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar el Lema 36.

$$\begin{aligned}
1^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 1 &\rightarrow 2 < 2^2 && \text{partes.} \\
2^{\text{da}} \text{ Iteración: } 2^2 &\rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^{2^2}} && \text{partes.} \\
3^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 2^{2^{2^2}} &\rightarrow (2^{2^{2^2}}) 2^{(2^{2^{2^2}})} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} && \text{partes.}
\end{aligned}$$

Finalmente, como el algoritmo debe luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad de partes al final de proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

□

Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la siguiente manera:

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } k.$$

Durante la demostración del Teorema 31 se utilizó una cota que podría parecer exagerada para encontrar la cantidad de partes que devuelve el algoritmo implementado, por sobre todo, considerando lo rápido que crece a medida que ε se hace más pequeño. Sorprendentemente, en 1997, T. Gowers *referencia* prueba que tal límite inferior de partes es necesario. Más precisamente, mostró que es posible encontrar una constante $c > 0$ tal que para todo suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$, existe un grafo sin partición ε -regular siempre que posea una cantidad menor que $\text{torre}(\lceil \varepsilon^{-c} \rceil)$ partes (ver Moshkovitz y Shapira *referencia* (2016) para una demostración corta).

Finalmente, se expone la forma de probar el Teorema 32. La idea de la demostración consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Entonces, para todo grafo G , la modificación del algoritmo es la siguiente:

1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria \mathcal{P} de $V(G)$ con m_0 partes.
2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de los pares.
 - (b) Refinar \mathcal{P} usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener la partición \mathcal{Q} , cual divide cada parte de \mathcal{P} en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.
 - (c) Modificar la partición \mathcal{Q} refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$, dada alguna elección apropiada del entero $m = m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de \mathcal{Q} que no fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
 - (d) Actualizar \mathcal{P} con la modificación de \mathcal{Q} .

El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G . En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande. En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición de a lo más $\text{torre}(\varepsilon^{-5})$ partes.

4.2. Demostración espectral

En 2012, Terence Tao [* referencia *](#) publica en su blog una prueba del lema de regularidad de Szemerédi usando la descomposición espectral de la matriz de adyacencia. La idea original de la demostración proviene de los autores Frieze y Kannan [* referencia *](#), a quienes Tao les da el crédito en su publicación. Más adelante, en 2013, Cioba y Martin [* referencia *](#) escribieron la demostración con más detalles. La prueba que se expone en esta sección está basada esencialmente en la publicación de Cioba y Martin.

Demostración espectral del Teorema 31. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$F(\ell) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^{4\ell} \right\rceil.$$

Denotaremos por $F^{(i)}$ a la i -ésima composición de F con ella misma, y escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Sea $G = ([n], E)$ un grafo con $n \geq n_0$ vértices, y A su matriz de adyacencia. Ordenamos los valores propios $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ de A de manera decreciente y consideramos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ los vectores propios correspondientes, que forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Por la Proposición 4 y el Corolario 9, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (38)$$

De lo anterior, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$, se encuentra la cota

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (39)$$

Consideramos también los intervalos $I_1, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \subset [n]$ definidos por

- $I_1 = \{1, 2, \dots, F^{(1)}(1) - 1\}$ y
- $I_k = \{F^{(k-1)}(1), \dots, F^{(k)}(1) - 1\}$ para todo $k = 2, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil}$.

Con esta construcción, debe existir un natural $1 \leq L \leq \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil$ que cumple con

$$\sum_{L \leq j < F(L)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2, \quad (40)$$

porque de lo contrario, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \sum_{k=1}^{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \sum_{i \in I_k} \lambda_i^2 > \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil \cdot \varepsilon^3 n^2 > n^2,$$

700 que contradice la desigualdad (38).

