Grafos cuasi-aleatorios y lema de regularidad de Szemerédi

Estudiante:
Felipe Sánchez Erazo

Profesor Guía:

Dr. Hiệp Hàn

Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático de la Universidad de Santiago de Chile

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación
Universidad de Santiago de Chile

A mi abuelo, Sergio Sánchez.

1. Introducción

2. Preeliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 2.1 da un paseo por las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo del documento. En la sección 2.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 2.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 3.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero recuerde que la DCS establece que todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \right)^2 . \tag{1}$$

Entonces, si $\boldsymbol{b} = (1, ..., 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right)^2 . \tag{2}$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, ..., \alpha_k > 0$ y $\beta_1, ...\beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}. \tag{3}$$

Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n:

- Si $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) \to 0$, se dice que $f = o(g)$.
- Si $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) < \infty$, se dice que $f = O(g)$.

2.1. Teoría de grafos

Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, ..., n\}$. También, si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de r elementos de S.

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices**, y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas**. Dado un grafo G, se escribe $V(G)$ como su conjunto de vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de aristas presentes en el grafo.

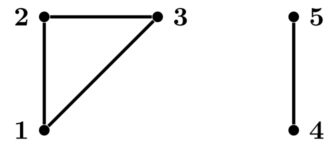


Figura 1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{12, 23, 13, 45\}$.

Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a v (o viceversa) si y solamente si $uv \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente disjuntos, se define el conjunto de tuplas que forman una arista en G de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \Big|\{(x, y) \in X \times Y : xy \in E\}\Big|. \tag{4}$$

Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y, y cuando $X \cap Y \neq \emptyset$, $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en $X \cap Y$. Se entenderá por **vecindad** de $u \in V$ como el conjunto de todos los vértices adyacentes a u, es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}. \tag{5}$$

Si $\mathbb{1}_X$ denota la función indicatriz de un conjunto X, se define el **grado** de un vértice $u \in V$ con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de la siguiente manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u) \cap Y|.$$

En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(uv) = |N(u)|.$$

Una propiedad elemental en teoría de grafos, es la relación que guarda la suma del grado de todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

Proposición 1. *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \tag{6}$$

Demostración. Cada arista $uv \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u, y otra por v. $\square$

En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesariamente diferentes mediante:

$$\operatorname{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(wu)\mathbb{1}_E(wv) = |N(u) \cap N(v)|.$$

Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será de utilidad en la sección 3.

Proposición 2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \operatorname{codeg}(v, v').$$

Demostración. Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(uv)\mathbb{1}_E(uv') \\
&= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(vu)\mathbb{1}_E(v'u) \\
&= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \operatorname{codeg}(v, v').
\end{aligned}$$

□

Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \operatorname{codeg}(u, v). \tag{7}$$

A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta tesis. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es k-**partito** si V se puede dividir en k subconjuntos disjuntos $V_1, V_2, ..., V_k$ tales que si $uv \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$. En particular, a un grafo 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

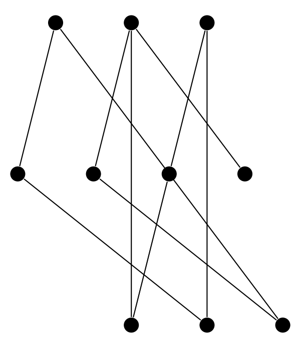


Figura 2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n, es un grafo en el cual todos sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta. Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito completo** con n y m elementos en sus respectivos conjuntos de vérrtices. Observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por último, un grafo d-**regular** es aquel que presenta todos sus vértices con grado d.

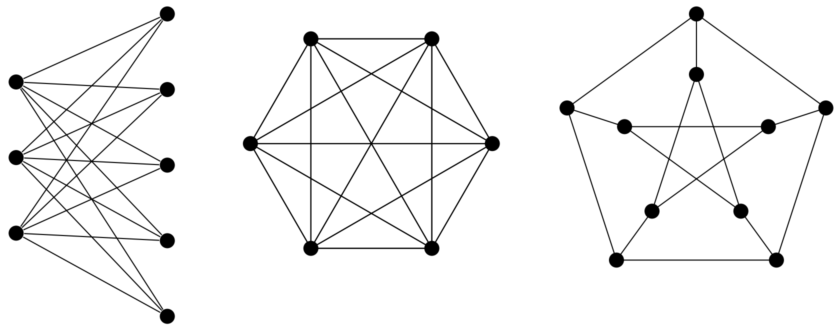
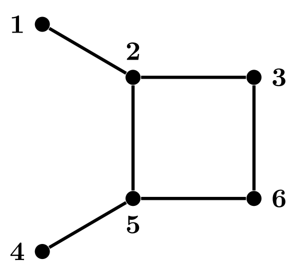


Figura 3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

Otro concepto relevante en este trabajo, son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una determinada secuencia de aristas en un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata**, es una secuencia de vértices no necesariamente distintos $v_0, v_1, ..., v_k$ tales que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.
- Un **ciclo**, es una caminata con $k \geq 2$ vértices únicos a excepción de v_k, que coincide con v_0. Se denotará por C_k al ciclo de largo k.



$125456 \equiv$ caminata de largo 5.

$23652 \equiv$ ciclo de largo 4.

Figura 4: Ejemplo de una caminata y un ciclo.

Por otro lado, para estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \to V(G)$ tal que $uv \in E(H)$ si y solamente si $f(u)f(v) \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfismos.

Finalmente, se define una **copia etiquetada** de un grafo H en G, como la aplicación inyectiva $f : V(H) \to V(G)$ tal que $f(u)f(v) \in E(G)$ cada vez que $uv \in E(H)$. En otras palabras, es un mapeo de los vértices de H a los de G que preserva las aristas. Se denotará por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G.

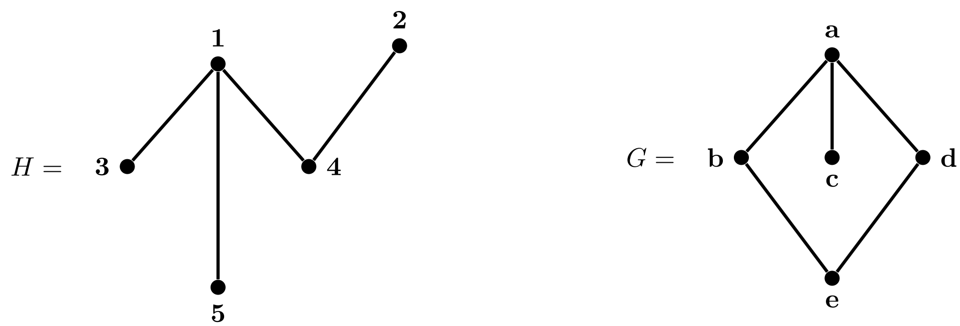


Figura 5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \to V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

2.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas, y denotaremos A^T como la matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. También, representaremos por $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ al vector de solo 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de solo 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ con entrada 1 en la posición i. Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usales de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, según corresponda) respectivamente.

Considerando una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de sus elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de dichas matrices. En efecto,

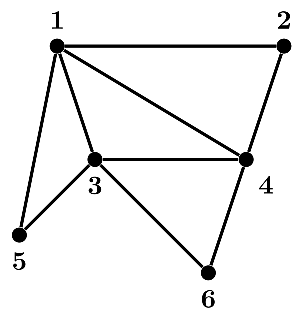
$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 cuando no. Bajo esta representación se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciónes de los vértices del grafo, y se gozan de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

Definición 3. *Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacencia** $A_G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A.

$G =$ 

$$A_G = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 6: Ejemplo de representación de unn grafo mediante la matriz de adyacencia.

Observe que la construcción anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T = A_G$. Además, a partir de todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A ,se puede obtener un vector con los grados de todos los vértices del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \tag{8}$$

.

Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 4, es que nos permite reescribir la ecuación (4) en función de ella. Para ver esto, considere la matriz de adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, según la definición 3,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_j = a_{ij}.$$

Y así, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{v}_X^T A \boldsymbol{v}_Y. \tag{9}$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\boldsymbol{v}_X = \sum_{i \in X} \boldsymbol{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t-ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j.

Proposición 4. *Sea A la matriz de adyacencia de grafo $G = ([n], E)$. La (i, j)-ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t, cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.*

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier caminata de largo $t+1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j, digamos k. Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t+1$ desde i hasta t es exactamente

$$\sum_{k\in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Una consecuencia directa de la proposición anterior, es que en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t por medio de la traza, $\mathrm{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\mathrm{Tr}(A^2) = 2e_G$.

Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el vector no nulo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con **valor propio** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular. Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G, siempre será con respecto a su matriz de adyacencia A. Por ejemplo. si G es un grafo d-regular, entonces con la igualdad (8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G.

Proposición 5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios define una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio de A y $\boldsymbol{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio. Tomando su conjugado (denotado por $\overline{z}$ al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ccc} A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} & \qquad & A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \overline{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x} = \lambda \|\boldsymbol{x}\|^2 & & \boldsymbol{x}^T A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2. \end{array}$$

Además, como A es simétrica,

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^T \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T A\overline{\boldsymbol{x}}.$$

Así, ya que $\boldsymbol{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \overline{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios de A son números reales.

Por otro lado, considere $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A^T\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mu\boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

De esta manera, $\lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ si y solamente si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de A, defina $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que $\mathcal{B}$ constituye una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Para esto, sean $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + ... + c_n\boldsymbol{u}_n = 0.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por $\boldsymbol{u}_i^T$,

$$\boldsymbol{u}_i^T(c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_n\boldsymbol{u}_n) = c_i\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. □

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 6. *(Teorema espectral) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que*

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T. \tag{10}$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A, y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A.

