Álgebra Linear Computacional COC473

Luís Volnei S. Sagrilo

(sagrilo@coc.ufrj.br)

Programa de Engenharia Civil

COPPE/UFRJ

Primeiro Semestre/2019

CONTEÚDO PREVISTO

- ***Revisão de Matrizes***
- ***Sistemas de Equações Lineares***
  - Métodos Diretos de Solução
  - Métodos Iterativos de Solução
- ***Autovalores/Autovetores***
- ***Interpolação/Ajuste de Curvas***
  - Mínimos Quadrados
  - Técnica Splines
- ***Sistemas de Equações Não-Lineares***
- ***Integração/Diferenciação Numérica***
- ***Solução Numérica de Equações Diferenciais***

BIBLIOGRAFIA

- Gere, J. and Weaver, W. – Matrix Algebra for Engineers, 2nd Edition, Brooks, 1983.
- Heath, M. T. – Scientific Computing: An Introductory Survey, 2nd dition,McGraw-Hill, 2002
- Outros livros sobre Cálculo Numérico;
- Notas/Slides das aulas
- Listas de Exercícios (trabalhos implementados em computador: 30% da P1 e da P2)

PROVAS/AVALIAÇÕES

- Duas Provas: P1 e P2
- Média = (P1+P2)/2.0
- Média ≥ 7.0 : Aprovação por Média (APR)
- Média < 7.0 : Prova Final (PF)
- Media < 3.0 : Reprovado direto (REP)
- Aprovação com Prova Final ((Média+PF)/2.0) ≥ 5.0
- Lista de presença (ou chamada) toda aula

REVISÃO: MATRIZES

- Definição: Uma forma organizada de armazenamento de dados
- Uso: Estão intimamente ligadas ao desenvolvimento da tecnologia dos computadores
- Formalmente: um arranjo retangular para armazenar dados

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

m – número de linhas

n – número de colunas

$a_{i,j}$ – elemento localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna

REVISÃO: MATRIZES

- Dimensão de uma matriz : m x n (Bi-dimensional)

  m x n x p (Tri-dimensional)

- Vetores: Matrizes unidimensionais
  - Matriz/Vetor Coluna (m x 1)

$$\mathbf{A}_{m\,x1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

  - Matriz/Vetor Linha (1 x n)

$$\mathbf{A}_{1xn} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

  - Notação

    A ou <u>A</u>

REVISÃO: MATRIZES

- Matriz Quadrada: m x n (m=n)

$$\mathbf{A}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz Diagonal: matriz quadrada com elementos não nulos apenas na diagonal (a_{ii})

$$\mathbf{A}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & 3 & \\ \mathbf{0} & & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz Identidade: Matriz (diagonal) com todos os termos $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (δ - Delta de Kronecker = 1 se i= j e 0 i $\neq$ j)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REVISÃO: MATRIZES

- Matriz Triangular Superior:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} \neq 0 \text{ quando } i \leq j \\ = 0 \text{ quando } i > j \end{bmatrix}$$

- Matriz Triangular Inferior

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} = 0 \text{ quando } i < j \\ \neq 0 \text{ quando } i \geq j \end{bmatrix}$$

REVISÃO: MATRIZES

- Matriz Tansposta: $\mathbf{A}^T$ é uma matriz cujas colunas correspondem às linhas de **A** e as linhas correspondem às colunas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\left(a_{i,j}\right)^T = a_{j,i}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

REVISÃO: MATRIZES

- Matriz Simétrica: $a_{i,j}=a_{j,i}$ ($\forall$ i, j)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz Anti-Simétrica: $a_{i,j} = -a_{j,i}$ ($\forall$ i, j e i$\neq$j)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +4 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & +1 & +2 \end{bmatrix}$$

REVISÃO: MATRIZES

- Traço de uma matriz: tr(**A**) é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} = 1 + 4 + 12 = 17$$

