Álgebra Linear Computacional COC473

Luís Volnei S. Sagrilo
(sagrilo@coc.ufrj.br)

Programa de Engenharia Civil

COPPE/UFRJ

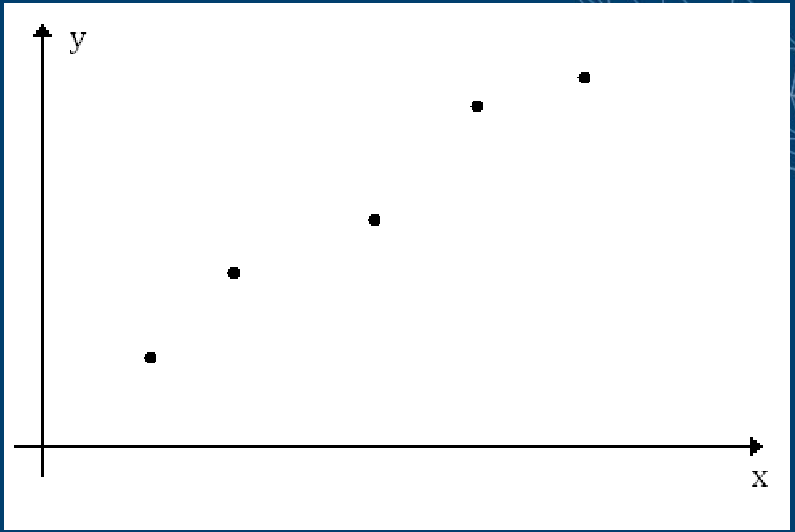
Primeiro Semestre/2019

TÓPICOS:

- Ajuste de Curvas: Mínimos-quadrados
- Interpolação

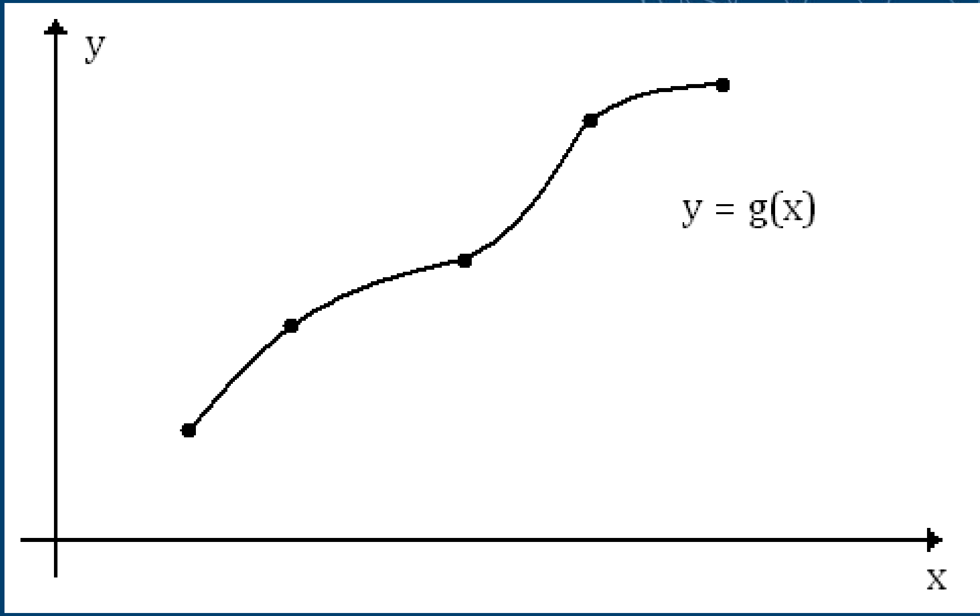
CONCEITOS

- Representar um conjunto de resultados observados através de experimentos, ou obtidos numericamente, por uma função (modelo matemático) y = g(x).