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe como se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^TP)DP^T = PD^2P^T.$$

Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^kP^T$. Esta propiedad resulta altamente útil de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición 7 y el Corolario 8 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente determinado por los valores propios del mismo.

Proposición 7. *La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma de sus valores propios.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sus valores propios, y $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_i.$$

Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T \right) \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|\boldsymbol{v}_j\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de una matriz real simétrica.

Corolario 8. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sus valores propios, entonces se cumple* $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Demostración. El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es invariante bajo el orden de la multiplicación,

$$
\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}([PDP^T]^k) = \mathrm{Tr}(P[D^k P^T]) = \mathrm{Tr}([D^k P^T]P) = \mathrm{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.
$$

□

De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se simplifica a solo calcular la suma de la k-ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante, en la sección 3, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sus valores propios,

$$
\left| \binom{G}{C_k} \right| = \mathrm{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k + o(n^k) \tag{11}
$$

Finalmente, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

Teorema 9. *(Teorema de Courant-Fischer) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, y $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,*

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k-1}\}\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\perp\{\boldsymbol{v}_{k+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n\}\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

Usualmente, el primer valor propio de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer valor propio.

Proposición 10. *El primer valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d-regular, el primer valor propio coincide con d.*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 9:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1}\rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v\in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (8) y usando la cota anterior, se concluye que $\lambda_1 = d$ cada vez que G es un grafo d-regular. $\square$

2.3. Grafos aleatorios

El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios.*

Intuitivamente, se podría pensar en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de seleccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n. En 1959, Erdös-Rényi y Edgar Gilbert* referencia * proponen dicha selección de la siguiente manera: comenzando con un grafo sin aristas $G = ([n], \emptyset)$, decidir sobre cada par de vértices de G si agregar una arista con una probabilidad p establecida. En cada repetición del proceso anterior se genera un nuevo grafo de n vértices, que contribuye a la creación del espacio de probabilidad conocido como $G(n,p)$, y se denomina modelo binomial. Entonces, considerando $\mathcal{G}^n$ como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 11. *(Modelo binomial) Sea $p \in (0,1)$. Se define $G(n,p)$ como el espacio de probabilidad $(\mathcal{G}^n, \mathcal{P}(\mathcal{G}^n), \mathbb{P})$, con*

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p^{e_G}(1-p)^{\binom{n}{2}-e_G} \quad , \quad \forall G \sim G(n,p).$$

Diremos que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{G}^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad $\mathcal{P}_n$ **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \to 1$ cuando $n \to \infty$. Dicho esto, se probará que $G(n,p)$ posee una distribución de aristas en el siguiente sentido:

Proposición 12. *Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$. Si $G \sim G(n,p)$, entonces satisface con alta probabilidad la siguiente propiedad:*

$$\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon} := \{G \in \mathcal{G}^n : \left|e(A,B) - p|A||B|\right| \leq \varepsilon n^2 \ , \ \forall A, B \subset V(G)\}.$$

Para dar prueba a la proposición anterior es necesario utilizar la desigualdad de Chernov. Existiendo diversas formas de expresar tal desigualdad, en esta tesis se utiliza el resultado para el caso en que cada variable aleatoria solo toma los valores 0 o 1, como se plantea en * referencia * en la ecuación (2.12) de la observación 2.5.

Teorema 13. *(Desigualdad de Chernov) Sean $X_1, ..., X_N$ variables aleatorias independientes tales que $X_i = 1$ con probabilidad p, y $X_i = 0$ con probabilidad $1-p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^N X_i$, se satisface*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Con esto, damos paso a la demostración prometida.

Demostración Proposición 12. Dado $p \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$, considere $G \sim G(n,p)$ y $A, B \subset V(G)$. Defina la variable aleatoria $X = e(A,B) = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} X_{ab}$, en donde

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } ab \in E(G), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para utilizar la cota de Chernov más adelante, se separa la variable aleatoria X en sumas de variables aleatorias independientes. Vale decir $X = X_1 + X_2$, en donde

$$X_1 = 2\sum_{ab \in \binom{A\cap B}{2}} X_{ab} \quad , \text{ y } X_2 = \sum_{\substack{a\in A, b\in B \\ a\neq b \\ ab\notin\binom{A\cap B}{2}}} X_{ab}.$$

Al calcular la esperanza de X_1 y X_2 se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1 = 2p\tbinom{|A\cap B|}{2} \quad , \text{ y } \mathbb{E}[X_2] = \mu_2 = p\left(|A||B| - |A\cap B| - 2\tbinom{|A\cap B|}{2}\right).$$

Notando ahora que $|A||B| \leq n^2$, se utiliza la desigualdad de Chernov con $t = \frac{\varepsilon}{3}n^2$ sobre $i \in \{1,2\}$ para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(|X_i - \mu_i| > \frac{\varepsilon}{3}n^2\right) &\leq 2\exp\left(-\frac{2\left(\frac{\varepsilon}{3}n^2\right)^2}{|A||B|}\right) \\ &\leq 2\exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Luego, si ocurre simultáneamente que $|X_1 - \mu_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$ y $|X_2 - \mu_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}n^2$, entonces

$$\left|X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2)\right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon n^2 \ , \ \forall A, B \in V(G).$$

Y así, como $\mu_1 + \mu_2 = p(|A||B| - |A \cap B|) = p|A||B| \pm \varepsilon n$, se tendrá que todo $A, B \subset V(G)$ satisface $\Big|X - p|A||B|\Big| \leq \varepsilon n^2$.

Por lo anterior, se concluye utilizando la cota de la unión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\mathcal{P}_n^{p,\varepsilon}) &= \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : \Big|X - p|A||B|\Big| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3} n^2 \vee |X_2 - \mu_2| > \varepsilon n^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\exists A, B \subset V(G) : |X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3} n^2\right) + \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3} n^2\right) \\
&\leq \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_1 - \mu_1| > \frac{\varepsilon}{3} n^2\right) + \sum_{\substack{A \subset V(G) \\ B \subset V(G)}} \mathbb{P}\left(|X_2 - \mu_2| > \frac{\varepsilon}{3} n^2\right) \\
&\overset{(12)}{\leq} 2^{2n+1} \exp\left(-\frac{2}{9}\varepsilon^2 n^2\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

3. Cuasi-aleatoriedad

Trabajar con estructuras discretas aleatorias brinda una amplia gama de propiedades ideales y deseables, lo que las convierte en piezas fundamenteles tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo aleatorio binomial goza de una distribución uniforme de aristas, buenas propiedades y es robusto. La cuestión ahora es cómo capturar las propiedades esenciales de la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la noción de cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas discretas. En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características deterministas que son propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es interesante por sí misma, su estudio ha revelado profundas conexiones entre varias ramas de la matemática y ciencias de la computación, encontrando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría ergódica, geometría, y algoritmos y complejidad.

Como se verá a detalle más adelante en la sección 4, una de las razones principales por las cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica, es el hecho de que existe un teorema de partición que permite la aproximación de cualquier objeto discreto por otros cuasi-aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre lema de regularidad de Szemerédi, que establece que todo grafo se puede aproximar mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo la conexión entre un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por Rödl * referencia * y Thomason * referencia *, y su punto incial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas* para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo. * Buscar año... *

Definición 14. *Sea $p \in (0,1)$ y $(G_n)_{n\to\infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n vértices. Entonces el grafo G_n es* ***cuasi-aleatorio*** *si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$ se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,*

$$e(X,Y) = p|X||Y| + o(n^2). \tag{13}$$

En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece que, hasta el término de error $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo aleatorio $G(n,p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabilidad en un grafo aleatorio $G(n,p)$, sino que también se considera como una de sus características distintivas.

3.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson * referencia *. Ellos presentaron una extensa lista de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 3.

En la presente sección se enuncia el teorema de Chung, Graham y Wilson junto a una demostración formal.

Teorema 15. *(Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0,1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son equivalentes:*

DISC$_p$: *Para todo $X, Y \subseteq V(G_n)$,*

$$\Big| e(X,Y) - p|X||Y| \Big| = o(n^2).$$

DISC$'_p$: *Para todo $X \subseteq V(G_n)$,*

$$\Big| e(X) - p\tbinom{|X|}{2} \Big| = o(n^2).$$

COUNT$_p$: *Para cada grafo H, la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está dada por*

$$\left| \tbinom{G_n}{H} \right| = \Big(p^{e(H)} + o(1) \Big) n^{v(H)}.$$

COUNT$_{C4,p}$: *La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo 4 es*

$$\left| \tbinom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

CODEG$_p$:

$$\sum_{u,v \in V(G_n)} \Big| \mathrm{codeg}(u,v) - p^2 n \Big| = o(n^3).$$

EIG$_p$: *Si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ son los valores propios de de la matriz de adyacencia de G_n, entonces*

$$\lambda_1 = pn + o(n) \quad , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

Para una comprensión e intuición inicial de cada propiedad del Teorema 15, se ha utilizado notación asintótica en su enunciado. Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los errores en las implicancias cada par de propiedades. Entonces, se replantean equivalentemente las propiedades con una versión cuantitativa, asociando algún parámetro de error ε en todo grafo específico G con un conjunto de vértices suficientemente grande. Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 15, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ satisface DISC_p, y luego, la versión equivalente establece que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface

$$\mathrm{DISC}_p(\varepsilon): \quad e(X,Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n\to\infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface la propiedad $P_{x_1,\ldots,x_k}$[1] si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1,\ldots,x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad $Q_{y_1,\ldots,y_\ell}$ implica la propiedad $P_{x_1,\ldots,x_k}$ si y solamente si $P_{x_1,\ldots,x_k}(\varepsilon)$ implica $Q_{y_1,\ldots,y_\ell}(\delta)$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1,\ldots,y_\ell}(\delta)$ cada vez que satisfaga la propiedad $P_{x_1,\ldots,x_k}(\varepsilon)$. Se desarrollará la demostración formal del Teorema 15 utilizando notación ε-δ, mostrando que cada par de propiedades $P_{x_1,\ldots,x_k}$ y $Q_{y_1,\ldots,y_\ell}$ son equivalentes entre sí con un cambio polinomial en el error, esto es, $P_{x_1,\ldots,x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1,\ldots,y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de constantes $C, c > 0$.

