



1

2

3

Grafos cuasi-aleatorios y lema de regularidad de Szemerédi

4

5

Estudiante:
Felipe Sánchez Erazo

6

Profesor Guía:

7

Dr. Hiệp Hàn

8

9

Tesis para optar al título de Ingeniero Matemático de la Universidad de Santiago de Chile

10

11

Departamento de Matemática y Ciencia de la computación
Universidad de Santiago de Chile

A mi abuelo, Sergio Sánchez.

1. Introducción

2. Preliminares

Este capítulo proporciona una introducción concisa de los conceptos y terminologías que se utilizarán en esta tesis. La sección 2.1 da un paseo por las nociones más básicas de la teoría de grafos, otorgando una línea de base para el desarrollo de las siguientes secciones. En la sección 2.2 se repasan algunos conceptos y resultados clásicos del álgebra lineal para abordar las propiedades necesarias de la teoría espectral de grafos. Por último, la sección 2.3 contextualiza y motiva el contenido de la sección 14.

En muchos de los resultados de esta tesis, la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (DCS) es un argumento fundamental en sus demostraciones. En particular, se emplearán dos variantes que se enunciarán a continuación. Primero recuerde que la DCS establece que todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

Entonces, si $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$, se obtiene la primera variante:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 \geq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (2)$$

Adicionalmente, considerando los reales $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \geq 0$, defina $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ y $b_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ para conseguir la segunda variante:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}. \quad (3)$$

Por otro lado, será usual utilizar la notación asintótica para destacar la intuición de algunos resultados. Por esto, se define la notación considerando $f, g \neq 0$ como funciones de n :

- Si $f(n)/g(n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, se dice que $f = \omega(g)$ y $g = o(f)$. Esto significa que f crece más rápido que g cuando n es lo suficientemente grande.
- Si existe una constante $C > 0$ tal que $|f(n)| \leq C|g(n)|$ para todo n , se dice que $f = O(g)$ y $g = \Omega(f)$. Esto indica que f está acotada superiormente por un múltiplo constante de g .

En el caso de que C dependa de otro parámetro, se indica utilizando un subíndice para especificar esta dependencia. Por ejemplo, $f = O_\ell(g)$.

2.1. Teoría de grafos

Se denota al conjunto de los primeros n naturales por $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. También, si S es un conjunto finito y r es un entero positivo, se establece $\binom{S}{r}$ como el conjunto de todos los subconjuntos de r elementos de S .

Un **grafo** es un par $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de **vértices** (o *nodos*, o *puntos*), y $E \subseteq \binom{V}{2}$ el conjunto de **aristas** (o *líneas*). Dado un grafo G , se escribe $V(G)$ como su conjunto de

41 vértices, $E(G)$ como su conjunto de aristas, y $e_G := |E(G)|$ como la cantidad de aristas presentes
 42 en el grafo.

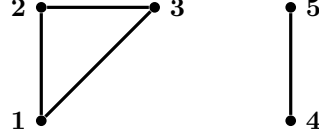


Figura 1: Ejemplo de un grafo con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y conjunto de aristas $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$.

43 Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$, se define su **complemento** como un nuevo grafo $\overline{G} =$
 44 $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Es decir, dos vértices están conectados por una arista en G si y solo si no lo están en
 45 \overline{G} .

46 Consideramos $G = (V, E)$ un grafo cualquiera. Si $u, v \in V$, se dirá que u es **adyacente** a
 47 v (o viceversa) si y solamente si $\{u, v\} \in E$. Si $X, Y \subset V$ son dos subconjuntos no necesariamente
 48 disjuntos, se define el conjunto de tuplas que forman una arista en G de la siguiente manera:

$$e(X, Y) := \left| \{(x, y) \in X \times Y : \{x, y\} \in E\} \right|. \quad (4)$$

49 Cuando $X \cap Y = \emptyset$, $e(X, Y)$ cuenta el número de aristas entre X e Y , y cuando $X \cap Y \neq \emptyset$,
 50 $e(X, Y)$ realiza un doble conteo sobre las aristas que se encuentran en $X \cap Y$.

51 Se entenderá por **vecindad** de $u \in V$, $N(u)$, como el conjunto de todos los vértices adyacentes
 52 a u , es decir,

$$N(u) := \{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}. \quad (5)$$

53 Se define el **grado** de un vértice $u \in V$ con respecto a algún subconjunto de vértices $Y \subseteq V$ de
 54 la siguiente manera:

$$\deg(u; Y) := \sum_{v \in Y} \mathbb{1}_E(\{u, v\}) = |N(u) \cap Y|.$$

55 En particular, cuando $Y = V$,

$$\deg(u) = \sum_{v \in V} \mathbb{1}_E(\{u, v\}) = |N(u)|.$$

56 Una propiedad elemental en teoría de grafos, es la relación que guarda la suma del grado de
 57 todos los vértices y la cantidad de aristas de un grafo.

58 **Proposición 1.** *Dado un grafo $G = (V, E)$, entonces*

$$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2e_G. \quad (6)$$

59 *Demostración.* Cada arista $\{u, v\} \in E$ será contada dos veces en la suma, una contribución por u ,
 60 y otra por v . □

En algunas ocasiones estaremos interesados en la cantidad de vecinos que comparten dos vértices del grafo $G = (V, E)$. Entonces, se define el **cogrado** de un par de vértices $u, v \in V$ no necesariamente diferentes mediante:

$$\text{codeg}(u, v) = \sum_{w \in V} \mathbb{1}_E(\{w, u\}) \mathbb{1}_E(\{w, v\}) = |N(u) \cap N(v)|.$$

Mostraremos que existe una relación intrínseca entre los conceptos de grado y cogrado, cual será de utilidad en la sección 14.

Proposición 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo e $Y \subset V$ un subconjunto de vértices, entonces

$$\sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 = \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v').$$

Demostración. Utilizando las respectivas definiciones de grado y cogrado, el resultado se obtiene de seguir el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \deg(u; Y)^2 &= \sum_{u \in V} \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \mathbb{1}_E(\{u, v\}) \mathbb{1}_E(\{u, v'\}) \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \sum_{u \in V} \mathbb{1}_E(\{v, u\}) \mathbb{1}_E(\{v', u\}) \\ &= \sum_{v \in Y} \sum_{v' \in Y} \text{codeg}(v, v'). \end{aligned}$$

□

Observe que en particular, cuando $Y = V$, se satisface

$$\sum_{u \in V} \deg(u)^2 = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} \text{codeg}(u, v). \quad (7)$$

A continuación, se enuncian algunos grafos especiales que son contemplados en esta tesis. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **k -partito** si V se puede dividir en k subconjuntos disjuntos V_1, V_2, \dots, V_k tales que si $\{u, v\} \in E$ entonces $u \in V_i$ y $v \in V_j$, con $i \neq j$. En particular, a un grafo 2-partito lo llamaremos **bipartito**.

Un **grafo completo** de n vértices, denotado por K_n , es un grafo en el cual todos sus vértices son adyacentes entre ellos, es decir, todo par de vértices en el grafo posee una arista que los conecta. Similarmente, se denota por $K_{n,m}$ al **grafo bipartito completo** con n y m elementos en sus respectivos conjuntos de vértices. Observe que la cantidad de aristas en los grafos anteriores son exactamente $e_{K_n} = \binom{n}{2}$ y $e_{K_{n,m}} = n \cdot m$. Por otro lado, un grafo **d -regular** es aquel que presenta todos sus vértices con grado d .

Otro concepto relevante en este trabajo son las diferentes nociones de rutas que se pueden encontrar siguiendo una secuencia de determinadas aristas de un grafo. Suponga que el grafo G posee $n \geq k$ vértices, entonces se definen los siguientes conceptos:

- Una **caminata** es una secuencia de vértices no necesariamente distintos v_0, v_1, \dots, v_k tales que $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ para todo $i \in [k]$. Si $v_0 = v_k$, se dice que es una **caminata cerrada**. El **largo** de una caminata está determinado por la cantidad de aristas que ésta posea.

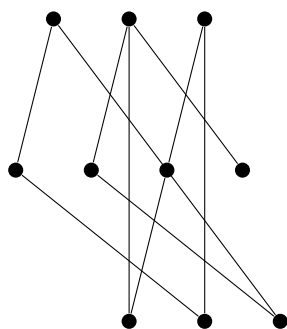


Figura 2: Ejemplo de un grafo 3-partito.

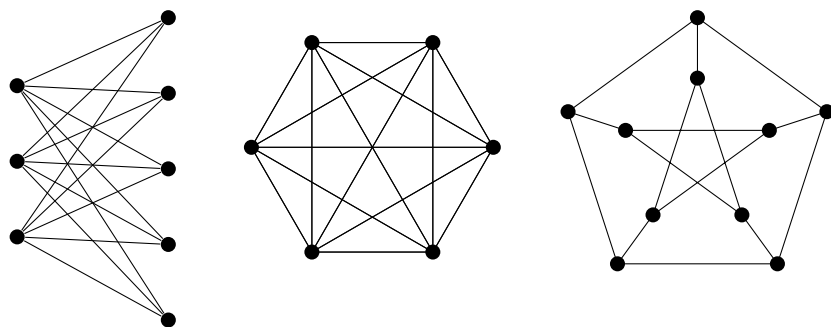


Figura 3: Ejemplo de los grafos especiales $K_{3,5}$, K_6 y 3-regular.

- 87 ■ Un **ciclo** es una caminata con $k \geq 2$ en la cual todos sus vértices v_i son distintos salvo el
88 último, que coincide con el primero, es decir, $v_k = v_0$. Se denotará por C_k al ciclo de largo k .

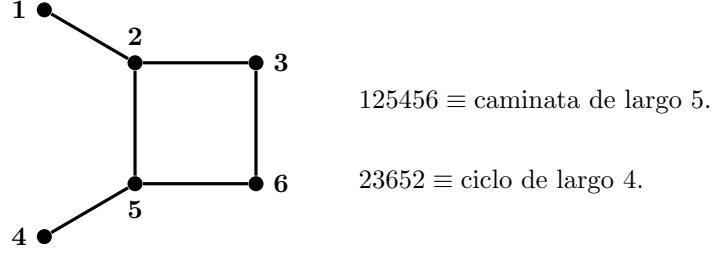


Figura 4: Ejemplo de una caminata, un camino y un ciclo.

Por otro lado, de cara a estudiar posteriormente relaciones estructurales entre grafos, se define un **isomorfismo** entre los grafos H y G como una biyección $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $\{u, v\} \in E(H)$ si y solamente si $\{f(u)f(v)\} \in E(G)$. Si existe tal biyección, diremos que H y G son isomorfismos.

Finalmente, se entenderá como una **copia etiquetada** de un grafo H en G a una aplicación inyectiva $f : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que $\{f(u)f(v)\} \in E(G)$ cada vez que $\{u, v\} \in E(H)$. Se denota por $\binom{G}{H}$ al conjunto de copias etiquetadas de H en G .

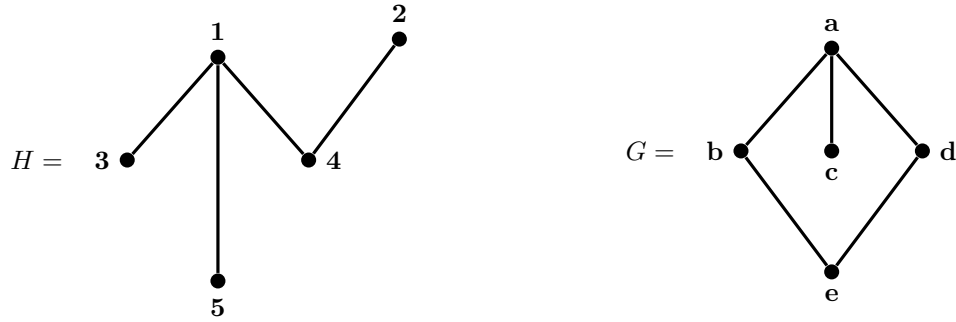


Figura 5: Ejemplo de una copia etiquetada de H en G mediante la función $f : V(H) \rightarrow V(G)$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = c$, $f(4) = b$ y $f(5) = d$.

2.2. Álgebra lineal y teoría espectral de grafos

Se define $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ como el conjunto de matrices reales de n filas y m columnas. Entonces, se denota por $\mathbb{1}_X$ a la función indicatriz del conjunto X , $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ al vector de 1-entradas, $J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz de 1-entradas, $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a la matriz identidad, y $e_i \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ como el vector de la base canónica de \mathbb{R}^n con entrada 1 en la posición i . Además, $\|\cdot\|$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representarán en todo momento la norma y producto interno usuales de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n , según corresponda) respectivamente.

Considere una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, se define la **traza** de A como la suma de sus elementos de la diagonal principal. Esto es,

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

104 Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces la traza resulta invariante bajo el orden de multiplicación de
 105 dichas matrices. En efecto,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \text{Tr}(BA).$$

106 Una manera muy útil de representar un grafo es mediante una matriz cuadrada binaria, en la
 107 que sus filas y columnas representarán todos los vértices del grafo. La matriz adopta el valor 1
 108 en las coordenadas en que sus respectivos vértices forman una arista, y 0 en otro caso. Bajo esta
 109 representación se consigue una visión clara y eficiente entre las relaciones de los vértices del grafo,
 110 y se gozan de las propiedades que ofrece el álgebra lineal.

111 **Definición 3.** Dado un grafo G sobre n vértices, se define su **matriz de adyacencia** $A_G \in$
 112 $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E(G) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

113 Cuando el contexto sea claro, la matriz de adyacencia será representada simplemente por A .

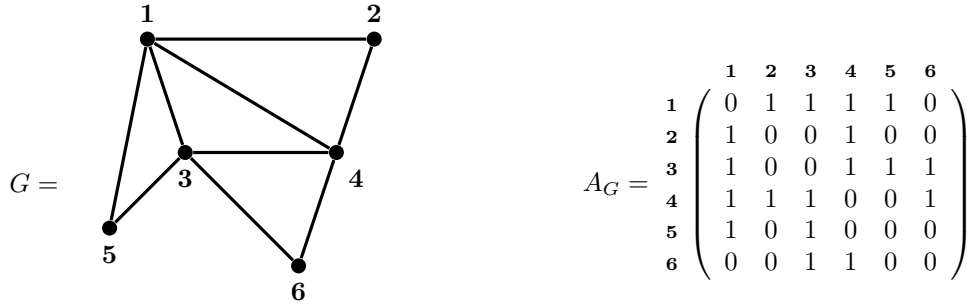


Figura 6: Ejemplo de representación mediante la matriz de adyacencia de un grafo.