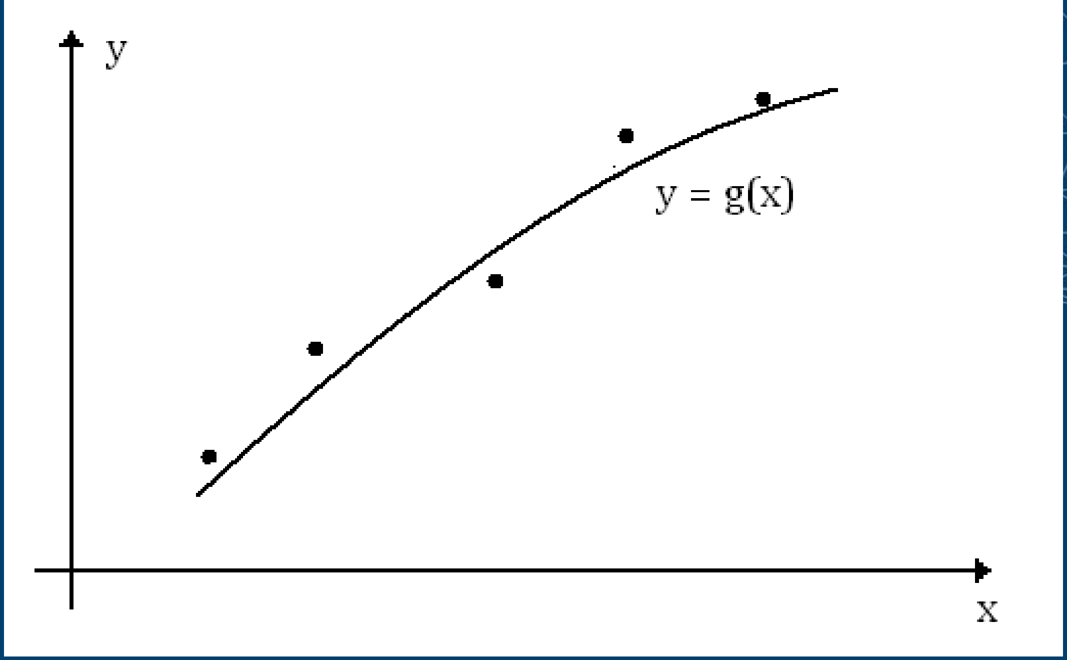
CONCEITOS

- **INTERPOLAÇÃO**: a função modelo y = g(x) passa exatamente sobre todos os pontos de dados conhecidos.

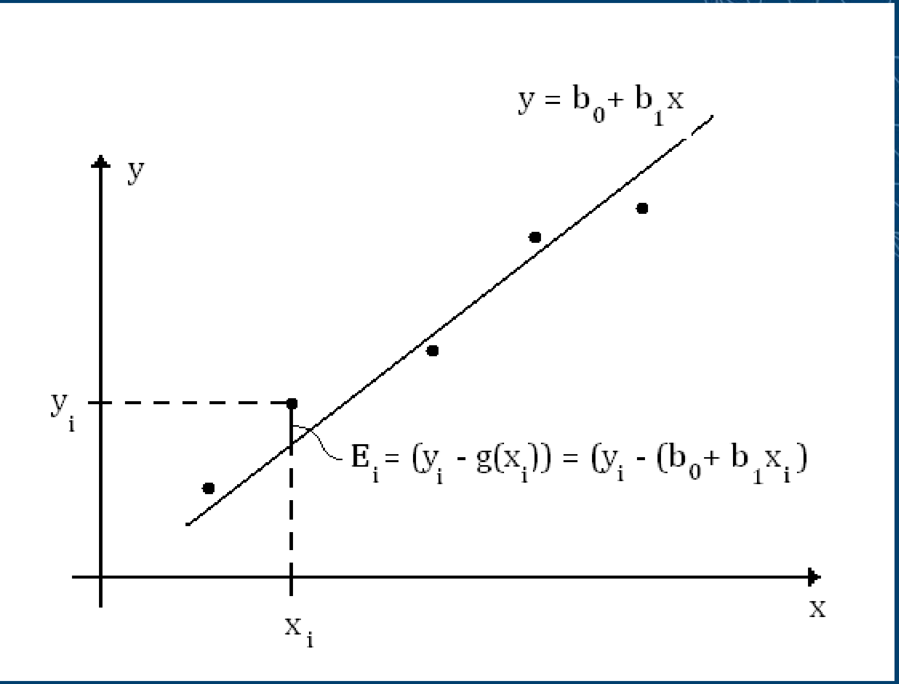


CONCEITOS

- **AJUSTE DE CURVA**: a função modelo y = g(x) não passa necessariamente sobre todos os pontos de dados conhecidos.



- **REGRESSÃO LINEAR**: ajustar uma reta (R^2) ou um hiperplano (R^N) para um conjunto de dados conhecidos.



Função modelo linear

$$y = b_0 + b_1 x$$

Erro aproximação para cada ponto

$$E_i = \left[y_i - \left(b_0 + b_1 x_i\right)\right]$$

- **<u>REGRESSÃO LINEAR</u>**: continuação
  - Erro total quadrático do modelo

$$E_T = \sum_{i=1}^{N} (E_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right]^2$$

  - N $\rightarrow$ número de pontos observados (medidos, etc.)
  - Os parâmetros b_0 e b_1 devem ser definidos de forma a minimizar o erro $E_T \equiv E_T(b_o, b_1)$
  - Isto significa:

$$\frac{\partial E_T(b_0, b_1)}{\partial b_0} = 0.0 \quad \rightarrow -2\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] = 0$$

$$\frac{\partial E_T(b_0, b_1)}{\partial b_1} = 0.0 \quad \rightarrow -2\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right] x_i = 0$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: continuação
  - Manipulando as equações

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(b_0 + b_1 x_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad \rightarrow \sum_{i=1}^{N} b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_1 x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(b_0 + b_1 x_i\right)\right] x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \rightarrow \sum_{i=1}^{N} b_0 x_i + \sum_{i=1}^{N} b_1 \left(x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

  - Que conduz ao seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} \left(x_i\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix}$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: continuação
  - Solução de um sistema linear de equações:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 1

x	1.00	2.00	3.00
y	2.00	3.50	6.50

$$y = b_1 + b_2 x$$

$$\begin{bmatrix} (1+1+1) & (1+2+3) \\ (1+2+3) & (1^2+2^2+3^2) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2+3.5+6.5 \\ 2x1+3.5x2+3x6.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 28.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.50 \\ +2.25 \end{bmatrix}$$

$$y = -0.50 + 2.25x$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: outra maneira "mais elegante" de resolver o problema.
  - Resíduo (ou erro) em cada ponto

$$r_i = \left[y_i - \left(b_0 + b_1 x_i\right)\right]$$

  - Vetor dos resíduos

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Y} - \mathbf{PB}$$

$\mathbf{P} \rightarrow$ matriz dos regressores

  - Minimizar o quadrado da norma euclidiana de **R**

- **REGRESSÃO LINEAR**: outra maneira mais elegante de resolver o problema.
  - Quadrado da norma euclidiana de **R**

$$\left(\|\mathbf{R}\|_2\right)^2 = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = (\mathbf{Y}-\mathbf{PB})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{PB})$$
$$= \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{PB} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{PB}$$
$$= \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - 2\mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Y} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{PB}$$