Demostración Teorema de Chung, Graham y Wilson

La demostración del Teorema fue descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán la equivalencia entre todas las propiedades conforme al siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{DISC}'_p \arrow[r, Rightarrow, "\text{Prop. 18.}"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Prop. 16 y 17.}"] & \mathrm{COUNT}_p \arrow[r, Rightarrow, "\text{Prop. 19.}"] & \mathrm{COUNT}_{C4,p} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Prop. 22. y 23.}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Prop. 20.}"] & \mathrm{EIG}_p \\
\mathrm{DISC}_p & & \mathrm{CODEG}_p. \arrow[ll, Rightarrow, "\text{Prop. 21.}"'] &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

Con esto en mente, damos paso a la demostración de cada proposición considerada en el esquema (14).

Proposición 16. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\mathrm{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{DISC}_p(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{DISC}_p \Rightarrow \mathrm{DISC}'_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Entonces, considerando el grafo G con $n \geq n_0$ vértices que satisface $\mathrm{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, se utiliza la propiedad $\mathrm{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p\frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p\binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

[1] Los parámetros $x_1, \ldots, x_k$ pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 15 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

Las igualdades anteriores consideran $e(X,X) = 2e(X)$, por definición, y la aproximación $\binom{|X|}{2} = \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. $\square$

Proposición 17. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{DISC'}_p \Rightarrow \mathrm{DISC}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$.

En primera instancia, se lleva el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de vértices a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X,Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \tag{15}$$

Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, se utiliza la propiedad $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$ sobre la identidad (15) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X,Y) &= p\left(\binom{|X\cup Y|}{2} + \binom{|X\cap Y|}{2} - \binom{|X\setminus Y|}{2} - \binom{|Y\setminus X|}{2}\right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 18. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\mathrm{DISC'}_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0,1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V,E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la propiedad $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$.

Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su cantidad de aristas para probar que

$$\left|\binom{G}{F}\right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \tag{16}$$

Una vez probada la ecuación (16), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F\delta n^\ell \leq 4\binom{\ell}{2}\delta n^\ell \leq 4\delta\left(\frac{\ell^2}{2} + \delta\ell^2\right)n^\ell \leq 6\delta\ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Entonces, cuando $e_F = 1$, $\left|\binom{G}{F}\right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G que forman una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F. Es decir,

$$\left|\binom{G}{F}\right| = 2e_G(n-2)(n-3)\cdots(n-\ell+1).$$

Luego, si aplicamos la propiedad $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$ sobre V, se obtiene que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

Así, con $\left|\binom{G}{F}\right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción. Ahora, sea F un grafo con $e_F > 1$ aristas y asuma que se satisface la ecuación (16) en cualquier grafo con una cantidad de aristas menor que e_F. Para desarrollar la inducción, suponga que $ij \in E(F)$ y considere la siguiente notación:

i) F^- corresponde es el grafo producido por eliminar la arista ij de F.

ii) F^* es el resultado de eliminar los vértices de la arista ij en F.

Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G, es decir, T^- se corresponde una aplicación inyectiva $f : V(F^-) \to V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez que $uv \in E(F^-)$. Entonces, considerando $e_{T^-} := f(i)f(j)$, se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera conveniente para utilizar la hipótesis inductiva como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left|\binom{G}{F}\right| &= \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p\left|\binom{G}{F^-}\right| + \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&\overset{(16)}{=} p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F-1)\delta n^\ell. \qquad (17)
\end{aligned}$$

En este punto, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad (17) es pequeño. Para esto, considere T^* una copia de F^*, y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar de F^- los vértices j e i respectivamente. Con esto, defina los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V \ : \ T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V \ : \ T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}$$

Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a,b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$ añadida a T^* se obtiene una copia de F^-. Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad (17) convenientemente y utilizando la propiedad $\mathrm{DISC'}_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{T^-\in\binom{G}{F^-}}[\mathbb{1}_E(e_{T^-})-p]\right| &= \left|\sum_{T^*\in\binom{G}{F^*}}\sum_{f\in A_i^{T^*}\times A_j^{T^*}}[\mathbb{1}_E(f)-p]\right| \\
&\leq \sum_{T^*\in\binom{G}{F^*}}\left|\sum_{f\in A_i^{T^*}\times A_j^{T^*}}[\mathbb{1}_E(f)-p]\right| \\
&= \sum_{T^*\in\binom{G}{F^*}}\left|e(A_i^{T^*},A_j^{T^*})-p|A_i^{T^*}||A_j^{T^*}|\right| \\
&\leq \sum_{T^*\in\binom{G}{F^*}}\delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. □

Proposición 19. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices satisface $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\mathrm{COUNT}_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_{C_4,p}.$$

Demostración. Se trata de un caso particular de COUNT_p, en donde $H = C4$ y $\delta < \epsilon$. □

Proposición 20. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\mathrm{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{COUNT}_{C_4,p} \Rightarrow \mathrm{CODEG}_p.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$.

La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u,v\in V(G)} \mathrm{codeg}(u,v)$ y $\sum_{u,v\in V(G)} \mathrm{codeg}(u,v)^2$. Para esto, será necesario la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz vista en (2). Por un lado, con la relación entre el grado y el cogrado (7) se obtiene la primera de las cotas:

$$
\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v) &= \sum_{x\in V(G)} \deg(x)^2 \\
&\overset{\text{DCS}}{\geq} \frac{1}{n}\left(\sum_{x\in V(G)} \deg(x)\right)^2 \\
&= \frac{4e_G^2}{n} \\
&\geq \frac{4}{n}\left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2\right)^2 \\
&\geq p^2n^3 - 4\delta n^3.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, usando $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$
\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)^2 = \left|\binom{G}{C_4}\right| \pm \delta n^4 \leq p^4n^4 + 2\delta n^4.
$$

Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\sum_{u,v\in V(G)} \left|\operatorname{codeg}(u,v) - p^2n\right| &\overset{\text{DCS}}{\leq} n\left(\sum_{u,v\in V(G)} (\operatorname{codeg}(u,v) - p^2n)^2\right)^{1/2} \\
&= n\left(\sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v)^2 - 2p^2n \sum_{u,v\in V(G)} \operatorname{codeg}(u,v) + \sum_{u,v\in V(G)} p^4n^2\right)^{1/2} \\
&\leq n\left(p^4n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2n(4\delta n^3 - p^2n^3) + p^4n^4\right)^{1/2} \\
&= n((2+8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\
&\leq 4\delta^{1/2}n^3.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 21. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$. En particular,*

$$
\mathrm{CODEG}_p \Rightarrow \mathrm{DISC}_p.
$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0,1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$.

En primera instancia note que la propiedad $\mathrm{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración en los grados de los vértices de G. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in V(G)} \Big|\deg(x)-pn\Big| &\overset{\text{DCS}}{\leq} n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)}(\deg(x)-pn)^2\right)^{1/2}\\
&= n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)}\deg(x)^2-2pn\sum_{x\in V(G)}\deg(x)+p^2n^3\right)^{1/2}\\
&\overset{(7)}{=} n^{1/2}\left(\left(\sum_{u,v\in V(G)}\operatorname{codeg}(u,v)-p^2n\right)-4pne_G+2p^2n^3\right)^{1/2}\\
&\leq n^{1/2}\left(\left(\sum_{u,v\in V(G)}\Big|\operatorname{codeg}(u,v)-p^2n\Big|\right)+4pn\left(\delta n^2-\frac{pn^2}{2}\right)+2p^2n^3\right)^{1/2}\\
&\leq n^{1/2}\left(2p^2n^3-2p^2n^3+4p\delta n^3+\delta n^3\right)^{1/2}\\
&< 3\delta^{1/2}n^2.
\end{aligned}
$$

Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de forma conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$
\Big|e(X,Y)-p|X||Y|\Big| = \left|\sum_{x\in X}(\deg(x;Y)-p|Y|)\right| \overset{DCS}{\leq} n^{1/2}\left(\sum_{x\in X}(\deg(x;Y)-p|Y|)^2\right)^{1/2}. \tag{18}
$$

En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo, lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera, usando a la cota proveniente de la conentración de los grados en los vértices de G, se prueba el resultado continuando desde (18):

$$
\begin{aligned}
\Big|e(X,Y) - p|X||Y|\Big| &\leq n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)} (\deg(x;Y) - p|Y|)^2\right)^{1/2} \\
&= n^{1/2}\left(\sum_{x\in V(G)} \deg(x;Y)^2 - 2p|Y|\sum_{x\in V(G)} \deg(x;Y) + \sum_{x\in V(G)} p^2|Y|^2\right)^{1/2} \\
&= n^{1/2}\Big(2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn \\
&\quad + \sum_{y,y'\in Y} \operatorname{codeg}(y,y') - 2p|Y|\sum_{y\in Y}\deg(y)\Big)^{1/2} \\
&= n^{1/2}\left(\sum_{y,y'\in Y} (\operatorname{codeg}(y,y') - p^2n) - 2p|Y|\sum_{y\in Y}(\deg(y) - pn)\right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2}\left(\left|\sum_{y,y'\in Y} (\operatorname{codeg}(y,y') - p^2n)\right| + \left|2p|Y|\sum_{y\in Y}(\deg(y) - pn)\right|\right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2}\left(\sum_{u,v\in V(G)} \Big|\operatorname{codeg}(u,v) - p^2n\Big| + 2p|Y|\sum_{x\in V(G)}\Big|\deg(x) - pn\Big|\right)^{2} \\
&\leq n^{1/2}\left(\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3\right)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/4}n^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposición 22. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\mathrm{EIG}_p(\delta)$. En particular,*

$$\mathrm{EIG}_p \Rightarrow \mathrm{COUNT}_{C_4,p}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_p(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G, y $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ los valores propios de A.

