

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN



1 Grafos cuasi-aleatorios y el lema de regularidad de 2 Szemerédi

3 Felipe Andrés Sánchez Erazo

4 Profesor(a) Guía:
Hiệp Hàn

5 Trabajo de titulación para optar al
título profesional de Ingeniero
Matemático

6 Santiago - Chile

7 2024

8 © Felipe Andrés Sánchez Erazo.

9 Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra con fines académicos, por cual-
10 quier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica
11 del documento.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN



12 Grafos cuasi-aleatorios y el lema de regularidad de 13 Szemerédi

14 Felipe Andrés Sánchez Erazo

15 Trabajo de Titulación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial
16 de los requisitos exigidos para optar al título de **Ingeniero Matemático**.

17 Este trabajo de Graduación fue presentado bajo la supervisión del profesor guía
18 Dr. Hiệp Hàn, del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la
19 Facultad de Ciencia.

20

Dr. Hiệp Hàn
Profesor Guía

21

Dr. Marcos Kiwi Krauskopf
Profesor Informante

Pablo Marín Álvarez
Director del Departamento

Dr. Sebastián Barbieri Lemp
Profesor Informante

A mi abuelo, Sergio Sánchez

²⁴ Agradecimientos

²⁵ Dōmo arigatōgozaimasu!

Índice general

27	Agradecimientos	IV
28	Índice de figuras	VI
29	Introducción	1
30	1. Preliminares	2
31	1.1. Teoría de grafos	3
32	1.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos	8
33	1.3. Grafos aleatorios	17
34	2. Cuasi-aleatoriedad	21
35	2.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson	22
36	2.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW	35
37	3. Lema de regularidad de Szemerédi	42
38	3.1. Demostración por incremento de energía	47
39	3.2. Demostración espectral	57
40	3.3. Aplicaciones	62
41	3.3.1. Eliminación de triángulos	65

42	3.3.2. Emparejamiento inducido	67
43	3.3.3. Teorema de Roth	70
44	Bibliografía	75

Índice de figuras

45		
46	1.1. Ejemplo de un grafo	4
47	1.2. Ejemplo de un grafo 3-partito	6
48	1.3. Ejemplos de un grafo especial $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular	7
49	1.4. Ejemplo de una caminata y un ciclo en un grafo	7
50	1.5. Ejemplo de una copia etiquetada	8
51	1.6. Ejemplo de la matriz de adyacencia de un grafo	10
52	2.1. Esquema de un contraejemplo	36
53	3.1. Diagrama de flujo de la demostración del teorema de Szemerédi . . .	43
54	3.2. Ilustración del resultado del lema de regularidad de Szemerédi	44
55	3.3. Ejemplo de un par ε -regular	45
56	3.4. Ilustración del procedimiento de refinamiento simultaneo	53
57	3.5. Ejemplo de un emparejamiento y un emparejamiento inducido	68
58	3.6. Esquema construcción grafo en demostración del teorema de Roth . .	71
59	3.7. Ejemplo de emparejamiento generado por una clase de equivalencia .	73
60	3.8. Esquema de esquina formada en el teorema de Ajtai-Szemerédi	74

⁶¹ Introducción

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 1.1 da un paseo por las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 1.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 1.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 2.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero recuerde que la DCS establece que todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2. \quad (1.1)$$

Entonces, si $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (1.2)$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$, defina $a_i =$

77 $\sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \beta_i\right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (1.3)$$

78 Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición
 79 de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como
 80 funciones de n :

81 ■ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) \rightarrow 0$, se dice que $f = o(g)$.

82 ■ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

83 1.1. Teoría de grafos

84 Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. También,
 85 si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto
 86 de todos los subconjuntos de r elementos de S .

87 Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices**, y
 88 $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Dado un grafo G , se escribe $V(G)$ como su conjunto
 89 de vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de
 90 aristas presentes en el grafo.

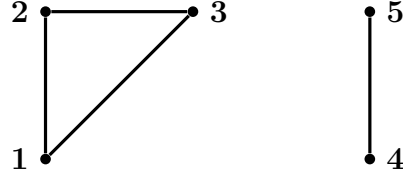


Figura 1.1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

91 Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente**
 92 a v (o viceversa) si y solamente si $uv \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no
 93 necesariamente disjuntos, se define el conjunto de tuplas que forman una arista en
 94 G de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\} \right|. \quad (1.4)$$

95 Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y , y cuando
 96 $X \cap Y \neq \emptyset$, $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en
 97 $X \cap Y$. Se entenderá por **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices
 98 adyacentes a u , es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \quad (1.5)$$

99 Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X , se define el **grado** de un
 100 vértice $u \in V$ con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente
 101 manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

102 En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

Una propiedad elemental en teoría de grafos, es la relación que guarda la suma del grado de todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

Proposición 1. *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (1.6)$$

Demostración. Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u , y otra por v . \square

En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesariamente diferentes mediante:

$$\text{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu) \mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será de utilidad en la sección 2.

Proposición 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').$$

Demostración. Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv) \mathbb{1}_E(uv') \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu) \mathbb{1}_E(v'u) \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v'). \end{aligned}$$

118 Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (1.7)$$

119 A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en
 120 esta tesis. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **k -partito** si V se puede dividir en
 121 k subconjuntos disjuntos V_1, V_2, \dots, V_k tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$,
 122 con $i \neq j$. En particular, a un grafo 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

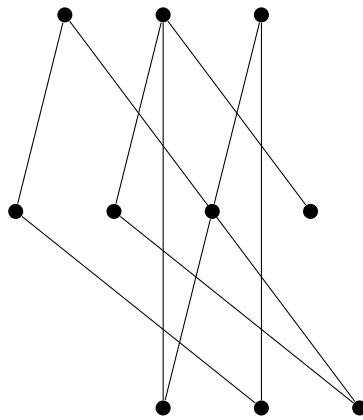
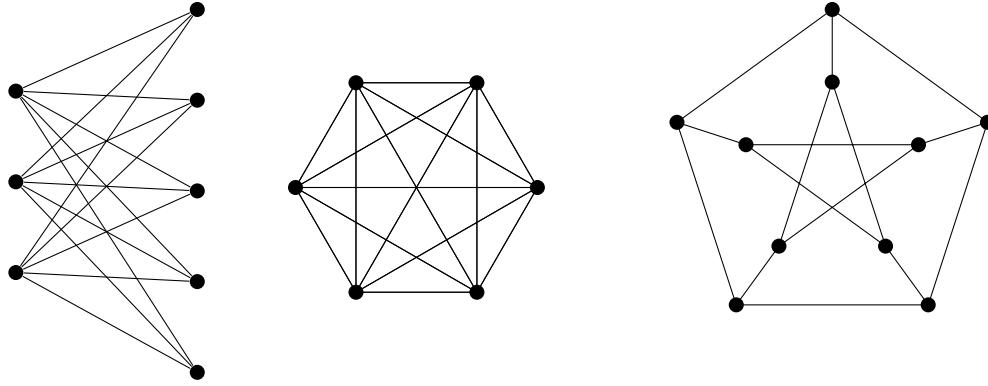


Figura 1.2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

123 Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n , es un grafo en el cual todos
 124 sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee
 125 una arista que los conecta. Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito**
 126 **completo** con n y m elementos en sus respectivos conjuntos de vértices. Observe
 127 que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y
 128 $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo **d -regular** es aquel que presenta todos sus
 129 vértices con grado d .

Figura 1.3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

Otro término relevante en este trabajo, son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos v_0, v_1, \dots, v_k tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.
- Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k , que coincide con v_0 . Se denotará por C_k al ciclo de largo k .

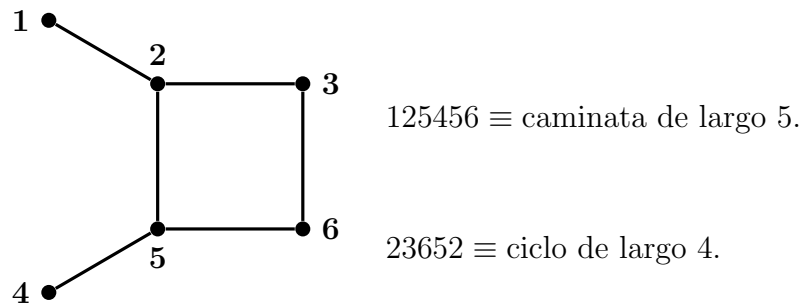


Figura 1.4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \rightarrow V(G)$

tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfismos.

Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G , como la aplicación inyectiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$. En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G .

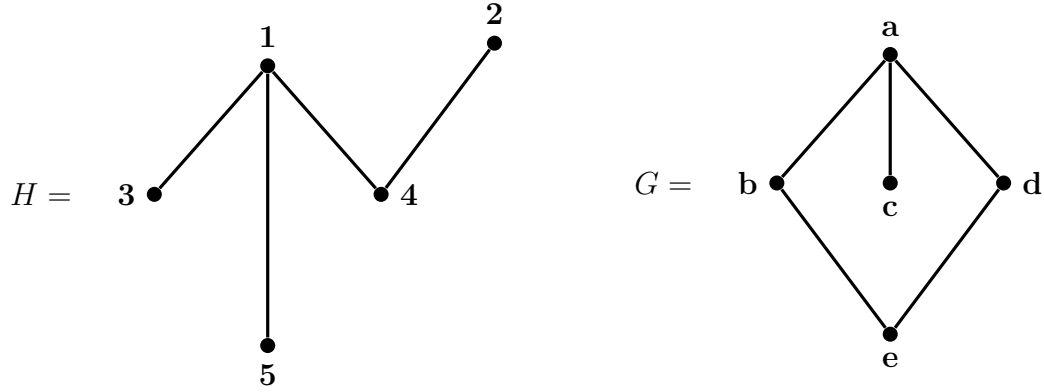


Figura 1.5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \rightarrow V(G)$ definida por $f(1) = a, f(2) = e, f(3) = c, f(4) = b$ y $f(5) = d$.