701 Ahora, usando L , separamos la matriz A en tres matrices simetricas:

$$A = S + F + Q,$$

702 donde la matriz S se intepretará como la componente *estructural*,

$$S = \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

703 la matriz F como la componente de *error*,

$$F = \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

704 y la matriz Q como la componente *cuasi-aleatoria*,

$$Q = \sum_{i \geq F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T.$$

705 Usaremos los vectores propios $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{L-1}$ de S para definir una partición de $V(G)$ como mos-
706 traremos a continuación. Consideramos el intervalo de \mathbb{R} de longitud $2\sqrt{(L/\varepsilon)} \cdot n^{-1/2}$ centrado en
707 el origen y lo particionamos en $t = 2(L/\varepsilon)^2$ subintervalos J_1, \dots, J_t de longitud $(\varepsilon/L)^{3/2} n^{-1/2}$ cada
708 uno. Luego, clasificamos los vértices $v \in V(G)$ según su valor $\mathbf{u}_i(v)$ de la siguiente manera:

$$V_i^j = \{v \in V(G) : \mathbf{u}_i(v) \in J_j\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

709 Con esto, tomamos el refinamiento de todos estos conjuntos $\{V_i^j \neq \emptyset : i \in [L-1], j \in [t]\}$
710 para obtener los conjuntos V_0, V_1, \dots, V_M , en donde $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$. El resultado anterior considera un
711 conjunto excepcional de vértices V_0 que está definido como sigue:

$$V_0 = \left\{ v \in V(G) : |\mathbf{u}_i(v)| > \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} n^{-1/2} \text{ para algún } i \in [L-1] \right\}.$$

712 Mostraremos que el conjunto excepcional V_0 es suficientemente pequeño. En efecto, observando
713 que

$$L-1 = \sum_{i=1}^{L-1} \|\mathbf{u}_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{v \in V(G)} \mathbf{u}_i(v)^2 \geq |V_0| \left(\frac{L}{\varepsilon n} \right),$$

714 se determina que $|V_0| < \varepsilon n$.

715 Probaremos que la partición construida del conjunto de vértices del grafo $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_M\}$
716 es ε -regular. Comenzamos identificando los pares excepcionales. Para esto, sea $F = (f_{xy})$ y defina

$$\Sigma_F = \left\{ (i, j) : \sum_{(x, y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon |V_i| |V_j| \right\}$$

Entonces, por la definición de F y el Corolario 5, tenemos que

$$\varepsilon^3 n^2 \geq \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i^2 = \text{Tr}(F^2) = \sum_{(x, y) \in V(G)^2} f_{xy}^2 \geq \sum_{(i, j) \in \Sigma_F} \sum_{(x, y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon \sum_{(i, j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|,$$

y por consecuencia

$$\varepsilon^2 n^2 \geq \sum_{(i, j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|. \quad (41)$$

Además, sea

$$\Sigma_Q = \left\{ (i, j) : \min\{|V_i|, |V_j|\} < \frac{\varepsilon}{M} n \right\} \cup \{(i, j) : i = 0 \text{ o } j = 0\},$$

y observe que

$$\sum_{(i, j) \in \Sigma_Q} |V_i| |V_j| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M} n + 2|V_0|n < 4\varepsilon n.$$

Ahora, sea $(i, j) \notin \Sigma_F \cup \Sigma_Q$, y $d_{ij} = d(V_i, V_j)$ la densidad del par (V_i, V_j) . Entonces, dado los subconjuntos $X \subset V_i$ e $Y \subset V_j$, note la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} |e(X, Y) - d_{ij}|X||Y|| &= |\mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y - d_{ij}|X||Y|| \\ &\leq |\mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij}|X||Y|| + |\mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y| + |\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y|. \end{aligned} \quad (42)$$

En este punto, el objetivo es encontrar cotas para cada uno de los sumandos anteriores.

Para comenzar, por la definición de Σ_F y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene la primera de las cotas de la siguiente manera:

$$|\mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y|^2 = \left| \sum_{(x, y) \in X \times Y} f_{xy} \right|^2 \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \left(\sum_{(x, y) \in X \times Y} f_{xy}^2 \right) |X||Y| \leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |X||Y| \leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2. \quad (43)$$

Para la próxima cota, debemos observar por la construcción de Q y el Teorema 10 que

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \|\mathbf{v}_X\| \|Q \mathbf{v}_Y\| \leq \|\mathbf{v}_X\| \|\mathbf{v}_Y\| \frac{n}{\sqrt{F(L)}} = \sqrt{|X||Y|} \frac{n}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}}.$$