Recuerde que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4, que no son C_4, en G se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas de C_4 en G. Con esto, junto al Lema 4 y el Corolario 8 se obtiene lo siguiente:

$$\left|\binom{G}{C_4}\right| = \mathrm{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4 = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4. \tag{19}$$

Luego, recordando que $\mathrm{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\mathrm{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \leq \max_{i\neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \mathrm{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \tag{20}$$

Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\mathrm{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer valor propio y la cota mostrada en (20). Entonces, continuando desde la ecuación (19),

$$\left|\binom{G}{C_4}\right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

□

Proposición 23. *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface* $\mathrm{EIG}_p(\varepsilon)$ *cada vez que cumpla la propiedad* $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$*. Es decir,*

$$\mathrm{COUNT}_{C_4,p} \Rightarrow \mathrm{EIG}_p.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0,1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G, y $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ los valores propios de A.

En lo que respecta al primer valor propio, sabemos por un lado que éste es al menos el promedio de los grados gracias al Lema 10. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x\in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n}\left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2\right) \geq pn - 2\delta n. \tag{21}$$

Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 8 y la propiedad $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 = \mathrm{Tr}(A^4) = \left|\binom{G}{C_4}\right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n. \tag{22}$$

La desigualdad (22) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4} n$, y en combinación con la cota vista en (21), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4} n$. Por último, observe por las cotas vistas anteriormente que

$$\begin{aligned}
\max_{i\neq 1} |\lambda_1|^4 &\leq \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\
&= \mathrm{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\
&\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\
&= 4\delta n^4.
\end{aligned}$$

De esta manera, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i\neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4} n$. □

3.2. Aspectos adicionales del teorema de CGW

La noción inicial presentada de un grafo cuasi-aleatorio por distribución de aristas según la Definición 3 contempla verificar que si todo par de subconjuntos de vértices del grafo satisfacen la condición DISC_p para determinar la cuasi-aleatoriedad. En otras palabras, se requiere comprobar un número exponencial de subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que tal propiedad sea equivalente a todas las otras (salvo $\mathrm{DISC'}_p$), debido a que se verifican de manera polinomial. Otro aspecto interesante es que la propiedad más débil $\mathrm{COUNT}_{C_4,p}$, que solo requiere que la condición de conteo sea verdadera para el ciclo C_4, sea suficientemente sólida para implicar la afirmación de conteo de la propiedad COUNT_p; que dice que el número de copias etiquetadas de cualquier grafo F de tamaño fijo en $G = ([n], E)$ es aproximadamente el esperado de los grafos aleatorios $G(n, p)$.

A continuación mostraremos que no es suficiente que la condición de conteo sea verdadera para ciclos de largo inferior a 4 para determinar la cuasi-aleatoriedad de un grafo. Para ver esto, en primer lugar se la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad de copias etiquetadas esperadas de C_3, pero que no cumple con las condiciones para ser cuasi-aleatorio.

Proposición 24. *Existe un grafo $G = ([n], E)$ con $\left(\frac{1}{3}\right)^3 n^3 + o(n^3)$ copias etiquetadas de C_3, pero que no es cuasi-aleatorio.*

Demostración. La idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que la esperada en un grafo aleatorio $G(n, p)$ de copias etiquetadas de C_3, y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces independientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2,n_2} tales que su unión disjunta forma el grafo $G = K_{n_1} \cup K_{n_2,n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

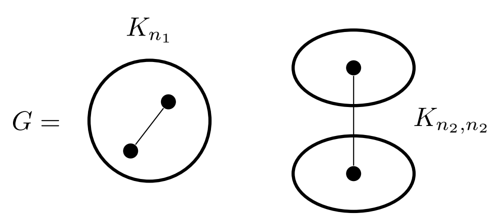


Figura 7: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo.
Aquí, $\bullet\!\!-\!\!\bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G.

En K_{n_1} y K_{n_2,n_2}, observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de C_3 son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} \quad , \quad \left|\binom{K_{n_1}}{C_3}\right| \approx n_1^3 \ , \\ e_{K_{n_2,n_2}} &\approx \frac{(n-n_1)^2}{4} \quad , \quad \left|\binom{K_{n_2,n_2}}{C_3}\right| = 0. \end{aligned}$$

Bajo esta configuración, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que el grafo G posea la cantidad esperada de aristas y copias etiquetadas de C_3 según lo haría un grafo aleatorio $G(n, p)$. Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p\frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n-n_1)^2}{4}, \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Esta construcción, en efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3}\binom{n}{2} + o(n^2),$$

Como también,

$$\left|\binom{G}{C_3}\right| = \left(\frac{n}{3}\right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 n^3 + o(n^3).$$

Sin embargo, el grafo G no es cuasi-aleatorio debido a que no existen aristas entre K_{n_1} y K_{n_2,n_2} ni dentro de los conjuntos de vértices que conforman a K_{n_2,n_2}. □

Lo expuesto se enfoca en el caso muy particular en el que $p = \frac{1}{3}$, pero es importante destacar la técnica utilizada. En específico, la interpolación de dos grafos arbitrarios con una cantidad esperada menor y mayor de copias etiquetadas de C_3 según $G(n, p)$ produce un nuevo contraejemplo.

De manera más general, es posible extender la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}$ a $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ con $t \geq 2$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_{2t},p} : \ \left|\binom{G_n}{C_{2t}}\right| = \left(p^{2t} + o(1)\right) n^{2t} \ , \ \forall t \geq 2.$$

Se expone un bosquejo de la demostración.

Proposición 25. *Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n\to\infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ y EIG_p son equivalentes.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición 22 y 23 tras el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etiquetadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t} = \left|\binom{G_n}{C_{2t}}\right| + O(n^{2t-1}).$$

También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (20) como sigue:

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{2t} \leq \max_{i\neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \max_{i\neq 1} \lambda_i^{2t-2}\text{Tr}(A^2).$$

Con estas observaciones el resultado queda demostrado. □

Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de largo par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los valores propios de G, eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d-regulrar. En nuestro contexto, se verá que toda secuencia $(G_n)_{n\to\infty}$ de grafos d-regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 26. *(Expander Mixing Lemma) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d-regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G. Si se denota:*

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X,Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}. \tag{23}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ compuesta por los vectores propios de A. Utilizando la descomposición espectral, se denotamos

$$A_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T \text{ y } \Delta = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T,$$

de manera que $A = A_1 + \Delta$.

Coforme a la ecuación (9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X,Y) = \boldsymbol{v}_X^T A \boldsymbol{v}_Y = \boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y + \boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y. \tag{24}$$

De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que el segundo el factor de error. Para ver esto, se representan los vectores $\boldsymbol{v}_X$ y $\boldsymbol{v}_Y$ según la base $\mathcal{B}$. Es decir,

$$\boldsymbol{v}_X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \text{ y } \boldsymbol{v}_Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{v}_i,$$

donde $\alpha_i = \boldsymbol{v}_X^T \boldsymbol{v}_i$ y $\beta_i = \boldsymbol{v}_Y^T \boldsymbol{v}_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}_X, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j \in X} \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v}_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{v}_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\
&= |X|.
\end{aligned}$$

Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = |Y|$.

Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (24) por separado. Por un lado,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right)^T \left(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i^T\right) \left(\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^T\right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \left(\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{v}_1\right) \left(\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{v}_j\right) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$
\boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right)^T \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^T\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{26}
$$

Luego, dado que G es un grafo d-regular, $\lambda_1 = d$ y $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, ..., 1)^T$ son valor y vector propio respectivamente de A. En consecuencia,

$$
\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \ \text{ y } \ \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.
$$

Así, la ecuación (25) resulta en $\boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y = \frac{d}{n}|X||Y|$.

Para el término de error, recordando la definición de λ, se desarrolla el valor absoluto de la ecuación (26) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$
\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y\right| &= \left|\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i\right| \\
&\leq \lambda \left|\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \beta_i\right| \\
&\overset{\text{DCS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \sum_{i=2} \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{\left(\|\alpha_i\|^2 - \alpha_1^2\right)\left(\|\beta_i\|^2 - \beta_1^2\right)} \\
&= \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (24) de la siguiente manera:

$$\left| e(X,Y) - \boldsymbol{v}_X^T A_1 \boldsymbol{v}_Y \right| = \left| \boldsymbol{v}_X^T \Delta \boldsymbol{v}_Y \right| .$$

□

El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d-regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\mathrm{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$. Entonces, si G satisface la propiedad $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 26:

$$\begin{aligned} \left| e(X,Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right)\left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\ &< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\ &< \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

Finalmente, en un grafo d-regular, la equivalencia entre las propiedades $\mathrm{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\mathrm{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (14).