114 Observe que la representación anterior resulta siempre en una matriz simétrica, es decir, $A_G^T =$
 115 A_G . Además, en todo grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede obtener un vector
 116 con los grados de cada vértice del grafo aplicando el operador A al vector de 1-entradas:

$$A\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \deg(1) \\ \vdots \\ \deg(n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

117 .
 118 Otro aspecto interesante de la matriz de adyacencia que será de utilidad en la sección 4, es que
 119 nos permite reescribir la ecuación (4) en función de ella. Para ver esto, consideramos la matriz de
 120 adyacencia A del grafo $G = ([n], E)$, y los vértices $i, j \in [n]$. Luego, por la definición de A ,

$$e(\{i\}, \{j\}) = \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Entonces, por linealidad, se extiende el resultado anterior sobre cualquier conjunto $X, Y \subset [n]$.

$$e(X, Y) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in Y} \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_X^T A \mathbf{v}_Y. \quad (9)$$

En la ecuación anterior, y desde ahora en adelante, el vector $\mathbf{v}_X = \sum_{i \in X} \mathbf{e}_i$ representa el vector indicador del subconjunto de vértices $X \subset [n]$ de algún grafo $G = ([n], E)$.

Es importante destacar que la matriz de adyacencia no solo describe las conexiones entre cada par de vértices en un grafo, sino que también revela la cantidad exacta de caminatas que existen entre dos vértices de un largo determinado. En específico, la posición ij de la t -ésima potencia de la matriz de adyacencia de un grafo guarda la cantidad de caminatas de largo t entre los vértices i y j .

Proposición 4. Sea A la matriz de adyacencia de grafo $G = ([n], E)$. La (i, j) -ésima entrada $a_{ij}^{(t)}$ de A^t , cuenta la cantidad de caminatas de largo t que comienzan y terminan en los vértices i y j respectivamente.

Demostración. Cuando $t = 1$, existe una caminata de largo 1 que conecta los vértices i y j si y solamente si $a_{ij}^{(1)} = 1$. Ahora, asuma que el lema se cumple para algún $t > 1$ fijo. Note que cualquier caminata de largo $t + 1$ entre i y j contiene una caminata de largo t desde i hasta un vecino de j , digamos k . Entonces si $k \in N(j)$, por la asunción del lema, el número de caminatas de largo t entre i y k es $a_{ik}^{(t)}$. Por lo tanto, el número total de caminatas de largo $t + 1$ desde i hasta j es exactamente

$$\sum_{k \in V} a_{ik}^{(t)} \mathbb{1}_{N(j)}(k) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(t)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(t+1)}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, en cualquier grafo $G = ([n], E)$ con matriz de adyacencia A , se puede representar la cantidad total de caminatas cerradas de largo t en el grafo por medio de la traza, $\text{Tr}(A^t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(t)}$. Con esto, note que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$.

Por otro lado, para introducir algunos aspectos de la teoría espectral de grafos, recuerde que el vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de alguna matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Esto significa que λ es un valor propio si y solo si $\lambda I_n - A$ es una matriz singular. Así, los valores propios vienen dados por las raíces del polinomio característico $\det(xI_n - A)$. En este trabajo, cuando se haga referencia a los valores y vectores propios de un grafo G , siempre será con respecto a su matriz de adyacencia A .

Por ejemplo, si G es un grafo d -regular, entonces con la igualdad (8) se puede deducir que d es el valor propio asociado al vector propio normalizado de 1-entradas de la matriz de adyacencia A_G .

Proposición 5. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, entonces todos sus valores propios son reales. Además, si dos vectores propios están asociados a distintos valores propios, entonces éstos son ortogonales. Más aún, el conjunto de todos los vectores propios definen una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Demostración. Se comienza probando que los valores propios de A son reales. Sea λ un valor propio de A y $\mathbf{x} \neq 0$ su correspondiente vector propio, satisfaciendo $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tomando su conjugado (denotado por \bar{z} al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$), se obtiene paralelamente que

$$\begin{array}{ccc}
A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} & & A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|^2 & & \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2.
\end{array}$$

Además, como A es simétrica,

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A\bar{\mathbf{x}}.$$

Así, ya que $\mathbf{x} \neq 0$, debe ocurrir que $\lambda = \bar{\lambda}$, permitiendo concluir que todos los valores propios de A son números reales.

Por otro lado, considere $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores propios distintos de A asociados a los valores propios $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ respectivamente. Calculamos como sigue,

$$\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^T \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu\mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

De esta manera, $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y solamente si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ya probada la ortogonalidad de los vectores propios de A , defina $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ como el conjunto de vectores propios normalizados de A para probar que \mathcal{B} constituye una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Para esto, sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Entonces, para cualquier $i \in [n]$, multiplicando por la izquierda la igualdad anterior por \mathbf{u}_i^T ,

$$\mathbf{u}_i^T(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) = c_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = c_i = 0.$$

Así, queda demostrado que \mathcal{B} es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . □

A continuación, se enunciará sin demostración uno de los teoremas más importantes del álgebra lineal, y se estudiarán algunas de sus consecuencias bajo el contexto de la teoría de grafos.

Teorema 6. (*Teorema espectral*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica. Entonces existen matrices P ortogonal y D diagonal tales que

$$A = PDP^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (10)$$

En donde la matriz diagonal D está compuesta por los valores propios $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A , y las columnas de P son los vectores propios ortonormales $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ de A .

Con el teorema anterior es posible representar la matriz de adyacencia de un grafo por medio de dos matrices que dependen únicamente de sus valores y vectores propios para obtener propiedades desde una perspectiva espectral.

En primera instancia, observe que la descomposición espectral (10) permite trabajar eficientemente con las potencias de una matriz real simétrica, puesto a que el problema se reduce a calcular la respectiva potencia de la matriz diagonal de valores propios. Para visualizar este hecho, primero observe como se comporta el cuadrado de una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^T P)DP^T = PD^2P^T.$$

180 Luego, de manera inductiva se obtiene que $A^k = PD^kP^T$. Esta propiedad resulta altamente útil
 181 de cara al cálculo de caminatas de largo k entre dos vértices de un grafo. Más aún, la Proposición
 182 7 y el Corolario 8 mostrarán que el número de caminatas cerradas en un grafo queda totalmente
 183 determinado por los valores propios del mismo.

184 **Proposición 7.** *La traza de toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es igual a la suma de sus*
 185 *autovalores.*

186 *Demostración.* Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$
 187 sus vectores propios. Se escribe la traza estratégicamente de la siguiente manera:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_i.$$

188 Con esto, se concluye utilizando la descomposición espectral.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j. \end{aligned}$$

189 □

190 El siguiente corolario extiende el resultado anterior sobre cualquier potencia de una matriz real
 191 simétrica.

192 **Corolario 8.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores, entonces se*
 193 *cumple $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.*

194 *Demostración.* El resultado sigue de utilizar que la traza de la multiplicación de dos matrices es
 195 invariante bajo orden del producto,

$$\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}([PDP^T]^k) = \text{Tr}(P[D^kP^T]) = \text{Tr}([D^kP^T]P) = \text{Tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

196 □

De esta manera, la cantidad de caminatas cerradas de largo k entre dos vértices de un grafo se simplifica a solo calcular la suma de la k -ésima potencia de todos sus valores propios. Más adelante, en la sección 14, esta propiedad será de utilidad debido a que entrega una buena aproximación de la cantidad de copias etiquetadas de ciclos de largo k que existen en un grafo $G = ([n], E)$. En particular, si A es la matriz de adyacencia de G y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios,

$$\left| \binom{G}{C_k} \right| = \text{Tr}(A^k) + o(n^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k + o(n^k) \quad (11)$$

Por otro lado, es posible caracterizar cada valor propio de una matriz real simétrica por medio del teorema de *Courant-Fischer*. Se enuncia sin demostración.

Teorema 9. (*Teorema de Courant-Fischer*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz real simétrica, cuyos valores propios son $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sus vectores propios. Entonces,

(i)

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

(ii)

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\mathbf{x} \perp \{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Usualmente, el primer autovalor de todo grafo juega un papel protagónico. Para los fines de estas tesis, es necesario establecer una cota inferior del primer autovalor.

Proposición 10. *El primer autovalor de la matriz de adyacencia de un grafo es al menos el promedio de los grados. En particular, cuando el grafo es d -regular, el primer autovalor coincide con d .*

Demostración. Considerando A como la matriz de adyacencia del grafo $G = ([n], E)$, se desarrolla en función del Teorema 9:

$$\lambda_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq \frac{\langle \mathbf{1}, A\mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{2e_G}{n} = \frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{n}.$$

Adicionalmente, con apoyo de la igualdad (8), usando la cota anterior se concluye que si G es d -regular, entonces $\lambda_1 = d$. \square

2.3. Grafos aleatorios

El objetivo de la presente sección es proporcionar un breve contexto teórico para abordar más adelante la noción y propiedades de los grafos *cuasi-aleatorios*. Para ello, se asumirán los conceptos básicos asociados a la teoría de la probabilidad.

De manera intuitiva, se podría pensar en primera instancia en un *grafo aleatorio* de n vértices como el resultado de seleccionar aleatoriamente un subconjunto de aristas de K_n . La manera de seleccionar dicho subconjunto de aristas determina el tipo de modelo de grafo aleatorio. El modelo

más popular, propuesto por Edgar Gilbert en 1959 [* referencia *](#), contempla una estructura que se desarrolla algorítmicamente agregando una arista a la vez, en la que comenzando con el grafo vacío \overline{K}_n , se decide iterativamente si existe una arista entre cada par de vértices del grafo con probabilidad p .

Cada repetición del proceso anterior genera un nuevo grafo de n vértices. El conjunto de todos esos grafos constituye un espacio de probabilidad, al que denotaremos por $G(n, p)$ y llamaremos modelo binomial. Entonces, considerando G^n como el conjunto de todos los grafos de n vértices, se define formalmente.

Definición 11. (*Modelo binomial*) Sea $p \in (0, 1)$. Se define $G(n, p)$ como el espacio de probabilidad $(G^n, \mathcal{P}(G^n), \mathbb{P})$, con

$$\mathbb{P}(G(n, p) = G) = p^{e_G} (1 - p)^{\binom{n}{2} - e_G}, \quad \forall G \in G(n, p).$$

Se adopta el modelo binomial como referencia para trabajar más adelante con el concepto de un grafo *cuasi-aleatorio*. La mayoría de la literatura sobre grafos aleatorios dedica su contenido a los casos en que $p = p(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. En esta tesis, se considera $p \in (0, 1)$ constante.

A continuación, se presenta sin demostración una de las cotas más importantes de la teoría de la probabilidad, la *desigualdad de Chernov*. Existen diferentes formas de expresar la desigualdad de Chernov, y cada una varía levemente en su hipótesis. En esta tesis se estudia el resultado para el caso en que cada variable aleatoria solo tomar valores 0 o 1, como se plantea en [* referencia *](#) en la ecuación (2.12) de la observación 2.5.

Teorema 12. (*Desigualdad de Chernov*) Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes tales que $X_i = 1$ con probabilidad p , y $X_i = 0$ con probabilidad $1 - p$. Entonces, si $X = \sum_{i=1}^n X_i$, se satisface

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{n}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

Por otro lado, diremos que $\mathcal{P}_n \subset G^n$ es una propiedad de grafos si es cerrada bajo isomorfismos de grafos. Más aún, G satisface la propiedad \mathcal{P}_n **con alta probabilidad** si $\mathbb{P}(G \in \mathcal{P}_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dicho esto, se probará que todo grafo en $G(n, p)$ posee casi seguramente una distribución uniforme de aristas a lo largo de todo el grafo.

Proposición 13. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$. Si $G \in G(n, p)$, entonces satisface con alta probabilidad la siguiente propiedad:

$$\mathcal{P}_n^{p, \varepsilon} := \{G \in G^n : |e(A, B) - p|A||B|| \leq \varepsilon n^2, \quad \forall A, B \in V(G)\}.$$

Demostración. Al pendiente de resolver el cálculo de la esperanza □

Sea $p \in (0, 1)$, $G \in G(n, p)$ y $X, Y \subset V(G)$. Entonces la cantidad de aristas esperadas entre X e Y es $p|X||Y|$. Enumere las aristas del grafo bipartito completo $K_{|X|, |Y|}$ desde 1 hasta $|X||Y|$, y para cada arista $1 \leq i \leq |X||Y|$, considere Z_i como la siguiente variable aleatoria indicadora:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in E(G) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

253

254 Así, la variable aleatoria $Z = \sum_{i=1}^{|X||Y|} Z_i$ cuenta el número total de aristas que existen entre X
 255 e Y . Finalmente,

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{|X||Y|} \mathbb{E}[Z_i] = \sum_{i=1}^{|X||Y|} \mathbb{P}(Z_i = 1) = \sum_{i=1}^{|X||Y|} p = p|X||Y|.$$

256 3. Cuasi-aleatoriedad

257 Trabajar con estructuras discretas aleatorias nos brinda una amplia gama de propiedades ideales
 258 y/o deseables, lo que las convierte en piezas fundamentales tanto en matemáticas como en ciencias
 259 de la computación. Por ejemplo, el modelo de grafo aleatorio binomial goza de una distribución
 260 uniforme de aristas, buenas propiedades y es robusto. La cuestión ahora es cómo capturar las
 261 propiedades esenciales de la aleatoriedad dentro de un marco *determinista*. Esta idea condujo a la
 262 noción de cuasi-aleatoriedad, que en la actualidad, es un tópico central en las matemáticas discretas.
 263 En términos generales, las propiedades cuasi-aleatorias son características deterministas que son
 264 propias de objetos realmente aleatorios. Aunque la noción de cuasi-aleatoriedad es interesante por
 265 sí misma, su estudio ha revelado profundas conexiones entre varias ramas de la matemática y
 266 ciencias de la computación, encontrando aplicaciones en teoría de grafos, teoría de números, teoría
 267 ergódica, geometría, y algoritmos y complejidad.

268 Como se verá a detalle más adelante en la sección 4, una de las razones principales por las
 269 cuales el estudio de la cuasi-aleatoriedad no se limita a un área específica, es el hecho de que existe
 270 un teorema de partición que permite la aproximación de cualquier objeto discreto por otros cuasi-
 271 aleatorios. Con esto, nos referimos al célebre lema de regularidad de Szemerédi, que establece que
 272 todo grafo se puede aproximar mediante un número finito de grafos cuasi-aleatorios, permitiendo
 273 la conexión entre un grafo arbitrario y los cuasi-aleatorios.