1.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T como la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de \mathbb{R}^n con entrada 1 en la posición i . Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usuales de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n , según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de sus elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

158 Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multi-
 159 plicación de dichas matrices. En efecto,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \text{Tr}(BA).$$

160 Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada
 161 binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La
 162 matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman
 163 una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación se consigue una visión clara y
 164 eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo, y se gozan de las propiedades
 165 que ofrece el álgebra lineal.

166 **Definición 3.** Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacen-**
 167 **cia** $A_G \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

168 Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simple-
 169 mente por A .

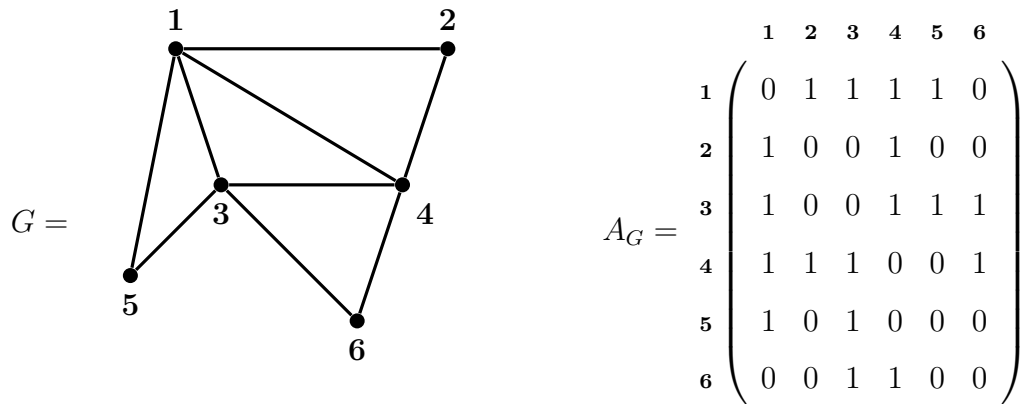


Figura 1.6: Ejemplo de la representación de un grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 3, es que nos permite reescribir la ecuación (1.4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y. \quad (1.9)$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\mathbf{v}_X = \sum_{i \in X} \mathbf{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j .

Proposición 4. Sea A la matriz de adyacencia de grafo $G = ([n], E)$. La (i, j) -ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t , cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier caminata de largo $t + 1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j , digamos k . Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t + 1$ desde i hasta j es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t en el grafo por medio de la traza, $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$. Con esencialmente la misma demostración, enuncia el siguiente corolario que nos será de utilidad más adelante.

204 **Corolario 5.** *Sea la matriz cuadrada $F = (f_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces $\text{Tr}(F^2) =$*
 205 *$\sum_{(i,j) \in [n]^2} f_{ij}^2$.*

206 Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos,
 207 recuerde que el vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz
 208 $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Esto significa que λ es un
 209 valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular. Así, los valores propios
 210 vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En este trabajo,
 211 cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G , siempre será
 212 con respecto a su matriz de adyacencia A . Por ejemplo, si G es un grafo d -regular,
 213 entonces con la igualdad (1.8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al
 214 vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G .

215 **Proposición 6.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus*
 216 *valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos*
 217 *valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los*
 218 *vectores propios define una base ortonormal de \mathbb{R}^n .*

219 *Demostración.* Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea
 220 λ un valor propio de A y $\mathbf{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su
 221 conjugado (denotado por \bar{z} al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente
 222 que

$$\begin{array}{ccc} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} & & A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 & & \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2. \end{array}$$

223 Además, como A es simétrica,

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}}.$$

224 Así, ya que $\mathbf{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \bar{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los
 225 valores propios de A son números reales.

226 Por otro lado, considere $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los
 227 valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu \mathbf{v} \rangle = \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

228 De esta manera, $\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y solamente si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ya probada
 229 la ortogonalidad de los vectores propios de A , defina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ como el
 230 conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que \mathcal{B} constituye una
 231 base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para esto, sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

232 Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad ante-
 233 rior por \mathbf{u}_i^T ,

$$\mathbf{u}_i^T (c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) = c_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = c_i = 0.$$

234 Así, queda demostrado que \mathcal{B} es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . □

235 A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importan-
 236 tes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto
 237 de la teoría de grafos.

238 **Teorema 7.** (*Teorema espectral*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica.
 239 Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (1.10)$$

240 En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de
 241 A , y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A .

242 Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo
 243 por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios
 244 para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

245 En primera instancia, observe que la descomposición espectral (1.10) permite tra-
 246 bajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el
 247 problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores
 248 propios. Para visualizar este hecho, primero observe como se comporta el cuadrado
 249 de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^T P)DP^T = PD^2P^T.$$

250 Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^kP^T$. Esta propiedad resulta
 251 altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un
 252 grafo. Más aún, la Proposición 8 y el Corolario 9 mostrarán que el número de ca-
 253 minatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios
 254 del mismo.

255 **Proposición 8.** *La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma*
 256 *de sus valores propios.*

257 *Demostración.* Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,
 258 y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente
 259 manera:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i.$$

260 Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j.
\end{aligned}$$

261

□

262 El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de
 263 una matriz real simétrica.

264 **Corolario 9.** Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores pro-
 265 pios, entonces se cumple $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

266 *Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos
 267 matrices es invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}([PDP^T]^k) = \text{Tr}(P[D^k P^T]) = \text{Tr}([D^k P^T]P) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

268

□

269 De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices
 270 de un grafo se simplifica a solo calcular la suma de la k -ésima potencia de todos sus
 271 valores propios. Más adelante, en la sección 2, esta propiedad será de utilidad debido
 272 a que entrega una buena aproximación de la cantidad de copias etiquetadas de ciclos
 273 de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En particular, si A es la matriz de
 274 adyacencia de G y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left| \binom{G}{C_k} \right| = \text{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k + o(n^k) \quad (1.11)$$

Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

Teorema 10. (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Corolario 11. Sea λ_1 el valor propio más grande de la matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\lambda_1 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Demostración. Si \mathbf{v}_1 un vector propio de A correspondiente a λ_1 , entonces

$$\lambda_1 = \frac{\|A\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Por otro lado, observando que el valor propio más grande de A^2 es λ_1^2 , se concluye para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^2\mathbf{x} \rangle \leq \lambda_1^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda_1^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

Proposición 12. *El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d -regular, el primer valor propio coincide con d .*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 10:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (1.8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$ cada vez que G es un grafo d -regular. \square

1.3. Grafos aleatorios

El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios*.

Intuitivamente, se podría pensar en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de seleccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n . En 1959, P. Erdős y A. Rényi [7] (también E. Gilbert [11]) proponen dicha selección de la siguiente manera: comenzando con un grafo sin aristas $G = ([n], \emptyset)$, decidir sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad p establecida. En cada repetición del proceso anterior se genera un nuevo grafo de n vértices, que contribuye a la creación del espacio de probabilidad conocido como $G(n, p)$, y se denomina modelo binomial. Entonces, considerando \mathcal{G}^n como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 13. (Modelo binomial) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad $(\mathcal{G}^n, \mathcal{P}(\mathcal{G}^n), \mathbb{P})$, con

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G}(1-p)^{\binom{n}{2}-e_G}, \quad \forall G \sim G(n, p).$$

Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad \mathcal{P}_n **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho esto, se probará que $G(n, p)$ posee una distribución de aristas en el siguiente sentido:

Proposición 14. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \sim G(n, p)$, entonces satisface con alta probabilidad la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_n^{p, \varepsilon} := \{G \in \mathcal{G}^n : |e(A, B) - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2, \quad \forall A, B \subset V(G)\}.$$

Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de Chernov. Existiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se utiliza el resultado para el caso en que cada variable aleatoria solo toma los valores 0 o 1, como se plantea en [14], en la ecuación (2.12) de la observación 2.5.

Teorema 15. (Desigualdad de Chernov) Sean X_1, \dots, X_N variables aleatorias independientes tales que $X_i = 1$ con probabilidad p , y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^N X_i$, se satisface

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Con esto, damos paso a la demostración prometida.

Demostración Proposición 14. Dado $p \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n, p)$ y $A, B \subset V(G)$. Defina la variable aleatoria $X = e(A, B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

326 Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X
 327 en sumas de variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2 \sum_{ab \in \binom{A \cap B}{2}} X_{ab} \quad , \text{ y } X_2 = \sum_{\substack{a \in A, b \in B \\ a \neq b \\ ab \notin \binom{A \cap B}{2}}} X_{ab}.$$

328 Al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p \binom{|A \cap B|}{2} \quad , \text{ y } \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p \left(|A||B| - |A \cap B| - 2 \binom{|A \cap B|}{2} \right).$$

329 Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3}n^2$
 330 sobre $i \in \{1, 2\}$ para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \left(|X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \right) &\leq 2 \exp \left(-\frac{2 \left(\frac{\varepsilon}{3}n^2 \right)^2}{|A||B|} \right) \\ &\leq 2 \exp \left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2 \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

331 Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1 - \mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$ y $|X_2 - \mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$, entonces

$$\left| X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2) \right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon n^2, \quad \forall A, B \in V(G).$$

332 Y así, como $\mu_1 + \mu_2 = p(|A||B| - |A \cap B|) = p|A||B| \pm \varepsilon n$, se tendrá que todo
 333 $A, B \subset V(G)$ satisface $\left| X - p|A||B| \right| \leq \varepsilon n^2$.

334 Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon}) &= \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : \left|X - p|A||B|\right| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2 \vee |X_2 - \mu_2| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\
&\leq \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) + \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) \\
&\stackrel{(1.12)}{\leq} 2^{2n+1} \exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

336 Capítulo 2

337 Cuasi-aleatoriedad

338 Trabajar con estructuras discretas aleatorias brinda una amplia gama de pro-
339 piedades ideales y deseables, lo que las convierte en piezas fundamenteles tanto en
340 matemáticas como en ciencias de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo
341 aleatorio binomial goza de una distribución uniforme de aristas, buenas propieda-
342 des y es robusto. La cuestión ahora es cómo capturar las propiedades esenciales de
343 la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la noción de
344 cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas
345 discretas. En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características
346 deterministas que son propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción
347 de cuasi-aleatoriedad es interesante por sí misma, su estudio ha revelado profundas
348 conexiones entre varias ramas de la matemática y ciencias de la computación, encon-
349 trando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría ergódica, geometría,
350 y algoritmos y complejidad.