Además, como $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$, concluimos de la elección de $F(\cdot)$ que $F(L) \geq \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2L^2}{\varepsilon^2} \right)^{4L} \geq \frac{1}{\varepsilon^6} M^4$. Y así, cuando $(i, j) \neq \Sigma_Q$, se tiene

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{M^2 |V_i| |V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{F(L)}} \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (44)$$

Por último, para la tercera cota, analizamos $S = (s_{xy})$. Sean s_{ab} y s_{cd} los valores mínimo y máximo de todos los s_{xy} sobre $(u, v) \in V_i \times V_j$. Entonces,

$$\begin{aligned} s_{cd} - s_{ab} &= \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \lambda_i \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \\ &\leq \sum_{i < L} |\lambda_i| \left| \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) + \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \right| \\ &\leq n \sum_{i < L} \left| \mathbf{u}_i(d) (\mathbf{u}_i(c) - \mathbf{u}_i(a)) + \mathbf{u}_i(a) (\mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(b)) \right| \\ &\leq n \sum_{i < L} |\mathbf{u}_i(b)| \left| \mathbf{u}_i(a) - \mathbf{u}_i(c) \right| + |\mathbf{u}_i(c)| \left| \mathbf{u}_i(b) - \mathbf{u}_i(d) \right| \\ &\leq Ln \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{\varepsilon n}} \cdot \frac{\varepsilon}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Ln}} \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, como d_{ij} es el promedio de S sobre $V_i \times V_j$, tenemos que $s_{ab} \leq d_{ij} \leq s_{cd}$, y por ende, $|s_{xy} - d_{ij}| \leq s_{cd} - s_{ab}$ para cada $(u, v) \in V_i \times V_j$. Como resultado,

$$|\mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij} |V_i| |V_j|| \leq \sum_{(x,y) \in X \times Y} |s_{xy} - d_{ij}| \leq (s_{cd} - s_{ab}) |X| |Y| \leq 4\varepsilon |X| |Y|. \quad (45)$$

Utilizando las desigualdades (43), (44) y (45) en la expresión enunciada en (42) se concluye la demostración del teorema. □

4.3. Aplicaciones

4.3.1. Eliminación de triángulos

4.3.2. Emparejamiento inducido

4.3.3. Teorema de Roth

4.4. Enunciado y demostración

Por otro lado, con el espíritu del Teorema 17, es posible expresar un resultado análogo a la propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ utilizando el concepto de par ε -regular. Dicho resultado, para $H = K_3$ es conocido como el lema de conteo de triángulos.

744 **Lema 37.** (*Lema de conteo de triángulos*) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los conjuntos no
 745 necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares (X, Y) , (Y, Z) y (X, Z) son ε -regular.
 746 Entonces,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\}| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

747 *Demostración.* Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Propo-
 748 sición 20 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$. Cuando el grafo no posea
 749 aristas, entonces

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\}| = |X||Y||Z|.$$

750

751 También, recordando que la condición de un par ε -regular es equivalente a $\text{BI} - \text{DISC}_p(\varepsilon)$ para
 752 algún $p \in (0, 1)$, cuando el grafo presenta una arista,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\}| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

753

754 Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$|\{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

755

756 Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del grafo
 757 $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la aplicación inyectiva $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$. Con esto, se desarrolla
 758 inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\}| &= \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Y)] \\ &= d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| \\ &\quad + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \quad (46)$$

759

760 En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (46) se corresponde
 761 con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton $\{2\}$ en G , y considere los
 762 siguientes conjuntos:

$$A_1^{T^*} = \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}.$$

$$A_3^{T^*} = \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}.$$

De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X, Z) ε -regular con versión bipartita de la propiedad $\text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ vista en (28), se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| &\leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\ &= \sum_{T^*} \left| e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z) |A_1^{T^*}| |A_3^{T^*}| \right| \\ &\leq \sum_{T^*} \varepsilon |X| |Z| \\ &\leq \varepsilon |X| |Y| |Z|. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (46) se prueba lo prometido. \square

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X, Y) y (X, Z) son ε -regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε -regular para el que lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 37 (y Proposición 20), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H . Se enuncia sin demostración.