  - Gradiente do quadrado da norma euclidiana de **R** com relação ao vetor **B**

$$\nabla\left(\|\mathbf{R}\|_2\right)^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(\|\mathbf{R}\|_2\right)^2}{\partial b_0} \\ \dfrac{\partial\left(\|\mathbf{R}\|_2\right)^2}{\partial b_1} \end{bmatrix} = \nabla_{\mathbf{B}}\left(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - 2\mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{Y} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}^T\mathbf{PB}\right)$$
$$= 2\mathbf{P}^T\mathbf{PB} - 2\mathbf{P}^T\mathbf{Y}$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: outra maneira mais elegante de resolver o problema.
  - Minimizando o quadrado da norma euclidiana de **R**

$$\nabla\left(\|\mathbf{R}\|_2\right)^2 = 0$$

$$2\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} - 2\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = 0$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

que corresponde exatamente a :

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \text{(definido anteriormente)}$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: regra geral
  - A solução $\mathbf{P^T P B = P^T Y}$ vale para qualquer circunstância em que os parâmetros "b" da função modelo sejam lineares (ctes que multiplicam uma função de x qualquer).

$$y = b_1\phi_1(x) + \cdots + b_n\phi_n(x)$$

  - **Exemplo:**

$$y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 e^x$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & e^{x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_N & (x_N)^2 & e^{x_N} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{Y}$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 1

x	1.00	2.00	3.00
y	2.00	3.50	6.50

$$y = b_1 + b_2 x$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 3.5 \\ 6.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{P}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 28.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.50 \\ +2.25 \end{bmatrix}$$

$$y = -0.50 + 2.25x$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 2

x	y	x	y
0.082	1.268×10^{-3}	2.302	0.989
0.667	0.193	0.538	0.119
1.186	0.585	0.182	8.923×10^{-3}
0.877	0.350	1.117	0.532
1.564	0.823	1.209	0.602
0.636	0.174	0.623	0.166
1.365	0.710	1.014	0.451
0.826	0.304	0.393	0.057
0.480	0.091	1.487	0.783
0.591	0.147	1.102	0.520

$$y = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\lambda} \right)$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 2

$$y = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)$$

$$\ln(1-y) = -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}$$

$$\ln(-\ln(1-y)) = \lambda \ln(x) - \lambda \ln(\alpha)$$

$$\boxed{y' = b_1 + b_2 x'}$$

$$y' \equiv \ln(-\ln(1-y))$$

$$x' = \ln(x)$$

$$b_2 = \lambda$$

$$b_1 = -\lambda \ln(\alpha) \rightarrow \alpha = \exp\left(-\frac{b_1}{b_2}\right)$$

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 2

x′	y′	x′	y′
-2.499	-6.669	0.834	1.497
-0.405	-1.538	-0.620	-2.065
0.171	-0.128	-1.701	-4.715
-0.120	-0.841	0.110	-0.276
0.447	0.549	0.189	-0.083
-0.452	-1.654	-0.473	-1.705
0.311	0.215	0.014	-0.512
-0.191	-1.015	-0.934	-2.834
-0.734	-2.345	0.397	0.425
-0.526	-1.837	0.097	-0.310

- **REGRESSÃO LINEAR**: Exemplo 2

$$y' = b_1 + b_2 x'$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2.499 \\ 1 & -0.405 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & +0.097 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -6.669 \\ -1.538 \\ \vdots \\ -0.310 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 20 & -6.085 \\ -6.085 & 13.090 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{P}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -25.842 \\ 35.396 \end{bmatrix}$$