351 Como se verá a detalle más adelante en la sección 3, una de las razones principales
352 por las cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica,
353 es el hecho de que existe un teorema de partición que permite la aproximación de
354 cualquier objeto discreto por otros cuasi-aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre
355 lema de regularidad de Szemerédi, que establece que todo grafo se puede aproximar
356 mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo la conexión entre

un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por V. Rödl [17] y A. Thomason [24], y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas* para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo.

Definición 16. Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n vértices. Entonces el grafo G_n es **cuasi-aleatorio** si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$ se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,

$$e(X, Y) = p|X||Y| + o(n^2). \quad (2.1)$$

En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece que, hasta el término de error $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo aleatorio $G(n, p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabilidad en un grafo aleatorio $G(n, p)$, sino que también se considera como una de sus características distintivas.

2.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson [4]. Ellos presentaron una extensa lista de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 2.

En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto a una demostración formal.

Teorema 17. (Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son equivalentes:

381 DISC_p : Para todo $X, Y \subseteq (G_n)$,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

382 DISC'_p : Para todo $X \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2).$$

383 COUNT_p : Para cada grafo H , la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está
384 dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = (p^{e(H)} + o(1)) n^{(H)}.$$

385 $\text{COUNT}_{C_4, p}$: La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1)) n^4.$$

CODEG_p :

$$\sum_{u, v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

386 EIG_p : Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los valores propios de la matriz de adyacencia de
387 G_n , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

388 Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 17, se ha
389 utilizado notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no
390 queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias
391 cada par de propiedades. Entonces, se replantean equivalentemente las propiedades
392 con una versión cuantitativa, asociando algún parámetro de error ε en todo grafo
393 específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande. Por ejemplo, bajo

los supuestos del Teorema 17, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ satisface DISC_p , y luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : \quad e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} ¹ si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad Q_{y_1, \dots, y_ℓ} implica la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} si y solamente si $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ implica $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$ cada vez que satisfaga la propiedad $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Se desarrollará la demostración formal del Teorema 17 utilizando notación ε - δ , mostrando que cada par de propiedades P_{x_1, \dots, x_k} y Q_{y_1, \dots, y_ℓ} son equivalentes entre sí con un cambio polinomial en el error, esto es, $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de constantes $C, c > 0$.

Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

La demostración del Teorema fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 20.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 21.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xLeftrightarrow[\text{Prop. 24. y 25.}]{} & \text{EIG}_p \\
 \Downarrow \text{Prop. 18 y 19.} & & & & \Downarrow \text{Prop. 22.} & & \\
 \text{DISC}_p & & \xLeftrightarrow[\text{Prop. 23.}]{} & & \text{CODEG}_p & &
 \end{array} \tag{2.2}$$

Con esto en mente, damos paso a la demostración de cada proposición considerada en el esquema (2.2).

¹Los parámetros x_1, \dots, x_k pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 17 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\text{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

412 **Proposición 18.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el
 413 grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}_p(\delta)$.
 414 En particular,

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

415 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente gran-
 416 de. Entonces, considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}_p(\delta)$ y
 417 $X \subset V(G)$, se utiliza la propiedad $\text{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente
 418 manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

419 Las igualdades anteriores consideran $e(X, X) = 2e(X)$, por definición, y la apro-
 420 ximación $\binom{|X|}{2} = \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. □

421 **Proposición 19.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el
 422 grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$.
 423 En particular,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

424 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 425 grande. Considere también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}'_p(\delta)$.

426 En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de
 427 subconjuntos de vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva
 428 de las aristas que se encuentran en un subconjunto único de vértices. Es decir, para
 429 $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (2.3)$$

Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre la identidad (2.3) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left(\binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 20. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$.

Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (2.4)$$

Una vez probada la ecuación (2.4), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4 \binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left(\frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left| \binom{G}{F} \right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G

445 que forman una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar
 446 una copia de F . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

447 Luego, si aplicamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre V , se obtiene que la cantidad
 448 de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

449 Así, con $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea
 450 F un grafo con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (2.4) en cual-
 451 quier grafo con una cantidad de aristas menor que e_F . Para desarrollar la inducción,
 452 suponga que $ij \in E(F)$ y considere la siguiente notación:

- 453 i) F^- corresponde es el grafo producido por eliminar la arista ij de F .
- 454 ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista ij en F .

455 Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G , es decir, T^- se corresponde una apli-
 456 cación inyectiva $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez
 457 que $uv \in E(F^-)$. Entonces, considerando $e_{T^-} := f(i)f(j)$, se escribe la cantidad
 458 de copias etiquetadas de F en G de manera conveniente para utilizar la hipótesis
 459 inductiva como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
| \binom{G}{F} | &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p | \binom{G}{F^-} | + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&\stackrel{(2.4)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1)\delta n^\ell. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

460 En este punto, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad
 461 (2.5) es pequeño. Para esto, considere T^* una copia de F^* , y denote por F_i^* y F_j^* a
 462 los grafos resultantes de eliminar de F^- los vértices j e i respectivamente. Con esto,
 463 defina los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}$$

465 Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in$
 466 $A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$ añadida a T^* se obtiene una copia de F^- . Así, reescribiendo el segundo
 467 sumando de la igualdad (2.5) convenientemente y utilizando la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} |e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p| |A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

468 De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. \square

469 **Proposición 21.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que
470 el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con
471 $\text{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

472 *Demostración.* Se trata de un caso particular de COUNT_p , en donde $H = C_4$ y
473 $\delta < \varepsilon$. \square

474 **Proposición 22.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el
475 grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada
476 vez que cumpla con $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. En particular,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

477 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
478 grande. También considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas
479 que satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$.

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$ y $\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz vista en (1.2). Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado (1.7) se obtiene la primera de las cotas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\
 &\stackrel{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\
 &= \frac{4e_G^2}{n} \\
 &\geq \frac{4}{n} \left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\
 &\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, usando $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n \left(\sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u, v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\
 &= n \left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq n \left(p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n(4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4 \right)^{1/2} \\
 &= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
 &\leq 4\delta^{1/2} n^3.
 \end{aligned}$$

487 **Proposición 23.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el
 488 grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez
 489 que cumpla con $\text{CODEG}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

490 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 491 grande. Sea G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la
 492 propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$.

493 En primera instancia note que la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración
 494 en los grados de los vértices de G . En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\ &= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(1.7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u, v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\ &\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\ &< 3\delta^{1/2} n^2. \end{aligned}$$

495 Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de
 496 forma conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &= \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \\
&\stackrel{DCS}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

497 En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea
 498 siempre no negativo, lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta
 499 manera, usando a la cota proveniente de la concentración de los grados en los vértices
 500 de G , se prueba el resultado continuando desde (2.6):

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| &\leq n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn \right. \\
&\quad \left. + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y) \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\sum_{u, v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2n \right| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} (\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/4}n^2.
\end{aligned}$$

Proposición 24. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{EIG}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

Recuerde que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4, que no son C_4 , en G se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas de C_4 en G . Con esto, junto al Lema 4 y el Corolario 9 se obtiene lo siguiente:

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \quad (2.7)$$

Luego, recordando que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\text{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \quad (2.8)$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer valor propio y la cota mostrada en (2.8). Entonces, continuando desde la ecuación (2.7),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

Proposición 25. Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{EIG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_4,p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

520 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 521 grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que
 522 satisface la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G ,
 523 y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

524 En lo que respecta al primer valor propio, sabemos por un lado que éste es al
 525 menos el promedio de los grados gracias al Lema 12. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \quad (2.9)$$

526 Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 9 y la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n. \quad (2.10)$$

527 La desigualdad (2.10) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$, y en combinación con la
 528 cota vista en (2.9), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$. Por último, observe por las
 529 cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned} \max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\ &= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\ &\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\ &= 4\delta n^4. \end{aligned}$$

530 Así, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4}n$. □

531 2.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

532 La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas
 533 según la Definición 2 contempla verificar que si todo par de subconjuntos de vértices
 534 del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En
 535 otras palabras, se requiere comprobar un número exponencial de subconjuntos. Por
 536 esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo
 537 DISC'_p), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es
 538 que la propiedad más débil $\text{COUNT}_{C_4,p}$, que solo requiere que la condición de conteo
 539 sea verdadera para el ciclo C_4 , sea suficientemente sólida para implicar la afirmación
 540 de conteo de la propiedad COUNT_p ; que dice que el número de copias etiquetadas
 541 de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado
 542 de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

543 A continuación mostraremos que no es suficiente que la condición de conteo sea
 544 verdadera para ciclos de largo inferior a 4 para determinar la cuasi-aleatoriedad de
 545 un grafo. Para ver esto, en primer lugar se la construcción de un contraejemplo de
 546 un grafo que posee la cantidad de copias etiquetadas esperadas de C_3 , pero que no
 547 cumple con las condiciones para ser cuasi-aleatorio.

548 **Proposición 26.** *Existe un grafo $G = ([n], E)$ con $(\frac{1}{3})^3 n^3 + o(n^3)$ copias etiquetadas*
 549 *de C_3 , pero que no es cuasi-aleatorio.*

550 *Demostración.* La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos,
 551 uno con una cantidad mayor que la esperada en un grafo aleatorio $G(n, p)$ de copias
 552 etiquetadas de C_3 , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces indepen-
 553 dientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2, n_2} tales que su unión disjunta forma el
 554 grafo $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

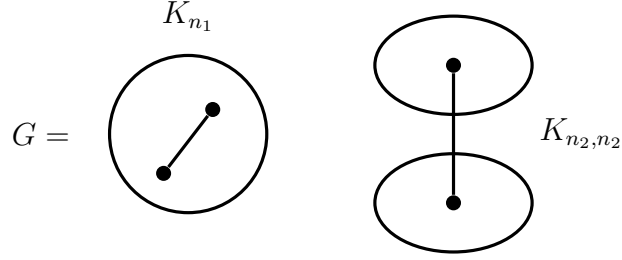


Figura 2.1: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo. Aquí, $\bullet\text{---}\bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G .