- Posto (“rank”) de uma matriz: r(**A**) é o número de linhas (ou colunas) de uma matriz que são linearmente independentes (LI) entre si.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_3 = 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

$$r(\mathbf{A}) = 1$$

O posto de **A** é a ordem da maior sub-matriz de **A** com determinante não nulo

REVISÃO: OPERAÇÕES COM MATRIZES

- Adição/subtração: matrizes de mesma ordem

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \qquad a_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j}$$

- Multiplicação: o número de colunas de **B** deve ser igual ao número de linhas de **C**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathrm{x}\mathbf{C} \qquad a_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} b_{i,k} \,\mathrm{x}\, c_{k,j}$$

Produto interno da linha i pela coluna j

$$\mathbf{B}\mathrm{x}\mathbf{C} \neq \mathbf{C}\mathrm{x}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}_{n,l} \,\mathrm{x}\, \mathbf{C}_{l,m} = \mathbf{A}_{n,m}$$

REVISÃO: MATRIZES ESPECIAIS

- Matriz Inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathrm{x} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathrm{x} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Matriz Ortogonal : a inversa é igual a sua transposta

$$\mathbf{A}^{T} \mathrm{x} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathrm{x} \mathbf{A}^{T} = \mathbf{I}$$

ou seja

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$$

- Outras propriedades

$$(\mathbf{A}\mathrm{x}\mathbf{B})^{T} = \mathbf{B}^{T}\mathrm{x}\mathbf{A}^{T}$$

$$(\mathbf{A}\mathrm{x}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathrm{x}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\alpha \mathrm{x}\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{x}\mathbf{A}^{-1}$$

REVISÃO: DETERMINANTE DE MATRIZ (Quadrada)

- Notação: det(**A**) ou |**A**|
- Definição: o determinante de uma matriz A_{nxn} é uma grandeza escalar calculada recursivamente da seguinte forma:

  a) se n = 1 → det(**A**) = $a_{1,1}$

  b) se n > 1

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,1}(-1)^{k+1} M_{k,1}(\mathbf{A}')$$

  onde $M_{i,j}$ (**A**′) é o determinante de uma matriz auxiliar $\mathbf{A}'_{(n-1),(n-1)}$ obtida a partir da eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna de **A**

- Obs: o termo $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}(\mathbf{A}')$ é chamado de i-ésimo, j-ésimo **cofator** de **A**

REVISÃO: PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$
- o determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) ou de uma matriz diagonal é o produto dos elementos da diagonal principal.
- $\det(\mathbf{A}x\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- se $\det(\mathbf{A}) = 0.0$ – matriz chamada singular - existem linhas (ou colunas) L.D. em **A**

  (matriz singular – posto sempre menor que n)

- se $\det(\mathbf{A}) \neq 0.0$ existe $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{Adj}(\mathbf{A})$$

  - Adj(**A**) é a matriz transposta da matriz cofatora **A**′ cujo termo $a'_{i,j}$ corresponde ao cofator $C_{i,j}$ de **A**

REVISÃO: MATRIZES ESPECIAIS

- Matriz Positiva Definida

  Se $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} > 0$ para todo e qualquer vetor $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ é dita ser uma matriz positiva definida.

- **A** e **B** são positivas definidas?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Uso: Auto-valores e auto-vetores

Solução de sistemas lineares de equações

REVISÃO: MATRIZES ESPECIAIS

- Matriz Positiva Definida: Propriedades

✓ Todos autovalores são positivos (*suficiente*)

✓ Todos os pivôs na eliminação de Gauss são positivos (sem pivotamento)

✓ Os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_{nxn}$ não podem ser menores que 0.0 (*necessária*)

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & x_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{i,i} (x_i)^2$$

✓ Todos os menores* de $\mathbf{A}_{nxn}$ tem determinantes positivos (*suficiente*)

* Menor de ordem m (m≤n):

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}$$

REVISÃO: FORMA QUADRÁTICA

- $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$
- $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada, simétrica e não nula
- $\mathbf{X}$ vetor coluna

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- O Gradiente de $f(\mathbf{X})$ é dado por

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2\mathbf{A}\mathbf{X}$$

- Verifique!!!