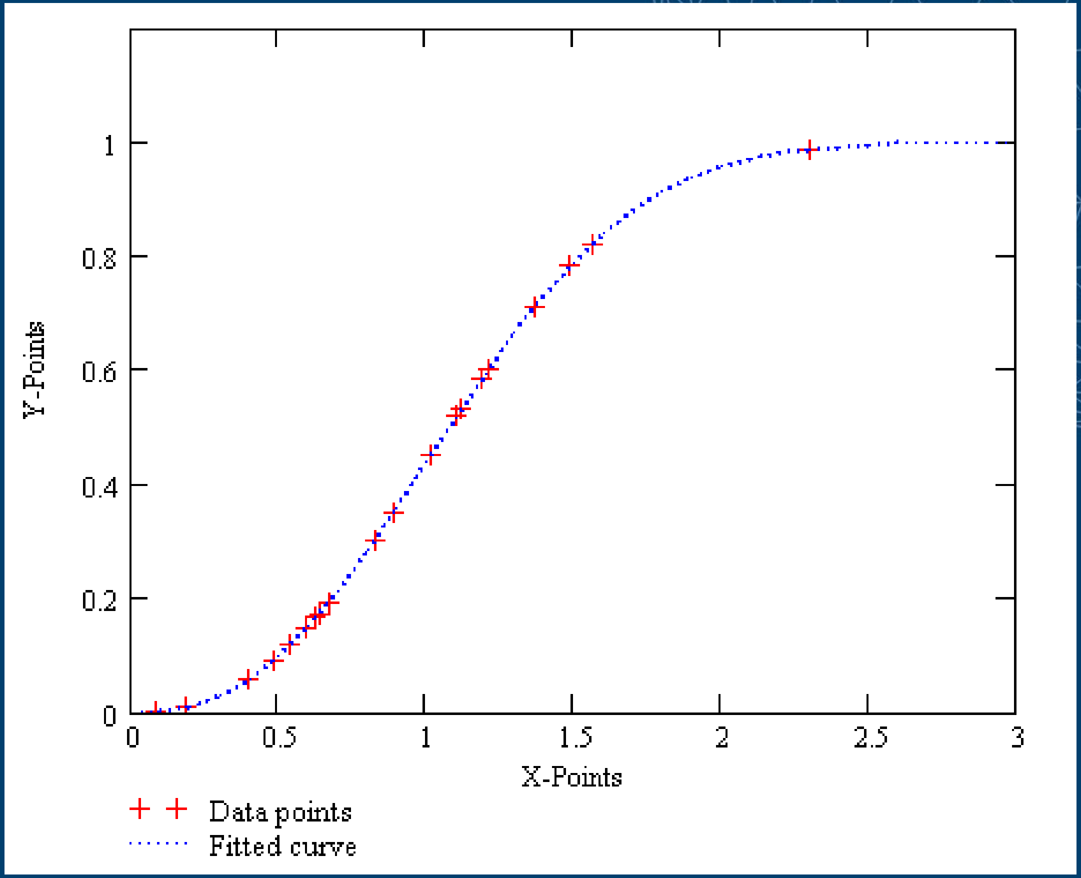
$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.547 \\ +2.45 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = b_2 = 2.45$$

$$\alpha = \exp\left(-\frac{b_1}{b_2}\right) = 1.25$$

AJUSTE DE CURVAS

- **<u>REGRESSÃO LINEAR</u>**: Exemplo 2



- **REGRESSÃO LINEAR**: Solução geral

$$y = b_1\phi_1(x) + \cdots + b_n\phi_n(x)$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{P}^T\mathbf{Y}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_1) & \cdots & \phi_n(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \cdots & \phi_n(x_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n(x_1) & \cdots & \phi_n(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

$P \rightarrow$ matriz dos regressores

que corresponde exatamente a :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

- **INTERPOLAÇÃO**:

a) Polinomial

b) Lagrange

c) Splines

- **INTERPOLAÇÃO**:

Regra geral: aproximar os dados por uma função que passa exatamente sobre os pontos dados com o seguinte aspecto/formato:

$$f(x) = y = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(x)$$

$b_i \rightarrow$ coeficientes

$\phi_i(x_i) \rightarrow$ funções de interpolação

$N \rightarrow$ número de pontos dados/conhecidos

- **<u>INTERPOLAÇÃO</u>**: Polinomial

  A função de interpolação consiste de um polinômio de grau N-1

$$f(x) = y = \sum_{i=1}^{N} b_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x_i) \rightarrow x^{i-1}$$

$$f(x) = y = \sum_{i=1}^{N} b_i x^{i-1} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots + b_N x^{N-1}$$

- <u>**INTERPOLAÇÃO**</u>: Polinomial

Exemplo N=3

$$f(x) = y = \sum_{i=1}^{N} b_i x^{i-1} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$$

$$b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_1^2 = y_1$$
$$b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_2^2 = y_2$$
$$b_1 + b_2 x_3 + b_3 x_3^2 = y_3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Os pontos não sendo coincidentes a solução é única

B = P^{-1}Y .

- **INTERPOLAÇÃO**: Polinomial

Exemplo N=3 (solução)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbf{PB} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}$$

ou

$$\mathbf{P}^{T}\mathbf{PB} = \mathbf{P}^{T}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{P}^{T}\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^{T}\mathbf{Y} \quad \text{(Solução clássica do ajuste de curvas)}$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Polinomial

Exemplo N=3 (solução)

x	y
-2	-27
0	-1
1	0

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbf{PB} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ +5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$y = -1 + 5x - 4x^2$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Lagrange

Função modelo interpoladora:

$$f(x) = y_1\phi_1(x) + y_2\phi_2(x) + \cdots + y_N\phi_N(x)$$

Na interpolação de Lagrange as funções de interpolação são representadas pelas seguintes funções:

$$\phi_i(x) = \frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{N}(x - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{N}(x_i - x_k)}$$

Nas ordenadas dos pontos fornecidos estas funções valem:

$$\phi_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_k = x_i \\ 0 & \text{se } x_k \neq x_i \end{cases}$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Lagrange

Exemplo anterior:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & +0 & 1 \\ \hline y & -27 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\phi_1(x) = \frac{\prod_{k=1,k\neq 1}^{3}(x - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq 1}^{3}(x_1 - x_k)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} = \frac{x^2 - x}{6}$$

$$\phi_2(x) = \frac{\prod_{k=1,k\neq 2}^{3}(x - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq 2}^{3}(x_2 - x_k)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} = \frac{x^2 + x - 2}{-2}$$

$$\phi_3(x) = \frac{\prod_{k=1,k\neq 3}^{3}(x - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq 3}^{3}(x_1 - x_k)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)} = \frac{x^2 + 2x}{3}$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Lagrange