274 El estudio sistemático de los grafos cuasi-aleatorios fue iniciado por Rödl *referencia* y Tho-
 275 mason *referencia*, y su punto inicial es la siguiente noción de *distribución uniforme de aristas*
 276 para definir la cuasi-aleatoriedad de un grafo. *Buscar año...*

277 **Definición 14.** Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos, en donde cada G_n posee n
 278 vértices. Entonces el grafo G_n es **cuasi-aleatorio** si en todo par de subconjuntos $X, Y \subset V(G_n)$
 279 se encuentra una distribución de aristas similar, es decir,

$$e(X, Y) = p|X||Y| + o(n^2). \quad (12)$$

280 En otras palabras, la distribución uniforme de aristas establece, que hasta el término de error
 281 $o(n^2)$, cualquier par de subconjuntos de vértices poseen tantas aristas como se esperaría de un grafo
 282 aleatorio $G(n, p)$. Es importante destacar que esta propiedad no solo se cumple con alta probabi-
 283 lidad en un grafo aleatorio $G(n, p)$, sino que también se considera como una de sus características
 284 distintivas.

285 3.1. Teorema de Chung, Graham y Wilson

286 Una contribución revolucionaria en la teoría de grafos cuasi-aleatorios fue en 1989 por Fan
 287 Chung, Ronald Graham y Richard M. Wilson *referencia*. Ellos presentaron una extensa lista

288 de propiedades superficialmente diferentes entre sí, y demostraron que todas son equivalentes al
 289 concepto de cuasi-aleatoriedad entendido en la Definición 14.

290 **Teorema 15.** (Chung, Graham y Wilson) Sea $p \in (0, 1)$ fijo. Para cualquier secuencia de grafos
 291 $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ sobre $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1))\binom{n}{2}$ aristas, las siguientes propiedades son
 292 equivalentes:

293 DISC_p : Para todo $X, Y \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = o(n^2).$$

294 DISC'_p : Para todo $X \subseteq V(G_n)$,

$$\left| e(X) - p\binom{|X|}{2} \right| = o(n^2) \ , \quad \forall X \subseteq V(G_n).$$

295 COUNT_p : Para cada grafo H , la cantidad de copias etiquetadas de H en G_n está dada por

$$\left| \binom{G_n}{H} \right| = \left(p^{e(H)} + o(1) \right) n^{v(H)}.$$

296

297 $\text{COUNT}_{C_4, p}$: La cantidad de copias etiquetadas de ciclos de orden 4 es

$$\left| \binom{G_n}{C_4} \right| = (p^4 + o(1))n^4.$$

298

299 CODEG_p :

$$\sum_{u, v \in V(G_n)} \left| \text{codeg}(u, v) - p^2 n \right| = o(n^3).$$

300

301 EIG_p : Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los autovalores de de la matriz de adyacencia de G_n , entonces

$$\lambda_1 = pn + o(n) \ , \quad \max_{i \neq 1} |\lambda_i| = o(n).$$

302 Para una comprensión preeliminar, el Teorema 15 fue enunciado utilizando notación asintótica.
 303 Sin embargo, con dicha formulación no queda del todo claro las dependencias cuantificadas de los
 304 errores entre cada una de las propiedades. Entonces, se replantea equivalentemente cada propiedad
 305 con una versión cuantitativa asociando algún parámetro de error ε para todo grafo G con un
 306 conjunto de vértices suficientemente grande.

307 Por ejemplo, bajo los supuestos del Teorema 15, asuma que la sucesión de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$
 308 satisface DISC_p . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices
 309 satisface

$$\text{DISC}_p(\varepsilon) : e(X, Y) = p|X||Y| \pm \varepsilon n^2, \quad \forall X, Y \subseteq V(G).$$

310

311 De manera general, diremos que una secuencia de grafos $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ con $|V(G_n)| = n$ satisface
 312 la propiedad P_{x_1, \dots, x_k} ¹ si para cada elección de $\varepsilon > 0$, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G
 313 con $n \geq n_0$ vértices satisface $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$. Más aún, se dirá que la propiedad Q_{y_1, \dots, y_ℓ} implica la
 314 propiedad P_{x_1, \dots, x_k} si y solamente si $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$ implica Q_{y_1, \dots, y_ℓ} . Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe
 315 $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G con $n \geq n_0$ vértices cumple con $Q_{y_1, \dots, y_\ell}(\delta)$ cada vez que
 316 satisfaga la propiedad $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon)$.

317 Se desarrollará la demostración formal del teorema de Chung, Graham y Wilson utilizando
 318 notación ε - δ , mostrando que cada par de propiedades P_{x_1, \dots, x_k} y Q_{y_1, \dots, y_ℓ} son equivalentes entre
 319 sí con un cambio polinomial en el error. Esto es, $P_{x_1, \dots, x_k}(\varepsilon) \Rightarrow Q_{y_1, \dots, y_\ell}(C\varepsilon^c)$ para algún par de
 320 constantes $C, c > 0$.

321 Demostración Teorema 2 (Chung, Graham y Wilson).

322 La demostración de este teorema será descompuesta en ocho proposiciones, las cuales mostrarán
 323 la equivalencia entre todas las propiedades de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{DISC}'_p & \xRightarrow{\text{Prop. 18.}} & \text{COUNT}_p & \xRightarrow{\text{Prop. 19.}} & \text{COUNT}_{C4,p} & \xRightarrow{\text{Prop. 22. y 23.}} & \text{EIG}_p \\
 \updownarrow \text{Prop. 16 y 17.} & & & & \downarrow \text{Prop. 20.} & & \\
 \text{DISC}_p & & \xleftarrow{\text{Prop. 21.}} & & \text{CODEG}_p. & &
 \end{array} \tag{13}$$

324

325 Así, damos paso a las pruebas de cada proposición.

326 **Proposición 16.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 327 $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}'_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}_p(\delta)$. En particular,

$$\text{DISC}_p \Rightarrow \text{DISC}'_p.$$

328 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Considere el grafo
 329 G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}_p(\delta)$ y $X \subset V(G)$, entonces utilizamos la propiedad
 330 $\text{DISC}_p(\delta)$ para obtener el resultado de la siguiente manera:

$$e(X) = p \frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2 = p \binom{|X|}{2} \pm 2\delta n^2.$$

¹Los parámetros x_1, \dots, x_k pueden ser de distinta naturaleza, dependiendo de la propiedad simbolizada. En las propiedades del Teorema 15 se utiliza $k = 1$ con $x_1 = p$ salvo en la propiedad $\text{COUNT}_{C4,p}$, en donde $k = 2$.

331

332 Las igualdades anteriores consideran $e(X, X) = 2e(X)$, por definición, y la aproximación $\binom{|X|}{2} =$
 333 $\frac{|X|^2}{2} \pm \delta n^2$. \square

334 **Proposición 17.** *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre*
 335 *$n \geq n_0$ vértices satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En particular,*

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

336 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consideramos el grafo
 337 G sobre $n \geq n_0$ vértices que satisface $\text{DISC}'_p(\delta)$.

338 En primera instancia, llevaremos el conteo de aristas que existen entre pares de subconjuntos de
 339 vértices, a un conteo equivalente mediante la combinación aditiva de las aristas que se encuentran
 340 en un subconjunto único de vértices. Es decir, para $X, Y \subset V(G)$,

$$e(X, Y) = e(X \cup Y) + e(X \cap Y) - e(X \setminus Y) - e(Y \setminus X). \quad (14)$$

341

342 Observe que con esta configuración, el conteo de las aristas entre X e Y es doble cuando los
 343 vértices que componen las aristas pertenecen a $X \cap Y$. Luego, utilizamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$
 344 sobre la identidad (14) para conseguir el resultado.

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= p \left(\binom{|X \cup Y|}{2} + \binom{|X \cap Y|}{2} - \binom{|X \setminus Y|}{2} - \binom{|Y \setminus X|}{2} \right) \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm 4\delta n^2 \\ &= p|X||Y| \pm \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

345

 \square

346 **Proposición 18.** *Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre*
 347 *$n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{DISC}'_p(\delta)$. En otras palabras,*

$$\text{DISC}'_p \Rightarrow \text{COUNT}_p.$$

348 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$ y H un grafo sobre ℓ vértices, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{6\ell^2}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$
 349 suficientemente grande. Considere también el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices que satisface la
 350 propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$.

351 Dado cualquier grafo F con ℓ vértices y $e_F \geq 1$ aristas, razonamos por inducción sobre su
 352 cantidad de aristas para probar que

$$\left| \binom{G}{F} \right| = p^{e_F} n^\ell \pm 4e_F \delta n^\ell. \quad (15)$$

Una vez probada la ecuación (15), el resultado seguirá de tomar $F = H$ y la elección de δ para conseguir las siguientes desigualdades:

$$4e_F \delta n^\ell \leq 4 \binom{\ell}{2} \delta n^\ell \leq 4\delta \left(\frac{\ell^2}{2} + \delta \ell^2 \right) n^\ell \leq 6\delta \ell^2 n^\ell < \varepsilon n^\ell.$$

Cuando $e_F = 1$, $\left| \binom{G}{F} \right|$ es el número de pares ordenados de vértices de G que forman una arista junto a cualquier combinación de $\ell - 2$ vértices para completar una copia de F . Es decir,

$$\left| \binom{G}{F} \right| = 2e_G(n-2)(n-3) \cdots (n-\ell+1).$$

Luego, si aplicamos la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$ sobre V , tendremos que la cantidad de aristas es

$$e_G = \frac{pn(n-1)}{2} \pm \delta n^2.$$

Así, con $\left| \binom{G}{F} \right| = pn^\ell \pm 4\delta n^\ell$, se prueba el caso inicial de la inducción.

Ahora, sea F un grafo con $e_F > 1$ aristas y asumiremos que se satisface la ecuación (15) sobre cualquier grafo con una cantidad de aristas menor que e_F . Entonces, para desarrollar la inducción, vamos a considerar la siguiente notación:

- i) $F^- := ([\ell], E(F) \setminus \{ij\})$, es el grafo producido por eliminar la arista ij de F .
- ii) $F^* := F[[\ell] \setminus \{i, j\}]$, es el grafo inducido por $[\ell] \setminus \{i, j\}$, i.e, grafo producido de eliminar los vértices de ij en F .

Sea T^- una copia etiquetada de F^- en G , es decir, T^- se corresponde con una aplicación inyectiva $f : V(F^-) \rightarrow V(T^-) \subseteq V$ tal que $f(u)f(v) \in E(T^-)$ cada vez que $uv \in E(F^-)$. De esta manera, se define e_{T^-} como la tupla $(f(i), f(j))$ resultante de la imagen de los vértices $i, j \in V(F^-)$.

Se escribe la cantidad de copias etiquetadas de F en G de manera conveniente y se utilizará la hipótesis de inducción como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left| \binom{G}{F} \right| &= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} \mathbb{1}_E(e_{T^-}) \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) + p - p] \\
&= \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} p + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p \left| \binom{G}{F^-} \right| + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \\
&= p^{e_F} n^\ell + \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \pm 4(e_F - 1) \delta n^\ell. \tag{16}
\end{aligned}$$

375

376 Ahora, es suficiente probar que el segundo sumando de la desigualdad (16) es pequeño. Para
377 esto, considere T^* una copia de F^* , y denote por F_i^* y F_j^* a los grafos resultantes de eliminar de
378 F^- los vértices j e i respectivamente. Definan los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_i^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_i^*\} \\
A_j^{T^*} &:= \{v \in V : T^* \text{ con } v \text{ forma una copia de } F_j^*\}.
\end{aligned}$$

379

380

381 Los conjuntos anteriores, por construcción, son tales que para cada tupla $(a, b) \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}$
382 añadida a T^* se obtiene una copia de F^- . Así, reescribiendo el segundo sumando de la igualdad
383 (16) convenientemente y utilizando la propiedad $\text{DISC}'_p(\delta)$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{T^- \in \binom{G}{F^-}} [\mathbb{1}_E(e_{T^-}) - p] \right| &= \left| \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| \sum_{f \in A_i^{T^*} \times A_j^{T^*}} [\mathbb{1}_E(f) - p] \right| \\
&= \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \left| e(A_i^{T^*}, A_j^{T^*}) - p |A_i^{T^*}| |A_j^{T^*}| \right| \\
&\leq \sum_{T^* \in \binom{G}{F^*}} \delta n^2 \\
&\leq 4\delta n^\ell.
\end{aligned}$$

384

385 De esta manera, tomando la elección de δ y $F = H$ se obtiene el resultado. \square

386 **Proposición 19.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 387 $n \geq n_0$ vértices satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{COUNT}_p(\delta)$. En otras palabras,

$$\text{COUNT}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

388 *Demostración.* Se trata de un caso particular de COUNT_p , en donde $H = C_4$ y $\delta < \varepsilon$. \square

389 **Proposición 20.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G
 390 sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{CODEG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con
 391 $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. En particular,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{CODEG}_p.$$

392 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, elegimos $\delta < \frac{\varepsilon^2}{16}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. También
 393 considere el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$.

394 La clave de esta demostración radica en encontrar una buena cota para $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)$
 395 y $\sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v)^2$, y la utilización apropiada de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

396 Entonces, por un lado, utilizando la relación entre el grado y el cogrado visto en (7),

$$\begin{aligned} \sum_{u, v \in V(G)} \text{codeg}(u, v) &= \sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 \\ &\stackrel{\text{CS}}{\geq} \frac{1}{n} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x) \right)^2 \\ &= \frac{4e_G^2}{n} \\ &\geq \frac{4}{n} \left(\frac{pn^2}{2} - \delta n^2 \right)^2 \\ &\geq p^2 n^3 - 4\delta n^3. \end{aligned}$$

397

398 Por otro lado, usando $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n^4.$$

399

400 Así, con las cotas anteriores, se obtiene el resultado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| &\stackrel{\text{CS}}{\leq} n \left(\sum_{u,v \in V(G)} (\text{codeg}(u,v) - p^2 n)^2 \right)^{1/2} \\ &= n \left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v)^2 - 2p^2 n \sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) + \sum_{u,v \in V(G)} p^4 n^2 \right)^{1/2} \\ &\leq n (p^4 n^4 + 2\delta n^4 + 2p^2 n(4\delta n^3 - p^2 n^3) + p^4 n^4)^{1/2} \\ &= n((2 + 8p^2)\delta n^4)^{1/2} \\ &\leq 4\delta^{1/2} n^3. \end{aligned}$$

401

□

402 **Proposición 21.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
 403 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{DISC}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{CODEG}_p(\delta)$.
 404 En particular,

$$\text{CODEG}_p \Rightarrow \text{DISC}_p.$$

405 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, $p \in (0, 1)$, seleccionamos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{81}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea
 406 G un grafo de $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$.