En K_{n_1} y K_{n_2, n_2} , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de C_3 son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} & , & \quad \left| \binom{K_{n_1}}{C_3} \right| \approx n_1^3 \quad , \\ e_{K_{n_2, n_2}} &\approx \frac{(n - n_1)^2}{4} & , & \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{C_3} \right| = 0. \end{aligned}$$

Bajo esta configuración, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que el grafo G posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de C_3 según lo haría un grafo aleatorio $G(n, p)$. Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n - n_1)^2}{4}, \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Esta construcción, en efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

Como también,

$$\left| \binom{G}{C_3} \right| = \left(\frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

564 Sin embargo, el grafo G no es cuasi-aleatorio debido a que no existen aristas entre
 565 K_{n_1} y K_{n_2, n_2} ni dentro de los conjuntos de vértices que conforman a K_{n_2, n_2} . \square

566 Lo expuesto se enfoca en el caso muy particular en el que $p = \frac{1}{3}$, pero es importante
 567 destacar la técnica utilizada. En específico, la interpolación de dos grafos arbitrarios
 568 con una cantidad esperada menor y mayor de copias etiquetadas de C_3 según $G(n, p)$
 569 produce un nuevo contraejemplo.

570 Más aún, es posible extender la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}$ a $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ con $t \geq 2$.
 571 Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_{2t}, p} : \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

572 Se expone un bosquejo de la demostración.

573 **Proposición 27.** Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$
 574 vértices y $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t}, p}$ y EIG_p
 575 son equivalentes.

576 *Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de
 577 la Proposición 24 y 25 tras el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la
 578 cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n
 579 están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

580 También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (2.8) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

581 Con estas observaciones el resultado queda demostrado. \square

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de largo par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los valores propios de G , eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d -regular. En nuestro contexto, se verá que toda secuencia $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ de grafos d -regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 28. (*Expander Mixing Lemma*) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d -regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G . Si se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n} \right) \left(1 - \frac{|Y|}{n} \right)}. \quad (2.11)$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n compuesta por los vectores propios de A . Utilizando la descomposición espectral, se denotamos

$$A_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T \quad \text{y} \quad \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T,$$

de manera que $A = A_1 + \Delta$.

Coforme a la ecuación (1.9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y = \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y + \mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y. \quad (2.12)$$

De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que el segundo el factor de error. Para ver esto, se representan los vectores

600 \mathbf{v}_X y \mathbf{v}_Y según la base \mathcal{B} . Es decir,

$$\mathbf{v}_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i,$$

601 donde $\alpha_i = \mathbf{v}_X^T \mathbf{v}_i$ y $\beta_i = \mathbf{v}_Y^T \mathbf{v}_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned} \|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}_X, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \sum_{j \in X} \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{v}_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= |X|. \end{aligned}$$

602 Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$.

603 Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (2.12) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\ &= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i^T \right) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j \right) \\ &= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_1) (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_j) \\ &= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

604 Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \quad (2.14)$$

605 Luego, dado que G es un grafo d -regular, $\lambda_1 = d$ y $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ son valor y
 606 vector propio respectivamente de A . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \text{ y } \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

607

608 Así, la ecuación (2.13) resulta en $\mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y = \frac{d}{n} |X| |Y|$.

609 Para el término de error, recordando la definición de λ , se desarrolla el valor
 610 absoluto de la ecuación (2.14) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\ &\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\ &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\ &= \lambda \sqrt{(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2)(\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2)} \\ &= \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}. \end{aligned}$$

611 Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la
 612 ecuación (2.12) de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - \mathbf{v}_X^T A_1 \mathbf{v}_Y| = |\mathbf{v}_X^T \Delta \mathbf{v}_Y|.$$

613

□

El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d -regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$. Entonces, si G satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 28:

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\ &< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\ &< \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

Finalmente, en un grafo d -regular, la equivalencia entre las propiedades $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (2.2).

622 Capítulo 3

623 Lema de regularidad de Szemerédi

624 El lema de regularidad de Szemerédi ha mostrado ser un resultado muy poderoso
625 e importante en la teoría extremal de grafos. Sus aplicaciones no solo se restringen
626 a la teoría de grafos, sino que también las tiene en teoría de números combinatorios,
627 geometría discreta y ciencias de la computación. A continuación, un poco de historia
628 de su origen.

629 P. Erdős y P. Turán [8] conjeturaron en 1936 que todo conjunto de números en-
630 teros suficientemente grande posee una progresión aritmética de longitud arbitraria,
631 digamos k . En 1953, K. Roth [18] da el primer resultado positivo a la conjetura para
632 el caso en que $k = 3$ utilizando análisis de Fourier, dando paso al teorema de Roth.
633 Más adelante, en 1969, E. Szemerédi [21] extendió el teorema de Roth a progresiones
634 aritméticas de largo 4 vía métodos combinatorios. Seis años después, en 1975, E.
635 Szemerédi [22] demuestra la conjetura de Erdős-Turán para progresiones aritméticas
636 de longitud arbitraria, lo que se conoce actualmente como el teorema de Szemerédi.

637 **Teorema 29.** (*Teorema de Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si
638 el conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| > \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión
639 aritmética de largo k no trivial cada vez que $n \geq n_0$.

640 La demostración que propone Szemerédi es considerada una obra maestra del ra-
641 zonamiento combinatorio. El siguiente esquema entrega una noción de la complejidad

de la idea.

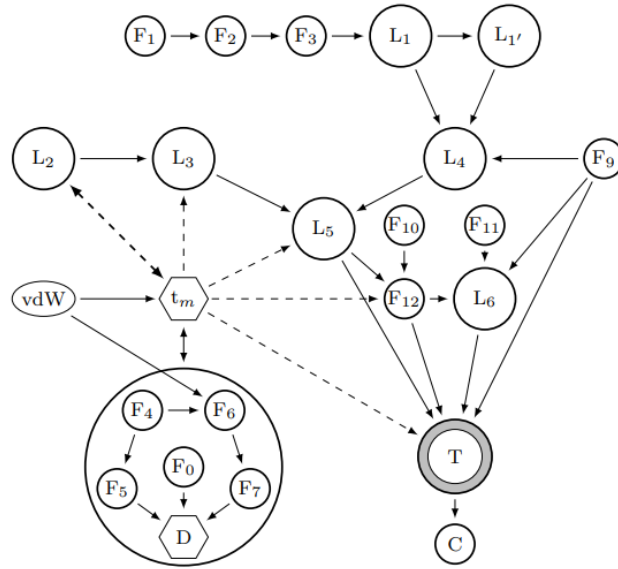


Figura 3.1: El esquema representa el diagrama de flujo utilizado en la demostración del teorema de Szemerédi ([22], página 202). Algunos de los símbolos involucrados significan lo siguiente: $F_k \equiv$ Hecho k , $L_k \equiv$ Lema k , $T \equiv$ Teorema, $C \equiv$ Corolario, $D \equiv$ Definiciones varias, etc.

Probablemente la complejidad de tal demostración motivó a otros matemáticos en encontrar nuevas formas de probar el teorema. Poco después, en 1977, H. Furstenberg [10] obtiene una demostración fundamentada en la teoría ergódica. También, en 2001, T. Gowers [13] entrega una tercera demostración por medio de análisis de Fourier, extendiendo el camino iniciado por Roth para progresiones aritméticas de largo 3.

En esta tesis, nos enfocaremos en uno de los elementos que compone la demostración entregada por Szemerédi del Teorema 29, el hoy conocido como *lema de regularidad de Szemerédi*. A grandes rasgos, el lema dice que el conjunto de vértices de todo grafo puede ser particionado en una cantidad finita de partes que muestran comportamientos *regulares* (o cuasi-aleatorios) entre la mayoría de los pares de partes. Este hecho permite entender cualquier grafo con menos información, y se aprovechan cada una de las propiedades equivalentes vistas en el Teorema 17.

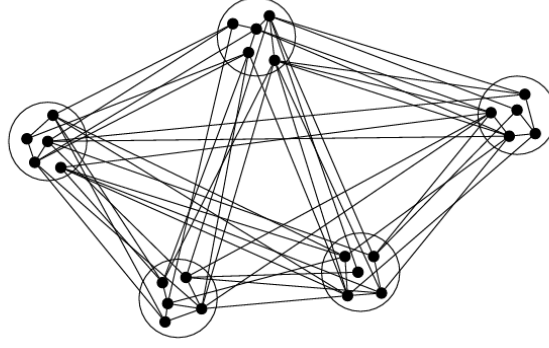


Figura 3.2: Ejemplo ilustrativo con cinco partes del resultado del lema de regularidad de Szemerédi sobre un grafo.

Hasta enunciar formalmente el lema de regularidad, se definirán los conceptos necesarios para su buena comprensión. Dado un grafo G y los subconjuntos de vértices $X, Y \subset V(G)$, se define la **densidad de aristas** entre X e Y de la siguiente manera:

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|}. \quad (3.1)$$

Diremos que $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ es una **partición** del conjunto X si:

- i) $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$.
- ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $i, j \in [k]$.

Cuando $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_k| = |X_1| + 1$, llamaremos a \mathcal{P} como una **equipartición**. En particular, cada parte posee $\lceil |X|/k \rceil$ o $\lfloor |X|/k \rfloor$ elementos.

También, es necesario conocer en qué sentido los pares de partes entregados por el lema son regulares.

Definición 30. Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X, Y) es un **par ε -regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple

$$\left| d(A, B) - d(X, Y) \right| \leq \varepsilon.$$

668 Cuando (X, Y) no es un par ε -regular, entonces la irregularidad es evidenciada
 669 por algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\left|d(A, B) -\right.$
 670 $\left.d(X, Y)\right| > \varepsilon$.