Exemplo anterior

x	−2	+0	1
y	−27	−1	0

$$f(x) = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \phi_3(x)y_3$$

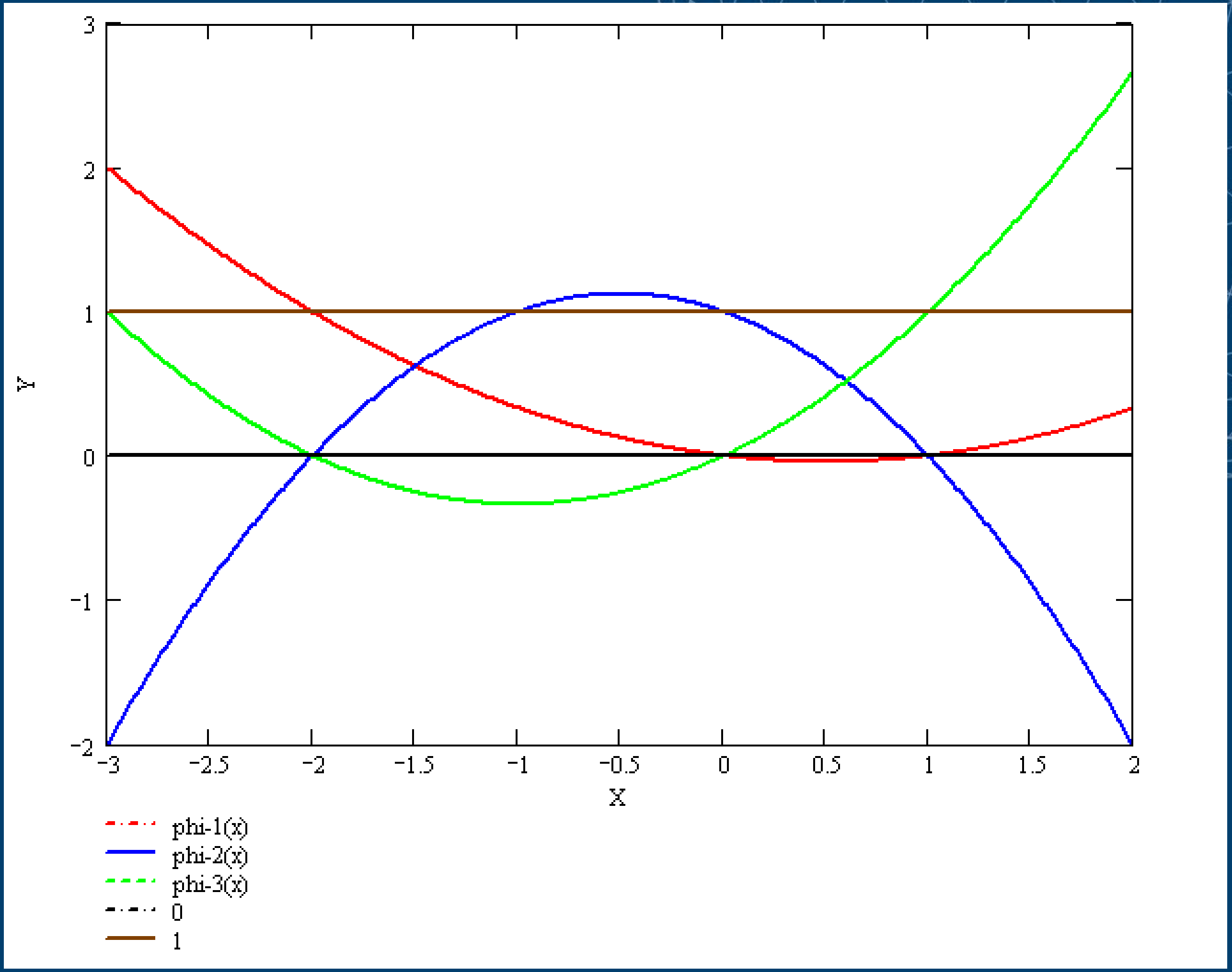
$$f(x) = \left(\frac{x^2 - x}{6}\right)(-27) + \left(\frac{x^2 + x - 2}{-2}\right)(-1) + \left(\frac{x^2 + 2x}{3}\right)(0)$$

$$f(x) = \frac{-9}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{2}(x^2 + x - 2)$$

