Lección 9

Funciones continuas

Generalizando la noción que conocemos para funciones reales de variable real, vamos a estudiar la *continuidad* para funciones entre dos espacios métricos cualesquiera. La definimos de forma que quede claro que se trata de una noción topológica. Analizamos con detalle el *carácter local* de la continuidad y comprobamos que la composición de aplicaciones preserva la continuidad. Como primera propiedad relevante de las funciones continuas, comprobamos que preservan la compacidad.

9.1. Motivación

Para que se comprenda mejor la definición de continuidad, empezamos por repasar el caso conocido: una función real de variable real. Sea pues $f : A \to \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Recordamos que f es continua en un punto $x \in A$ cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Es claro que esta misma definición podría usarse para una función entre dos espacios métricos cualesquiera, pues en ambos podemos usar la convergencia de sucesiones.

Sin embargo, conviene tomar como definición de continuidad una condición que se exprese directamente en términos de la topología. La solución la encontramos en la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; y \in A, \;\; |y - x| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(y) - f(x)| < \delta \tag{1}$$

Usando bolas abiertas en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, (1) toma la forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; f\big(B(x,\delta) \cap A\big) \subset B\big(f(x),\varepsilon\big) \tag{2}$$

Como ha ocurrido otras veces, podemos sustituir las bolas abiertas por entornos arbitrarios. Más concretamente, usando entornos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, es claro que (2) equivale a

$$\forall V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big) \;\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; : \; f(U \cap A) \subset V \tag{3}$$

La última inclusión se escribe en la forma $U \cap A \subset f^{-1}(V)$, donde usamos la notación habitual para la imagen inversa de un conjunto por una función: $f^{-1}(V) = \{y \in A : f(y) \in V\}$. Finalmente, decir que $f^{-1}(V) \supset U \cap A$ con $U \in \mathcal{U}(x)$, equivale a decir que $f^{-1}(V)$ es entorno de x en el espacio métrico A, con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

En resumen, si consideramos en $\mathbb{R}$ la distancia usual, y en A la inducida por ella, hemos visto que f es continua en x si, y sólo si, la imagen inversa por f de cada entorno de $f(x)$ en $\mathbb{R}$ es un entorno de x en A. Tenemos así expresada la continuidad de una forma que sólo involucra entornos en los espacios métricos de partida y llegada de nuestra función. Esta condición es la que tomaremos como definición de continuidad para una función entre dos espacios métricos cualesquiera, definición que podríamos usar también para espacios topológicos.

9.2. Continuidad en un punto

En todo lo que sigue, E y F serán dos espacios métricos arbitrarios, y denotaremos por d a las distancias de ambos espacios.

Decimos que una función $f : E \to F$ es **continua en un punto** $x \in E$ cuando la imagen inversa por f de cada entorno de $f(x)$ en el espacio F es un entorno de x en E:

$$V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Puede llamar la atención que sólo consideremos funciones definidas en todo el espacio E y no sólo en un subconjunto suyo, digamos A. La razón es que A también es un espacio métrico con la distancia inducida, luego no perdemos generalidad suponiendo que $A = E$.

Ha quedado muy claro que la continuidad de una función en un punto es una propiedad topológica. Sin embargo, sustituyendo como siempre entornos por bolas abiertas, tenemos una caracterización de la continuidad en términos de las distancias que estemos usando. Además, como no podía ser de otra forma, tenemos una caracterización *secuencial* de la continuidad, es decir, en términos de convergencia de sucesiones:

- *Para $f : E \to F$ y $x \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *f es continua en el punto x.*
  - (ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ y \in E, \ d(y,x) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$.
  - (iii) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to x \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to f(x)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Dado $\varepsilon > 0$, $B\big(f(x), \varepsilon\big)$ es un entorno de $f(x)$ en F luego su imagen inversa por f será entorno de x en E, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset f^{-1}\big[B\big(f(x),\varepsilon\big)\big]$. Para $y \in E$ con $d(y,x) < \delta$ se tiene entonces $f(y) \in B\big(f(x),\varepsilon\big)$, es decir, $d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por (ii). Por ser $\{x_n\} \to x$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $d(x_n, x) < \delta$ y, por tanto, $d\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Suponiendo que f no es continua en x, vemos que no se verifica (iii). Existe $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$ tal que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(V)$ no puede contener a la bola abierta de centro x y radio $1/n$, así que existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, x) < 1/n$ pero $f(x_n) \notin V$. Está claro entonces que $\{x_n\} \to x$ pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$. ■

Conviene aclarar una cuestión sencilla, que se refiere al espacio de llegada de una función. Si F es subespacio métrico de otro espacio G, una función $f : E \to F$ puede verse también como función de E en G. Pues bien, la continuidad de f en un punto $x \in E$ no depende de que consideremos F o G como espacio métrico de llegada. Ello es obvio con cualquiera de las condiciones equivalentes del enunciado anterior. Por ejemplo, la segunda sólo involucra las distancias $d(f(y), f(x))$ para ciertos puntos $y \in E$, que son las mismas en F que en G, precisamente porque F es subespacio métrico de G. La misma idea se aplica en sentido opuesto, cuando G es un subespacio métrico de F, siempre y cuando se tenga $f(E) \subset G$: a efectos de la continuidad de f, podemos usar indistintamente F o G como espacio métrico de llegada. Incluso podemos tomar $G = f(E)$, con lo que vemos f como una función sobreyectiva. Claro está que habitualmente no conocemos con exactitud la imagen de f.

Cuestión diferente se plantea cuando cambiamos el espacio métrico de partida de nuestra función, porque para un subespacio métrico $A \subset E$ y una función $f : E \to F$ consideramos la restricción $f|_A : A \to F$. Discutiremos con detalle la relación entre la continuidad de f y la de sus restricciones, constatando el carácter local de la continuidad.

Aunque las dos caracterizaciones de la continuidad recién obtenidas son muy sencillas e intuitivas, al trabajar con funciones continuas usaremos preferentemente la definición, pues de esta forma quedará claro que los razonamientos que hagamos serían igualmente válidos para espacios topológicos cualesquiera, y no sólo para espacios métricos.

9.3. Continuidad

Naturalmente, decimos que una función $f : E \to F$ es continua en un conjunto no vacío $A \subset E$ cuando es continua en todo punto $x \in A$. Si f es continua en E decimos simplemente que f es **continua**. Reunimos en un sólo enunciado tres caracterizaciones de esta propiedad:

- *Para cualquier función $f : E \to F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *f es continua.*
  - (ii) *Para todo abierto $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ es abierto.*
  - (iii) *Para todo cerrado $C \subset F$, $f^{-1}(C)$ es cerrado.*
  - (iv) *f preserva la convergencia de sucesiones: para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $V = V^\circ \subset F$ y $x \in f^{-1}(V)$, como $V \in \mathcal{U}(f(x))$, la continuidad de f en x nos dice que $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, luego $f^{-1}(V)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $x \in E$ y $W \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, existe un abierto V tal que $f(x) \in V \subset W$, luego $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$. Por (ii) sabemos que $f^{-1}(V)$ es abierto, luego $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $C = \overline{C} \subset F$, como $F \setminus C$ es abierto, (ii) nos dice que $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto, pero $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Es enteramente análoga: si $V = V^\circ \subset F$, (iii) nos dice que $f^{-1}(F \setminus V)$ es cerrado, luego $f^{-1}(V)$ es abierto.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Es evidente.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Si $x \in E$ y $\{x_n\} \to x$ con $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (iv) nos dice que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente, pero falta comprobar que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $y_{2n-1} = x_n$, mientras que $y_{2n} = x$, es claro que $\{y_n\} \to x$, y (iv) nos dice que $\{f(y_n)\}$ es convergente. Por tanto: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(y_{2n}) = f(x)$. ■

