*Álgebra Linear Computacional COC473*


**Luís Volnei S. Sagrilo**

**(sagrilo@coc.ufrj.br)**

**Programa de Engenharia Civil**

**COPPE/UFRJ**


*Primeiro Semestre/2019*

TÓPICOS:

- Sistemas de equações lineares mal-condicionados
- Autovalores e autovetores

# *SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Sistemas de Equações **mal-condicionados**:

  - Definição: Um sistema de equações **AX = B** é chamado de "Sistema Mal-condicionado" quando uma pequena mudança no vetor independente **B** ou na matriz dos coeficientes **A** resulta numa grande mudança no vetor solução **X**.

- Sistemas de Equações **mal-condicionados**:
  - Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 2.000 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.000 \\ 7.999 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 2.000 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7.998 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.999 \\ +4.000 \end{bmatrix}$$

# *SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Sistemas de Equações **bem-condicionados**:
  - Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 2.000 & 3.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.000 \\ 7.000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 \\ 2.000 & 3.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7.001 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.999 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

- Definição:
  - Seja uma **A** matriz quadrada (nxn). **X** é um autovetor de **A** se para $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ existe um escalar λ que satisfaça a seguinte equação:

$$\boxed{\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

λ é chamado de **<u>autovalor</u>** de **A**

**X** é chamado de **<u>autovetor</u>** de **A**

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução analítica (exemplo 3x3):

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left( \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left( \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \right) \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

- Solução (exemplo 3x3):

Só haverá solução diferente da solução nula para **X** **(sistemas consistentes)** se o posto da matriz (**A**-$\lambda$**I**) for menor que n.

Para que isto aconteça o determinante de (**A**-$\lambda$**I**) deverá ser **obrigatoriamente** igual a zero.

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathrm{D}(\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 12 + 12 - 3(1-\lambda) + 4\lambda - 12(-2-\lambda) = 0$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$$

Raízes :

$$\lambda_1 = +5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = -3 \end{array}\right\} \text{Repetidas}$$

D($\lambda$) é conhecido como polinômio característico (sempre de ordem n)

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3): Para cada autovalor existe um autovetor correspondente

$$\lambda_1 = +5$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -24/7 & -48/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \quad \rightarrow x_2 = -2x_3 \end{array}$$

Atribuindo $x_3 = -1$, tem-se $x_2 = +2.0$ e $x_1 = +1$, i.e.,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} +1.0 \\ +2.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

*AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3): Para cada autovalor existe um autovetor correspondente

$$\lambda_2 = -3$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3$$

Atribuindo $x_3 = 0$ e $x_2 = +1.0$, tem-se $x_1 = -2$, i.e.,

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -2.0 \\ +1.0 \\ +0.0 \end{bmatrix}$$

## *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3): Para cada autovalor existe um autovetor correspondente

$$\lambda_3 = -3$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -2x_2 + 3x_3$$

Atribuindo $x_3 = +1.0$ e $x_2 = +0.0$, tem-se $x_1 = +3.0$, i.e.,

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} +3.0 \\ +0.0 \\ +1.0 \end{bmatrix}$$

*AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3): Para cada autovalor existe um autovetor correspondente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = +5 \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} +1.0 \\ +2.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -2.0 \\ +1.0 \\ +0.0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -3 \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} +3.0 \\ +0.0 \\ +1.0 \end{bmatrix}$$

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução (exemplo 3x3): Autovetores normalizados

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = +5 \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} +1.0 \\ +2.0 \\ -1.0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{X}_1^N = \begin{bmatrix} +1.0/\sqrt{6} \\ +2.0/\sqrt{6} \\ -1.0/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad \left\|\mathbf{X}_1^N\right\|_2 = 1.0$$

$$\lambda_2 = -3 \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -2.0 \\ +1.0 \\ +0.0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{X}_2^N = \begin{bmatrix} -2.0/\sqrt{5} \\ +1.0/\sqrt{5} \\ +0.0/\sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad \left\|\mathbf{X}_2^N\right\|_2 = 1.0$$

$$\lambda_3 = -3 \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} +3.0 \\ +0.0 \\ +1.0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{X}_3^N = \begin{bmatrix} +3.0/\sqrt{10} \\ +0.0/\sqrt{10} \\ +1.0/\sqrt{10} \end{bmatrix} \qquad \left\|\mathbf{X}_3^N\right\|_2 = 1.0$$