4. Lema de regularidad de Szemerédi

* Aquí debo ingresar una breve descripción del lema de regularidad de Szemerédi y la fuerza que toma al combinarlo con el teorema de Chung-Graham-Wilson y comentar la aplicación que se mostrará. (Quizás también hablar de las dos demostraciones de este lema, usual y espectral.) *

4.1. Enunciado y demostración

Se tratará el concepto de regularidad de una manera un poco diferente a como es tradicionalmente conocida. En particular, se permite intersección entre pares de subconjuntos de vértices de un grafo en las futuras definiciones.

Definición 27. *Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos que (X, Y) es un **par ε-regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, se cumple*

$$\left| d(A,B) - d(X,Y) \right| \leq \varepsilon$$

Cuando (X, Y) no es un par ε-regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\left| d(A,B) - d(X,Y) \right| > \varepsilon$.

Notaremos que la noción de un par ε-regular es, de hecho, una analogía de la propiedad $\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$ y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\left|e(X,Y)-p|X||Y|\right| = o(|U||W|)\ ,\ \forall X\subset U,\ \forall Y\subset W. \tag{27}$$

En efecto, si (U,W) es un par ε-regular, entonces todo $A\subset U$ y $B\subset W$ tales que $|A|\geq\varepsilon|U|$ y $|B|\geq\varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A,B)=d(U,W)|A||B|\pm\varepsilon|A||B|=d(U,W)|A||B|\pm\varepsilon|U||W|.$$

Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε-regular no es suficientemente grande, digamos $|A|<\varepsilon|X|$, entonces

$$d(U,W)|A||B|-\varepsilon|U||W|<0\leq e(A,B)\leq|A||B|\leq\varepsilon|U||W|<d(U,W)|A||B|+\varepsilon|U||W|.$$

De esta manera, tomando $p=d(U,W)$, se obtiene la analogía planteada.

Por otro lado, con el espíritu del Teorema 15, es posible expresar un resultado análogo a la propiedad $\mathrm{COUNT}_p(\varepsilon)$ utilizando el concepto de par ε-regular. Dicho resultado, para $H=K_3$ es conocido como el lema de conteo de triángulos.

Lema 28. *(Lema de conteo de triángulos) Sea $\varepsilon>0$, $G=(V,E)$ un grafo, y los conjuntos no necesariamente disjuntos $X,Y,Z\subset V$ tales que los pares $(X,Y),(Y,Z)$ y (X,Z) son ε-regular. Entonces,*

$$|\{(x,y,z)\in X\times Y\times Z: xy,xz,yz\in E\}|=d(X,Y)d(X,Z)d(Y,Z)|X||Y||Z|\pm3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Demostración. Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Proposición 18 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3=([3],\{12,23,13\})$. Cuando el grafo no posee aristas, entonces

$$|\{(x,y,z)\in X\times Y\times Z: xy,xz,yz\notin E\}|=|X||Y||Z|.$$

También, recordando que la condición de un par ε-regular es equivalente a $\mathrm{BI}-\mathrm{DISC}_p(\varepsilon)$ para algún $p\in(0,1)$, cuando el grafo presenta una arista,

$$|\{(x,y,z)\in X\times Y\times Z: xy\in E\}|=\left(d(X,Y)|X||Y|\pm\varepsilon|X||Y|\right)|Z|.$$

Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$|\{(x,y,z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}| = d(X,Y)d(Y,Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del grafo $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la apliación inyectiva $\varphi : [3] \to V(T^-) \subset V$. Con esto, se desarrolla inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} |\{(x,y,z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\}| &= \sum_{T^-} \left[\mathbb{1}_E(e^-) + d(X,Z) - d(X,Z)\right] \\ &= d(X,Y)d(Y,Z)d(X,Z)|X||Y||Z| \\ &\quad + \sum_{T^-} \big(\mathbb{1}_E(e^-) - d(X,Z)\big) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \tag{28}$$

En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (28) se corresponde con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton $\{2\}$ en G, y considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1^{T^*} &= \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1,2\}, \{12\}) \text{ en } G\}. \\ A_3^{T^*} &= \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2,3\}, \{23\}) \text{ en } G\}. \end{aligned}$$

De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X,Z) ε-regular con versión bipartita de la propiedad $\mathrm{DISC}_{d(X,Z)}(\varepsilon)$ vista en (27), se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{T^-} \big(\mathbb{1}_E(e^-)\big) - d(X,Z)\right| &\le \sum_{T^*} \left|\sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X,Z))\right| \\ &= \sum_{T^*} \left|e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X,Z)|A_1^{T^*}||A_3^{T^*}|\right| \\ &\le \sum_{T^*} \varepsilon|X||Z| \\ &\le \varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (28) se prueba lo prometido. $\square$

En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X,Y) y (X,Z) son ε-regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no ser necesariamente un par ε-regular para el que lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 28 (y Proposición 18), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H. Se enuncia sin demostración.

Lema 29. *(Lema de conteo de grafos) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, ..., V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε-regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, ..., v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$ tales que $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es*

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j)\right)\left(\prod_{\ell=1}^{k} |V_\ell|\right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^{k} |V_\ell|.$$

Ya conociendo el concepto de regularidad entre pares de subconjuntos de vértices, estudiamos la regularidad en una partición del conjunto de vértices del grafo.

Definición 30. *Dado un grafo G, una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ es una* ***partición ε-regular*** *si*

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon-\text{regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε-regular salvo una fracción ε de pares de vértices.

Note que si una partición ε-regular de k partes es en particular una equipartición, entonces a lo más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε-regular.

Ya con todo lo necesario, se introduce el lema de regularidad de Szemerédi. Intuitivamente, el lema permite particionar el conjunto de vértices de todo grafo en una cantidad finita de partes, satisfaciendo que la mayoría de sus pares de partes son ε-regular. Enunciamos el célebre lema, y se dará prueba formal más adelante.

Teorema 31. *(Lema de regularidad de Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una partición ε-regular de a lo más M partes.*

Para dar prueba a este teorema, se utilizará una técnica llamada *argumento de incremento de energía*. Para todo grafo G, la técnica funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.

2. Mientras la partición actual $\mathcal{P}$ no es ε-regular:

   (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε-regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de cada par.

   (b) Refinar $\mathcal{P}$ utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par (V_i, V_j) no ε-regular para obtener $\mathcal{Q}$.

   (c) Actualizar $\mathcal{P}$ con $\mathcal{Q}$.

Siendo $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ si cada parte de $\mathcal{Q}$ está contenida en una parte de $\mathcal{P}$. En lo que resta de esta sección mostraremos que el algoritmo tiene un fin, y que entrega una partición ε-regular en un número de iteraciones que solo depende de ε.

Definición 32. *(Energía) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer lugar*

$$q(X,Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X,Y)^2 = \frac{e(X,Y)^2}{n^2|X||Y|}.$$

Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, ..., X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, ..., Y_\ell\}$ de Y, se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

*Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$, se define la **energía** mediante*

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

Observe que en toda partición $\mathcal{P}$ de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{k} |V_i| \sum_{j=1}^{k} |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

La última observación es crucial en la demostración del Teorema 31, puesto que los Lemas 33, 34 y 35 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, entregando una partición ε-regular.

El siguiente lema muestra que la energía no disminuye al particionar o refinar arbitrariamente un conjunto o partición respectivamente.

Lema 33. *Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, $\mathcal{P}_X$ y $\mathcal{P}_Y$ particiones de X e Y respectivamente, entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, dadas dos particiones de vértices $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ de G, $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que $\mathcal{P}'$ refina a $\mathcal{P}$.*

Demostración. Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, ..., X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, ..., Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente. En primera instancia, se utiliza la desigualdad (3) para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\ &\overset{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j)\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^{k} |X_i|\right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j|\right)} \\ &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\ &= q(X, Y). \end{aligned} \tag{29}$$

Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, ..., \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de $\mathcal{P}$. Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} q(V_i, V_j) \overset{(29)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

$\square$

Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε-regular de un grafo G, mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

Lema 34. *Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε-regular, existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que*

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos tales que el par (X, Y) no es ε-regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que evidencian la irregularidad del par (X, Y), y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon |X| \quad \text{y} \quad |Y_1| \geq \varepsilon |Y|. \tag{30}$$

Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$, cual por definición de par ε-regular, satisface* Aquí quedé *

$$|\eta| > \varepsilon. \tag{31}$$

Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \tag{32}$$

Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \tag{33}$$

Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y, desarrollamos,

$$
\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q(X_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2|X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_i||Y_j|} + \sum_{i+j>2}\frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|}\right) \\
&\overset{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j)\right)^2}{\sum_{i+j>2}|X_i||Y_j|}\right) \\
&\overset{(32)\text{ y }(33)}{=} \frac{1}{n^2}\left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\right).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Luego, por definición, note que

$$
e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta|X_1||Y_1|. \tag{35}
$$

Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (34) como sigue, * Me podré saltar un espacio más pequeño abajo? *

$$
\begin{aligned}
n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1||Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|} \\
&\overset{(35)}{=} \frac{1}{|X_1||Y_1|}\left(\frac{|X_1||Y_1|e(X, Y)}{|X||Y|} + \eta|X_1||Y_1|\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\left(\frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X||Y|}e(X, Y) - \eta|X_1||Y_1|\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2}e(X, Y)^2 + 2\frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|}\eta e(X, Y) + \eta^2|X_1||Y_1| \\
&\quad + \frac{|X||Y| - |X_1||Y_1|}{|X|^2|Y|^2}e(X, Y)^2 - 2\frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|}\eta e(X, Y) + \frac{\eta^2|X_1|^2|Y_1|^2}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2|X_1||Y_1|\left(1 + \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y| - |X_1||Y_1|}\right) \\
&\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X||Y|} + \eta^2|X_1||Y_1|.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Finalmente, utilizando las cotas (30) y (31), podemos concluir desde la desigualdad (36),

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X,Y)^2}{n^2|X||Y|} + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\ &= q(X,Y) + \eta^2 \frac{|X_1||Y_1|}{n^2} \\ &> q(X,Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε-regular por medio de sus subconjuntos que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε-regular de un grafo produce un aumento estricto de al menos ε^5 en la energía.

