Álgebra Linear Computacional COC473

Luís Volnei S. Sagrilo
(sagrilo@coc.ufrj.br)

Programa de Engenharia Civil

COPPE/UFRJ

Primeiro Semestre/2019

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Muitos casos práticos de engenharia recaem num sistema linear de equações:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n
\end{aligned}
$$

$a_{i,j}$ – coeficientes/constantes do sistema

x_i – incógnitas do sistema

b_i – termos independentes

n – número de equações

m – número de incógnitas

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Na forma matricial:

$$\mathbf{A}_{n,m}\mathbf{X}_m = \mathbf{B}_n$$

$$\mathbf{A}_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

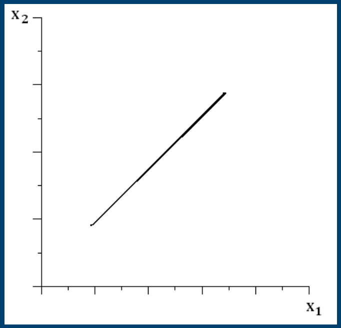
- Sistema quadrado (quando m=n)

  Neste caso a solução **X** é dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad \det(\mathbf{A}) \neq 0.0$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

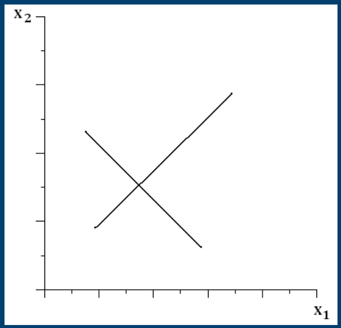
- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares
  - Sistemas Consistentes: existe solução (pode não ser única). Exemplos:



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Infinitas soluções (duas retas coincidentes) :

- Qualquer uma que satisfaça $x_1 + 2x_2 = 3$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{Sol. Única}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

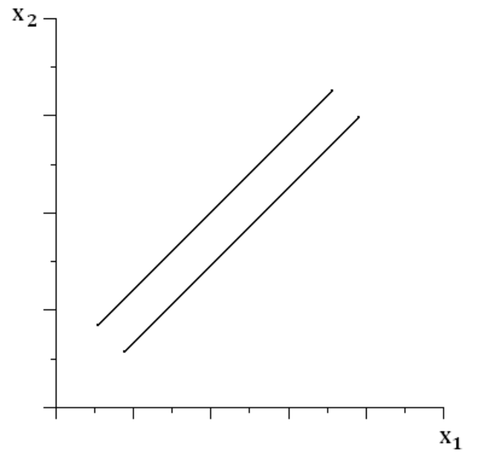
- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares
  - Sistemas <u>Inconsistentes</u>: não existe solução.

    Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

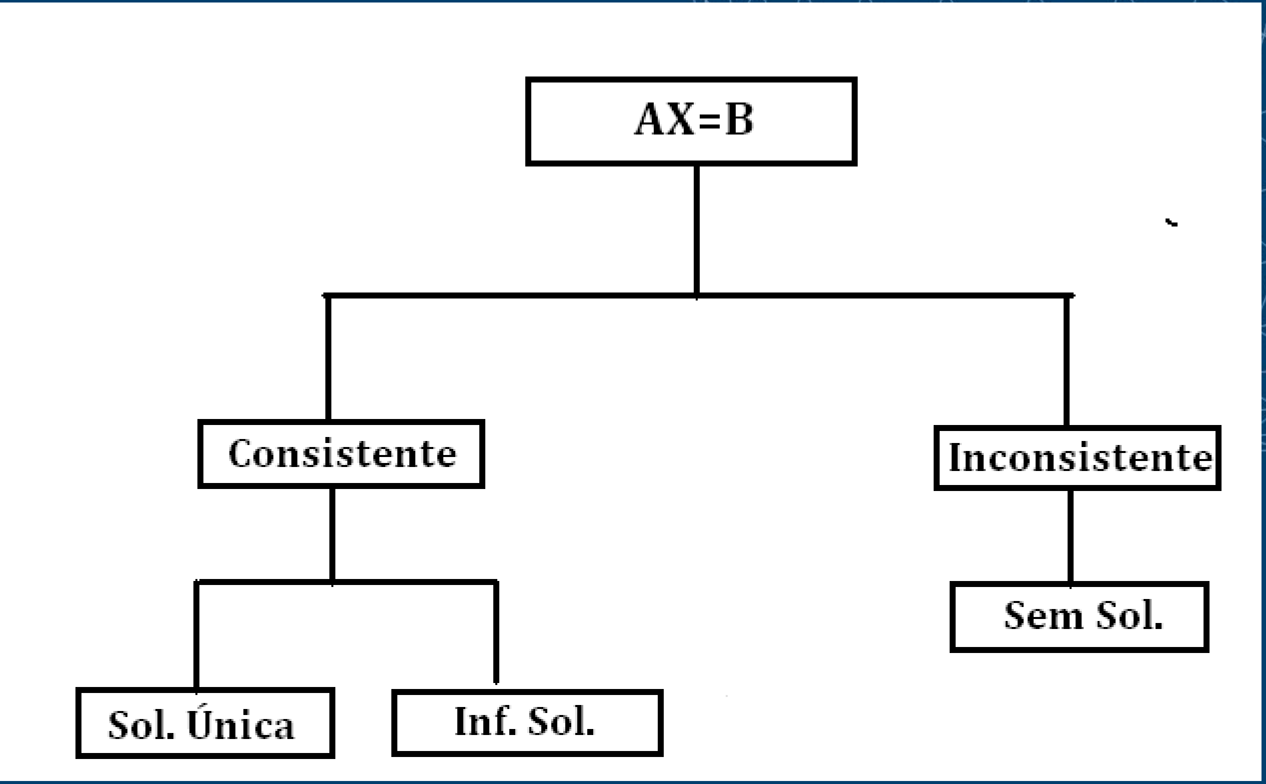
Duas retas paralelas : nunca se encontram

Sistema sem solução!



SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares: RESUMO



SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares
  - Critério Matemático para definir o tipo de solução

    Matriz Aumentada:

$$\mathbf{C}_{m,m+1} = \left[\mathbf{A} \quad \middle| \mathbf{B}\right]$$

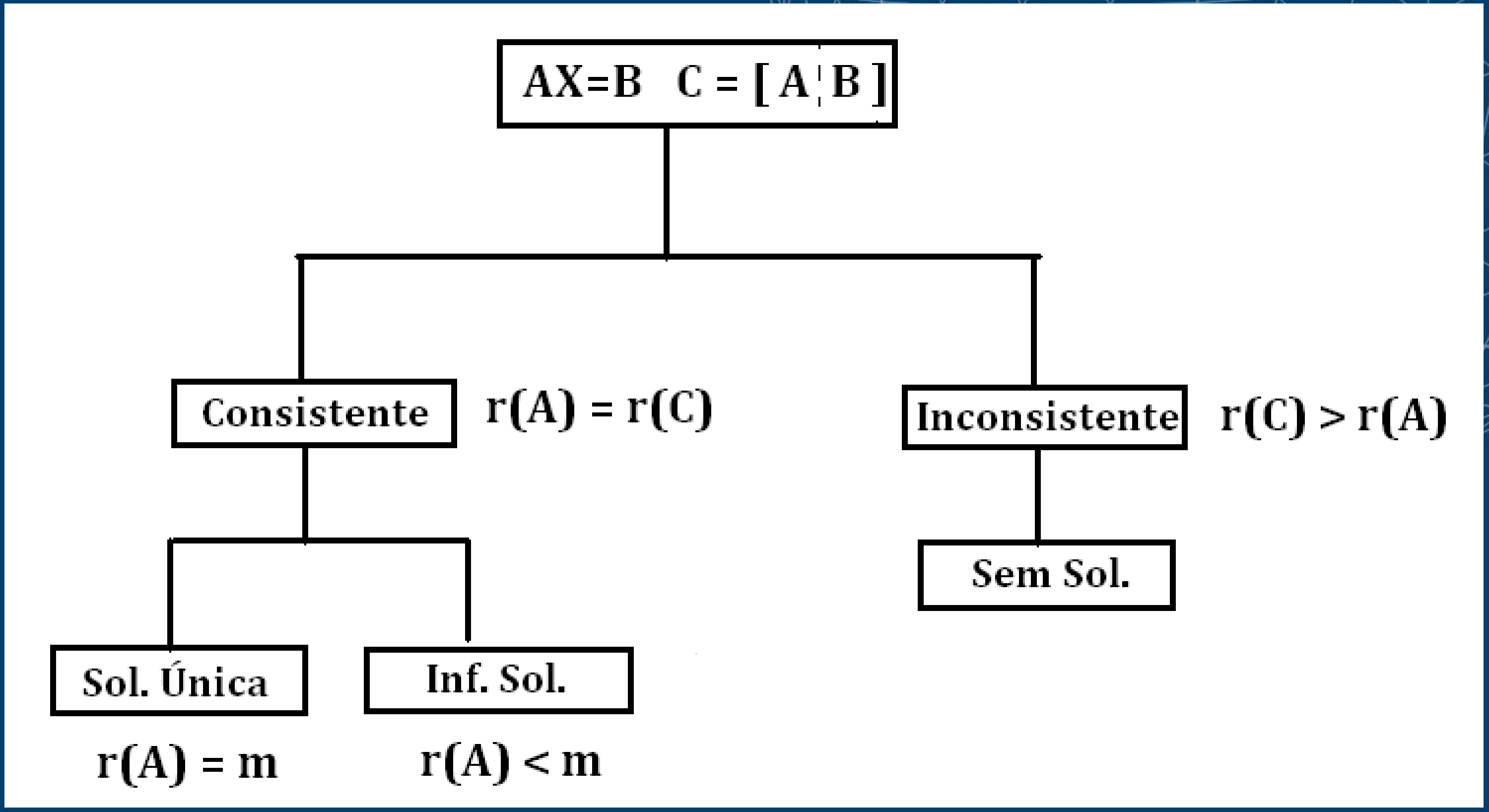
$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & b_m \end{array}\right]$$

m = número de incógnitas

- CONSISTENTE: r(**A**) = r(**C**)
  - Solução Única: r(**A**) = r(**C**) = m
  - Infinitas soluções: r(**A**) = r(**C**) < m
- INCONSISTENTE: r(**A**) < r(**C**)

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares: RESUMO



m – número de incógnitas do sistema

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Solução Geral de Sistemas de Equações Lineares: EXEMPLOS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(\mathbf{A}) = 2 = r(\mathbf{C}) = m \rightarrow \text{Sol. Única}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r(\mathbf{A}) = 1 = r(\mathbf{C}) < m \rightarrow \text{Infinitas soluções}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$r(\mathbf{A}) = 1 < r(\mathbf{C}) = 2 \rightarrow \text{Sem solução "exata" possível}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Métodos diretos de solução (sistemas quadrados m=n):

  - Matriz Inversa ($\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$) se det($\mathbf{A}$) $\neq 0$ (ok.)
  - Método de Eliminação de Gauss
  - Método de Eliminação Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
  - Método da Decomposição de Cholesky
  - SVD – Singular Value Decomposition (opcional)

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss:
  - Introdução/observações importantes:

1) Se a matriz dos coeficientes for do tipo triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim por diante...