- Solução (exemplo 3x3): Matriz autovetores normalizados

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} +1.0/\sqrt{6} \\ +2.0/\sqrt{6} \\ -1.0/\sqrt{6} \end{matrix}}_{\mathbf{X}_1} & \underbrace{\begin{matrix} -2.0/\sqrt{5} \\ +1.0/\sqrt{5} \\ +0.0/\sqrt{5} \end{matrix}}_{\mathbf{X}_2} & \underbrace{\begin{matrix} +3.0/\sqrt{10} \\ +0.0/\sqrt{10} \\ +1.0/\sqrt{10} \end{matrix}}_{\mathbf{X}_3} \end{bmatrix}$$

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Observações gerais:

  - Os autovalores podem ser repetidos;

  - Os autovalores podem ser reais ou complexos

  - A soma dos autovalores é igual ao traço da matriz

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

  - O produtório do módulo dos autovalores é igual ao módulo do determinante da matriz

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\det(\mathbf{A})|$$

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Observações gerais:

  - No polinômio característico o termo constante equivale ao determinante da matriz **A**

  - Se **A** for positiva definida todos os autovalores serão positivos

  - <u>Uma matriz simétrica:</u>

    - sempre tem autovalores reais

    - autovetores são ortogonais. Para autovetores normalizados:

$$\mathbf{X}^{T}\mathbf{X} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{X}^{T}\mathbf{A}\mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda}$$

- Métodos Numéricos de Solução:

Existem vários métodos numéricos para a solução de autovalores e autovetores. Alguns mais especializados para um dado tipo de problema (ex. matrizes simétricas, etc.) e outros para outras situações:

- Power Method (Método da Potência);
- Método de Jacobi (matriz simétrica);
- Método de Lanczos;
- Etc...

- Métodos Numéricos de Solução: Power Method

Método iterativo: calcula o maior autovalor (valor absoluto) do problema e o correspondente autovetor.

**Passo 1**: assumir um vetor inicial $\mathbf{X}^0$ como sendo um autovetor solução do problema $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ **e** $\lambda^0=1$. Este vetor deve ter pelo menos um elemento (usualmente o primeiro) igual a unidade:

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & .. & x_n \end{pmatrix}^T$$

**Passo 2**: Calcular:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}^0$$

- Métodos Numéricos de Solução: Power Method

Passo 3: Ajustar/fatorar **Y** de forma que o primeiro elemento seja igual a 1.

$$Y' = y_1 \left(1 \quad y_2/y_1 \quad .. \quad y_n/y_1\right)^T \equiv \lambda^1 \left(\mathbf{X}^1\right)$$

$$\lambda^1 = y_1 \qquad \mathbf{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ y_2/y_1 \\ \vdots \\ y_n/y_1 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Calcular

$$R = \frac{\left|\lambda^i - \lambda^{i-1}\right|}{\left|\lambda^i\right|}$$

- Métodos Numéricos de Solução: Power Method

Passo 5: Verificar se R ≤ *tol* (tolerância numérica pré-estabelecida).

***Sim***

$$\lambda \ = \lambda^{i} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{X}^{i}$$

***Não***

Repetir os passos 2 a 5 até que R ≤ *tol*

- Exemplo: Power Method

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.2 & 0.0\\ 0.2 & 1.0 & 0.5\\ 0.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^0=\begin{bmatrix}1.0\\ 1.0\\ 1.0\end{bmatrix} \quad \lambda^0=1 \qquad \mathrm{tol}=10^{-3}$$

$$\mathbf{AX}^0=\begin{bmatrix}1.2\\ 1.7\\ 1.5\end{bmatrix}=1.2\begin{bmatrix}1.00\\ 1.42\\ 1.25\end{bmatrix}$$

$$\lambda^1=1.2 \qquad \mathbf{X}^1=\begin{bmatrix}1.00\\ 1.42\\ 1.25\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}=\frac{|1.2-1.0|}{|1.2|}=0.16667$$