Lema 35. *Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ...V_k\}$ no ε-regular de $V(G)$. Entonces existe un refinamiento $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$, en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que*

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ una partición no ε-regular del conjunto de n vértices de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε-regular, existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que para cada V_i, podemos encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε-regular. Consideremos ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, ..., Q_k\}$ que refina a $\mathcal{P}$, en la que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos los subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε-regular. En consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

Por simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$. Luego, como la partición $\mathcal{P}$ no es ε-regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j)\notin\Theta} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} > \varepsilon. \tag{37}$$

Así, junto a los lemas probados previamente, damos prueba al resultado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in\Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&\overset{\text{Lema } 33}{\geq} \sum_{(i,j)\in\Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\
&\overset{\text{Lema } 34}{\geq} \sum_{(i,j)\in\Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\
&= \sum_{(i,j)\in[k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j)\notin\Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\
&\overset{(37)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.
\end{aligned}$$

* Cambiar por > en la última línea y donde dice lema 5, cuando lo cambio se me descuadra :c
* □

Ya con todo lo necesario, damos prueba formal al Teorema 31 mediante la técnica de *argumento de incremento de energía*.

Demostración del Teorema 31. Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G, elegimos inicialmente la partición trivial del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actualizando $\mathcal{P}$), aplicaremos el Lema 35 cada vez que la partición actual no sea ε-regular. Observe que por cada aplicación del Lema 35 se consigue un aumento de al menos ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será necesariamente una partición ε-regular debido a la cota de la energía.

Para una partición no ε-regular con k elementos, el Lema 35 encuentra un refinamiento de a lo más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso tras aplicar el Lema 35.

$$\begin{array}{llcll}
1^{\underline{\text{ra}}} \text{ Iteración:} & 1 & \rightarrow & 2 < 2^2 & \text{partes.} \\
2^{\underline{\text{da}}} \text{ Iteración:} & 2^2 & \rightarrow & \left(2^2\right) 2^{\left(2^2\right)} < 2^{2^{2^2}} & \text{partes.} \\
3^{\underline{\text{ra}}} \text{ Iteración:} & 2^{2^{2^2}} & \rightarrow & \left(2^{2^{2^2}}\right) 2^{\left(2^{2^{2^2}}\right)} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} & \text{partes.}
\end{array}$$

Así, como el algoritmo debe luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad de partes al final de proceso será

$$M(\varepsilon) \leq \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} \text{Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

$\square$

Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la siguiente manera,

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \Big\} \text{Altura } k. \tag{38}$$

* En esta parte me gustaría dejar un comentario sobre lo grande que es la cota y el resultado que encontró Gowers en 1997 de cota inferior, pero no lo entiendo :c *

Una de las peculiaridades del lema de regularidad de Szemerédi es la flexibilidad que posee su enunciado, adaptando su aplicación a diferentes contextos. Por ejemplo, si en la demostración del Teorema 31 tomamos una partición inicial arbitraria en vez de la partición trivial del conjunto de vértices del grafo, se logra obtener la siguiente variante del lema de regularidad.

Teorema 36. *(Regularidad de Szemerédi - Partición inicial arbitraria) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo G con una partición inicial $\mathcal{P}_0$ de $V(G)$ admite una partición ε-regular $\mathcal{P}$ de $V(G)$ que refina cada parte de $\mathcal{P}_0$ en a lo más M partes.*

Es posible fortalecer un poco más el lema de regularidad exigiendo que el resultado sea una equipartición del conjunto de vértices de un grafo G. Es decir, una partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ tal que $|V_1| \leq |V_2| \leq ... \leq |V_k| = |V_1| + 1$.

Teorema 37. *(Regularidad de Szemerédi - Equipartición) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε-regular de su conjunto de vértices de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.*

* Comentar que cuando tenemos esta versión del teorema (que es la clásica), entonces la definición de una partición ε-regular se traduce en ... $\leq \varepsilon k^2$. También hablar un poco de m_0, cual ayuda a que ninguna de las partes sea demasiado grande. *

La idea de la demostración del Teorema 37 consiste en modificar el algoritmo de la técnica de argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre obtener una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Para todo grafo G, la modificación del algoritmo es la siguiente:

1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria $\mathcal{P}$ de $V(G)$ con m_0 partes.
2. Mientras la partición actual $\mathcal{P}$ no es ε-regular:
   (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε-regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que evidencian la irregularidad de cada par.
   (b) Refinar $\mathcal{P}$ usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener la partición $\mathcal{Q}$, cual divide cada parte de $\mathcal{P}$ en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.

(c) Modificar la partición $\mathcal{Q}$ refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$ utilizando alguna elección apropiada del entero $m = m(|Q|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de $\mathcal{Q}$ que no fueron refinados previamente a causa de su bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.

(d) Actualizar $\mathcal{P}$ con la modificación de $\mathcal{Q}$.

El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G. En lo que respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos ε^5 en cada iteración. El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con una elección de m suficientemente grande.[2] En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la energía en cada iteración en al menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con una equipartición de a lo más torre(ε^{-5}) partes.

4.2. Aplicaciones

Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son desarrolladas en base a los siguientes pasos:

1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices del grafo con el lema de regularidad.
2. **Limpiar** el grafo eliminando aristas con mal comportamiento según el problema. Generalmente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
   i) Irregularidad.
   ii) Baja densidad.
   iii) Al menos una de las partes es demasiada pequeña.
3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio utilizando algún lema de conteo.

Teniendo esta fórmula en mente, damos paso a la primera aplicación del lema de regularidad, cual plantea intuitivamente que todo grafo con *pocos* triángulos puede convertirse en un grafo libre de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

Teorema 38. *(Lema de eliminación de triángulos) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos eliminando a lo más εn^2 aristas.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 31 para obtener la constante $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más εn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el Teorema 31, se asegura la existencia de una partición ε_r-regular $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_M\}$.

Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [M]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i y V_j cuando

[2]* Aquí quiero hacer un comentario/ejemplo de m. Yufei sugiere $m = \lfloor 100|\mathcal{Q}\varepsilon^{-5}|\rfloor$, pero tampoco lo entiendo mucho. *

(a) (V_i, V_j) no es un par ε_r-regular,

(b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

(c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{M}\varepsilon_r$.

De esta manera, como la partición es ε_r-regular, las aristas removidas por la condición (a) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[M]^2 \\ (V_i,V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j)\in[M]^2 \\ d(V_i,V_j)<(4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i,V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j)\in[M]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{M}\varepsilon_r$ vértices en a lo más M subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$M \cdot \frac{n}{M}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos. Para esto, observe que la condición de eliminación de aristas (a) nos asegura que cada par (V_i, V_j) es ε_r-regular, y que se satisface la hipótesis del lema de conteo de grafos. Entonces, si luego de la limpieza del grafo aún existe un triángulo $(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell$, el Lema 28 nos dice que incluso hay más triángulos. En particular, gracias a la eliminación de las aristas por la condición (b) y (c),

$$\begin{aligned}
|\{(x,y,z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i,V_j)d(V_i,V_\ell)d(V_j,V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\
&\geq \varepsilon_r |V_i||V_j||V_\ell| \\
&\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{M^3} \\
&> \delta n^3.
\end{aligned}$$

Finalmente, con nuestra elección de δ, el resultado se prueba formulando la siguiente contradicción: si existe un triángulo en el grafo limpio G', el lema de conteo de triángulos nos dice que en realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos, por lo que se concluye que el grafo G' obtenido desde G es libre de triángulos removiendo a lo más εn^2 aristas. $\square$

Denotaremos por k-PA a una prograsión aritmética de k elementos. En particular, diremos que un conjunto de números naturales A es libre de 3-PA si no existen los elementos $x, x+y, x+2y \in A$, con $y \neq 0$. Cuando $y = 0$, diremos que la 3-PA es trivial.

Teorema 39. *(Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $A \subset [n]$ posee $|A| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces A contiene una* 3-PA *no trivial cada vez que $n \geq n_0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $A \subset [n]$ con $|A| \geq \varepsilon n$ elementos. La idea es construir un grafo 3-partito de manera conveniente para posteriormente utilizar el lema de eliminación de triángulos. Considere el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$, y son disjuntos entre cada par de ellos. Así, G tiene $6n$ vértices, y se definen las aristas de la siguiente manera:

1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in A$.
2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in A$.
3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in A$.

Luego, la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in A$, $k - j \in A$ y $\frac{k-i}{2} \in A$, o bien, $\left\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\right\}$ es una 3-PA en A con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$. En específico, diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $a \in A$ se satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = a$.