407 En primera instancia note que la propiedad $\text{CODEG}_p(\delta)$ induce una concentración en los grados
 408 de los vértices de G . En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V(G)} \left| \deg(x) - pn \right| &\stackrel{\text{CS}}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x) - pn)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x)^2 - 2pn \sum_{x \in V(G)} \deg(x) + p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\stackrel{(7)}{=} n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right) - 4pne_G + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left(\sum_{u,v \in V(G)} \left| \text{codeg}(u,v) - p^2 n \right| \right) + 4pn \left(\delta n^2 - \frac{pn^2}{2} \right) + 2p^2 n^3 \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} (2p^2 n^3 - 2p^2 n^3 + 4p\delta n^3 + \delta n^3)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/2} n^2.
\end{aligned}$$

409

410 Luego, para todo $X, Y \in V(G)$, se reescribe la expresión de la propiedad DISC_p de forma
411 conveniente para posteriormente utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\left| e(X, Y) - p|X||Y| \right| = \left| \sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|) \right| \stackrel{c-s}{\leq} n^{1/2} \left(\sum_{x \in X} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2}. \quad (17)$$

412

413 En la desigualdad anterior se ha conseguido que el argumento de la suma sea siempre no negativo,
414 lo que permite extender su dominio de X a $V(G)$. De esta manera, usando a la cota proveniente de
415 la concentración de los grados en los vértices de G , se prueba el resultado continuando desde (17):

$$\begin{aligned}
|e(X, Y) - p|X||Y|| &\leq n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} (\deg(x; Y) - p|Y|)^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y)^2 - 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} \deg(x; Y) + \sum_{x \in V(G)} p^2|Y|^2 \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(2p^2n|Y|^2 - p^2n|Y|^2 + 2p|Y||Y|pn - 2p|Y||Y|pn + \sum_{y, y' \in Y} \text{codeg}(y, y') - 2p|Y| \sum_{y \in Y} \deg(y) \right)^{1/2} \\
&= n^{1/2} \left(\sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) - 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\left| \sum_{y, y' \in Y} (\text{codeg}(y, y') - p^2n) \right| + \left| 2p|Y| \sum_{y \in Y} (\deg(y) - pn) \right| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\sum_{u, v \in V(G)} |\text{codeg}(u, v) - p^2n| + 2p|Y| \sum_{x \in V(G)} |\deg(x) - pn| \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/2} \left(\delta n^3 + 6p\delta^{1/2}n^3 \right)^{1/2} \\
&< 3\delta^{1/4}n^2.
\end{aligned}$$

416

□

417 **Proposición 22.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
418 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{COUNT}_{C_4, p}(\varepsilon)$ cada vez que cumpla con $\text{EIG}_p(\delta)$.
419 En particular,

$$\text{EIG}_p \Rightarrow \text{COUNT}_{C_4, p}.$$

420 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, se elige $\delta < \frac{\varepsilon}{20}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Conside-
421 ramos el grafo G sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$,
422 $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ como la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios de A .

423 Observe que la cantidad de copias etiquetadas de caminatas cerradas de largo 4 que no son C_4
424 en G se encuentran dentro de un error de a lo más δn^4 con respecto al número de copias etiquetadas
425 de C_4 en G . De esta observación, utilizando el Lema 4 y el Corolario 8,

$$\begin{aligned}
\left| \binom{G}{C_4} \right| &= \text{Tr}(A^4) \pm \delta n^4 \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \\
&= \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4.
\end{aligned} \tag{18}$$

426 Luego, recordando que $\text{Tr}(A^2) = 2e_G$, y usando $\text{EIG}_p(\delta)$,

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \delta n^2 \text{Tr}(A^2) \leq \delta n^2 (pn^2 + 2\delta n^2) \leq 3\delta n^4. \tag{19}$$

427

428 Finalmente, se concluirá tras usar la propiedad $\text{EIG}_p(\delta)$ sobre el primer autovalor y la cota
429 mostrada en (19). Continuando desde la ecuación (18),

$$\left| \binom{G}{C_4} \right| = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 20\delta n^4.$$

430

□

431 **Proposición 23.** Para todo $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que el grafo G sobre
432 $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas satisface $\text{EIG}_p(\varepsilon)$ cada vez que cumpla la propiedad
433 $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$. Es decir,

$$\text{COUNT}_{C_4, p} \Rightarrow \text{EIG}_p.$$

434 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $p \in (0, 1)$, escogemos $\delta < \frac{\varepsilon^4}{4}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sea
435 también G un grafo sobre $n \geq n_0$ vértices y $e_G = \frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2$ aristas que satisface la propiedad
436 $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de adyacencia de G , y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ los valores propios
437 de A .

438 En lo que respecta al primer autovalor, sabemos por un lado que éste es al menos el promedio
439 de los grados gracias al Lema 10. Es decir,

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2e_G}{n} = \frac{2}{n} \left(\frac{pn^2}{2} \pm \delta n^2 \right) \geq pn - 2\delta n. \tag{20}$$

440

441 Por otro lado, mediante el Lema 4, el Corolario 8 y la propiedad $\text{COUNT}_{C_4, p}(\delta)$,

$$\lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 = \text{Tr}(A^4) = \left| \binom{G}{C_4} \right| \pm \delta n^4 \leq p^4 n^4 + 2\delta n. \quad (21)$$

La desigualdad (21) implica que $\lambda_1 \leq pn + (2\delta)^{1/4}n$, y en combinación con la cota vista en (20), se obtiene que $\lambda_1 = pn \pm (2\delta)^{1/4}n$.

Por último, observe por las cotas vistas anteriormente,

$$\begin{aligned} \max_{i \neq 1} |\lambda_i|^4 &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i^4 + \lambda_1^4 - \lambda_1^4 \\ &= \text{Tr}(A^4) - \lambda_1^4 \\ &\leq p^4 n^4 + 2\delta n^2 - p^4 n^4 + 2\delta n^4 \\ &= 4\delta n^4. \end{aligned}$$

De esta manera, se logra probar el resultado determinando que $\max_{i \neq 1} |\lambda_i| \leq (4\delta)^{1/4}n$. \square

3.2. Aspectos adicionales

La noción inicial de un grafo casi-aleatorio por distribución de aristas presentada en la Definición ?? contempla verificar si todos los subconjuntos de vértices del grafo satisfacen su condición para determinar la casi-aleatoriedad de un grafo. Es decir, se debe corroborar sobre $2^{|X|}$ subconjuntos. Por esto, resulta sorprendente que la propiedad, aparentemente más débil, $\text{COUNT}_{C_4,p}$ sea una caracterización equivalente a todas las condiciones de casi-aleatoriedad que establece el teorema, puesto a que se verifica de manera polinomial. * En verdad las otras también, pero siento que quizás le deba dar más énfasis a C4. Modifico el párrafo anterior?? *

Una pregunta natural al observar la propiedad $\text{COUNT}_{C_4,p}$ es: ¿Podemos debilitar la condición para un conteo esperado de copias etiquetadas de K_3 ? La respuesta es no, de hecho, la propiedad puede ser extendida a $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ con $t \geq 2$. Es decir, para el grafo G ,

$$\text{COUNT}_{C_{2t},p} : \left| \binom{G}{C_{2t}} \right| = (p^{2t} + o(1)) n^{2t}, \quad \forall t \geq 2.$$

Se expone un bosquejo de la demostración de la extensión de $\text{COUNT}_{C_4,p}$ a la propiedad $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$.

Proposición 24. Sea $p \in (0, 1)$ y $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ una secuencia de grafos con $|V(G_n)| = n$ vértices y $e_{G_n} = (p + o(1)) \binom{n}{2}$ aristas, entonces las propiedades $\text{COUNT}_{C_{2t},p}$ y EIG_p son equivalentes.

464 *Demostración.* Este resultado es una consecuencia directa de las demostraciones de la Proposición
 465 22 y 23 tras notar el siguiente par de observaciones. En primer lugar, la cantidad de copias etique-
 466 tadas caminatas cerradas de largo $2t$ que no son C_{2t} en G_n están dentro de un error $O(n^{2t-1})$, es
 467 decir,

$$\text{Tr}(A^{2t}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2t} = \left| \binom{G_n}{C_{2t}} \right| + O(n^{2t-1}).$$

468

469 También, se debe modificar la cota presentada en la ecuación (19) como sigue:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^{2t} \leq \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2(t-1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \max_{i \neq 1} \lambda_i^{2t-2} \text{Tr}(A^2).$$

470

471 Con estas observaciones el resultado queda demostrado. \square

472 Es importante destacar que la demostración anterior es funcional gracias a que los ciclos de
 473 orden par preservan una contribución positiva en la suma de cada uno de los autovalores de G ,
 474 eliminando la posibilidad de cancelaciones entre ellos.

475 A continuación, se expone la construcción de un contraejemplo de un grafo que posee la cantidad
 476 de copias etiquetadas esperadas de K_3 , pero no cumple las condiciones para ser casi-aleatorio. La
 477 idea de la construcción consiste en la combinación de dos grafos, uno con una cantidad mayor que
 478 la esperada de copias etiquetadas de K_3 , y otro con una cantidad menor. Consideramos entonces
 479 independientemente los grafos completos K_{n_1} y K_{n_2, n_2} tales que su unión disjunta forma el grafo
 480 $G = K_{n_1} \cup K_{n_2, n_2}$ con $n_1 + 2n_2 = n$ vértices.

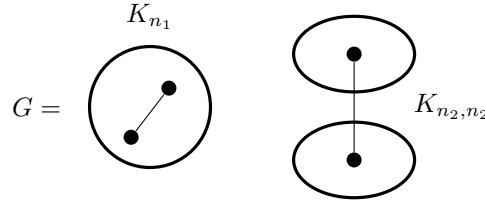


Figura 7: Esquema de la configuración del grafo usado como contraejemplo.
 Aquí, $\bullet-\bullet$ representa las aristas permitidas dentro del grafo G .

481 Sobre K_{n_1} y K_{n_2, n_2} , observe que la cantidad de sus aristas y copias etiquetadas de K_3 son:

$$\begin{aligned} e_{K_{n_1}} &\approx \frac{n_1^2}{2} & , & \quad \left| \binom{K_{n_1}}{K_3} \right| \approx n_1^3 \quad , \\ e_{K_{n_2, n_2}} &\approx \frac{(n - n_1)^2}{4} & , & \quad \left| \binom{K_{n_2, n_2}}{K_3} \right| = 0. \end{aligned}$$

482

483 Ahora, se encontrará el parámetro $p \in (0, 1)$ de manera tal que el grafo G posea la cantidad
 484 esperada de aristas y copias etiquetadas de K_3 , acorde a un grafo aleatorio binomial con densidad
 485 p . Para ello, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p \frac{n^2}{2} = \frac{n_1^2}{2} + \frac{(n-n_1)^2}{4} \\ p^3 n^3 = n_1^3. \end{cases}$$

486

487 Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que $p = \frac{1}{3}$ y $n_1 = n_2 = \frac{n}{3}$. Dicha configuración, en
 488 efecto, presenta

$$e_G = \binom{\frac{n}{3}}{2} + \frac{n^2}{9} = \frac{1}{3} \binom{n}{2} + o(n^2),$$

489

490 Como también,

$$\left| \binom{G}{K_3} \right| = \left(\frac{n}{3} \right)^3 + o(n^3) = \left(\frac{1}{3} \right)^3 n^3 + o(n^3).$$

491

492 Sin embargo, el grafo G no es casi-aleatorio debido a que no existen aristas entre K_{n_1} y K_{n_2, n_2}
 493 ni dentro de los conjuntos que conforman a K_{n_2, n_2} .

494 Finalmente, se explora un caso siempre interesante de estudio, ya que simplifica varios cálculos
 495 y surge de manera recurrente en la vida cotidiana: un grafo d -regular. En nuestro contexto, se verá
 496 que toda secuencia $(G_n)_{n \rightarrow \infty}$ de grafos d -regular satisface la propiedad $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ si y solo si cumple
 497 con $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$. Dicha equivalencia nace como una consecuencia del siguiente teorema.

498 **Teorema 25.** (*Expander Mixing Lemma*) Sea $G = ([n], E)$ un grafo d -regular, y $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq$
 499 $\dots \geq \lambda_n$ los valores propios asociados a la matriz de adyacencia A de G . Se denota:

$$\lambda = \max_{i \neq 1} |\lambda_i|.$$

500

501 Entonces, para cada $X, Y \subset [n]$,

$$\left| e(X, Y) - \frac{d}{n} |X| |Y| \right| \leq \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n} \right) \left(1 - \frac{|Y|}{n} \right)}. \quad (22)$$

502 *Demostración.* Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n compuesta por los vectores propios
 503 de A . Utilizando la descomposición espectral, se denota

$$A_1 = \lambda_1 v_1 v_1^T \quad \text{y} \quad \Delta = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

504

505 de manera que $A = A_1 + \Delta$.506 Conforme a la ecuación (9), para todo $X, Y \subset [n]$, se cumple la siguiente igualdad:

$$e(X, Y) = v_X^T A v_Y = v_X^T A_1 v_Y + v_X^T \Delta v_Y. \quad (23)$$

507

508 De la ecuación anterior se espera que el primer sumando sea el término principal, mientras que
 509 el segundo el factor de error. Para esto, se representan los vectores v_X y v_Y según la base \mathcal{B} . Es
 510 decir,

$$v_X = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{y} \quad v_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i,$$

511

512 donde $\alpha_i = v_X^T v_i$ y $\beta_i = v_Y^T v_i$. Con esto, se calcula:

$$\begin{aligned} \|\alpha_i\|^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_X, v_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j \in X} \mathbb{1}_j, v_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbb{1}_j, v_i \rangle^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \mathbb{1}_X(i) \\ &= |X|. \end{aligned}$$

513

514 Análogamente, $\|\beta_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = |Y|$.

515 Ahora, se estudian los sumandos de la igualdad (23) por separado. Por un lado,

$$\begin{aligned}
v_X^T A_1 v_Y &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T (\lambda_1 v_1 v_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^T \right) (v_1 v_1^T) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (v_i^T v_1) (v_1^T v_j) \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \beta_1.
\end{aligned} \tag{24}$$

516

517 Por otro lado, de la misma manera que el cálculo anterior,

$$v_X^T \Delta v_Y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T \left(\sum_{j=2}^n \lambda_j v_j v_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i. \tag{25}$$

518

519 Luego, dado que G es un grafo d -regular, $\lambda_1 = d$ y $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ son valor y vector propio
520 respectivamente de A . En consecuencia,

$$\alpha_1 = \frac{|X|}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \beta_1 = \frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

521

522 Así, la ecuación (24) resulta en $v_X^T A_1 v_Y = \frac{d}{n} |X| |Y|$.

523 Para el término de error, recordando la definición de λ , se desarrolla el valor absoluto de la
524 ecuación (25) usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
|v_X^T \Delta v_Y| &= \left| \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \right| \\
&\leq \lambda \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \right| \\
&\stackrel{\text{CS}}{\leq} \lambda \sqrt{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \sum_{i=2}^n \beta_i^2} \\
&= \lambda \sqrt{(\|\alpha\|^2 - \alpha_1^2) (\|\beta\|^2 - \beta_1^2)} \\
&= \lambda \sqrt{|X| |Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

525

526 Finalmente, el resultado se obtiene directamente de tomar el valor absoluto de la ecuación (23)
 527 de la siguiente manera:

$$|e(X, Y) - v_X^T A_1 v_Y| = |v_X^T \Delta v_Y|.$$

528

□

529 El teorema anterior permite asegurar que todo grafo d -regular $G = ([n], E)$ con un conjunto de
 530 vértices suficientemente grande que satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, también cumple con $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}(\varepsilon)$.
 531 En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ y $X, Y \subset [n]$, elija $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{|X||Y|}}$.
 532 Entonces, si G satisface la propiedad $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}(\delta)$, por el Teorema 25:

$$\begin{aligned} \left| e(X, Y) - \frac{d}{n}|X||Y| \right| &\leq \lambda \sqrt{|X||Y| \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{n}\right)} \\ &< \delta n \sqrt{|X||Y|} \\ &< \varepsilon n^2. \end{aligned}$$

533

534 Finalmente, en un grafo d -regular, la equivalencia entre las propiedades $\text{EIG}_{\frac{d}{n}}$ y $\text{DISC}_{\frac{d}{n}}$ se
 535 completa por el camino de implicancias ya demostradas según el esquema (13).

