Álgebra Linear Computacional COC473

Luís Volnei S. Sagrilo
(sagrilo@coc.ufrj.br)

Programa de Engenharia Civil

COPPE/UFRJ

Primeiro Semestre/2019

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos iterativos (sistemas quadrados m=n):

  - Método JACOBI
  - Método Gauss-Seidel

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Diretos:
  - Decompõe ou invertem a matriz dos coeficientes **A**

- Métodos Iterativos
  - Resolver **AX = B** sem decompor ou inverter **A**
  - Em linhas gerais:

  $\mathbf{X}_0 \rightarrow$ vetor inicial de partida para a solução “aproximada”

  $\mathbf{X}_1 \rightarrow$ vetor atualizado (por alguma regra) da solução aproximada

  Repete-se a regra...

  $\mathbf{X}_n \rightarrow$ vetor solução (satisfaz uma tolerância para o “resíduo”)

- Métodos Iterativos: Normas de um vetor
  - Norma de ordem p

$$\|\mathbf{X}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  - Manhattan norm p=1

$$\|\mathbf{X}\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)$$

  - Norma Euclidiana (maior uso na prática) p=2

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \right)^{1/2}$$

- Métodos Iterativos: JACOBI

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Pode ser re-escrito como:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - \cdots - a_{1,n}x_n}{a_{1,1}} \\
&x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 \cdots - a_{2,n}x_n}{a_{2,2}} \\
&\vdots \\
&x_n = \frac{b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 \cdots - a_{n-1,n-1}x_{n-1}}{a_{n,n}}
\end{aligned}
$$

- Métodos Iterativos: JACOBI

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - \cdots - a_{1,n}x_n}{a_{1,1}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 \cdots - a_{2,n}x_n}{a_{2,2}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 \cdots - a_{n-1,n-1}x_{n-1}}{a_{n,n}}$$

Pode ser re-escrito como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: JACOBI
  - Passo 1: Usar um vetor solução inicial $\mathbf{X}^0$
  - Passo 2: Calcular a próxima “solução” $\mathbf{X}^1$ pela expressão recursiva

$$x_i^1 = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j} x_j^0}{a_{i,i}}$$

  - Passo 3: Verificar se o resíduo R da solução é menor que uma dada tolerância *tol* pré-estabelecida (usualmente 10^{-2} a 10^{-5})

$$R = \frac{\left\| \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 \right\|_2}{\left\| \mathbf{X}_1 \right\|_2}$$

  - Repetir passos 2 e 3 a partir do último vetor solução até que $R \leq tol$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: JACOBI

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1 + 1 \times 1 + 1 \times 1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = \frac{2 + 1 \times 1 + 1 \times 1}{3} = 4/3 = 1.33$$

$$x_3^1 = \frac{1 + 1 \times 1 + 1 \times 1}{3} = 1$$

$$\mathbf{X}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1.33 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{\left\| \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 \right\|_2}{\left\| \mathbf{X}_1 \right\|_2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (0.33)^2 + (0)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (1.33)^2 + (1)^2}} = 0.171$$

- Métodos Iterativos: JACOBI
  - Exemplo:

ITER	X_i	X_{i+1}	R
1	$(1.000,1.000,1.000)^T$	$(1.000,1.333,1.000)^T$	0.171
2	$(1.000,1.333,1.000)^T$	$(1.111,1.333,1.113)^T$	0.076
...			
12	$(1.246,1.496,1.246)^T$	$(1.247,1.497,1.247)^T$	9.98×10^{-4}

  - Solução exata

$$\mathbf{X} = (1.25, 1.50, 1.25)^T$$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: JACOBI
  - Condição para convergência da solução:

    A matriz **A** deve ser **diagonal dominante**, i.e., as seguintes condições devem ser atendidas:

$$\left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \qquad \text{para todas as linhas}$$

$$\left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{j,i}\right| \qquad \text{para todas as colunas}$$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: JACOBI
  - Exemplo que **NÃO** converge

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$\text{linha } 1: |1| < |2| + |2|$$

$$\text{linha } 2: |4| < |4| + |2|$$

$$\text{linha } 3: |4| < |4| + |6|$$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: Gauss-Seidel
  - Passo 1: Usar um vetor solução inicial $\mathbf{X}_0$
  - Passo 2: Calcular a próxima "solução" $\mathbf{X}_1$ pela expressão recursiva

$$x_i^1 = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{o\,(old)}}{a_{i,i}}$$

  - Passo 3: Verificar se o resíduo R da solução é menor que uma dada tolerância *tol* pré-estabelecida (usualmente 10^{-2} a 10^{-5})

$$R = \frac{\left\| \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 \right\|_2}{\left\| \mathbf{X}_1 \right\|_2}$$

  - Repetir passos 2 e 3 a partir do último vetor solução até que R≤*tol*

(USA A INFORMAÇÃO JÁ DISPONÍVEL)

- Métodos Iterativos: Gauss-Seidel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1+1\times1+1\times1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = \frac{2+1\times1+1\times1}{3} = 4/3 = 1.33$$

$$x_3^1 = \frac{1+1\times1+1\times1.33}{3} = 1.111$$

$$\mathbf{X}_1^T = [1 \quad 1.33 \quad 1.111]$$

$$R = \frac{\left\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\right\|_2}{\left\|\mathbf{X}_1^0\right\|_2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (0.33)^2 + (0.111)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (1.33)^2 + (1.111)^2}} = 0.175$$

- Métodos Iterativos: Gauss-Seidel
  - Exemplo:

ITER	X_i	X_{i+1}	R
1	$(1.000,1.000,1.000)^T$	$(1.000,1.333,1.111)^T$	0.175
2	$(1.000,1.333,1.111)^T$	$(1.148,1.420,1.189)^T$	0.087
...			
7	$(1.248,1.499,1.249)^T$	$(1.249,1.499,1.249)^T$	7.44×10^{-4}

  - Solução exata

$$\mathbf{X} = (1.25, 1.50, 1.25)^T$$

SOLUÇÃO ITERATIVA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos Iterativos: Gauss-Seidel
  - Convergência:

    Valem as mesmas condições do método de JACOBI, porém, se a matriz for simétrica e positiva definida a convergência é sempre garantida.