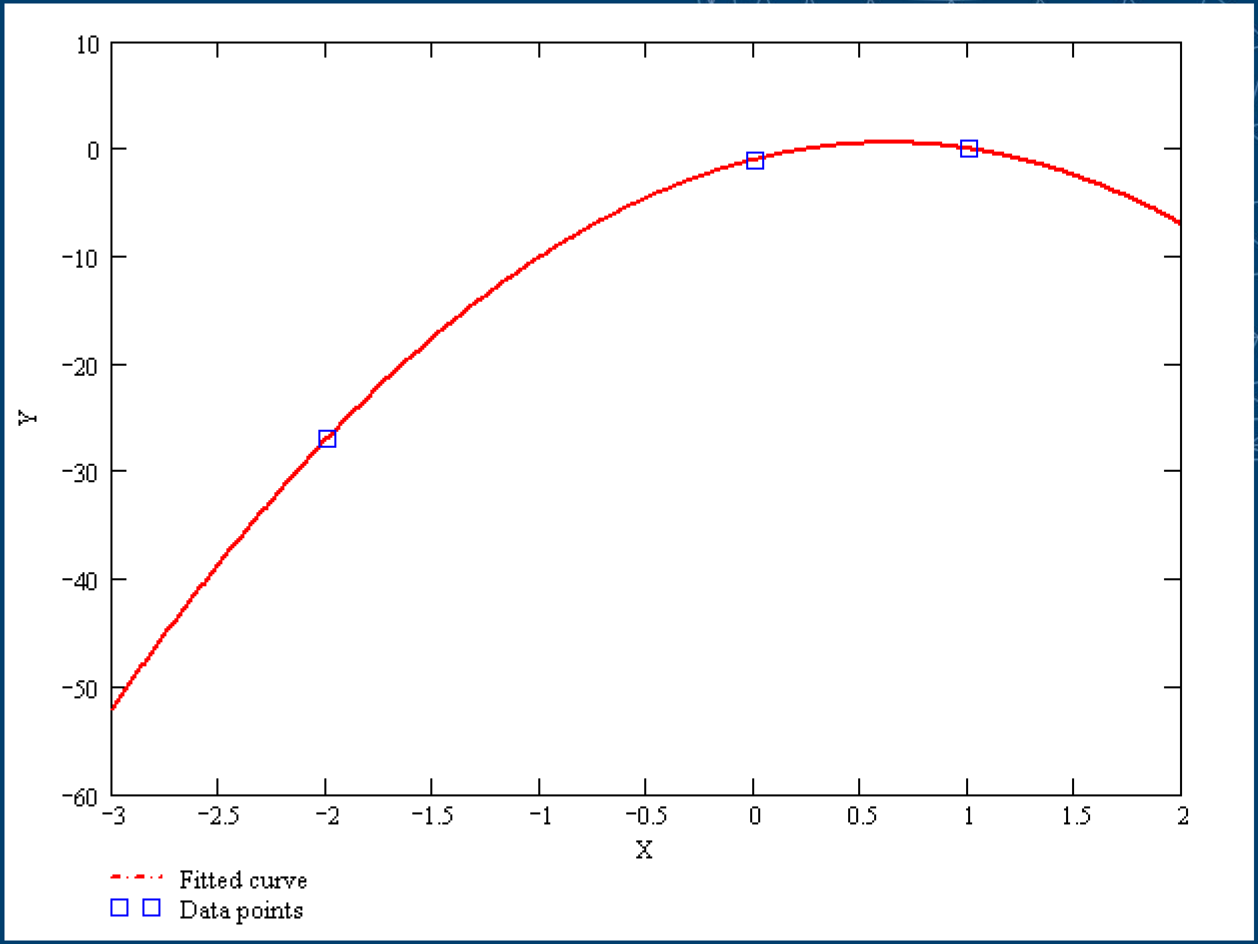
$$f(x) = -1 + 5x - 4x^2$$

Mesmo polinômio sem inversão direta de matrizes !