536 4. Lema de regularidad de Szemerédi

537 * Aquí debo ingresar una breve descripción del lema de regularidad de Szemerédi y la fuerza
 538 que toma al combinarlo con el teorema de Chung-Graham-Wilson y comentar la aplicación que se
 539 mostrará. (Quizás también hablar de las dos demostraciones de este lema, usual y espectral.) *

540 4.1. Enunciado y demostración

541 Se tratará el concepto de regularidad de una manera un poco diferente a como es tradiciona-
 542 lmente conocida. En particular, se permite intersección entre pares de subconjuntos de vértices de
 543 un grafo en las futuras definiciones.

544 **Definición 26.** Sea G un grafo y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos no necesariamente disjuntos. Diremos
 545 que (X, Y) es un **par ε -regular** en G si para todo $A \subset X$ y $B \subset Y$ con $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$,
 546 se cumple

$$|d(A, B) - d(X, Y)| \leq \varepsilon$$

547

548 Cuando (X, Y) no es un par ε -regular, entonces la irregularidad es evidenciada por algún $A \subseteq X$
 549 y $B \subseteq Y$ que satisfacen $|A| \geq \varepsilon|X|$ y $|B| \geq \varepsilon|Y|$, pero $\left|d(A, B) - d(X, Y)\right| > \varepsilon$.

550 Notaremos que la noción de un par ε -regular es, de hecho, una analogía de la propiedad $\text{DISC}_p(\varepsilon)$
 551 para grafos bipartitos. Es decir, si G es tal que $V(G) = U \cup W$ y $p \in (0, 1)$, se cumple

$$\left|e(X, Y) - p|X||Y|\right| = o(|U||W|), \quad \forall X \subset U, \forall Y \subset W. \quad (26)$$

552

553 En efecto, si (U, W) es un par ε -regular, entonces todo $A \subset U$ y $B \subset W$ tales que $|A| \geq \varepsilon|U|$ y
 554 $|B| \geq \varepsilon|W|$ satisfacen

$$e(A, B) = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|A||B| = d(U, W)|A||B| \pm \varepsilon|U||W|.$$

555

556 Ahora bien, si al menos uno de los subconjuntos de la condición de un par ε -regular no es
 557 suficientemente grande, digamos $|A| < \varepsilon|X|$, entonces

$$d(U, W)|A||B| - \varepsilon|U||W| < 0 \leq e(A, B) \leq |A||B| \leq \varepsilon|U||W| < d(U, W)|A||B| + \varepsilon|U||W|.$$

558

559 De esta manera, tomando $p = d(U, W)$, se obtiene la analogía planteada.

560 Por otro lado, con el espíritu del Teorema 15, es posible expresar un resultado análogo a la
 561 propiedad $\text{COUNT}_p(\varepsilon)$ utilizando el concepto de par ε -regular. Dicho resultado, para $H = K_3$ es
 562 conocido como el lema de conteo de triángulos.

563 **Lema 27.** (Lema de conteo de triángulos) Sea $\varepsilon > 0$, $G = (V, E)$ un grafo, y los conjuntos no
 564 necesariamente disjuntos $X, Y, Z \subset V$ tales que los pares (X, Y) , (Y, Z) y (X, Z) son ε -regular.
 565 Entonces,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \in E\}| = d(X, Y)d(X, Z)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 3\varepsilon|X||Y||Z|.$$

566 *Demostración.* Se realizará un proceso inductivo similar al visto en la demostración de la Propo-
 567 sición 18 sobre la cantidad de aristas del grafo $K_3 = ([3], \{12, 23, 13\})$. Cuando el grafo no posee
 568 aristas, entonces

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, xz, yz \notin E\}| = |X||Y||Z|.$$

569

570 También, recordando que la condición de un par ε -regular es equivalente a $\text{BI} - \text{DISC}_p(\varepsilon)$ para
 571 algún $p \in (0, 1)$, cuando el grafo presenta una arista,

$$|\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy \in E\}| = (d(X, Y)|X||Y| \pm \varepsilon|X||Y|)|Z|.$$

572

573 Ahora, se plantea la hipótesis inductiva de la siguiente manera:

$$|\{(x, y, z) \in X, Y, Z : xy, yz \in E\}| = d(X, Y)d(Y, Z)|X||Y||Z| \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|.$$

574

575 Defina $e^- = \varphi(1)\varphi(3)$, y T^- como el grafo correspondido a una copia etiquetada del grafo
 576 $([3], \{12, 23\})$ en G bajo la aplicación inyectiva $\varphi : [3] \rightarrow V(T^-) \subset V$. Con esto, se desarrolla
 577 inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : xy, yz, xz \in E\}| &= \sum_{T^-} [\mathbb{1}_E(e^-) + d(X, Z) - d(X, Y)] \\ &= d(X, Y)d(Y, Z)d(X, Z)|X||Y||Z| \\ &\quad + \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-) - d(X, Z)) \pm 2\varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned} \quad (27)$$

578

579 En este punto, nos falta probar que el segundo sumando de la igualdad (27) se corresponde
 580 con un factor de error, para esto, sea T^* una copia del grafo singleton $\{2\}$ en G , y considere los
 581 siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1^{T^*} &= \{x \in X : T^* \text{ con } x \text{ forma una copia de } (\{1, 2\}, \{12\}) \text{ en } G\}. \\ A_3^{T^*} &= \{z \in Z : T^* \text{ con } z \text{ forma una copia de } (\{2, 3\}, \{23\}) \text{ en } G\}. \end{aligned}$$

582

583

584 De esta manera, dada la equivalencia de la condición del par (X, Z) ε -regular con versión bipar-
 585 tita de la propiedad $\text{DISC}_{d(X, Z)}(\varepsilon)$ vista en (26), se consigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T^-} (\mathbb{1}_E(e^-)) - d(X, Z) \right| &\leq \sum_{T^*} \left| \sum_{f \in A_1^{T^*} \times A_3^{T^*}} (\mathbb{1}_E(f) - d(X, Z)) \right| \\ &= \sum_{T^*} |e(A_1^{T^*}, A_3^{T^*}) - d(X, Z)|A_1^{T^*}||A_3^{T^*}| \\ &\leq \sum_{T^*} \varepsilon|X||Z| \\ &\leq \varepsilon|X||Y||Z|. \end{aligned}$$

586

587 Finalmente, aplicando la última desigualdad en la ecuación (27) se prueba lo prometido. \square

588 En la demostración anterior solo fue necesario utilizar que los pares (X, Y) y (X, Z) son ε -
 589 regular, por lo que es interesante destacar que uno de los pares de conjuntos de vértices podría no
 590 ser necesariamente un par ε -regular para el que lema de conteo de triángulos funcione correctamente.

591 Bajo el mismo planteamiento de la inducción vista en la demostración del Lema 27 (y Proposición
 592 18), es posible generalizar el resultado para contar apropiadamente cualquier grafo H . Se enuncia
 593 sin demostración.

594 **Lema 28.** (*Lema de conteo de grafos*) Sea $\varepsilon > 0$, H un grafo sobre k vértices, y G un grafo
 595 de n vértices con los subconjuntos disjuntos $V_1, \dots, V_k \subset V(G)$ tales que los pares (V_i, V_j) son ε -
 596 regular siempre que $ij \in E(H)$. Entonces, la cantidad de tuplas $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ tales que
 597 $v_i v_j \in E(G)$ cada vez que $ij \in E(H)$ es

$$\left(\prod_{ij \in E(H)} d(V_i, V_j) \right) \left(\prod_{\ell=1}^k |V_\ell| \right) \pm e_H \cdot \varepsilon \prod_{\ell=1}^k |V_\ell|.$$

598 Ya conociendo el concepto de regularidad entre pares de subconjuntos de vértices, estudiamos
 599 la regularidad en una partición del conjunto de vértices del grafo.

600 **Definición 29.** Dado un grafo G , una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ es
 601 una **partición ε -regular** si

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [k]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon\text{-regular}}} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon |V(G)|^2.$$

602

603 Es decir, todos los pares de subconjuntos de vértices en la partición son ε -regular salvo una
 604 fracción ε de pares de vértices.

605 Note que si una partición ε -regular de k partes es en particular una equipartición, entonces a lo
 606 más εk^2 pares de elementos de la partición no son ε -regular.

607 Ya con todo lo necesario, se introduce el lema de regularidad de Szemerédi. Intuitivamente, el
 608 lema permite particionar el conjunto de vértices de todo grafo en una cantidad finita de partes,
 609 satisfaciendo que la mayoría de sus pares de partes son ε -regular. Enunciamos el célebre lema, y se
 610 dará prueba formal más adelante.

611 **Teorema 30.** (*Lema de regularidad de Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon)$
 612 tal que todo grafo admite una partición ε -regular de a lo más M partes.

613 Para dar prueba a este teorema, se utilizará una técnica llamada *argumento de incremento de*
 614 *energía*. Para todo grafo G , la técnica funciona algorítmicamente de la siguiente manera:

- 615 1. Comenzar con la partición trivial de $V(G)$, i.e, $\mathcal{P} = \{V(G)\}$.
- 616 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 617 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que
 - 618 evidencian la irregularidad de cada par.
 - 619 (b) Refinar \mathcal{P} utilizando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} encontrados de cada par
 - 620 (V_i, V_j) no ε -regular para obtener \mathcal{Q} .
 - 621 (c) Actualizar \mathcal{P} con \mathcal{Q} .

622 Siendo \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de un mismo conjunto de vértices, diremos que \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} si
 623 cada parte de \mathcal{Q} está contenida en una parte de \mathcal{P} . En lo que resta de esta sección mostraremos
 624 que el algoritmo tiene un fin, y que entrega una partición ε -regular en un número de iteraciones
 625 que solo depende de ε .

626 **Definición 31.** (*Energía*) Sea G un grafo sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Se define en primer
 627 lugar

$$q(X, Y) := \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 = \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|}.$$

628

629 Luego, para particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de Y , se define

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j).$$

630

631 Finalmente, para una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, se define la **energía** mediante

$$q(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2.$$

632 Observe que en toda partición \mathcal{P} de $V(G)$, siempre se tendrá que $0 \leq q(\mathcal{P}) \leq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k |V_i| \sum_{j=1}^k |V_j| \\ &= 1. \end{aligned}$$

633

La última observación es crucial en la demostración del Teorema 30, puesto que los Lemas 32, 33 y 34 nos asegurarán que la energía de una partición nunca decrece bajo refinamiento. Por consecuencia, el algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía* tendrá un fin, entregando una partición ε -regular.

El siguiente lema muestra que la energía no disminuye al particionar o refinar arbitrariamente un conjunto o partición respectivamente.

Lema 32. *Sea G un grafo, $X, Y \subset V(G)$, \mathcal{P}_X y \mathcal{P}_Y particiones de X e Y respectivamente, entonces $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Además, dadas dos particiones de vértices \mathcal{P} y \mathcal{P}' de G , $q(\mathcal{P}) \leq q(\mathcal{P}')$ cada vez que \mathcal{P}' refina a \mathcal{P} .*

Demostración. Considere un grafo G sobre n vértices, los conjuntos $X, Y \subset V(G)$, y las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, \dots, X_k\}$ y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de X e Y respectivamente. En primera instancia, se utiliza la desigualdad (3) para probar que $q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \geq q(X, Y)$. Para esto, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} q(X_i, Y_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i||Y_j|} \\
&\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} |X_i||Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{e(X, Y)^2}{\left(\sum_{i=1}^k |X_i| \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell} |Y_j| \right)} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X||Y|} \\
&= q(X, Y).
\end{aligned} \tag{28}$$

Sea ahora la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ y $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_{V_1}, \dots, \mathcal{P}'_{V_k}\}$ un refinamiento de \mathcal{P} . Entonces, se utiliza el resultado probado previamente para completar el resultado:

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(V_i, V_j) \stackrel{(28)}{\leq} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q(\mathcal{P}'_{V_i}, \mathcal{P}'_{V_j}).$$

□

Ahora, veremos que refinar un par (X, Y) no ε -regular de un grafo G , mediante los subconjuntos que evidencian su irregularidad, provoca un aumento estricto en la energía.