Ejemplo obvio de funciones continuas son las *constantes*. Si $y_0 \in F$ y $f(x) = y_0$ para todo $x \in E$, entonces f es continua. Basta pensar que, para $V \subset F$, se tiene $f^{-1}(V) = E$ si $y_0 \in V$, y $f^{-1}(V) = \emptyset$ si $y_0 \notin V$, luego $f^{-1}(V)$ siempre es abierto. En general, no hay más ejemplos, puesto que tanto E como F podrían reducirse a un punto, pero aún excluyendo estos casos triviales, puede ocurrir que toda función continua de E en F sea constante. Por ejemplo, supongamos que F es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $F^\circ = \emptyset$, de forma que F no contiene intervalos no triviales. Considerando en $\mathbb{R}$ la distancia usual y en F la inducida, toda función continua $f : \mathbb{R} \to F$ es constante. En efecto, viendo f como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el teorema del valor intermedio, obteniendo que $f(\mathbb{R})$ es un intervalo. Pero como $f(\mathbb{R}) \subset F$, deducimos que $f(\mathbb{R})$ se reduce a un punto, es decir, f es constante. Así pues, por ejemplo, considerando a $\mathbb{Q}$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, toda función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ es constante.

Supongamos que E es un subespacio métrico de F. Entonces la función *inclusión* de E en F, definida por $I(x) = x$ para todo $x \in E$, es continua, pues para todo abierto $V \subset F$ se tiene que $I^{-1}(V) = V \cap E$ es un subconjunto abierto de E. En el caso particular $E = F$, vemos que la función *identidad* en cualquier espacio métrico E es continua. Cuando F sea un espacio normado, podremos operar con funciones continuas de E en F para obtener nuevos ejemplos, pero de eso nos ocuparemos más adelante.

Las caracterizaciones de la continuidad, dadas por las condiciones (ii) y (iii) del último resultado, se usan a menudo para probar que ciertos subconjuntos de E son abiertos o cerrados. Tomando $F = \mathbb{R}$ con la distancia usual, y dada una función continua $f : E \to \mathbb{R}$, vemos por ejemplo que los conjuntos

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^+) \qquad \text{y} \qquad \{x \in E : f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$$

son abiertos, mientras que el conjunto $\{x \in E : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1\} = f^{-1}\big([0,1]\big)$ es cerrado.

9.4. Carácter local

Como primera propiedad básica de la continuidad, comprobamos su carácter local, viendo previamente la relación entre la continuidad de una función y la de sus restricciones:

- *Sea $f : E \to F$ una función y sea A un subconjunto no vacío de E, que consideramos como espacio métrico con la distancia inducida. Para $x \in A$ se tiene:*

  (i) *Si f es continua en x, entonces $f|_A$ es continua en x.*
  (ii) *Si $f|_A$ es continua en x y A es entorno de x en E, entonces f es continua en x.*

(i). Si $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$ sabemos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x en el espacio métrico E, luego $\big(f|_A\big)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es entorno de x en el espacio métrico A.

(ii). Si $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, sabemos que $\big(f|_A\big)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es entorno de x en A, luego $f^{-1}(V) \cap A = U \cap A$ donde U es un entorno de x en E. Como, por hipótesis A es entorno de x en E, deducimos que $U \cap A$ también lo es, luego igual le ocurre a $f^{-1}(V)$, porque $U \cap A \subset f^{-1}(V)$. ■

El resultado anterior deja claro el carácter local de la continuidad de una función $f : E \to F$ en un punto $x \in E$: sólo depende de los valores de f en un entorno de x, que puede ser tan pequeño como se quiera.

Más aún, la continuidad de f en E es una **propiedad local**, en el sentido siguiente: f es continua si, y sólo si, para cada $x \in E$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f|_U$ es continua. Por ejemplo, si para cada $x \in E$ sabemos que existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f|_U$ es constante, podemos asegurar que f es continua, aunque no sepamos si f es constante o no.