- **INTERPOLAÇÃO**: Lagrange

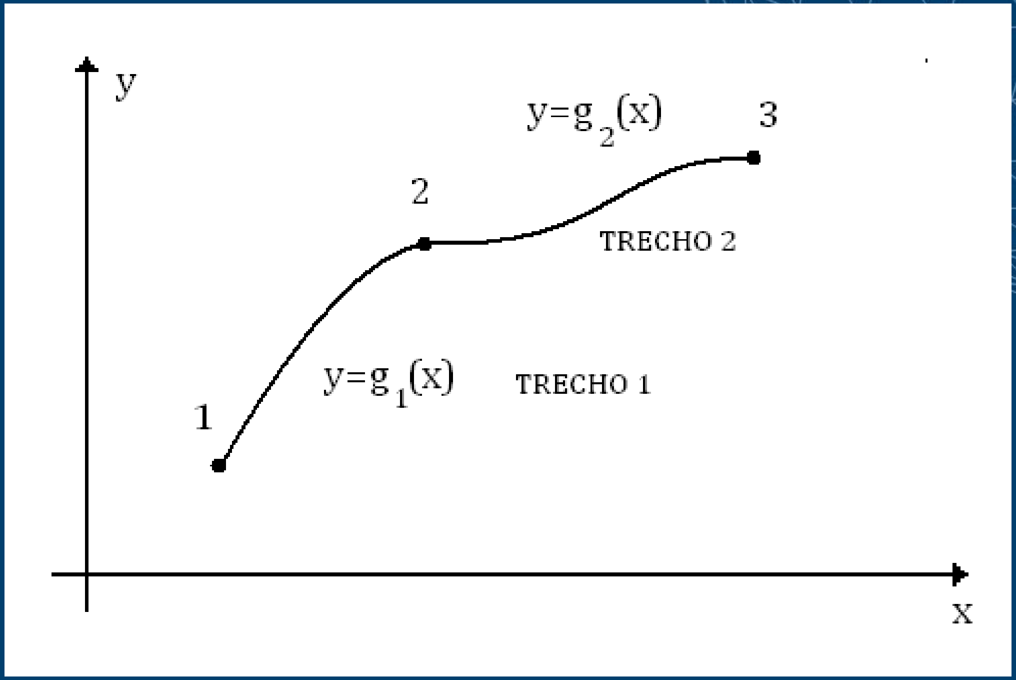


- **INTERPOLAÇÃO**: Lagrange



- **<u>INTERPOLAÇÃO</u>**: Curvas Spline

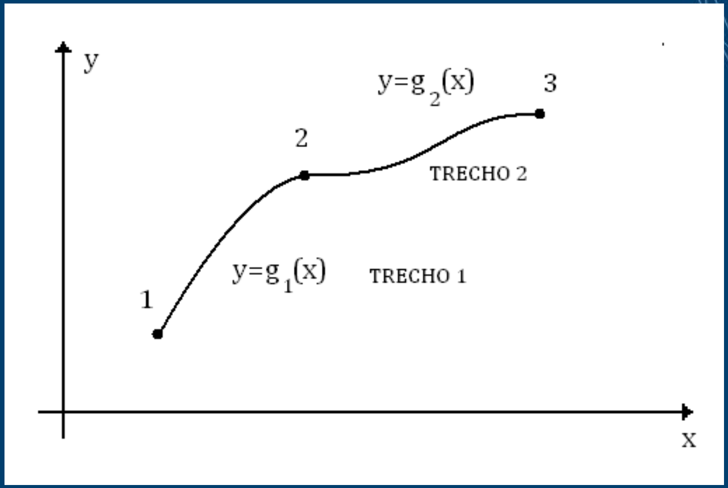
  Função contínua por partes e derivável até uma dada ordem para cada trecho.



Ex.: Garantir a continuidade da função e das derivadas no ponto 2.

- **<u>INTERPOLAÇÃO</u>**: Curvas Spline: SPLINE CÚBICA

  Spline cúbica é a mais comum entre as splines: cada trecho é representado por um polinômio cúbico completo

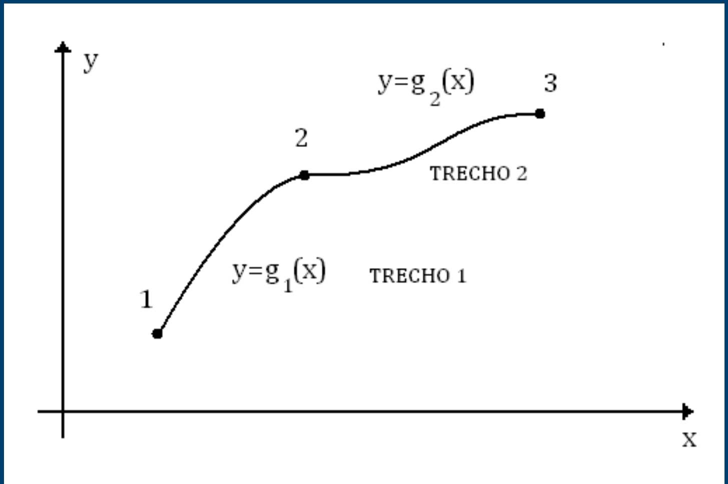


$$g_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

$$g_2(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Curvas Spline: SPLINE CÚBICA

  Obtenção dos coeficientes: continuidade da função e das derivadas nos pontos de intersecção entre os diversos trechos.



Ponto 2

$$g_1(x_2) = g_2(x_2)$$

$$g_1'(x_2) = g_2'(x_2)$$

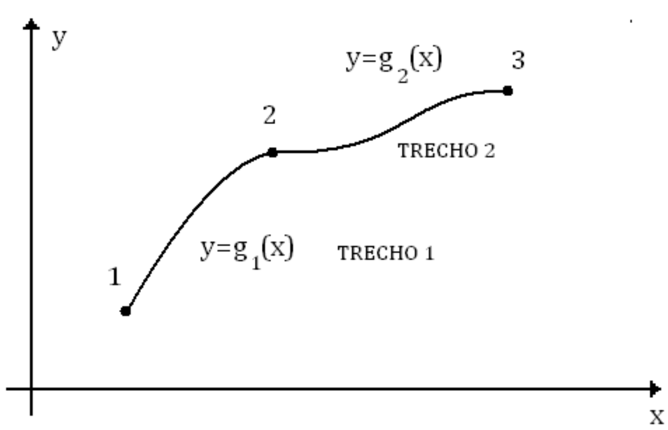
$$g_1''(x_2) = g_2''(x_2)$$

- **INTERPOLAÇÃO**:

Curvas Spline: *SPLINE* CÚBICA

Obtenção dos coeficientes: Sistema de equações

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 = y_1$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \alpha_4 x_2^3 = y_2$$
$$\beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_2^3 = y_2$$
$$\beta_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_3^2 + \beta_4 x_3^3 = y_3$$
$$\alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + 3\alpha_4 x_2^2 = \beta_2 + 2\beta_3 x_2 + 3\beta_4 x_2^2$$
$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 x_2 = 2\beta_3 + 6\beta_4 x_2$$



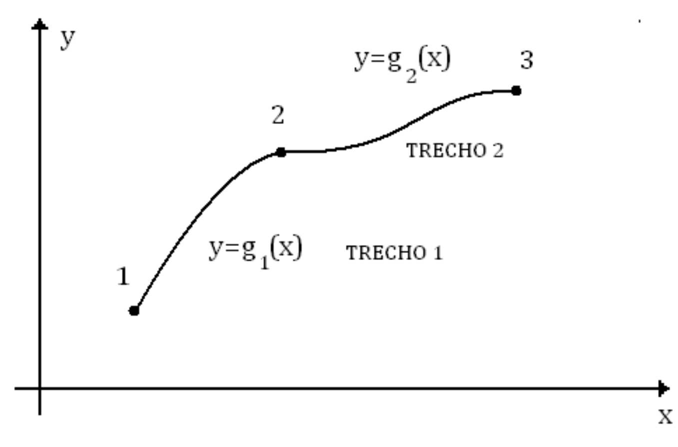
Analisando consistência (posto) : conclui-se que o **sistema não tem solução** !