652 **Lema 33.** Sea $\varepsilon > 0$, G un grafo de n vértices y $X, Y \subset V(G)$. Si (X, Y) no es un par ε -regular,
653 existen particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y tales que

$$q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) > q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

654 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, considere el grafo G sobre n vértices y $X, Y \subset V(G)$ subconjuntos
655 tales que el par (X, Y) no es ε -regular. Entonces, existen los subconjuntos $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ que
656 evidencian la irregularidad del par (X, Y) , y son tales que

$$|X_1| \geq \varepsilon|X| \quad \text{y} \quad |Y_1| \geq \varepsilon|Y|. \quad (29)$$

657

658 Se define adicionalmente los conjuntos $X_2 := X \setminus X_1$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$, y $\eta := d(X_1, Y_1) - d(X, Y)$,
659 cual por definición de par ε -regular, satisface* [Aquí quedé](#) *

$$|\eta| > \varepsilon. \quad (30)$$

660 Por un lado, observe la siguiente descomposición,

$$\begin{aligned} e(X, Y) &= e(X_1, Y) + e(X_2, Y) \\ &= e(X_1, Y_1) + e(X_1, Y_2) + e(X_2, Y_1) + e(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

661 De esta manera,

$$\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) = e(X, Y) - e(X_1, Y_1). \quad (31)$$

662 Por otro lado, se tiene que,

$$\begin{aligned} |X||Y| &= (|X_1| + |X_2|)(|Y_1| + |Y_2|) \\ &= |X_1||Y_1| + |X_1||Y_2| + |X_2||Y_1| + |X_2||Y_2|. \end{aligned}$$

663 Así,

$$\sum_{i+j>2} |X_i||Y_j| = |X||Y| - |X_1||Y_1|. \quad (32)$$

664 Ahora, definiendo las particiones $\mathcal{P}_X = \{X_1, X_2\}$ de X y $\mathcal{P}_Y = \{Y_1, Y_2\}$ de Y , desarrollamos,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q(X_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{e(X_i, Y_j)^2}{n^2 |X_i| |Y_j|} \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \sum_{i+j>2} \frac{e(X_i, Y_j)^2}{|X_i| |Y_j|} \right) \\
&\stackrel{(3)}{\geq} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e(X_i, Y_j) \right)^2}{\sum_{i+j>2} |X_i| |Y_j|} \right) \\
&\stackrel{(31)}{=} \stackrel{(32)}{=} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right). \tag{33}
\end{aligned}$$

665 Luego, por definición, note que

$$e(X_1, Y_1) = \frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1|. \tag{34}$$

666 Con esto, se continúa el cálculo desde la desigualdad (33) como sigue, * Me podré saltar un
667 espacio más pequeño abajo? *

$$\begin{aligned}
n^2 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &\geq \frac{e(X_1, Y_1)^2}{|X_1| |Y_1|} + \frac{(e(X, Y) - e(X_1, Y_1))^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
&\stackrel{(34)}{=} \frac{1}{|X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X_1| |Y_1| e(X, Y)}{|X| |Y|} + \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \left(\frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} e(X, Y) - \eta |X_1| |Y_1| \right)^2 \\
&= \frac{|X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 + 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \eta^2 |X_1| |Y_1| \\
&\quad + \frac{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|}{|X|^2 |Y|^2} e(X, Y)^2 - 2 \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y|} \eta e(X, Y) + \frac{\eta^2 |X_1|^2 |Y_1|^2}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \\
&= \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1| \left(1 + \frac{|X_1| |Y_1|}{|X| |Y| - |X_1| |Y_1|} \right) \\
&\geq \frac{e(X, Y)^2}{|X| |Y|} + \eta^2 |X_1| |Y_1|. \tag{35}
\end{aligned}$$

670 Finalmente, utilizando las cotas (29) y (30), podemos concluir desde la desigualdad (35),

$$\begin{aligned}
 q(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) &= \frac{e(X, Y)^2}{n^2 |X| |Y|} + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\
 &= q(X, Y) + \eta^2 \frac{|X_1| |Y_1|}{n^2} \\
 &> q(X, Y) + \varepsilon^4 \frac{|X| |Y|}{n^2}.
 \end{aligned}$$

671

□

672 Vimos que particionar cualquier par de conjuntos no ε -regular por medio de sus subconjuntos
 673 que evidencian la irregularidad produce un aumento en la energía. Entonces, haciendo alusión al
 674 paso 2(b) del algoritmo de la técnica *argumento de incremento de energía*, se mostrará que refinar
 675 simultáneamente todos los pares de conjuntos no ε -regular de un grafo produce un aumento estricto
 676 de al menos ε^5 en la energía.

677 **Lema 34.** Sea $\varepsilon > 0$, un grafo G y una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ no ε -regular de $V(G)$. Entonces
 678 existe un refinamiento \mathcal{Q} de \mathcal{P} , en el que cada V_i se particiona en a lo más 2^k partes y es tal que

$$q(\mathcal{Q}) > q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.$$

679 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ una partición no ε -regular del conjunto de n vértices
 680 de un grafo G . Sabemos que para todos los $(i, j) \in [k]^2$ tales que el par (V_i, V_j) no es ε -regular,
 681 existen los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ testigos de su irregularidad. Observe que para cada
 682 V_i , podemos encontrar a lo más k conjuntos no vacíos A^{ij} que evidencian la irregularidad de los
 683 pares (V_i, V_j) no ε -regular. Consideremos ahora la partición $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ que refina a \mathcal{P} , en
 684 la que cada Q_i es una partición resultante de dividir el conjunto V_i según la intersección de todos
 685 los subconjuntos no vacíos A^{ij} que atestiguan la irregularidad de los pares (V_i, V_j) no ε -regular. En
 686 consecuencia, $|Q_i| \leq 2^k$.

687 Por simplicidad en la notación, se define $\Theta := \{(i, j) \in [k]^2 : (V_i, V_j) \text{ es } \varepsilon\text{-regular}\}$. Luego, como
 688 la partición \mathcal{P} no es ε -regular, se cumple la desigualdad

$$\sum_{(i,j) \notin \Theta} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} > \varepsilon. \quad (36)$$

689 Así, junto a los lemas probados previamente, damos prueba al resultado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{Q}) &= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&= \sum_{(i,j) \in \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}_j) \\
&\stackrel{\text{Lema 32}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} q(\{A^{ij}, V_i \setminus A^{ij}\}, \{A^{ji}, V_j \setminus A^{ji}\}) \\
&\stackrel{\text{Lema 33}}{\geq} \sum_{(i,j) \in \Theta} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \left(q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in [k]^2} q(V_i, V_j) + \sum_{(i,j) \notin \Theta} \varepsilon^4 \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \\
&\stackrel{(36)}{\geq} q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5.
\end{aligned}$$

690 * Cambiar por $>$ en la última línea y donde dice lema 5, cuando lo cambio se me descuadra :c
691 * □

692 Ya con todo lo necesario, damos prueba formal al Teorema 30 mediante la técnica de *argumento*
693 *de incremento de energía*.

694 *Demostración del Teorema 30.* Dado $\varepsilon > 0$ y un grafo G , elegimos inicialmente la partición trivial
695 del conjunto de vértices $\mathcal{P} = \{V(G)\}$. Ahora, iterativamente (actualizando \mathcal{P}), aplicaremos el Lema
696 34 cada vez que la partición actual no sea ε -regular. Observe que por cada aplicación del Lema 34 se
697 consigue un aumento de al menos ε^5 en la energía, y como la energía de toda partición está acotada
698 superiormente por 1, el proceso iterativo terminará luego de a lo más ε^{-5} pasos. El resultado será
699 necesariamente una partición ε -regular debido a la cota de la energía.

700 Para una partición no ε -regular con k elementos, el Lema 34 encuentra un refinamiento de a lo
701 más $k2^k$ partes. Dicho refinamiento será producido en cada iteración del algoritmo de *argumento*
702 *de incremento de energía*, y la cantidad de partes producidas las acotaremos crudamente en cada
703 paso por $k2^k < 2^{2^k}$. Comenzando con la partición trivial de una parte, ejemplificaremos con las
704 tres primeras iteraciones del algoritmo para mostrar la cantidad de partes producidas en cada paso
705 tras aplicar el Lema 34.

$$\begin{aligned}
1^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 1 &\rightarrow 2 < 2^2 && \text{partes.} \\
2^{\text{da}} \text{ Iteración: } 2^2 &\rightarrow (2^2) 2^{(2^2)} < 2^{2^{2^2}} && \text{partes.} \\
3^{\text{ra}} \text{ Iteración: } 2^{2^{2^2}} &\rightarrow (2^{2^{2^2}}) 2^{(2^{2^{2^2}})} < 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} && \text{partes.}
\end{aligned}$$

706 Así, como el algoritmo debe luego de a lo más ε^{-5} iteraciones, la cantidad de partes al final de
707 proceso será

$$M(\varepsilon) \leq 2^{2^{\dots^{2^2}}} \Bigg\} \text{ Altura } 2\varepsilon^{-5}.$$

708

□

709 Desde ahora en adelante, vamos a definir y consirar una *torre de altura k* de la siguiente manera,

$$\text{torre}(k) := 2^{2^{\dots^2}} \Bigg\} \text{Altura } k. \quad (37)$$

710

711 * En esta parte me gustaría dejar un comentario sobre lo grande que es la cota y el resultado
712 que encontró Gowers en 1997 de cota inferior, pero no lo entiendo :c *

713 Una de las peculiaridades del lema de regularidad de Szemerédi es la flexibilidad que posee su
714 enunciado, adaptando su aplicación a diferentes contextos. Por ejemplo, si en la demostración del
715 Teorema 30 tomamos una partición inicial arbitraria en vez de la partición trivial del conjunto de
716 vértices del grafo, se logra obtener la siguiente variante del lema de regularidad.

717 **Teorema 35.** (*Regularidad de Szemerédi - Partición inicial arbitraria*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un
718 entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo G con una partición inicial \mathcal{P}_0 de $V(G)$ admite una partición
719 ε -regular \mathcal{P} de $V(G)$ que refina cada parte de \mathcal{P}_0 en a lo más M partes.

720 Es posible fortalecer un poco más el lema de regularidad exigiendo que el resultado sea una
721 equipartición del conjunto de vértices de un grafo G . Es decir, una partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ tal
722 que $|V_1| \leq |V_2| \leq \dots \leq |V_k| = |V_1| + 1$.

723 **Teorema 36.** (*Regularidad de Szemerédi - Equipartición*) Para todo $\varepsilon > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$, existe un
724 entero $M = M(\varepsilon)$ tal que todo grafo admite una equipartición ε -regular de su conjunto de vértices
725 de k partes, con $m_0 \leq k \leq M$.

726 * Comentar que cuando tenemos esta versión del teorema (que es la clásica), entonces la defini-
727 ción de una partición ε -regular se traduce en $\dots \leq \varepsilon k^2$. También hablar un poco de m_0 , cual ayuda
728 a que ninguna de las partes sea demasiado grande. *

729 La idea de la demostración del Teorema 36 consiste en modificar el algoritmo de la técnica de
730 argumento de incremento de energía, de manera que en cada iteración del refinamiento se logre
731 obtener una equipartición. Este procedimiento conservará el incremento de energía en cada paso y
732 terminará con una equipartición del conjunto de vértices de un grafo cualquiera. Para todo grafo
733 G , la modificación del algoritmo es la siguiente:

- 734 1. Comenzar con una equipartición inicial arbitraria \mathcal{P} de $V(G)$ con m_0 partes.
- 735 2. Mientras la partición actual \mathcal{P} no es ε -regular:
 - 736 (a) Para cada par (V_i, V_j) no ε -regular, encontrar los subconjuntos $A^{ij} \subset V_i$ y $A^{ji} \subset V_j$ que
737 evidencian la irregularidad de cada par.
 - 738 (b) Refinar \mathcal{P} usando simultáneamente los conjuntos A^{ij} y A^{ji} para obtener la partición \mathcal{Q} ,
739 cual divide cada parte de \mathcal{P} en a lo más $2^{|\mathcal{P}|}$ partes.

- 740 (c) Modificar la partición \mathcal{Q} refinando, si es posible, cada uno de sus elementos para formar
741 partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$ utilizando alguna elección apropiada del entero $m =$
742 $m(|\mathcal{Q}|, \varepsilon)$. Luego, los elementos de \mathcal{Q} que no fueron refinados previamente a causa de su
743 bajo tamaño y los conjuntos de vértices residuales del refinamiento anterior, deben ser
744 combinados y posteriormente dividir el resultado en partes iguales de tamaño $|V(G)|/m$.
745 (d) Actualizar \mathcal{P} con la modificación de \mathcal{Q} .

746 El algoritmo anterior obtiene una equipartición del conjunto de vértices del grafo G . En lo que
747 respecta a la energía del proceso, el paso 2(b) conserva un aumento de al menos ε^5 en cada iteración.
748 El paso 2(c) podría ocasionar una baja en la energía, sin embargo, no debería ser significativa con
749 una elección de m suficientemente grande.² En resumidas cuentas, el proceso anterior aumenta la
750 energía en cada iteración en al menos $\varepsilon^5/2$, logrando terminar luego de a lo más $2\varepsilon^{-5}$ pasos con
751 una equipartición de a lo más $\text{torre}(\varepsilon^{-5})$ partes.

752 4.2. Aplicaciones

753 Usualmente las aplicaciones del lema de regularidad de Szemerédi son desarrolladas en base a
754 los siguientes pasos:

- 755 1. Obtener una **partición** del conjunto de vértices del grafo con el lema de regularidad.
756 2. **Limpiar** el grafo eliminando aristas con mal comportamiento según el problema. General-
757 mente, se eliminan las aristas entre los pares de partes que presentan:
758 i) Irregularidad.
759 ii) Baja densidad.
760 iii) Al menos una de las partes es demasiado pequeña.
761 3. **Contar** un determinado patrón en el grafo limpio utilizando algún lema de conteo.

762 Teniendo esta fórmula en mente, damos paso a la primera aplicación del lema de regularidad,
763 cual plantea intuitivamente que todo grafo con *pocos* triángulos puede convertirse en un grafo libre
764 de triángulos eliminando *pocas* aristas. Formalmente,

765 **Teorema 37.** (*Lema de eliminación de triángulos*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal
766 que todo grafo sobre $n \geq n_0$ vértices con a lo más δn^3 triángulos se puede hacer libre de triángulos
767 eliminando a lo más εn^2 aristas.

768 *Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, elija $\varepsilon_r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^3$ y utilice el Teorema 30 para obtener la constante
769 $M = M(\varepsilon_r)$. Considere además $\delta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r^4}{M^3}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de manera tal que el
770 grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices posee a lo más εn^3 triángulos. Luego, nuevamente por el
771 Teorema 30, se asegura la existencia de una partición ε_r -regular $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_M\}$.