- Exemplo: Power Method

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad \lambda^0 = 1 \qquad \mathrm{tol} = 10^{-3}$$

| ITER | $X_i$ | $X_{i+1}$ | $\lambda_i$ | R |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1.000,1.000,1.000)^T$ | $(1.000,1.417,1.250)^T$ | 1.200 | 0.1667 |
| 2 | $(1.000,1.417,1.125)^T$ | $(1.000,1.747,1.526)^T$ | 1.283 | 0.065 |
| ... | | | | |
| 14 | $(1.000,2.680,2.485)^T$ | $(1.000,2.685,2.492)^T$ | 1.536 | $6.51\text{x}10^{-4}$ |

Autovalores exatos:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.539 \\ 0.461 \end{bmatrix}$$

Autovetor exato para λ=1.539

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.693 \\ 2.500 \end{bmatrix}$$

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

- Método de Jacobi: Matriz simétrica

  - Propriedades:

    - autovetores são ortogonais

$$\mathbf{X}^{T}\mathbf{X} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{X}^{T}\mathbf{A}\mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda}$$

  - Método numérico

    - montar um matriz **X** com colunas ortogonais entre si de forma a tornar matriz A “quase diagonal”

$$\tilde{\mathbf{X}}^{T}\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{I} \qquad \tilde{\mathbf{X}}^{T}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}} \approx \boldsymbol{\lambda}$$

- Método de Jacobi: Matriz simétrica

  - Matrizes de rotação (mudança de sistemas de coordenadas)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}\mathbf{X} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{R}^T\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

- Método de Jacobi: Matriz simétrica

  - Matriz **P** para zerar um termo $a_{i,j}$ (ou $a_{j,i}$ ) fora da diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & \cdots & & & a_{1,n} \\ & a_{i,i} & & a_{i,j} & & \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & a_{j,i} & & a_{j,j} & & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & & & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & & 0 \\ & \cos(\phi) & & -\sin(\phi) & & \\ & & 1 & & & \\ \vdots & \sin(\phi) & & \cos(\phi) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & \cdots & & & a_{1,n} \\ & a'_{i,i} & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & & a'_{j,j} & & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & & & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

- Método de Jacobi: Matriz simétrica

  - Valor de $\phi$:

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2a_{i,j}}{a_{i,i} - a_{j,j}}\right) & \text{se } a_{i,i} \neq a_{j,j} \\ \phi = \dfrac{\pi}{4} & \text{se } a_{i,i} = a_{j,j} \end{cases}$$

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

- Algoritmo do Método de Jacobi

1) Faça:
$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{I}$$

2) para k=1, 2,..., até convergir

2.1) identificar o maior elemento de $\mathbf{A}_k$ fora da diagonal (valor absoluto)

2.2) calcular a matriz $\mathbf{P}_k$ associada ao elemento identificado no item anterior (calcular $\phi$) e fazer as seguintes operações
$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k$$
$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k \mathbf{P}_k$$

3) repetir as operações do item 2 até que todos os elementos de $\mathbf{A}_k$ fora da diagonal sejam menores que uma dada tolerância (tol).

4) depois da convergência
$$\mathbf{A}_{k+1} = \text{diagonal} = \boldsymbol{\lambda} \rightarrow \text{autovalores}$$
$$\mathbf{X}_{k+1} \rightarrow \text{autovetores}$$

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Algoritmo do Método de Jacobi

1) Observar que um elemento “zerado” numa dada iteração poderá voltar a assumir um valor não nulo nas iterações seguintes.