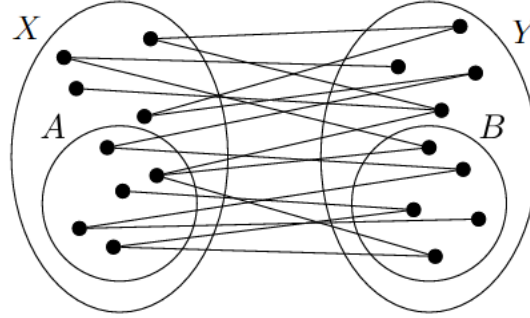


Figura 3.3: Ejemplo del par (X, Y) ε -regular, cuando $X \cap Y = \emptyset$.

Las densidades $d(X, Y)$ y $d(A, B)$ no varían demasiado.

671 Notaremos que la noción de un par ε -regular es, de hecho, una analogía de la
 672 propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$
 673 y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\left|e(X, Y) - p|X||Y|\right| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \quad \forall Y \subset W. \quad (3.2)$$

674 En efecto, si (U, W) es un par ε -regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que
 675 $|A| \geq \varepsilon|U|$ y $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

676 Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε -regular
 677 no es suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

678 Luego, notando que $e(A, B) > d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W|$, se obtiene la analogía
 679 planteada con $p = d(U, W)$.

680 Por último, debemos saber la noción de regularidad en una partición del conjunto
 681 de vértices de un grafo.

682 **Definición 31.** *Dado un grafo G , una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ del conjunto de*
 683 *vértices $V(G)$ es una **partición ε -regular** si*

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

684 *Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε -regular*
 685 *salvo una fracción ε de pares de vértices.*

686 Note que si una partición ε -regular de k partes es en particular una equipartición,
 687 entonces a lo más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε -regular.

688 Ya con todo lo requerido, se enuncia formalmente el lema de regularidad.

689 **Teorema 32.** *(Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero*
 690 *$M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una partición ε -regular de a lo más M partes.*

691 Otra forma de encontrar el resultado, es cuando todas las partes de la partición
 692 poseen aproximadamente el mismo tamaño.

693 **Teorema 33.** *(Regularidad de Szemerédi - Equipartición) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$,*
 694 *existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε -regular de*
 695 *su conjunto de vértices de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.*

696 Lo poderoso del lema de regularidad es que la cota de partes que entrega es
 697 independiente del tamaño del grafo, y solo depende del parámetro ε . Esto ya que
 698 en grafo más grandes, el tamaño de las partes podrían ser considerablemente más
 699 grandes.

700 En la subsección 3.1 se demostrará rigurosamente el Teorema 32 desde una mirada
 701 clásica, y se expondrá la manera de probar el Teorema 33. Más adelante, en la
 702 sección 3.2, nos limitaremos a mostrar una forma novedosa e ingeniosa de demostrar

el Teorema 32 desde una perspectiva espectral. Finalmente, la subsección 3.3 tiene el objetivo de demostrar de dos maneras diferentes el teorema de Roth utilizando el lema de regularidad de Szemerédi.

3.1. Demostración por incremento de energía

Se empleará una técnica llamada *argumento de incremento de energía*, cual para todo grafo G , funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad del par.
 - (b) Refinar \mathcal{P} utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par (V_i, V_j) no ε -regular para obtener \mathcal{Q} .
 - (c) Actualizar \mathcal{P} con \mathcal{Q} .

Siendo \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que \mathcal{Q} **refina** a \mathcal{P} si cada parte de \mathcal{Q} está contenida en una parte de \mathcal{P} . En lo que resta de esta subsección mostraremos que el algoritmo tiene un fin, y que entrega una partición ε -regular en un número de iteraciones que solo depende de ε .

Definición 34. (*Energía*) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer lugar

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de Y , se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, se define su **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

Observe que en toda partición \mathcal{P} de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$.

En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

La última observación es crucial en la demostración del Teorema 32, puesto que los Lemas 35, 36 y 37 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, y entregará una partición ε -regular. Dicho esto, procedemos a enunciar y demostrar cada uno de los lemas mencionados para probar clásicamente el Teorema 32.

El primero de los lemas, afirma que la energía de una partición no decrece bajo cualquier refinamiento arbitrario.

Lema 35. Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, y \mathcal{P}_X y \mathcal{P}_Y particiones de X e Y respectivamente, entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, si \mathcal{P} y \mathcal{P}' son dos particiones de vértices de G , entonces $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que \mathcal{P}' refina a \mathcal{P} .

Demostración. Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente.

En primera instancia, se utiliza la desigualdad (1.3) proveniente de Cauchy-Schwarz para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
 &\stackrel{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
 &= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
 &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
 &= q(X, Y).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de \mathcal{P} . Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(3.3)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

□

Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε -regular de un grafo G , mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

Lema 36. Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε -regular, existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

752 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$
 753 subconjuntos tales que el par (X, Y) no es ε -regular. Entonces, existen los subcon-
 754 juntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que evidencian la irregularidad del par (X, Y) , y son tales
 755 que

$$|X_1| \geq \varepsilon|X| \text{ y } |Y_1| \geq \varepsilon|Y|. \quad (3.4)$$

756 Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta :=$
 757 $d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$, cual por definición de par ε -regular, satisface

$$|\eta| > \varepsilon. \quad (3.5)$$

758 Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

759 De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \quad (3.6)$$

760 Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

761 Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (3.7)$$

762 Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y ,
 763 desarrollamos,

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i| |Y_j|} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i| |Y_j|} \right) \\
 &\stackrel{(1.3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i| |Y_j|} \right) \\
 &\stackrel{(3.6)}{=} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

764 Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1|. \quad (3.9)$$

765 Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (3.8) como sigue:

$$\begin{aligned}
 n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} \frac{1}{|X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} e(X, Y) - \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
 &= \frac{|X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1| |Y_1| \\
 &\quad + \frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
 &= \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1| \left(1 + \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right) \\
 &\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1|. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando las cotas (3.4) y (3.5), podemos concluir desde la desigualdad (3.10),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X| |Y|} + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\ &> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X| |Y|}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε -regular por medio de sus subconjuntos que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε -regular de un grafo produce un aumento estricto de al menos ε^5 en la energía.

Lema 37. Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ no ε -regular de $V(G)$. Entonces existe un refinamiento \mathcal{Q} de \mathcal{P} , en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ una partición no ε -regular del conjunto de n vértices de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε -regular, existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que en cada V_i se podrían encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular. Considere ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ que refina a \mathcal{P} , en la que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos los subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular (ver Figura 3.4). En consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

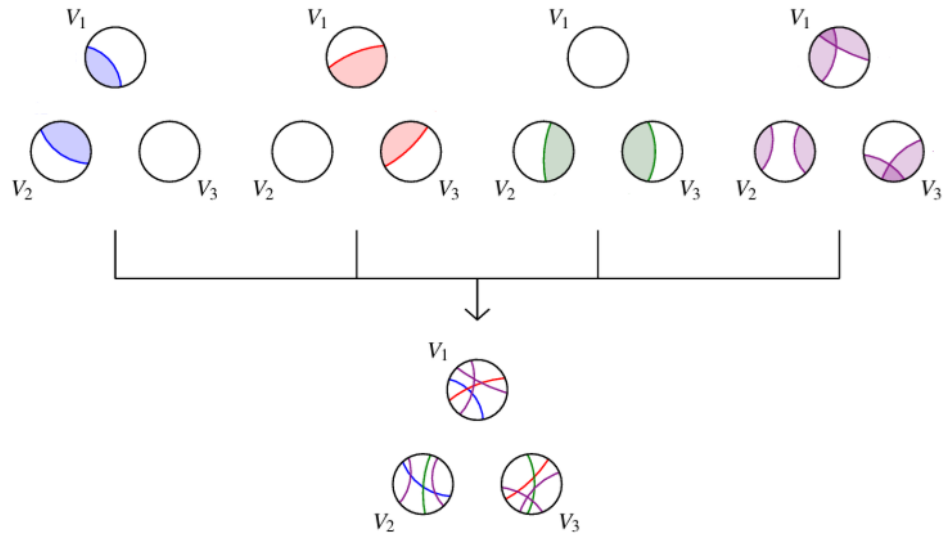


Figura 3.4: Ejemplo del refinamiento simultaneo por todos los subconjuntos que evidencian la irregularidad usando tres conjuntos de vértices ([25], página 59).

787 Para simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$.

788 Luego, como la partición \mathcal{P} no es ε -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (3.11)$$

789 Así, junto a los lemas probados previamente, se da prueba al resultado de la

790 siguiente manera:

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&\stackrel{\text{Lema 35}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\
&\stackrel{\text{Lema 36}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\
&\stackrel{(3.11)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.
\end{aligned}$$

791 * Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 33, cuando lo cambio se
792 me descuadra :c * □

793 Este último Lema culmina lo que se necesita para dar prueba formal del lema de
794 regularidad de Szemerédi mediante el argumento de incremento de energía.

795 *Demostración del Teorema 32.* Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G , elegimos inicialmente la
796 partición trivial del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actua-
797 lizando \mathcal{P}), aplicaremos el Lema 37 cada vez que la partición actual no sea ε -regular.
798 Observe que por cada aplicación del Lema 37 se consigue un aumento de al menos
799 ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente
800 por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será
801 necesariamente una partición ε -regular debido a la cota de la energía.