Algoritmo→ Retro-substituição

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \qquad i = \text{n-1, n-2,...,1}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss:
  - Introdução/observações importantes:

2) A pré-multiplicação do sistema de equações por uma matriz **M** não singular qualquer não altera a solução do problema.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{Solução clássica.}$$

$$\mathbf{MAX} = \mathbf{MB} \qquad \mathbf{M} \rightarrow \text{não singular}$$

$$\underbrace{(\mathbf{MA})^{-1}\mathbf{MA}}_{\mathbf{I}}\mathbf{X} = (\mathbf{MA})^{-1}\mathbf{MB}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

- Eliminação de Gauss:
  - Introdução/observações importantes:

3) Matriz de Combinação de Linhas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} + a_{1,1} & a_{2,2} + a_{1,2} & a_{2,3} + a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Podemos também escrever :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{MA} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M} \rightarrow$ matriz de combinação de linhas

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss:
  - Introdução/observações importantes:

3) Matriz de Combinação de Linhas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} + \alpha a_{1,1} & a_{2,2} + \alpha a_{1,2} & a_{2,3} + \alpha a_{1,3} \\ a_{3,1} + \beta a_{1,1} & a_{3,2} + \beta a_{1,2} & a_{3,3} + \beta a_{1,3} \end{bmatrix}$$

Podemos também escrever :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}\mathbf{A} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M} \rightarrow$ matriz de combinação de linhas

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss:
  - Síntese do Método: pré-multiplicar o sistema de equações original quadfrdo de ordem n(**AX = B)** por n-1 matrizes M (combinações de linhas) de forma a tornar o "sistema equivalente" cuja matriz dos coeficientes seja uma matriz triangular superior e depois usar a retro-substituição para obter a solução.

$$\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\cdots\mathbf{M}_{1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{M}_{n-1}\mathbf{M}_{n-2}\cdots\mathbf{M}_{1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{B}' \quad \rightarrow \mathbf{U}: \text{triangular superior}$$

  - Observação: cada matriz M_i zera todos os elementos abaixo da diagonal principal da i-ésima coluna.

- Eliminação de Gauss: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Retro - substituição}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss: Na prática as matrizes $\mathbf{M}_i$ não são explicitamente escritas. Opera-se diretamente sobre os termos da matriz **A** e do vetor **B**.
- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \qquad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_1\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Retro} \rightarrow \begin{matrix} -x_3 = 1 \rightarrow x_3 = -1 \\ -4x_2 - 6x_3 = -6 \rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \rightarrow x_1 = -1 \end{matrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss: **PIVOTAMENTO**

$$\mathbf{M}_{k-1}\cdots\mathbf{M}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & a_{k,k} & & a_{k,m} & & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & a_{m,k} & & a_{m,m} & & a_{m,n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & a_{n,k} & & a_{n,m} & & a_{n,n} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & -a_{m,k}/a_{k,k} & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & -a_{n,k}/a_{k,k} & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Caso $a_{k,k} = 0$ a matriz M_k ficaria indefinida.

Entretanto podemos observar que a troca de ordem das linhas não altera o sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{Bmatrix}$$

- Solução: permutar a próxima linha da matriz que na coluna k o termo $a_{m,k}$ não seja nulo com a k-ésima linha. (permutação de linhas).

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss: **PIVOTAMENTO**

  Para trocar as linhas k e m de **A** basta pré-multiplicar **A** por **P**:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & 0 & & 1 & & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & & 1
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{linha k} \\ \\ \text{linha m} \\ \\ \\
\end{array}
$$

  P é obtida trocando-se as linhas k e m de uma matriz identidade de mesma ordem que **A**.

- Assim sempre que houver PIVOT NULO usa-se uma matriz de permutação **P** antes de multiplicar por $\mathbf{M}_k$

$$\mathbf{PA}' = \mathbf{PB}' \quad \text{(não altera a solução)}$$

$$\mathbf{M}_k\mathbf{PA}' = \mathbf{M}_k\mathbf{PB}'$$

SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss: Exemplo **PIVOTAMENTO**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} +7 \\ +4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1 B = \begin{bmatrix} +7 \\ +4 \\ +0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +7 \\ +4 \\ +0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Retro} \rightarrow \begin{array}{c} -x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = +4 \rightarrow x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \rightarrow x_1 = -1 \end{array} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +4 \\ +0 \end{bmatrix}$$