Ahora, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, a) \in V_1 \times A$, la cantidad de triángulos triviales es exactamente $n|A| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se puede eliminar dos triángulos triviales removiendo solo una arista. En consecuencia, debemos eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos.

Utilizando el lema eliminación de triángulos eligiendo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{36}$, existen $\delta_0 > 0$ y $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $6n \geq n_0'$ vértices y a lo más $\delta_0(6n)^3$ triángulos, se convierte en libre de triángulos eliminando a lo más $\varepsilon_0(6n)^2$ aristas. Entonces, estableciendo $\delta = 216\delta_0$, note que existen como máximo $\delta n^3 - \varepsilon n^2$ triángulos no triviales. Sabiendo esto, aseguramos la existencia de un triángulo no trivial cuando $n > \frac{\varepsilon+1}{\delta}$. En efecto,

$$n > \frac{\varepsilon + 1}{\delta} \Rightarrow \delta n - \varepsilon > 1 \Rightarrow n^2(\delta n - \varepsilon) > 1.$$

Finalmente, el resultado queda demostrado tomando $n_0 > \text{máx}\left\{\frac{n_0'}{6}, \frac{\varepsilon+1}{\delta}\right\}$ suficientemente grande. □

Definición 40. *Dado un grafo $G = (V, E)$, un un conjunto $M \subseteq E$ es un **emparejamiento** en G si no existen un par de aristas en M que compartan algún vértice. Diremos que M es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y toda arista de G con un vértice en $V(M)$ es una arista en M.*

* Usar k o M para la cantidad de partes?, aquí se me confunde con el emparejamiento, pero en TRL y demo espectral de regularidad usé M como las partes. De momento en esta parte lo dejaré con k. *

Teorema 41. *(Emparejamiento inducido) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 31 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compueston por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema 31, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, ..., V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r-regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G'. En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2} n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido M en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrán a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

Se define $U_i := V_i \cap V(M)$ como el subconjunto de vértices de M que comparte elementos con V_i, y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(M)$ que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i. Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de $V(M)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10} n.$$

De esta manera, recordando que $|V(M)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$. Además, como también $|M| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una arista en M. Luego, dada la limpieza de G, dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r-regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \tag{39}$$

Ahora, como que M es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$ debe satisfacer

$$e(A,B) \leq \min\{|A|,|B|\}.$$

Sin embargo, la desigualdad (39) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t,U_\ell) &= d(U_t,U_\ell)|U_t||U_\ell| \\ &\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\ &\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a M, por lo que se contradice la hipótesis de que M es un emparejamiento inducido. □

* Comentar que el siguiente teorema será utilizado para demostrar alternativamente el Teorema de Roth. *

Teorema 42. *(Ajtai-Szemerédi) Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que siempre que* $n \geq n_0$*, todo subconjunto* $S \subset [n]^2$ *con* $|S| \geq \varepsilon n^2$ *posee elementos de la forma* $\{(a,b),(a+d,b),(a,b+d)\}$ *para algún* $a,b,d \in \mathbb{N}$*, con* $d \neq 0$*.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \geq n_0$, y $S \subset [n]^2$ un subconjunto con al menos εn^2 elementos. Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de vértices $U = \{u_1,...,u_n\}$ y $W = \{w_1,...,w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i,j) \in S.$$

Interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se puede definir una relación entre pares de aristas en G en función de la distancia que abarca la suma de las coordenadas de sus respectivos pares en S. Esto es,

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

* Dibujito con 2 ejemplos de q. * Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia (cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E. En efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$ comparten el vértice w_j. Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la misma arista.

Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2$, el Teorema 41 asegura que existe al menos un emparejamiento no inducido. Esto significa que en un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim u_k w_\ell$ puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i,j), (k,ℓ) y (i,ℓ) elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

Finalmente, el resultado se consigue tomando $(i,\ell) = (a,b)$ para obtener $j = b + d$ y $k = a + d$.
* Poner dibujito de la esquina * □

* Comentar que el Teorema de la esquina nos entrega otro camino para demostrar el Teorema de Roth. *

Segunda demostración Teorema 39. Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para $n \geq n_0$, sea $A \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x,y) \in [2n]^2 : x - y \in A\},$$

Observe que cada $a \in A$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = a$, permitiendo determinar que $|B| = n|A| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 42 asegura la existencia de elementos de la forma $\{(a,b), (a, b+d), (a+d, b)\}$ en B. Por consecuencia, se encuentra una 3-PA no trivial en A tomando $x = a - b$, e $y = d$. □

* Explicar que ahora vamos a demostrar con teoría espectral el lema de regularidad de Szemerédi. Comentar también que esta versión la realizó Terence Tao. *

Demostración espectral Teorema 31. Sea $\varepsilon > 0$, $G = ([n], E)$ un grafo y T su matriz de adyacencia. Consideramos además $\{u_1, ..., u_n\}$ la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por los vectores propios de T, y $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$ los valores propios de T ordenados de manera decreciente.

Por la Proposición 4 y el Corolario 8, se satisface

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1^2 = 2e_G \leq n^2. \tag{40}$$

De esta manera, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^{i} \lambda_j^2 \leq n^2$, es posible acotar cada valor propio de la siguiente manera:

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}} \ , \ \forall i \in [n]. \tag{41}$$

Al final de esta demostración se entregará una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que depende únicamente de ε y que satisface $f(i) > i$. Denotando por $f^{(k)}$ a la k-ésima composición de f con ella misma, consideramos una partición de $[n]$ en intervalos de la forma $[f^{(k-1)}(1), f^k(1)]$, para $k \in \{1, ..., \frac{1}{\varepsilon^3}\}$. Con esta construcción, debe existir un natural $\ell = f^{(k-1)}(1)$ que cumple con

$$\sum_{\ell \leq j < f(\ell)} |\lambda_j|^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \tag{42}$$

De lo contrario, la suma de $|\lambda_j|^2$ sobre todos los intervalos definidos es estrictamente mayor que $\varepsilon^3 n^2$. Así, como son $\frac{1}{\varepsilon^3}$ intervalos, se contradice la desigualdad (40), pues

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 > \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \varepsilon^3 n^2 = n^2.$$

Ahora, usando el natural ℓ, separamos la matriz T en tres partes. En específico,

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Se interpretará T_1 como la componente *estructural*,

$$T_1 := \sum_{i<\ell} \lambda u_i u_i^T,$$

T_2 como la componente de *error*,

$$T_2 := \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T,$$

y T_3 como la componente *casi-aleatoria*,

$$T_3 := \sum_{i \geq f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T.$$

Pensamos cada vector propio de T como una función $u_i : [n] \to \mathbb{R}$. En otras palabras, todo vector propio asigna un *peso* a cada vértice de G.

Analizamos $\mathbf{T_1}$. La idea es particionar el conjunto de vértices $[n]$ de manera tal que T_1 es aproximadamente constante en la mayoría de las partes. Veremos que el número de partes será $O_{\ell,\varepsilon}(1)$, es decir, un valor constante que depende solo de ℓ y ε.

Para cada $i \in [\ell-1]$ ordenamos de manera creciente los vértices de G según la asignación de *pesos* que otorga $u_i(\cdot)$. En primera instancia, se agrupa en un conjunto excepcional a aquellos vértices que presenten un *peso* demasiado grande en magnitud. Dicho conjunto se define de la siguiente manera:

$$V_0^i := \left\{ k \in [n] : |u_i(k)| > \sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right\}.$$

Dado que $\|u_i\| = 1$, cada V_0^i no puede tener muchos elementos. En efecto, al observar que

$$|V_0^i| \left(\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right)^2 < \sum_{k=1}^{n} u_i(k)^2 = \|u_i\|^2 = 1,$$

es posible determinar que $|V_0^i| < \frac{\varepsilon}{\ell} n$.

Aquellos vértices que no están en V_0^i, serán agrupados particionando la recta de largo $2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}$ en subintervalos de tamaño a lo más $\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}}\right) n^{-1/2}$. Esta configuración provoca gráficamente el siguiente esquema para cada $u_i(\cdot)$.

* Poner dibujito... *

Por consecuencia, para $i \in [\ell - 1]$, la cantidad de partes que genera cada $u_i(\cdot)$ son a lo más

$$\frac{2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}}{\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2}} = \frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} = O_{\ell,\varepsilon}(1).$$

Para conseguir la partición deseada de $[n]$, por un lado, se toma la unión de todos los conjuntos excepcionales V_0^i para dar lugar al conjunto V_0 de tamaño a lo más $(\ell - 1) \cdot \frac{\varepsilon n}{\ell} < \varepsilon n$. Por otro lado, combine las particiones generadas por los $\ell - 1$ primeros vectores propios mediante un refinamiento usual. Así, se consigue una partición del conjunto de vértices de G de la forma $[n] = V_0 \cup V_1 \cup ... \cup V_M$. Dada la construcción, la cantidad de partes que se obtienen son

$$M(\varepsilon) \leq \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^{\ell} \tag{43}$$