802 Para una partición no ε -regular con k elementos, el Lema 37 encuentra un refina-
803 miento de a lo más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración
804 del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes pro-
805 ducidas las acotaremos crudamente en cada paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la
806 partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del

807 algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar
 808 el Lema 37.

$$\begin{aligned}
 1^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 1 &\rightarrow 2 < 2^2 && \text{partes.} \\
 2^{\text{da}} \text{ Iteración: } 2^2 &\rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^{2^2}} && \text{partes.} \\
 3^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 2^{2^{2^2}} &\rightarrow (2^{2^{2^2}}) 2^{(2^{2^{2^2}})} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} && \text{partes.}
 \end{aligned}$$

809 Finalmente, como el algoritmo debe luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad
 810 de partes al final de proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

811

□

812 Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la
 813 siguiente manera:

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{ Altura } k.$$

814 Durante la demostración del Teorema 32 se utilizó una cota que podría parecer
 815 exagerada para encontrar la cantidad de partes que devuelve el algoritmo implemen-
 816 tado, por sobre todo, considerando lo rápido que crece a medida que ε se hace más
 817 pequeño. Sorprendentemente, en 1997, T. Gowers [12] prueba que tal límite inferior
 818 de partes es necesario. Más precisamente, mostró que es posible encontrar una cons-
 819 tante $c > 0$ tal que para todo suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$, existe un grafo sin
 820 partición ε -regular siempre que posea una cantidad menor que $\text{torre}(\lceil \varepsilon^{-c} \rceil)$ partes
 821 (ver G. Moshkovitz y A. Shapira [16] para una demostración corta).

822 Finalmente, se expone la forma de probar el Teorema 33. La idea de la demos-
 823 tración consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento
 824 de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una

825 equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso
 826 y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera.
 827 Entonces, para todo grafo G , la modificación del algoritmo es la siguiente:

- 828 1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria \mathcal{P} de $V(G)$ con m_0 partes.
- 829 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 830 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$
 831 y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de los pares.
 - 832 (b) Refinar \mathcal{P} usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener
 833 la partición \mathcal{Q} , cual divide cada parte de \mathcal{P} en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.
 - 834 (c) Modificar la partición \mathcal{Q} refinando, si es posible, cada uno de sus elementos
 835 para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$, dada alguna elección
 836 apropiada del entero $m = m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de \mathcal{Q} que no
 837 fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos
 838 de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y
 839 posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
 - 840 (d) Actualizar \mathcal{P} con la modificación de \mathcal{Q} .

841 El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo
 842 G . En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al
 843 menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin
 844 embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande.
 845 En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al
 846 menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición
 847 de a lo más $\text{torre}(\varepsilon^{-5})$ partes.

3.2. Demostración espectral

En 2012, T. Tao [23] publica en su blog una prueba del lema de regularidad de Szemerédi usando la descomposición espectral de la matriz de adyacencia. La idea original de la demostración proviene de los autores A. Frieze y R. Kannan [9], a quienes Tao les da el crédito en su publicación. Más adelante, en 2013, S. Cioba y R. Martin [5] escribieron la demostración con más detalles. La prueba que se expone en esta sección está basada esencialmente en la publicación de Cioba y Martin.

Demostración espectral del Teorema 3.2. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$F(\ell) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^{4\ell} \right\rceil.$$

Denotaremos por $F^{(i)}$ a la i -ésima composición de F con ella misma, y escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Sea $G = ([n], E)$ un grafo con $n \geq n_0$ vértices, y A su matriz de adyacencia. Ordenamos los valores propios $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ de A de manera decreciente y consideramos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ los vectores propios correspondientes, que forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Por la Proposición 4 y el Corolario 9, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (3.12)$$

De lo anterior, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$, se encuentra la cota

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (3.13)$$

Consideramos también los intervalos $I_1, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \subset [n]$ definidos por

■ $I_1 = \{1, 2, \dots, F^{(1)}(1) - 1\}$ y

867 ■ $I_k = \{F^{(k-1)}(1), \dots, F^k(1) - 1\}$ para todo $k = 2, \dots, I_{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil}$.

868 Con esta construcción, debe existir un natural $1 \leq L \leq \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil$ que cumple con

$$\sum_{L \leq j < F(L)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2, \quad (3.14)$$

869 porque de lo contrario, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq \sum_{k=1}^{\lceil 1/\varepsilon^3 \rceil} \sum_{i \in I_k} \lambda_i^2 > \lceil 1/\varepsilon^3 \rceil \cdot \varepsilon^3 n^2 > n^2,$$

870 que contradice la desigualdad (3.12).

871 Ahora, usando L , separamos la matriz A en tres matrices simetricas:

$$A = S + F + Q,$$

872 donde la matriz S se intepretará como la componente *estructural*,

$$S = \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

873 la matriz F como la componente de *error*,

$$F = \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T,$$

874 y la matriz Q como la componente *cuasi-aleatoria*,

$$Q = \sum_{i \geq F(L)} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T.$$

875 Usaremos los vectores propios $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{L-1}$ de S para definir una partición de
 876 $V(G)$ como mostraremos a continuación. Consideramos el intervalo de \mathbb{R} de longitud

877 $2\sqrt{(L/\varepsilon)} \cdot n^{-1/2}$ centrado en el origen y lo particionamos en $t = 2(L/\varepsilon)^2$ subinter-
 878 valos J_1, \dots, J_t de longitud $(\varepsilon/L)^{3/2}n^{-1/2}$ cada uno. Luego, clasificamos los vértices
 879 $v \in V(G)$ según su valor $\mathbf{u}_i(v)$ de la siguiente manera:

$$V_i^j = \{v \in V(G) : \mathbf{u}_i(v) \in J_j\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

880 Con esto, tomamos el refinamiento de todos estos conjuntos $\{V_i^j \neq \emptyset : i \in$
 881 $[L-1], j \in [t]\}$ para obtener los conjuntos V_0, V_1, \dots, V_M , en donde $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$.
 882 El resultado anterior considera un conjunto excepcional de vértices V_0 que está de-
 883 finido como sigue:

$$V_0 = \left\{ v \in V(G) : |\mathbf{u}_i(v)| > \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} n^{-1/2} \text{ para algún } i \in [L-1] \right\}.$$

884 Mostraremos que el conjunto excepcional V_0 es suficientemente pequeño. En efecto,
 885 observando que

$$L-1 = \sum_{i=1}^{L-1} \|\mathbf{u}_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{v \in V(G)} \mathbf{u}_i(v)^2 \geq |V_0| \left(\frac{L}{\varepsilon n} \right),$$

886 se determina que $|V_0| < \varepsilon n$.

887 Probaremos que la partición construida del conjunto de vértices del grafo $\mathcal{P} =$
 888 $\{V_0, V_1, \dots, V_M\}$ es ε -regular. Comenzamos identificando los pares excepcionales. Para
 889 esto, sea $F = (f_{xy})$ y defina

$$\Sigma_F = \left\{ (i, j) : \sum_{(x,y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon |V_i| |V_j| \right\}$$

890 Entonces, por la definición de F y el Corolario 5, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 n^2 &\geq \sum_{L \leq i < F(L)} \lambda_i^2 = \text{Tr}(F^2) = \sum_{(x,y) \in V(G)^2} f_{xy}^2 \\
&\geq \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} \sum_{(x,y) \in V_i \times V_j} f_{xy}^2 > \varepsilon \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|.
\end{aligned}$$

891 y por consecuencia

$$\varepsilon^2 n^2 \geq \sum_{(i,j) \in \Sigma_F} |V_i| |V_j|. \quad (3.15)$$

892 Además, sea

$$\Sigma_Q = \left\{ (i, j) : \min\{|V_i|, |V_j|\} < \frac{\varepsilon}{M} n \right\} \cup \left\{ (i, j) : i = 0 \text{ o } j = 0 \right\},$$

893 y observe que

$$\sum_{(i,j) \in \Sigma_Q} |V_i| |V_j| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M} n + 2|V_0|n < 4\varepsilon n.$$

894 Ahora, sea $(i, j) \notin \Sigma_F \cup \Sigma_Q$, y $d_{ij} = d(V_i, V_j)$ la densidad del par (V_i, V_j) . Entonces,
895 dado los subconjuntos $X \subset V_i$ e $Y \subset V_j$, note la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned}
\left| e(X, Y) - d_{ij} |X| |Y| \right| &= \left| \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y - d_{ij} |X| |Y| \right| \\
&\leq \left| \mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij} |X| |Y| \right| + \left| \mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y \right| + \left| \mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y \right|. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

896 En este punto, el objetivo es encontrar cotas para cada uno de los sumandos
897 anteriores.

898 Para comenzar, por la definición de Σ_F y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se
899 obtiene la primera de las cotas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}_X^T F \mathbf{v}_Y|^2 &= \left| \sum_{(x,y) \in X \times Y} f_{xy} \right|^2 \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \left(\sum_{(x,y) \in X \times Y} f_{xy}^2 \right) |X||Y| \\
&\leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |X| |Y| \leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

900 Para la próxima cota, debemos observar por la construcción de Q y el Teorema
901 10 que

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \|\mathbf{v}_X\| \|Q \mathbf{v}_Y\| \leq \|\mathbf{v}_X\| \|\mathbf{v}_Y\| \frac{n}{\sqrt{F(L)}} = \sqrt{|X||Y|} \frac{n}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}}.$$

902 Además, como $M \leq (\frac{2L^2}{\varepsilon^2})^L$, concluimos de la elección de $F(\cdot)$ que $F(L) \geq$
903 $\frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2L^2}{\varepsilon^2} \right)^{4L} \geq \frac{1}{\varepsilon^6} M^4$. Y así, cuando $(i, j) \neq \Sigma_Q$, se tiene

$$|\mathbf{v}_X^T Q \mathbf{v}_Y| \leq \frac{n^2}{\sqrt{F(L)}} \leq \frac{M^2 |V_i| |V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{F(L)}} \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \tag{3.18}$$

904 Por último, para la tercera cota, analizamos $S = (s_{xy})$. Sean s_{ab} y s_{cd} los valores
905 mínimo y máximo de todos los s_{xy} sobre $(u, v) \in V_i \times V_j$. Entonces,

$$\begin{aligned}
s_{cd} - s_{ab} &= \sum_{i < L} \lambda_i \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \lambda_i \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \\
&\leq \sum_{i < L} |\lambda_i| \left| \mathbf{u}_i(c) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) + \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(a) \mathbf{u}_i(b) \right| \\
&\leq n \sum_{i < L} \left| \mathbf{u}_i(d) (\mathbf{u}_i(c) - \mathbf{u}_i(a)) + \mathbf{u}_i(a) (\mathbf{u}_i(d) - \mathbf{u}_i(b)) \right| \\
&\leq n \sum_{i < L} |\mathbf{u}_i(b)| \left| \mathbf{u}_i(a) - \mathbf{u}_i(c) \right| + |\mathbf{u}_i(c)| \left| \mathbf{u}_i(b) - \mathbf{u}_i(d) \right| \\
&\leq Ln \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{\varepsilon n}} \cdot \frac{\varepsilon}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Ln}} \\
&= 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