- **INTERPOLAÇÃO**:

Curvas Spline: *SPLINE* CÚBICA ***Natural***

Impõe-se que a derivada segunda nos pontos finais seja igual a zero

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 = y_1$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \alpha_4 x_2^3 = y_2$$
$$\beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_2^3 = y_2$$
$$\beta_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_3^2 + \beta_4 x_3^3 = y_3$$
$$\alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + 3\alpha_4 x_2^2 = \beta_2 + 2\beta_3 x_2 + 3\beta_4 x_2^2$$
$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 x_2 = 2\beta_3 + 6\beta_4 x_2$$
$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 x_1 = 0 \rightarrow \text{Ponto 1 (inicio 1o trecho)}$$
$$2\beta_3 + 6\beta_4 x_3 = 0 \rightarrow \text{Ponto 3 (fim 2o trecho)}$$



- **<u>INTERPOLAÇÃO</u>**:

Curvas Spline: *SPLINE* CÚBICA ***<u>Natural</u>***

Derivada segunda nos pontos finais igual a zero

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1^3 = y_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \alpha_4 x_2^3 = y_2 \\ \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_2^3 = y_2 \end{array}\right\} \text{Ponto 2}$$

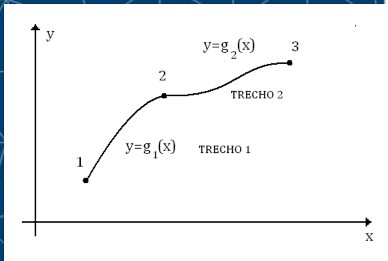
$$\beta_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_3^2 + \beta_4 x_3^3 = y_3$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + 3\alpha_4 x_2^2 = \beta_2 + 2\beta_3 x_2 + 3\beta_4 x_2^2 \\ 2\alpha_3 + 6\alpha_4 x_2 = 2\beta_3 + 6\beta_4 x_2 \end{array}\right\} \text{derivadas 1a e 2a}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha_3 + 6\alpha_4 x_1 = 0 \\ 2\beta_3 + 6\beta_4 x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{derivada 2a nos "end-points"}$$

- **INTERPOLAÇÃO**:

  Curvas *Spline*: Sistema final de equações



$$
\begin{bmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_4^3 \\
0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 0 & -1 & -2x_2 & -3x_2^2 \\
0 & 0 & 2 & 6x_2 & 0 & 0 & -2 & -6x_2 \\
0 & 0 & 2 & 6x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

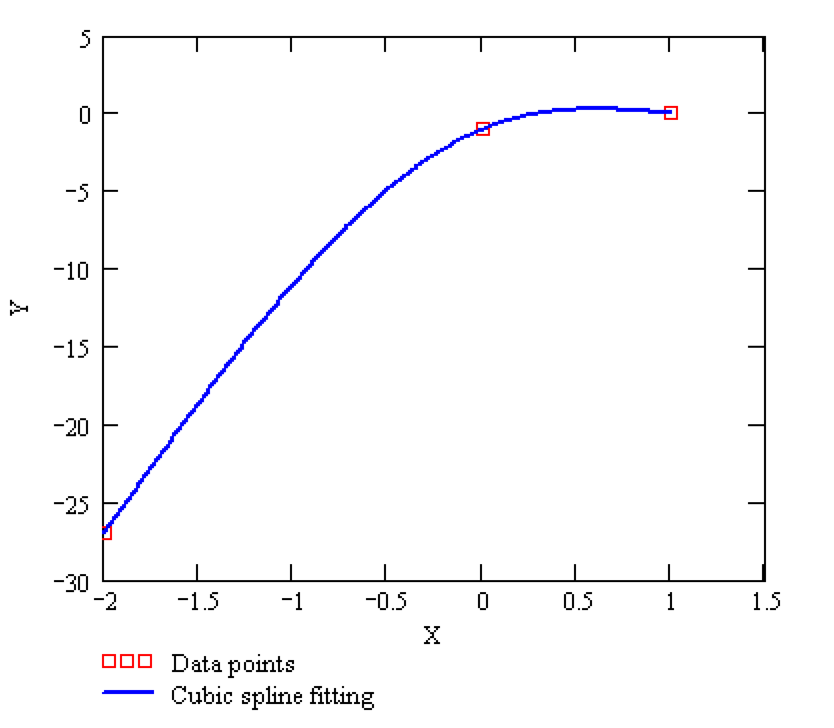
- **INTERPOLAÇÃO**: Exemplo *Spline*

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & +0 & 1 \\ \hline y & -27 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -0 \\ 0 & 0 & 2 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +5 \\ -6 \\ -1 \\ -1 \\ +5 \\ -6 \\ +2 \end{bmatrix}$$

- **INTERPOLAÇÃO**: Exemplo *Spline*

x	-2	$+0$	1
y	-27	-1	0



- **<u>INTERPOLAÇÃO</u>**:

Curvas Spline: Sistema final de equações

Regra geral:

N – número de pontos

Ordem Sistema de equações: **4(N-1)x4(N-1)**

<u>Uso somente no computador</u>

Observação:

Nunca usar para extrapolação !!