772 Para limpiar el grafo, para cada $(i, j) \in [M]^2$, se eliminan todas las aristas entre V_i y V_j cuando

^{2*} Aquí quiero hacer un comentario/ejemplo de m . Yufei sugiere $m = \lfloor 100|\mathcal{Q}|\varepsilon^{-5} \rfloor$, pero tampoco lo entiendo mucho. *

773 (a) (V_i, V_j) no es un par ε_r -regular,

774 (b) $d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}$, o

775 (c) $\min\{|V_i||V_j|\} < \frac{n}{M}\varepsilon_r$.

776 De esta manera, como la partición es ε_r -regular, las aristas removidas por la condición (a) son
777 a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ (V_i, V_j) \text{ no } \varepsilon_r\text{-regular}}} |V_i||V_j| \leq \varepsilon_r n^2.$$

778

779 Las aristas eliminadas en los conjuntos de baja densidad por la condición (b) son a lo más

$$\sum_{\substack{(i,j) \in [M]^2 \\ d(V_i, V_j) < (4\varepsilon_r)^{1/3}}} d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < (4\varepsilon_r)^{1/3} \sum_{(i,j) \in [M]^2} |V_i||V_j| = (4\varepsilon_r)^{1/3} n^2.$$

780

781 Por último, debido a que cada vértice de G puede ser adyacente con a lo más $\frac{n}{M}\varepsilon_r$ vértices en
782 a lo más M subconjuntos demasiado pequeños, las aristas removidas por (c) son a lo más

$$M \cdot \frac{n}{M}\varepsilon_r \cdot n = \varepsilon_r n^2.$$

783

784 En total, en la limpieza, se eliminan a lo más εn^2 aristas.

785 Ahora, nos falta probar que el grafo limpio $G' = (V, E')$ es libre de triángulos. Para esto, observe
786 que la condición de eliminación de aristas (a) nos asegura que cada par (V_i, V_j) es ε_r -regular, y que
787 se satisface la hipótesis del lema de conteo de grafos. Entonces, si luego de la limpieza del grafo aún
788 existe un triángulo $(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell$, el Lema 27 nos dice que incluso hay más triángulos. En
789 particular, gracias a la eliminación de las aristas por la condición (b) y (c),

$$\begin{aligned} |\{(x, y, z) \in V_i \times V_j \times V_\ell : xy, yz, xz \in E'\}| &\geq d(V_i, V_j)d(V_i, V_\ell)d(V_j, V_\ell)|V_i||V_j||V_\ell| - 3\varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\ &\geq \varepsilon_r|V_i||V_j||V_\ell| \\ &\geq \frac{\varepsilon^4 n^3}{M^3} \\ &> \delta n^3. \end{aligned}$$

790

791 Finalmente, con nuestra elección de δ , el resultado se prueba formulando la siguiente contradic-
792 ción: si existe un triángulo en el grafo limpio G' , el lema de conteo de triángulos nos dice que en
793 realidad existen más de δn^3 triángulos. No obstante, el grafo original posee a lo más δn^3 triángulos,
794 por lo que se concluye que el grafo G' obtenido desde G es libre de triángulos removiendo a lo más
795 εn^2 aristas. \square

Denotaremos por k -PA a una progresión aritmética de k elementos. En particular, diremos que un conjunto de números naturales A es libre de 3-PA si no existen los elementos $x, x+y, x+2y \in A$, con $y \neq 0$. Cuando $y = 0$, diremos que la 3-PA es trivial.

Teorema 38. (Teorema de Roth) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si el conjunto $A \subset [n]$ posee $|A| \geq \varepsilon n$ elementos, entonces A contiene una 3-PA no trivial cada vez que $n \geq n_0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y el conjunto $A \subset [n]$ con $|A| \geq \varepsilon n$ elementos. La idea es construir un grafo 3-partito de manera conveniente para posteriormente utilizar el lema de eliminación de triángulos. Considere el grafo 3-partito $G = (V, E)$ con partición de vértices $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, en donde $V_1 = [n]$, $V_2 = [2n]$ y $V_3 = [3n]$, y son disjuntos entre cada par de ellos. Así, G tiene $6n$ vértices, y se definen las aristas de la siguiente manera:

1. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $j \in V_2$ si y solamente si $j - i \in A$.
2. Existe una arista desde $j \in V_2$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $k - j \in A$.
3. Existe una arista desde $i \in V_1$ hasta $k \in V_3$ si y solamente si $\frac{k-i}{2} \in A$.

Luego, la tupla $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ define un triángulo en G si y solamente si $j - i \in A$, $k - j \in A$ y $\frac{k-i}{2} \in A$, o bien, $\{j - i, \frac{k-i}{2}, k - j\}$ es una 3-PA en A con diferencia $\frac{k-2j+i}{2}$. En específico, diremos que un triángulo $(i, j, k) \in V_1 \times V_2 \times V_3$ es trivial en G si para algún $a \in A$ se satisface que $j - i = \frac{k-i}{2} = k - j = a$.

Ahora, observando que cada triángulo trivial se puede identificar con el par $(i, a) \in V_1 \times A$, la cantidad de triángulos triviales es exactamente $n|A| \geq \varepsilon n^2$. Además, por construcción, no existen triángulos triviales que compartan una arista, por lo que no se puede eliminar dos triángulos triviales removiendo solo una arista. En consecuencia, debemos eliminar al menos $\varepsilon n^2 = \frac{\varepsilon}{36}(6n)^2$ aristas para hacer de G libre de triángulos.

Utilizando el lema eliminación de triángulos eligiendo $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{36}$, existen $\delta_0 > 0$ y $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que el grafo G con $6n \geq n'_0$ vértices y a lo más $\delta_0(6n)^3$ triángulos, se convierte en libre de triángulos eliminando a lo más $\varepsilon_0(6n)^2$ aristas. Entonces, estableciendo $\delta = 216\delta_0$, note que existen como máximo $\delta n^3 - \varepsilon n^2$ triángulos no triviales. Sabiendo esto, aseguramos la existencia de un triángulo no trivial cuando $n > \frac{\varepsilon+1}{\delta}$. En efecto,

$$n > \frac{\varepsilon + 1}{\delta} \Rightarrow \delta n - \varepsilon > 1 \Rightarrow n^2(\delta n - \varepsilon) > 1.$$

Finalmente, el resultado queda demostrado tomando $n_0 > \max \left\{ \frac{n'_0}{6}, \frac{\varepsilon+1}{\delta} \right\}$ suficientemente grande. \square

Definición 39. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $M \subseteq E$ es un **emparejamiento** en G si no existen un par de aristas en M que compartan algún vértice. Diremos que M es un **emparejamiento inducido** si es un emparejamiento y toda arista de G con un vértice en $V(M)$ es una arista en M .

* Usar k o M para la cantidad de partes?, aquí se me confunde con el emparejamiento, pero en TRL y demo espectral de regularidad usé M como las partes. De momento en esta parte lo dejaré con k . *

Teorema 40. (*Emparejamiento inducido*) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo $G = (V, E)$ de $n \geq n_0$ vértices que está compuesto por la unión de n emparejamientos inducidos, posee a lo más εn^2 aristas.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, aplique el Teorema 30 con $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{10}$ para obtener la constante $M(\varepsilon_r)$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y asuma que el grafo $G = (V, E)$ con $n \geq n_0$ vértices y compuesto por n emparejamientos inducidos satisface $e_G > \varepsilon n$. Nuevamente, por el Teorema 30, se asegura la existencia de la partición $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ con $k \leq M(\varepsilon)$ partes que es ε_r -regular.

Para cada $(i, j) \in [k]^2$ se eliminan todas las aristas entre los conjuntos V_i y V_j cuando éstos presenten irregularidad, densidad menor que $2\varepsilon_r$, o al menos uno de los conjuntos es menor que $\frac{n}{k}\varepsilon_r$. En total, el proceso de limpieza remueve a lo más $4\varepsilon_r n^2$ aristas de G para obtener un nuevo grafo G' . En consecuencia,

$$e'_G \geq e_G - 4\varepsilon_r n^2 > \varepsilon n^2 - \frac{4}{10}\varepsilon n^2 > \frac{\varepsilon}{2}n^2.$$

Ahora, observe que debe existir un emparejamiento inducido M en G' con al menos $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas (y al menos εn vértices). De no ser así, todos los emparejamientos tendrían a lo más $\frac{\varepsilon}{2}n$ aristas, por lo que $e'_G < \frac{\varepsilon}{2}n^2$.

Se define $U_i := V_i \cap V(M)$ como el subconjunto de vértices de M que comparte elementos con V_i , y $U := \bigcup_{i \in [k]} \{U_i : |U_i| \geq \varepsilon_r |V_i|\}$. Es decir, U es la unión de todos los conjuntos $U_i \subset V(M)$ que comparten una fracción suficientemente grande de vértices con V_i . Note que podemos obtener el conjunto U removiendo a lo más $\varepsilon_r n = \frac{\varepsilon}{10}n$ vértices de $V(M)$, pues

$$\sum_{i \in [k]} |U_i| < \sum_{i \in [k]} \varepsilon_r |V_i| = \frac{\varepsilon}{10}n.$$

De esta manera, recordando que $|V(M)| \geq \varepsilon n$, se determina que $|U| > \varepsilon n - \frac{\varepsilon}{10}n = \frac{9}{10}\varepsilon n$. Además, como también $|M| \geq \frac{\varepsilon}{2}n$, debe existir al menos un vértice en U que sea parte de una arista en M . Luego, dada la limpieza de G , dicha arista debe pertenecer a algún par $U_t \times U_\ell$ que satisfacen $|U_k| \geq \varepsilon_r |V_k|$ y $|U_\ell| \geq \varepsilon_r |V_\ell|$, y son tales que su correspondiente par (V_t, V_ℓ) es ε_r -regular con densidad $d(V_t, V_\ell) \geq 2\varepsilon_r$. Entonces, por regularidad,

$$d(U_t, U_\ell) = d(V_t, V_\ell) \pm \varepsilon_r \geq 2\varepsilon_r - \varepsilon_r = \varepsilon_r. \quad (38)$$

Ahora, como que M es un emparejamiento inducido, todo par de subconjuntos $A, B \subset V(M)$ debe satisfacer

$$e(A, B) \leq \min\{|A|, |B|\}.$$

861

862 Sin embargo, la desigualdad (38) implica que

$$\begin{aligned} e(U_t, U_\ell) &= d(U_t, U_\ell)|U_t||U_\ell| \\ &\geq |U_t||U_\ell|\varepsilon_r \\ &\geq |U_t||V_\ell|\varepsilon_r^2 \\ &\geq |U_t|\frac{n}{k}\varepsilon_r^3 \\ &> |U_t|. \end{aligned}$$

863

864 La desigualdad anterior nos dice que existe una arista entre U_k y U_ℓ que no pertenece a M , por
865 lo que se contradice la hipótesis de que M es un emparejamiento inducido. \square

866 * Comentar que el siguiente teorema será utilizado para demostrar alternativamente el Teorema
867 de Roth. *

868 **Teorema 41.** (Ajtai-Szemerédi) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n \geq n_0$, todo
869 subconjunto $S \subset [n]^2$ con $|S| \geq \varepsilon n^2$ posee elementos de la forma $\{(a, b), (a + d, b), (a, b + d)\}$ para
870 algún $a, b, d \in \mathbb{N}$, con $d \neq 0$.

871 *Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \geq n_0$, y $S \subset [n]^2$ un subconjunto
872 con al menos εn^2 elementos. Vamos a construir un grafo bipartito $G = (U \cup W, E)$ con conjunto de
873 vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ definiendo las aristas de la siguiente manera:

$$u_i w_j \in E \iff (i, j) \in S.$$

874

875 Interpretando a $[n]^2$ como una grilla bidimensional, se puede definir una relación entre pares de
876 aristas en G en función de la distancia que abarca la suma de las coordenadas de sus respectivos
877 pares en S . Esto es,

$$u_i w_j \sim u_k w_\ell \iff i + j = k + \ell = q.$$

878

879 * Dibujito con 2 ejemplos de q . * Observe que para cada $2 \leq q \leq 2n$ se define un emparejamiento
880 en G debido a que no existen aristas que compartan un vértice, por lo que las clases de equivalencia
881 (cada una asociada a algún q) de la relación forman una partición de emparejamientos de E . En
882 efecto, suponga que las aristas que pertenecen a la misma clase $u_i w_j$ y $u_k w_j$ comparten el vértice
883 w_j . Entonces, como $i + j = k + j$, se determina que $u_i = u_k$ y se concluye que $u_i w_j$ y $u_k w_j$ son la
884 misma arista.

885 Luego, como $e_G = |S| \geq \varepsilon n^2$, el Teorema 40 asegura que existe al menos un emparejamiento no
 886 inducido. Esto significa que en un emparejamiento que contiene las aristas con la relación $u_i w_j \sim$
 887 $u_k w_\ell$ puede existir el trío de aristas $u_i w_j$, $u_k w_\ell$ y $u_i w_\ell$. Así, para algún $d \in \mathbb{N}$, (i, j) , (k, ℓ) y (i, ℓ)
 888 elementos de S que satisfacen

$$k - i = j - \ell = d.$$

889

890 Finalmente, el resultado se consigue tomando $(i, \ell) = (a, b)$ para obtener $j = b + d$ y $k = a + d$.
 891 * Poner dibujito de la esquina * □

892 * Comentar que el Teorema de la esquina nos entrega otro camino para demostrar el Teorema
 893 de Roth. *

894 *Segunda demostración Teorema 38.* Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Para
 895 $n \geq n_0$, sea $A \subset [n]$ un conjunto que posee al menos εn elementos. Se define el siguiente conjunto:

$$B = \{(x, y) \in [2n]^2 : x - y \in A\},$$

896

897 Observe que cada $a \in A$ da lugar a exactamente n elementos en B con $x - y = a$, permitiendo
 898 determinar que $|B| = n|A| \geq \varepsilon n^2$. Luego, el Teorema 41 asegura la existencia de elementos de la
 899 forma $\{(a, b), (a, b + d), (a + d, b)\}$ en B . Por consecuencia, se encuentra una 3-PA no trivial en A
 900 tomando $x = a - b$, e $y = d$. □

901 * Explicar que ahora vamos a demostrar con teoría espectral el lema de regularidad de Szemerédi.
 902 Comentar también que esta versión la realizó Terence Tao. *

903 *Demstración espectral Teorema 30.* Sea $\varepsilon > 0$, $G = ([n], E)$ un grafo y T su matriz de adyacencia.
 904 Consideramos además $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por los vectores propios de T ,
 905 y $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ los valores propios de T ordenados de manera decreciente.