906 Ahora bien, como d_{ij} es el promedio de S sobre $V_i \times V_j$, tenemos que $s_{ab} \leq d_{ij} \leq s_{cd}$,
907 y por ende, $|s_{xy} - d_{ij}| \leq s_{cd} - s_{ab}$ para cada $(u, v) \in V_i \times V_j$. Como resultado,

$$\left| \mathbf{v}_X^T S \mathbf{v}_Y - d_{ij} |V_i| |V_j| \right| \leq \sum_{(x,y) \in X \times Y} |s_{xy} - d_{ij}| \leq (s_{cd} - s_{ab}) |X| |Y| \leq 4\epsilon |X| |Y|. \quad (3.19)$$

Utilizando las desigualdades (3.17), (3.18) y (3.19) en la expresión enunciada en (3.16) se concluye la demostración del teorema. \square

3.3. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son abordadas con el *método de regularidad* que se describe en los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices un grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** el grafo las aristas que tengan un "mal comportamiento" según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
 - (i) Irregularidad.
 - (ii) Baja densidad.
 - (iii) Al menos una de las partes demasiado pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio.

Para el último paso se utilizará un resultado análogo a la propiedad $\text{COUNT}_p(\epsilon)$ del Teorema 17, pero con el concepto de par ϵ -regular. Las aplicaciones que se estudiarán en esta tesis solo necesitan el caso en que $H = K_3$, cual es conocido como lema de conteo de triángulos.

926 **Lema 38.** (*Lema de conteo de triángulos*) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los
 927 conjuntos no necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares $(X, Y), (Y, Z)$
 928 y (X, Z) son ε -regular. Entonces,

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\} \right| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \\ \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

929 *Demostración.* Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración
 930 de la Proposición 20 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$.
 931 Cuando el grafo no posea aristas, entonces

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\} \right| = |X||Y||Z|.$$

932 También, como vimos en (3.2), recordamos que la condición de un par ε -regular
 933 es equivalente a la propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ en grafos bipartitos para algún $p \in (0, 1)$.
 934 Entonces, cuando el grafo presenta solo una arista,

$$\left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\} \right| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

935 Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$\left| \{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\} \right| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

936 Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada
 937 del grafo $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la aplicación inyectiva $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$. Con
 938 esto, se desarrolla inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned}
& \left| \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\} \right| = \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Z)] \\
& = d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

939 En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (3.20) se
 940 corresponde con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton
 941 $\{2\}$ en G , y considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
& A_1^{T^*} = \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}. \\
& A_3^{T^*} = \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}.
\end{aligned}$$

943 De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X, Z) ε -regular con
 944 versión bipartita de la propiedad $\text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ vista en (3.2), se consigue la siguiente
 945 desigualdad:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| & \leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\
& = \sum_{T^*} |e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z)| A_1^{T^*} || A_3^{T^*} || \\
& \leq \sum_{T^*} \varepsilon |X| |Z| \\
& \leq \varepsilon |X| |Y| |Z|.
\end{aligned}$$

946 Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (3.20) se prueba lo
 947 prometido. \square

948 En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X, Y) y
 949 (X, Z) son ε -regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de

conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε -regular para el que lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 38 (y Proposición 20), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H . Se enuncia sin demostración.

Lema 39. (*Lema de conteo de grafos*) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε -regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

En las siguientes subsecciones se discutirán dos aplicaciones del método de regularidad para entregar dos demostraciones alternativas al teorema de Roth.

3.3.1. Eliminación de triángulos

El lema de eliminación de triángulos fue probado por los autores I. Ruzsa y E. Szemerédi [19] en 1976, y es una de las primeras aplicaciones del método de regularidad. La intuición del lema dice que todo grafo con *pocas* triángulos se puede convertir en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

Teorema 40. (*Lema de eliminación de triángulos*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 32 con tal elección para obtener la constante $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más δn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 32, se asegura la existencia de una partición ε_r -regular $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, con $k \leq M$.

974 Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [k]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i
 975 y V_j cuando

976 (a) (V_i, V_j) no es un par ε_r -regular,

977 (b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

978 (c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{k}\varepsilon_r$.

979 De esta manera, como la partición es ε_r -regular, las aristas removidas por la
 980 condición (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

981 Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son
 982 a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [k]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

983 Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{k}\varepsilon_r$
 984 vértices en a lo más k subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por
 985 (c) son a lo más

$$k \cdot \frac{n}{k}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

986 En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

987 Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos.
 988 Para esto, con nuestra elección de δ , buscaremos formular la siguiente contradicción:
 989 si existe un triángulo en el grafo limpio G' , el lema de conteo de triángulos asegura
 990 que en realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, como el grafo original

posee a lo más δn^3 triángulos, se podrá concluir que el grafo G' es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.

Dicho esto, estudiamos la cantidad de triángulos en G' . Dada la eliminación de aristas según la condición (a), cada par (V_i, V_j) es ε -regular, y por ende se satisface la hipótesis del Lema 38. Entonces, gracias a la ausencia de las aristas que cumplían con las condiciones (b) y (c),

$$\begin{aligned}
 |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\quad - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
 &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{k^3} \\
 &> \delta n^3.
 \end{aligned}$$

Así, de la contradicción anterior, se determina que el grafo G es libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas. \square

Otra forma de entender el Teorema 40 es de la siguiente manera: si se necesitan eliminar al menos εn^2 para hacer de G libre de triángulos, entonces G contiene al menos δn^3 triángulos.

3.3.2. Emparejamiento inducido

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $R \subset E$ es un **emparejamiento** en G si no existe un par de aristas en R que compartan algún vértice. Diremos que R es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y no existen un par de aristas en R que estén conectadas por una arista de G , es decir, no existen aristas en G entre cada par de vértices de R .

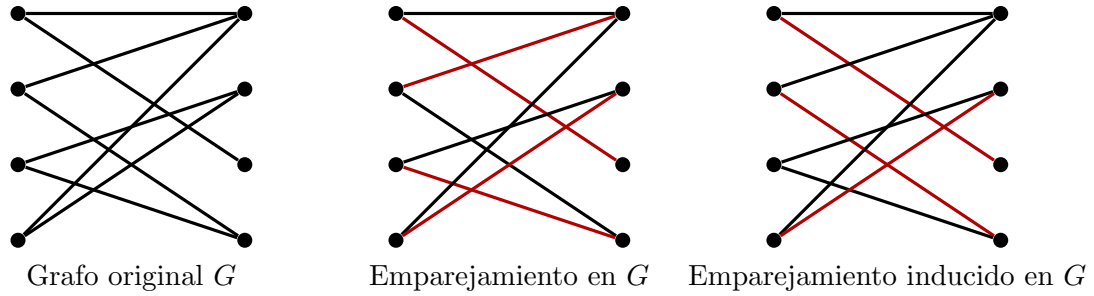


Figura 3.5: Ejemplo de un emparejamiento y un emparejamiento inducido.

La presente aplicación del método de regularidad responde a la pregunta: ¿Cuántas aristas puede tener un grafo que es la unión de emparejamientos inducidos? * No sabría si aquí agregar un comentario referente a que la intuición dice que deben ser "pocas" aristas, pero la prueba no es trivial *

Teorema 41. (Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 32 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema ??, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r -regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G' . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido R en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrán

1026 a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

1027 Denotando por $V(R)$ al conjunto de vértices que componen las aristas de R , se
 1028 define $U_i := V_i \cap V(R)$ como el subconjunto de vértices de R que comparte elementos
 1029 con V_i , y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos
 1030 $U_i \subset V(R)$ que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i .
 1031 Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de
 1032 $V(R)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

1033 De esta manera, recordando que $|V(R)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n =$
 1034 $\frac{9}{10}\varepsilon n$. Además, como también $|R| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea
 1035 parte de una arista en R . Luego, dada la limpieza de G , dicha arista debe pertenecer
 1036 a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su
 1037 correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r -regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por
 1038 regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (3.21)$$

1039 Ahora, como R es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset$
 1040 $V(M)$ debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

1041 Sin embargo, la desigualdad (3.21) implica que

$$\begin{aligned}
e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\
&\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\
&\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\
&\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\
&> |U_t|.
\end{aligned}$$

1042 La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no
1043 pertenece a R , por lo que se contradice la hipótesis de que R es un emparejamiento
1044 inducido. \square

1045 Otra mirada del Teorema 41 es la siguiente: si G posee al menos εn^2 aristas,
1046 entonces G tiene al menos un emparejamiento no inducido.

1047 3.3.3. Teorema de Roth

1048 Como hemos visto en el comienzo de la sección 3, el teorema de Roth es un caso
1049 particular del teorema de Szemerédi, cual en un principio fue demostrado utilizando
1050 análisis de Fourier.

1051 **Teorema 42.** *(Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el*
1052 *conjunto $S \subset [n]$ posee $|S| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces S contiene una progresión*
1053 *aritmética no trivial de largo 3.*

1054 En esta sección se entregarán dos demostraciones del teorema de Roth por medio
1055 del lema de regularidad de Szemerédi. Como el enunciado del Teorema 42 alude a la
1056 teoría de números, en ambas pruebas, la idea es traducir el problema al lenguaje de la
1057 teoría de grafos con la construcción de un grafo apropiado. La primera demostración
1058 se fundamenta en el Teorema 40.