Lema 38. (Lema de conteo de grafos) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε -regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

4.5. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son desarrolladas en base a los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices del grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** el grafo eliminando aristas con mal comportamiento según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:

- 785 i) Irregularidad.
 786 ii) Baja densidad.
 787 iii) Al menos una de las partes es demasiado pequeña.

788 3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio utilizando algún lema de conteo.

789 Teniendo esta fórmula en mente, damos paso a la primera aplicación del lema de regularidad,
 790 cual plantea intuitivamente que todo grafo con *pocas* triángulos puede convertirse en un grafo libre
 791 de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

792 **Teorema 39.** (*Lema de eliminación de triángulos*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal
 793 que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos
 794 eliminando a lo más εn^2 aristas.

795 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema ?? para obtener la constante
 796 $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el
 797 grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más εn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el
 798 Teorema ??, se asegura la existencia de una partición ε_r -regular $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_M\}$.

799 Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [M]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i y V_j cuando

- 800 (a) (V_i, V_j) no es un par ε_r -regular,
 801 (b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o
 802 (c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{M}\varepsilon_r$.

803 De esta manera, como la partición es ε_r -regular, las aristas removidas por la condición (a) son
 804 a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

805

806 Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [M]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

807

808 Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{M}\varepsilon_r$ vértices en
 809 a lo más M subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$M \cdot \frac{n}{M}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

810

811 En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

812 Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos. Para esto, observe
 813 que la condición de eliminación de aristas (a) nos asegura que cada par (V_i, V_j) es ε_r -regular, y que
 814 se satisface la hipótesis del lema de conteo de grafos. Entonces, si luego de la limpieza del grafo aún
 815 existe un triángulo $(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell$, el Lema 37 nos dice que incluso hay más triángulos. En
 816 particular, gracias a la eliminación de las aristas por la condición (b) y (c),

$$\begin{aligned}
 |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{M^3} \\
 &> \delta n^3.
 \end{aligned}$$

817

818 Finalmente, con nuestra elección de δ , el resultado se prueba formulando la siguiente contradic-
 819 ción: si existe un triángulo en el grafo limpio G' , el lema de conteo de triángulos nos dice que en
 820 realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos,
 821 por lo que se concluye que el grafo G' obtenido desde G es libre de triángulos removiendo a lo más
 822 εn^2 aristas. \square

823 Denotaremos por k -PA a una progresión aritmética de k elementos. En particular, diremos que
 824 un conjunto de números naturales A es libre de 3-PA si no existen los elementos $x, x+y, x+2y \in A$,
 825 con $y \neq 0$. Cuando $y = 0$, diremos que la 3-PA es trivial.

826 **Teorema 40.** (Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $A \subset [n]$
 827 posee $|A| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces A contiene una 3-PA no trivial cada vez que $n \geq n_0$.

828 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $A \subset [n]$ con $|A| \geq \varepsilon n$ elementos. La idea es construir
 829 un grafo 3-partito de manera conveniente para posteriormente utilizar el lema de eliminación de
 830 triángulos. Considere el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en
 831 donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$, y son disjuntos entre cada par de ellos. Así, G tiene $6n$
 832 vértices, y se definen las aristas de la siguiente manera:

- 833 1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in A$.
- 834 2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in A$.
- 835 3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in A$.

836 Luego, la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in A$,
 837 $k - j \in A$ y $\frac{k-i}{2} \in A$, o bien, $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$ es una 3-PA en A con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$. En
 838 específico, diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $a \in A$ se
 839 satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = a$.

Ahora, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, a) \in V_1 \times A$, la cantidad de triángulos triviales es exactamente $n|A| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se puede eliminar dos triángulos triviales removiendo solo una arista. En consecuencia, debemos eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos.

Utilizando el lema eliminación de triángulos eligiendo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{36}$, existen $\delta_0 > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $6n \geq n'_0$ vértices y a lo más $\delta_0(6n)^3$ triángulos, se convierte en libre de triángulos eliminando a lo más $\varepsilon_0(6n)^2$ aristas. Entonces, estableciendo $\delta = 216\delta_0$, note que existen como máximo $\delta n^3 - \varepsilon n^2$ triángulos no triviales. Sabiendo esto, aseguramos la existencia de un triángulo no trivial cuando $n > \frac{\varepsilon+1}{\delta}$. En efecto,

$$n > \frac{\varepsilon+1}{\delta} \Rightarrow \delta n - \varepsilon > 1 \Rightarrow n^2(\delta n - \varepsilon) > 1.$$

Finalmente, el resultado queda demostrado tomando $n_0 > \max\left\{\frac{n'_0}{6}, \frac{\varepsilon+1}{\delta}\right\}$ suficientemente grande. \square

Definición 41. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $M \subseteq E$ es un **emparejamiento** en G si no existen un par de aristas en M que compartan algún vértice. Diremos que M es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y toda arista de G con un vértice en $V(M)$ es una arista en M .