Este carácter local se usa frecuentemente de una forma que merece la pena destacar:

- *Supongamos que $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, donde $\Lambda \neq \emptyset$ es un conjunto de índices arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, el conjunto U_λ es abierto. Entonces, una función $f : E \to F$ es continua si, y sólo si, $f|_{U_\lambda}$ es continua para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Como ejemplo muy sencillo, podemos tener $E = U \cup V$ con U y V abiertos. Entonces, una función $f : E \to F$ es continua si, y sólo si, $f|_U$ y $f|_V$ son continuas.

9.5. Composición de funciones continuas

Como otra propiedad básica de la continuidad, comprobamos que se conserva al componer dos funciones:

- *Sean E, F y G espacios métricos, consideremos dos funciones $f : E \to F$ y $g : F \to G$, y su composición $g \circ f : E \to G$. Si f es continua en un punto $x \in E$ y g es continua en el punto $f(x)$, entonces $g \circ f$ es continua en x. Por tanto, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.*

La comprobación es evidente: para $W \in \mathcal{U}\big[(g \circ f)(x)\big] = \mathcal{U}\big[g\big(f(x)\big)\big]$, la continuidad de g en el punto $f(x)$ nos dice que $g^{-1}(W) \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$, con lo que la continuidad de f en x nos dice que $f^{-1}\big(g^{-1}(W)\big) = \big(g \circ f\big)^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$, como queríamos. ■

Usaremos muy frecuentemente el resultado anterior, pues para funciones de varias variables, la composición de funciones tiene más utilidad si cabe que en el caso de una variable. Por ahora sólo comentamos dos casos particulares muy sencillos, que en realidad ya conocemos.

Podemos considerar un subespacio métrico $A \subset E$ y la inclusión $I : A \to E$, que es continua, como sabemos. Para cada función $f : E \to F$ se tiene claramente que $f \circ I = f|_A$ y el resultado anterior nos dice que $f|_A$ es continua siempre que lo sea f, cosa que ya sabíamos.

Análogamente, supongamos que F es subespacio métrico de otro espacio G y sea $I : F \to G$ la inclusión de F en G. Para toda función $f : E \to F$, es claro que $I \circ f$ no es más que la propia función f, vista como aplicación de E en G. Deducimos que $I \circ f$ es continua siempre que lo sea f. Esto ya se comentó, y de hecho sabíamos que el recíproco también es cierto.

9.6. Preservación de la compacidad

Recordemos el teorema de Weierstrass que conocemos para funciones reales de variable real. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el intervalo $f\big([a,b]\big)$ es cerrado y acotado. En realidad, el hecho de que la imagen de f sea un intervalo es consecuencia del teorema del valor intermedio, y seguiría siendo cierto si f estuviese definida en cualquier otro tipo de intervalo. Lo que realmente nos aporta el teorema de Weierstrass es el hecho de que $f\big([a,b]\big)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es decir, es compacto. Por otra parte, si se analiza la demostración del teorema, se observa claramente que en ella no se utiliza que $[a,b]$ sea un intervalo, sino solamente el hecho de que $[a,b]$ es cerrado y acotado.

En resumen, podemos hacer que el teorema de Weierstrass sea independiente del teorema del valor intermedio, si lo enunciamos de la siguiente forma: si E es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f : E \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f(E)$ es compacto. Su demostración sería entonces, al pie de la letra, la misma que conocemos para el caso en que E es un intervalo cerrado y acotado.

Pues bien, vamos a probar la primera propiedad importante de las funciones continuas entre espacios métricos: preservan la compacidad. En vista de los comentarios anteriores, esto es tanto como probar el teorema de Weierstrass, a plena generalidad. Además, la demostración es bien sencilla, como vamos ver.