1059 *Primera demostración del Teorema 42.* Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $S \subset [n]$ con $|S| \geq \varepsilon n$
1060 elementos. Escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Una manera natural de construir un grafo de n vértices utilizando el conjunto S , es definir una arista entre los vértices i y j si y solamente si $|i - j| \in S$. Sin embargo, con n elementos no podemos describir una progresión aritmética de largo 3 por medio de relaciones entre las aristas. Por esto, agregamos un poco de asimetría a la construcción. Para asegurar que las sumas siempre tengan la posibilidad de estar en S , consideramos el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$ son tales que $6n \geq n_0$. Las aristas de G son definidas de la siguiente manera:

1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in S$.
2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in S$.
3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in S$.

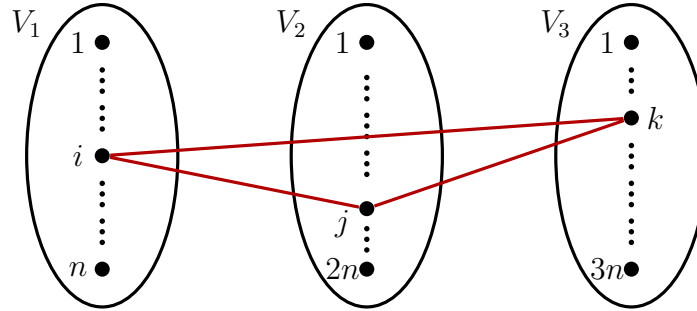


Figura 3.6: Esquema de relación entre un triángulo en G y una progresión aritmética de largo 3 en S .

Nótese que la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in S$, $k - j \in S$ y $\frac{k-i}{2} \in S$, o bien, $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$ es una progresión aritmética de largo 3 en S con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$.

Diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $s \in S$ se satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = s$. Entonces, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, s) \in V_1 \times S$, la cantidad de triángulos triviales es exactamente $n|S| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se pueden eliminar dos triángulos

triviales removiendo solo una arista. Por consecuencia, se tienen que eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos. Luego, utilizando el lema de eliminación de triángulos con $\frac{\varepsilon}{36}$, recibimos $\delta\left(\frac{\varepsilon}{36}\right)$, y aseguramos que existen al menos $\delta(6n)^3 = 216\delta n^3$ triángulos en G . De esta manera, existen al menos $216\delta n^3 - n^2$ triángulos no triviales. En conclusión, como $216\delta n^3 > n^2$, debe existir una progresión aritmética no trivial de largo 3 en S .

□

Para la segunda demostración del teorema de Roth, será necesario un resultado intermedio proporcionado por los autores M. Ajtai y E. Szemerédi [1]. Para su prueba, se utiliza el Teorema 41.

Teorema 43. (*Teorema de la esquina, Ajtai-Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$ para algún $a, b, d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $S \subset [n]^2$ con al menos εn elementos, y $n \geq n_0$.

Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

Ahora, interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se define una relación entre pares de aristas de G de manera que se preserve cierta noción de distancia en la grilla. Esto es:

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia

(cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E . En efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$ comparten el vértice w_j . Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la misma arista.

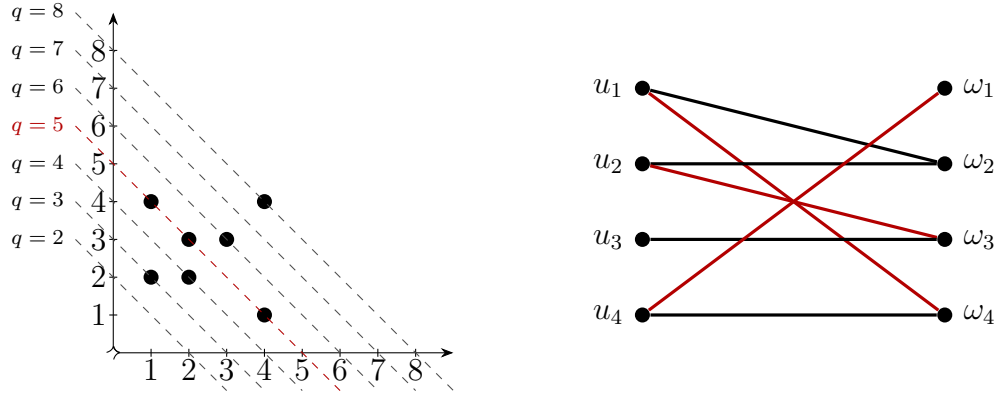


Figura 3.7: Ejemplo del emparejamiento generado por la clase de equivalencia asociada a $q = 5$, y $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.

Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{4}(2n)^2$, el teorema de emparejamiento inducido asegura que existe al menos un emparejamiento no inducido. Esto significa que en al menos un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim u_k w_\ell$ puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i, j) , (k, ℓ) y (i, ℓ) son elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

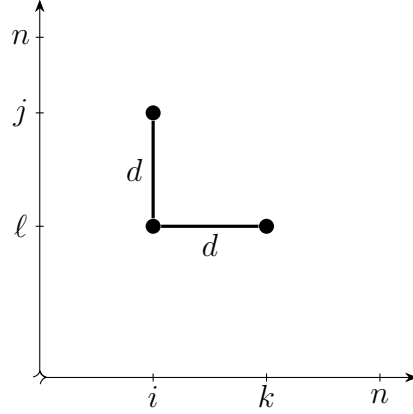


Figura 3.8: Esquema ilustrativo de la esquina formada en la demostración

1111 Finalmente, la demostración del teorema se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para
 1112 obtener $j = b + d$ y $k = a + d$. □

1113 El resultado anterior otorga lo necesario para la segunda demostración (J. Solymosi [20]) del teorema de Roth utilizando el lema de regularidad de Szemerédi.

1115 *Segunda demostración Teorema 42.* Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente
 1116 grande. Para $n \geq n_0$, sea $S \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se
 1117 define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in S\},$$

1118 Observe que cada $s \in S$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = s$,
 1119 permitiendo determinar que $|B| = n|S| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 43 asegura la
 1120 existencia de elementos de la forma $\{(s, b), (s, b+d), (s+d, b)\}$ en B . Por consecuencia,
 1121 se encuentra una progresión aritmética de largo 3 no trivial en A tomando $x = s - b$,
 1122 e $y = d$. □

Bibliografía

- [1] Miklós Ajtai y Endre Szemerédi. “Sets of lattice points that form no squares”. En: *Stud. Sci. Math. Hungar* 9.1975 (1974), págs. 9-11.
- [2] Béla Bollobás. *Modern graph theory*. Vol. 184. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Béla Bollobás y Béla Bollobás. *Random graphs*. Springer, 1998.
- [4] Fan R. K. Chung, Ronald L. Graham y Richard M. Wilson. “Quasi-random graphs”. En: *Combinatorica* 9 (1989), págs. 345-362.
- [5] S CIOABA y RR MARTIN. “TAO’S SPECTRAL PROOF OF THE SZEMERÉDI REGULARITY LEMMA”. En: (2013).
- [6] Reinhard Diestel. “Graph theory. fifth. vol. 173”. En: *Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin* (2018).
- [7] P Erdős y A Rényi. “On random graphs I”. En: *Publ. math. debrecen* 6.290-297 (1959), pág. 18.
- [8] Paul Erdős y Paul Turán. “On some sequences of integers”. En: *Journal of the London Mathematical Society* 1.4 (1936), págs. 261-264.
- [9] Alan Frieze y Ravi Kannan. “The regularity lemma and approximation schemes for dense problems”. En: *Proceedings of 37th conference on foundations of computer science*. IEEE. 1996, págs. 12-20.
- [10] Harry Furstenberg. “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”. En: *Journal d’Analyse Mathématique* 31.1 (1977), págs. 204-256.

- [11] Edgar N Gilbert. “Random graphs”. En: *The Annals of Mathematical Statistics* 30.4 (1959), págs. 1141-1144.
- [12] William T Gowers. “Lower bounds of tower type for Szemerédi’s uniformity lemma”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 7.2 (1997), págs. 322-337.
- [13] William T Gowers. “A new proof of Szemerédi’s theorem”. En: *Geometric & Functional Analysis GAFA* 11.3 (2001), págs. 465-588.
- [14] Svante Janson, Tomasz Łuczak y Andrzej Ruciński. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.
- [15] Michael Krivelevich y Benny Sudakov. “Pseudo-random graphs”. En: *More sets, graphs and numbers: A Salute to Vera Sos and András Hajnal*. Springer, 2006, págs. 199-262.
- [16] Guy Moshkovitz y Asaf Shapira. “A short proof of Gowers’ lower bound for the regularity lemma”. En: *Combinatorica* 36.2 (2016), págs. 187-194.
- [17] Vojtěch Rödl. “On universality of graphs with uniformly distributed edges”. En: *Discrete Mathematics* 59.1-2 (1986), págs. 125-134.
- [18] Klaus F Roth. “On certain sets of integers”. En: *J. London Math. Soc* 28.104-109 (1953), pág. 3.
- [19] Imre Z Ruzsa y Endre Szemerédi. “Triple systems with no six points carrying three triangles”. En: *Combinatorics (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 18.939-945 (1978), pág. 2.
- [20] József Solymosi. “Note on a generalization of Roth’s theorem”. En: *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*. Springer, 2003, págs. 825-827.
- [21] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression”. En: *Acta Mathematica Hungarica* 20.1-2 (1969), págs. 89-104.
- [22] Endre Szemerédi. “On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression”. En: *Acta Arith* 27.199-245 (1975), pág. 2.

- 1172 [23] Terence Tao. *The spectral proof of the Szemerédi regularity lemma*. [Consultado
1173 el 31 de marzo de 2024]. 2012. URL: [https://terrytao.wordpress.com/2012/
1174 12/03/the-spectral-proof-of-the-szemerédi-regularity-lemma/](https://terrytao.wordpress.com/2012/12/03/the-spectral-proof-of-the-szemerédi-regularity-lemma/).
- 1175 [24] Andrew Thomason. “Pseudo-random graphs”. En: *North-Holland Mathematics
1176 Studies*. Vol. 144. Elsevier, 1987, págs. 307-331.
- 1177 [25] Yufei Zhao. *Graph theory and additive combinatorics: exploring structure and
1178 randomness*. Cambridge University Press, 2023.