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

- Método de Jacobi: EXEMPLO

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Termo a ser zerado (2,3)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.707 & 0.707 \\ 0.0 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.141 & -0.141 \\ 0.141 & 1.5 & 0.0 \\ -0.141 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.707 & 0.707 \\ 0.0 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

Termo a ser zerado (1,3)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.0 & 0.255 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.255 & 0.0 & 0.967 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_2\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.137 & 0.0 \\ 0.137 & 1.5 & 0.036 \\ 0.0 & 0.036 & 0.463 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.0 & 0.255 \\ 0.180 & 0.707 & -0.684 \\ -0.180 & -0.707 & 0.684 \end{bmatrix}$$

Próximo termo a ser zerado (1,2)

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

- Método de Jacobi: EXEMPLO

Termo a ser zerado (1,2)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.965 & 0.264 & 0.0\\ -0.264 & 0.965 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 1.0\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_4=\mathbf{P}^T\mathbf{A}_3\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & -9.5\text{x}10^{-3}\\ 0.0 & 1.537 & 0.035\\ -9.5\text{x}10^{-3} & 0.035 & 0.463\end{bmatrix}\quad \mathbf{X}_4=\mathbf{X}_3\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.933 & 0.255 & 0.255\\ -0.013 & 0.730 & -0.684\\ -0.36 & 0.635 & 0.684\end{bmatrix}$$

Termo a ser zerado (2,3)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.999 & -0.032\\ 0.0 & 0.032 & 0.999\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_5=\mathbf{P}^T\mathbf{A}_4\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1.0 & -3.06\text{x}10^{-4} & -9.5\text{x}10^{-3}\\ -3.06\text{x}10^{-4} & 1.539 & 0.00\\ -9.5\text{x}10^{-3} & 0.000 & 0.462\end{bmatrix}\quad \mathbf{X}_5=\mathbf{X}_4\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.933 & 0.263 & 0.246\\ -0.013 & 0.707 & -0.707\\ -0.36 & 0.656 & 0.663\end{bmatrix}$$

Resultados :

$$\boldsymbol{\lambda}\approx\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.00\\ 0.0 & 1.539 & 0.00\\ 0.0 & 0.000 & 0.462\end{bmatrix}\qquad \mathbf{X}\approx\mathbf{X}_5=\begin{bmatrix}0.933 & 0.263 & 0.246\\ -0.013 & 0.707 & -0.707\\ -0.36 & 0.656 & 0.663\end{bmatrix}$$

EXATOS :

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.00\\ 0.0 & 1.539 & 0.00\\ 0.0 & 0.000 & 0.461\end{bmatrix}\qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}0.928 & 0.263 & 0.263\\ 0.0 & 0.707 & -0.707\\ -0.371 & 0.657 & 0.657\end{bmatrix}$$

# *AUTOVALORES E AUTOVETORES*

- Solução de sistemas de equações lineares (matriz simétrica) usando autovalores e autovetores.

1) Matriz simétrica propriedades:

$$\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \text{matriz autovetores}$$

2) Sistema de equações: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

3) Fazendo-se as seguintes operações:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\mathbf{Y} = \mathbf{B}$$

$$\text{pre} - \text{multiplicando ambos os lados por } \boldsymbol{\theta}^T$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Y} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{X} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{B}$$

# AUTOVALORES E AUTOVETORES

- Solução sistema (matriz simétrica) conhecendo-se autovalores e autovetores

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.7 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Autovalores e autovetores :

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 1.539 & 0.00 \\ 0.0 & 0.000 & 0.461 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0.928 & 0.263 & 0.263 \\ 0.0 & 0.707 & -0.707 \\ -0.371 & 0.657 & 0.657 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema :

$$\boldsymbol{\lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 0.65 & 0.00 \\ 0.0 & 0.000 & 2.167 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 0.65 & 0.00 \\ 0.0 & 0.000 & 2.167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.928 & 0.000 & -0.371 \\ 0.263 & 0.707 & 0.657 \\ 0.263 & 0.263 & 0.657 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.7 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.557 \\ 1.627 \\ 0.215 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.928 & 0.263 & 0.263 \\ 0.0 & 0.707 & -0.707 \\ -0.371 & 0.657 & 0.657 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.557 \\ 1.627 \\ 0.215 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$