Teorema. *Sean E y F dos espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Si E es compacto, entonces $f(E)$ es compacto.*

Demostración. Dada una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $f(E)$, deberemos probar que $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial que converge a un punto de $f(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existirá un punto $x_n \in E$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como, por hipótesis, E es un espacio métrico compacto, la sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E admitirá una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$. Por ser f continua deducimos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir, $\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(E)$ como queríamos. ■

Merece la pena destacar una consecuencia importante, que se obtiene tomando $\mathbb{R}$ como espacio métrico de llegada de nuestra función. Para ello, observamos que todo subconjunto compacto no vacío $K \subset \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. En efecto, sabemos que K está acotado y entonces, es claro que tanto el supremo como el ínfimo de K son puntos adherentes a K, pero K es cerrado, luego $\sup K \in K$ y $\operatorname{ínf} K \in K$, así que K tiene máximo y mínimo.

Si ahora E es un espacio métrico compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ es continua, el teorema anterior nos dice que $f(E)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, luego $f(E)$ tiene máximo y mínimo. Esto es tanto como decir que f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en sendos puntos de E:

- *Sea E un espacio métrico compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo $x \in E$.*

El resultado anterior se aplica obviamente al caso en que E es un subconjunto compacto, es decir, cerrado y acotado, de $\mathbb{R}^N$. Nos dice, claro está, que toda función continua de E en $\mathbb{R}$ tiene un máximo y un mínimo absolutos en sendos puntos de E. Para encontrarlos, como se puede fácilmente adivinar, será frecuente recurrir al cálculo diferencial para funciones de varias variables reales.

9.7. Ejercicios

1. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ una función. Probar que f es continua si, y sólo si, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para todo conjunto $A \subset E$.

2. Dado un subconjunto A de un espacio métrico E, la *función característica* de A es la función $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \in E \setminus A$$
Probar que χ_A es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$. Deducir que χ_A es continua si, y sólo si, A es a la vez abierto y cerrado.

3. Probar que si A es un subconjunto abierto y cerrado de $\mathbb{R}$, entonces, o bien $A = \emptyset$, o bien $A = \mathbb{R}$.

4. Si E y F son espacios métricos, se dice que una función $f : E \to F$ es *localmente constante* cuando para cada $x \in E$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f|_U$ es constante. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una función localmente constante $f : A \to \mathbb{R}$, tal que $f(A)$ sea un conjunto infinito.

5. Probar que la suma de un espacio normado X, es decir, la función dada por $(x,y) \mapsto x+y$ para $x,y \in X$, es una función continua, del espacio normado producto $X \times X$, en X.

6. Probar que el producto por escalares de un espacio normado X, es decir, la función dada por $(\lambda, x) \to \lambda x$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, es una función continua, del espacio normado producto $\mathbb{R} \times X$, en X.

7. Probar que la norma de un espacio normado X es una función continua de X en $\mathbb{R}$.

8. Sea E un espacio métrico compacto, X un espacio normado y $f : E \to X$ una función continua. Probar que existen dos puntos $a, b \in E$ tales que $\| f(a) \| \leqslant \| f(x) \| \leqslant \| f(b) \|$ para todo $x \in E$.

9. Probar que la distancia de un espacio métrico E es una función continua, del espacio métrico producto $E \times E$, en $\mathbb{R}$. Deducir que, cualquiera que sea $r \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) < r\}$ es abierto, mientras que $\{(x,y) \in E \times E : d(x,y) \leqslant r\}$ es cerrado. En particular, la *diagonal* $\Delta_E = \{(x,x) : x \in E\}$ es un conjunto cerrado.

10. Sea E un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de E. Probar la continuidad de la función $f : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = d(x,A) = \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$$

11. Sea E un espacio métrico y K un subconjunto compacto de E. Probar que para cada $x \in E$ existe un punto $k_x \in K$ tal que $d(x,k_x) = d(x,K)$.

12. Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ y consideremos en $\mathbb{R}^N$ cualquier distancia d que genere la topología usual. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ existe un punto $a_x \in A$ tal que $d(x,a_x) = d(x,A)$.