* Usar k o M para la cantidad de partes?, aquí se me confunde con el emparejamiento, pero en TRL y demo espectral de regularidad usé M como las partes. De momento en esta parte lo dejaré con k . *

Teorema 42. (Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema ?? con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema ??, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r -regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G' . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

872 Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido M en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas
 873 (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrán a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por
 874 lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

875 Se define $U_i := V_i \cap V(M)$ como el subconjunto de vértices de M que comparte elementos con
 876 V_i , y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(M)$ que
 877 comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i . Note que podemos obtener el
 878 conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de $V(M)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

879

880 De esta manera, recordando que $|V(M)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$.
 881 Además, como también $|M| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una
 882 arista en M . Luego, dada la limpieza de G , dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que
 883 satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r -regular
 884 con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (47)$$

885

886 Ahora, como que M es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$
 887 debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

888

889 Sin embargo, la desigualdad (47) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\ &\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\ &\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

890

891 La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a M , por
 892 lo que se contradice la hipótesis de que M es un emparejamiento inducido. \square

893 * Comentar que el siguiente teorema será utilizado para demostrar alternativamente el Teorema
 894 de Roth. *

895 **Teorema 43.** (Ajtai-Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo
896 subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$ para
897 algún $a, b, d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.

898 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \geq n_0$, y $S \subset [n]^2$ un subconjunto
899 con al menos εn^2 elementos. Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de
900 vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

901

902 Interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se puede definir una relación entre pares de
903 aristas en G en función de la distancia que abarca la suma de las coordenadas de sus respectivos
904 pares en S . Esto es,

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

905

906 * Dibujito con 2 ejemplos de q . * Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento
907 en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia
908 (cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E . En
909 efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$ comparten el vértice
910 w_j . Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la
911 misma arista.

912 Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2$, el Teorema 42 asegura que existe al menos un emparejamiento no
913 inducido. Esto significa que en un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim$
914 $u_k w_\ell$ puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i, j) , (k, ℓ) y (i, ℓ)
915 elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

916

917 Finalmente, el resultado se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para obtener $j = b + d$ y $k = a + d$.

918 * Poner dibujito de la esquina * □

919 * Comentar que el Teorema de la esquina nos entrega otro camino para demostrar el Teorema
920 de Roth. *

921 *Segunda demostración Teorema 40.* Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para
922 $n \geq n_0$, sea $A \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in A\},$$

923

924 Observe que cada $a \in A$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = a$, permitiendo
 925 determinar que $|B| = n|A| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 43 asegura la existencia de elementos de la
 926 forma $\{(a, b), (a, b + d), (a + d, b)\}$ en B . Por consecuencia, se encuentra una 3-PA no trivial en A
 927 tomando $x = a - b$, e $y = d$. \square

928 5. Bibliografía

- 929 [1] Krivelevich, M., Sudakov, B. (2006). Pseudo-random Graphs. In Bolyai Society Mathema-
 930 tical Studies (pp. 199–262). Springer Berlin Heidelberg.
- 931 [2] Chung, F. R. K., Graham, R. L., Wilson, R. M. (1989). Quasi-random graphs. Combinato-
 932 rica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing.
- 933 [3] Chan, T. F. N., Král', D., Noel, J. A., Pehova, Y., Sharifzadeh, M., Volec, J. (2020). Charac-
 934 terization of quasirandom permutations by a pattern sum. Random Structures Algorithms.
- 935 [4] Hàn, H., Kiwi, M., Pavez-Signé, M. (2021). Quasi-random words and limits of word sequen-
 936 ces. Journal Europeen de Combinatoire [European Journal of Combinatorics].