906 Por la Proposición 4 y el Corolario 8, se satisface

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2e_G \leq n^2. \quad (39)$$

907

908 De esta manera, al notar que $i\lambda_i^2 \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j^2 \leq n^2$, es posible acotar cada valor propio de la
 909 siguiente manera:

$$\lambda_i \leq \frac{n}{\sqrt{i}}, \quad \forall i \in [n]. \quad (40)$$

910

911 Al final de esta demostración se entregará una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que depende únicamente
 912 de ε y que satisface $f(i) > i$. Denotando por $f^{(k)}$ a la k -ésima composición de f con ella misma,
 913 consideramos una partición de $[n]$ en intervalos de la forma $[f^{(k-1)}(1), f^k(1)]$, para $k \in \{1, \dots, \frac{1}{\varepsilon^3}\}$.
 914 Con esta construcción, debe existir un natural $\ell = f^{(k-1)}(1)$ que cumple con

$$\sum_{\ell \leq j < f(\ell)} |\lambda_j|^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \quad (41)$$

915

916 De lo contrario, la suma de $|\lambda_j|^2$ sobre todos los intervalos definidos es estrictamente mayor que
 917 $\varepsilon^3 n^2$. Así, como son $\frac{1}{\varepsilon^3}$ intervalos, se contradice la desigualdad (39), pues

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 > \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot \varepsilon^3 n^2 = n^2.$$

918

919 Ahora, usando el natural ℓ , separamos la matriz T en tres partes. En específico,

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

920

921 Se interpretará T_1 como la componente *estructural*,

$$T_1 := \sum_{i < \ell} \lambda u_i u_i^T,$$

922

923 T_2 como la componente de *error*,

$$T_2 := \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T,$$

924

925 y T_3 como la componente *casi-aleatoria*,

$$T_3 := \sum_{i \geq f(\ell)} \lambda_i u_i u_i^T.$$

926

927 Pensamos cada vector propio de T como una función $u_i : [n] \rightarrow \mathbb{R}$. En otras palabras, todo
 928 vector propio asigna un *peso* a cada vértice de G .

929 **Analizamos T_1 .** La idea es particionar el conjunto de vértices $[n]$ de manera tal que T_1 es
 930 aproximadamente constante en la mayoría de las partes. Veremos que el número de partes será
 931 $O_{\ell, \varepsilon}(1)$, es decir, un valor constante que depende solo de ℓ y ε .

932 Para cada $i \in [\ell-1]$ ordenamos de manera creciente los vértices de G según la asignación de *pesos*
 933 que otorga $u_i(\cdot)$. En primera instancia, se agrupa en un conjunto excepcional a aquellos vértices que
 934 presenten un *peso* demasiado grande en magnitud. Dicho conjunto se define de la siguiente manera:

$$V_0^i := \left\{ k \in [n] : |u_i(k)| > \sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right\}.$$

935

936 Dado que $\|u_i\| = 1$, cada V_0^i no puede tener muchos elementos. En efecto, al observar que

$$|V_0^i| \left(\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \right)^2 < \sum_{k=1}^n u_i(k)^2 = \|u_i\|^2 = 1,$$

937

938 es posible determinar que $|V_0^i| < \frac{\varepsilon}{\ell} n$.

939 Aquellos vértices que no están en V_0^i , serán agrupados particionando la recta de largo $2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}$
 940 en subintervalos de tamaño a lo más $\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} \right) n^{-1/2}$. Esta configuración provoca gráficamente el
 941 siguiente esquema para cada $u_i(\cdot)$.

942 * Poner dibujito... *

943 Por consecuencia, para $i \in [\ell-1]$, la cantidad de partes que genera cada $u_i(\cdot)$ son a lo más

$$\frac{2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2}}{\frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2}} = \frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} = O_{\ell,\varepsilon}(1).$$

944

945 Para conseguir la partición deseada de $[n]$, por un lado, se toma la unión de todos los conjuntos
 946 excepcionales V_0^i para dar lugar al conjunto V_0 de tamaño a lo más $(\ell-1) \cdot \frac{\varepsilon n}{\ell} < \varepsilon n$. Por otro lado,
 947 combine las particiones generadas por los $\ell-1$ primeros vectores propios mediante un refinamiento
 948 usual. Así, se consigue una partición del conjunto de vértices de G de la forma $[n] = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$.
 949 Dada la construcción, la cantidad de partes que se obtienen son

$$M(\varepsilon) \leq \left(\frac{2\ell^2}{\varepsilon^2} \right)^\ell \quad (42)$$

950

951 Ahora, intuitivamente, se mostrará que los valores de la matriz T_1 en cada bloque $V_i \times V_j$ son
 952 aproximadamente constante, i.e, no varían más que $o_\varepsilon(1)$. Para esto, como se hizo con los vectores
 953 propios, pensamos la matriz de adyacencia como una función $T : [n] \times [n] \rightarrow \mathbb{R}$ para identificar sus
 954 entradas. De esta manera, para cada $i, j \in [M]$, $a, c \in V_i$, y $b, d \in V_j$,

$$\begin{aligned}
|T_1(a, b) - T_1(c, d)| &= \left| \sum_{i < \ell} \lambda_i u_i(a) u_i(b) - \lambda_i u_i(c) u_i(d) \right| \\
&\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(a) u_i(b) - u_i(c) u_i(b) + u_i(c) u_i(b) - u_i(c) u_i(d)| \\
&\leq \sum_{i < \ell} |\lambda_i| |u_i(b)(u_i(a) - u_i(c)) + u_i(c)(u_i(b) - u_i(d))| \\
&\leq \sum_{i < \ell} n |u_i(b)| |u_i(a) - u_i(c)| + n |u_i(c)| |u_i(b) - u_i(d)| \\
&\leq \ell n \left(2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} + 2\sqrt{\frac{\ell}{\varepsilon}} n^{-1/2} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{\ell^{3/2}} n^{-1/2} \right) \\
&= 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

955

956 Luego, para $i, j \in [M]$, defina d_{ij} como el promedio de los valores del bloque $V_i \times V_j$ en T_1 y
957 observe que se satisface

$$|T_1(a, b) - d_{ij}| \leq 4\varepsilon, \quad \forall a \in V_i, \forall b \in V_j.$$

958

959 En efecto, como d_{ij} es un promedio, deben existir los pares $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in V_i \times V_j$ tales
960 que $T_1(x_0, y_0) \leq d_{ij}$ y $T_1(x_1, y_1) \geq d_{ij}$. Luego, si $|T_1(a, b) - d_{ij}| > 4\varepsilon$, entonces se encuentra una
961 contradicción al determinar que $T_1(a, b) - T_1(x_0, y_0) > 4\varepsilon$, o bien $T_1(a, b) - T_1(x_1, y_1) < -4\varepsilon$.

962 Usando lo anterior y la desigualdad triangular, para todo $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$, obtenemos la
963 siguiente cota.

$$\begin{aligned}
|v_A^T (T_1 - d_{ij} \mathbb{1}_{n \times n}) v_B| &\leq \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} |T_1(a, b) - d_{ij}| \\
&\leq 4\varepsilon |A| |B| \\
&\leq 4\varepsilon |V_i| |V_j|.
\end{aligned} \tag{43}$$

964

965 **Analizamos T_2 .** Observe en primer lugar, por construcción,

$$\text{Tr}(T_2^2) = \sum_{\ell \leq j < f(\ell)} \lambda_j^2 \leq \varepsilon^3 n^2.$$

966

967 Adicionalmente, por la ortonormalidad de la base,

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b \in [n]} T_2(a,b)^2 &= \sum_{a,b \in [n]} \left(\sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i u_i(a) u_i(b) \right)^2 \\
&= \sum_{a,b \in [n]} \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j u_i(a) u_j(a) u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell \leq i, j < f(\ell)} \lambda_i \lambda_j \sum_{a \in [n]} u_i(a) u_j(a) \sum_{b \in [n]} u_i(b) u_j(b) \\
&= \sum_{\ell \leq i < f(\ell)} \lambda_i^2 \|u_i\|^4 \\
&= \text{Tr}(T_2^2).
\end{aligned}$$

968

969 Entonces, dada la igualdad anterior, se determina que

$$\sum_{a,b \in [n]} T_2(a,b)^2 \leq \varepsilon^3 n^2. \quad (44)$$

970

971 Ahora, defina el conjunto $\Theta_1 \subset [M]^2$ de manera tal que todo par $(i,j) \notin \Theta_1$ satisface

$$\sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a,b)^2 \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (45)$$

972

973 Más aún, para los pares $(i,j) \in \Theta_1$, la desigualdad (44) en particular establece que

$$\varepsilon^3 n^2 \geq \sum_{(i,j) \in \Theta_1} \sum_{a \in V_i} \sum_{b \in V_j} T_2(a,b)^2 > \varepsilon \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j|.$$

974

975 Por consecuencia,

$$\sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i| |V_j| \leq \varepsilon^2 n^2. \quad (46)$$

976

977 De esta manera, para $(i,j) \notin \Theta_1$, $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$, utilizamos la desigualdad (45) y Cauchy-
978 Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned}
|v_A^T T_2 v_B|^2 &= \left| \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b) \right|^2 \\
&\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \left(\sum_{a \in A} \sum_{b \in B} T_2(a, b)^2 \right) |A| |B| \\
&\leq \varepsilon^2 |V_i| |V_j| |A| |B| \\
&\leq \varepsilon^2 |V_i|^2 |V_j|^2.
\end{aligned}$$

979

980 Así, se obtiene la cota asociada a T_2 .

$$|v_A^T T_2 v_B| \leq \varepsilon |V_i| |V_j|. \quad (47)$$

981

982 **Analizamos T_3 .** Note que el valor propio más grande en magnitud de T_3 es $\lambda_{f(\ell)}$. Entonces,
983 utilizando el operador norma * Definir... * de la matriz T_3 y el Teorema 9,

$$\frac{\|T_3 v_B\|}{\|v_B\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|T_3 x\|}{\|x\|} = |\lambda_{f(\ell)}| \leq \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

984

985 Como resultado,

$$\|T_3 v_B\| \leq \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}}.$$

986

987 Usando la desigualdad anterior junto a Cauchy-Schwarz se obtiene la siguiente cota para T_3 .

$$\begin{aligned}
|v_A^T T_3 v_B| &= |\langle v_A, T_3 v_B \rangle| \\
&\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|v_A\| \|T_3 v_B\| \\
&\leq \|v_A\| \|v_B\| \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&= \sqrt{|A| |B|} \frac{n}{\sqrt{f(\ell)}} \\
&\leq \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}.
\end{aligned} \quad (48)$$

988

989 Ya con el control de T_1 , T_2 y T_3 , nos enfocamos en estudiar G de manera global. Consideramos
990 $\Theta \subset \{0, 1, \dots, M\}^2$ definido de la siguiente manera:

$$\Theta := \left\{ (i, j) \in \{0, 1, \dots, M\}^2 : (i, j) \in \Theta_1 \vee i = 0 \vee j = 0 \vee \min\{|V_i|, |V_j|\} \leq \frac{\varepsilon n}{M} \right\}.$$

991

992 Con esta definición, la desigualdad (46), y recordando que $|V_0| < \varepsilon n$,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \Theta} |V_i||V_j| &= \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i||V_j| + \sum_{j=0}^M |V_0||V_j| + \sum_{i=0}^M |V_i||V_0| + \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| + \sum_{|V_j| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i||V_j| \\ &\leq \sum_{(i,j) \in \Theta_1} |V_i||V_j| + 2|V_0|n + 2 \sum_{|V_i| \leq \frac{\varepsilon n}{M}} |V_i|n \\ &\leq \varepsilon^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + 2M \frac{\varepsilon}{M} n^2 \\ &\leq 5\varepsilon n^2. \end{aligned}$$

993

994 Al ver la cota anterior, Θ se interpreta como un conjunto excepcional de pocos elementos que
995 contiene los malos casos. Ahora bien, si $(i, j) \notin \Theta$, todo $A \subset V_i$ y $B \subset V_j$ satisfacen la desigualdad

$$\begin{aligned} \left| e(A, B) - d_{ij}|A||B| \right| &= |v_A^T(T - d_{ij}\mathbb{1}_{n \times n})v_B| \\ &\leq |v_A^T(T_1 - d_{ij}\mathbb{1}_{n \times n})v_B| + |v_A^T T_2 v_B| + |v_A^T T_3 v_B| \\ &\leq 4\varepsilon |V_i||V_j| + \varepsilon |V_i||V_j| + \frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}}. \end{aligned} \quad (49)$$

996

997 Observando la desigualdad en (49), para $(i, j) \notin \Theta$, se necesita que $\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \varepsilon |V_i||V_j|$ para
998 asegurar que la partición $\{V_0, V_1, \dots, V_M\}$ de $[n]$ es (6ε) -regular. Para esto, gracias a que $|V_i|, |V_j| \geq$
999 $\frac{\varepsilon n}{M}$, se cumple la desigualdad $\frac{\varepsilon^2 n^2}{M^2} \leq |V_i||V_j|$, y por consecuencia

$$\frac{n^2}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{M^2 |V_i||V_j|}{\varepsilon^2 \sqrt{f(\ell)}}.$$

1000

1001 Finalmente, para obtener la partición (6ε) -regular del conjunto de vértices del grafo G , es sufi-
1002 ciente asumir que $\frac{1}{\sqrt{f(\ell)}} \leq \frac{\varepsilon^3}{M^2}$. Así, recordando la cota vista en (42), basta elegir

$$f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon^6} \left(\frac{2x^2}{\varepsilon^2} \right)^{4x}.$$

1003

□

1004 5. Bibliografia

- 1005 [1] Krivelevich, M., Sudakov, B. (2006). Pseudo-random Graphs. In Bolyai Society Mathema-
1006 tical Studies (pp. 199–262). Springer Berlin Heidelberg.
- 1007 [2] Chung, F. R. K., Graham, R. L., Wilson, R. M. (1989). Quasi-random graphs. Combinato-
1008 rica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing.
- 1009 [3] Chan, T. F. N., Král', D., Noel, J. A., Pehova, Y., Sharifzadeh, M., Volec, J. (2020). Charac-
1010 terization of quasirandom permutations by a pattern sum. Random Structures Algorithms.
- 1011 [4] Hàn, H., Kiwi, M., Pavez-Signé, M. (2021). Quasi-random words and limits of word sequen-
1012 ces. Journal Européen de Combinatoire [European Journal of Combinatorics].