Ahora, intuitivamente, se mostrará que los valores de la matriz T_1 en cada bloque $V_i \times V_j$ son aproximadamente constante, i.e, no varían más que $o_\varepsilon(1)$. Para esto, como se hizo con los vectores propios, pensamos la matriz de adyacencia como una función $T : [n] \times [n] \to \mathbb{R}$ para identificar sus entradas. De esta manera, para cada $i, j \in [M]$, $a, c \in V_i$, y $b, d \in V_j$,

$$
\begin{aligned}
|T_1(a,b)-T_1(c,d)| &= \left|\sum_{i<\ell}\lambda_i u_i(a)u_i(b)-\lambda_i u_i(c)u_i(d)\right| \\
&\le \sum_{i<\ell}|\lambda_i|\,|u_i(a)u_i(b)-u_i(c)u_i(b)+u_i(c)u_i(b)-u_i(c)u_i(d)| \\
&\le \sum_{i<\ell}|\lambda_1|\,|u_i(b)(u_i(a)-u_i(c))+u_i(c)(u_i(b)-u_i(d))| \\
&\le \sum_{i<\ell} n\,|u_i(b)|\,|u_i(a)-u_i(c)|+n\,|u_i(c)|\,|u_i(b)-u_i(d)| \\
&\le \ell n\left(2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}}n^{-1/2}\cdot\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}}n^{-1/2}+2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}}n^{-1/2}\cdot\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}}n^{-1/2}\right) \\
&= 4\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Luego, para $i,j\in[M]$, defina d_{ij} como el promedio de los valores del bloque $V_i\times V_j$ en T_1 y observe que se satisface

$$
|T_1(a,b)-d_{ij}|\le 4\varepsilon\ ,\ \forall a\in V_1,\forall b\in V_j.
$$

En efecto, como d_{ij} es un promedio, deben existir los pares $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in V_i\times V_j$ tales que $T_1(x_0,y_0)\le d_{ij}$ y $T_1(x_1,y_1)\ge d_{ij}$. Luego, si $|T_1(a,b)-d_{ij}|>4\varepsilon$, entonces se encuentra una contradicción al determinar que $T_1(a,b)-T_1(x_0,y_0)>4\varepsilon$, o bien $T_1(a,b)-T_1(x_1,y_1)<-4\varepsilon$.

Usando lo anterior y la desigualdad triangular, para todo $A\subset V_i$ y $B\subset V_j$, obtenemos la siguiente cota.

$$
\begin{aligned}
\left|v_A^T(T_1-d_{ij}\mathbb{1}_{n\times n})v_B\right| &\le \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}|T_1(a,b)-d_{ij}| \\
&\le 4\varepsilon|A||B| \\
&\le 4\varepsilon|V_i||V_j|.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Analizamos $\mathbf{T_2}$. Observe en primer lugar, por construcción,

$$
\mathrm{Tr}(T_2^2)=\sum_{\ell\le j<f(\ell)}\lambda_j^2\le\varepsilon^3 n^2.
$$

Adicionalmente, por la ortonormalidad de la base,

$$
\begin{aligned}
\sum_{a,b\in[n]} T_2(a,b)^2 &= \sum_{a,b\in[n]} \left(\sum_{\ell\le i<f(\ell)} \lambda_i u_i(a) u_i(b) \right)^2 \\
&= \sum_{a,b\in[n]} \sum_{\ell\le i,j<f(\ell)} \lambda_i \lambda_j u_i(a) u_j(a) u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell\le i,j<f(\ell)} \lambda_i \lambda_j \sum_{a\in[n]} u_i(a) u_j(a) \sum_{b\in[n]} u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell\le i<f(\ell)} \lambda_i^2 \|u_i\|^4 \\
&= \mathrm{Tr}(T_2^2).
\end{aligned}
$$

Entonces, dada la igualdad anterior, se determina que

$$
\sum_{a,b\in[n]} T_2(a,b)^2 \le \varepsilon^3 n^2. \tag{45}
$$

Ahora, defina el conjunto $\Theta_1 \subset [M]^2$ de manera tal que todo par $(i,j) \notin \Theta_1$ satisface

$$
\sum_{a\in V_i} \sum_{b\in V_j} T_2(a,b)^2 \le \varepsilon |V_i||V_j|. \tag{46}
$$

Más aún, para los pares $(i,j) \in \Theta_1$, la desigualdad (45) en particular establece que

$$
\varepsilon^3 n^2 \ge \sum_{(i,j)\in\Theta_1} \sum_{a\in V_i} \sum_{b\in V_j} T_2(a,b)^2 > \varepsilon \sum_{(i,j)\in\Theta_1} |V_i||V_j|.
$$

Por consecuencia,

$$
\sum_{(i,j)\in\Theta_1} |V_i||V_j| \le \varepsilon^2 n^2. \tag{47}
$$

De esta manera, para $(i,j) \notin \Theta_1$, $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$, utilizamos la desigualdad (46) y Cauchy-Schwarz para conseguir

$$
\begin{aligned}
\left|v_A^T T_2 v_B\right|^2 &= \left|\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} T_2(a,b)\right|^2 \\
&\overset{\text{C}-\text{S}}{\leq} \left(\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} T_2(a,b)^2\right)|A||B| \\
&\leq \varepsilon^2 |V_i||V_j||A||B| \\
&\leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2.
\end{aligned}
$$

Así, se obtiene la cota asociada a T_2.

$$
|v_A^T T_2 v_B| \leq \varepsilon |V_i||V_j|. \tag{48}
$$

Analizamos $\mathbf{T_3}$. Note que el valor propio más grande en magnitud de T_3 es $\lambda_{f(\ell)}$. Entonces, utilizando el operador norma * Definir... * de la matriz T_3 y el Teorema 9,

$$
\frac{\|T_3 v_B\|}{\|v_B\|} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|T_3 x\|}{\|x\|} = \left|\lambda_{f(\ell)}\right| \leq \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.
$$

Como resultado,

$$
\|T_3 v_B\| \leq \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.
$$

Usando la desigualdad anterior junto a Cauchy-Schwarz se obtiene la siguiente cota para T_3.

$$
\begin{aligned}
\left|v_A^T T_3 v_B\right| &= |\langle v_A, T_3 v_B\rangle| \\
&\overset{\text{C}-\text{S}}{\leq} \|v_A\|\|T_3 v_B\| \\
&\leq \|v_A\|\|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&= \sqrt{|A||B|} \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&\leq \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Ya con el control de T_1, T_2 y T_3, nos enfocamos en estudiar G de manera global. Consideramos $\Theta \subset \{0, 1, ..., M\}^2$ definido de la siguiente manera:

$$\Theta := \left\{(i,j) \in \{0,1,...,M\}^2 : (i,j) \in \Theta_1 \ \vee \ i=0 \ \vee \ j=0 \ \vee \ \text{mín}\{|V_i|,|V_j|\} \leq \frac{\varepsilon n}{M}\right\}.$$

Con esta definición, la desigualdad (47), y recordando que $|V_0| < \varepsilon n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\Theta} |V_i||V_j| &= \sum_{(i,j)\in\Theta_1} |V_i||V_j| + \sum_{j=0}^{M} |V_0||V_j| + \sum_{i=0}^{M} |V_i||V_0| + \sum_{|V_i|\leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| + \sum_{|V_j|\leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| \\
&\leq \sum_{(i,j)\in\Theta_1} |V_i||V_j| + 2|V_0|n + 2\sum_{|V_i|\leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i|n \\
&\leq \varepsilon^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + 2M\frac{\varepsilon}{M}n^2 \\
&\leq 5\varepsilon n^2.
\end{aligned}$$

Al ver la cota anterior, Θ se interpreta como un conjunto excepcional de pocos elementos que contiene los malos casos. Ahora bien, si $(i,j) \notin \Theta$, todo $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$ satisfacen la desigualdad

$$\begin{aligned}
\Big|e(A,B) - d_{ij}|A||B|\Big| &= \left|v_A^T(T - d_{ij}\mathbb{1}_{n\times n})v_B\right| \\
&\leq \left|v_A^T(T_1 - d_{ij}\mathbb{1}_{n\times n})v_B\right| + \left|v_A^T T_2 v_B\right| + \left|v_A^T T_3 v_B\right| \\
&\leq 4\varepsilon|V_i||V_j| + \varepsilon|V_i||V_j| + \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Observando la desigualdad en (50), para $(i,j) \notin \Theta$, se necesita que $\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \varepsilon|V_i||V_j|$ para asegurar que la partición $\{V_0, V_1, ..., V_M\}$ de $[n]$ es (6ε)-regular. Para esto, gracias a que $|V_i|, |V_j| \geq \frac{\varepsilon n}{M}$, se cumple la desigualdad $\frac{\varepsilon^2 n^2}{M^2} \leq |V_i||V_j|$, y por consecuencia

$$\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{M^2|V_i||V_j|}{\varepsilon^2\sqrt{f(\ell)}}.$$

Finalmente, para obtener la partición (6ε)-regular del conjunto de vértices del grafo G, es suficiente asumir que $\frac{1}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{\varepsilon^3}{M^2}$. Así, recordando la cota vista en (43), basta elegir

$$f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon^6}\left(\frac{2x^2}{\varepsilon^2}\right)^{4x}.$$

$\square$

5. Bibliografía

[1] Krivelevich, M., Sudakov, B. (2006). Pseudo-random Graphs. In Bolyai Society Mathematical Studies (pp. 199–262). Springer Berlin Heidelberg.

[2] Chung, F. R. K., Graham, R. L., Wilson, R. M. (1989). Quasi-random graphs. Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing.

[3] Chan, T. F. N., Král', D., Noel, J. A., Pehova, Y., Sharifzadeh, M., Volec, J. (2020). Characterization of quasirandom permutations by a pattern sum. Random Structures Algorithms.

[4] Hàn, H., Kiwi, M., Pavez-Signé, M. (2021). Quasi-random words and limits of word sequences. Journal Europeen de Combinatoire [European Journal of Combinatorics].