



# *Álgebra Linear Computacional COC473*

**Luís Volnei S. Sagrilo**  
(sagrilo@coc.ufrj.br)

**Programa de Engenharia Civil**

**COPPE/UFRJ**

*Primeiro Semestre/2019*



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Métodos (sistemas quadrados  $m=n$ ):
  - Matriz Inversa ( $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ) se  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  (ok.)
  - Método de Eliminação de Gauss ✓
  - Método de Eliminação Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
  - Método da Decomposição de Cholesky
  - SVD – Singular Value Decomposition (opcional)



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Eliminação de Gauss:

- Introdução/observações importantes:

1) Se a matriz dos coeficientes for do tipo triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim por diante...

Algoritmo → Retro-substituição

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$





# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## • Eliminação de Gauss Jordan:

- Síntese do Método: continuar a pré-multiplicar o sistema de equações original ( $U'X = B'$ ) **obtido no processo de eliminação de Gauss** por  $n-1$  matrizes  $M$  (matrizes de combinações de linhas) de forma a tornar a matriz dos coeficientes do “sistema equivalente” numa matriz diagonal.

$$\underbrace{M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_1}_{\text{Elim. Gauss}}AX = \underbrace{M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_1}_{\text{Elim. Gauss}}B$$

$$UX = B' \rightarrow U : \text{triangular superior}$$

$$\underbrace{M_{n-1}^*M_{n-2}^*\cdots M_1^*}_{D}UX = \underbrace{M_{n-1}^*M_{n-2}^*\cdots M_1^*}_{B''}B'$$

$$DX = B'' \rightarrow D : \text{Matriz diagonal} \rightarrow X_i = \frac{b_i''}{d_{i,i}}$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Eliminação de Gauss: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 \mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Retro}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_{1,3}/a''_{3,3} \\ 0 & 1 & -a'_{2,3}/a''_{3,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^* \mathbf{B}' = \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -a_{1,2}/a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{U}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{bmatrix} \leftarrow x_1 = b''_1 / a_{1,1} \text{ e assim para os outros coef.}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 \mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Retro} \rightarrow \begin{array}{l} -x_3 = 1 \rightarrow x_3 = -1 \\ -4x_2 - 6x_3 = -6 \rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \rightarrow x_1 = -1 \end{array} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1/(+1) \\ -12/(-4) \\ +1/(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$





# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Exemplo: Fazendo mais uma operação

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} +5 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* = \begin{bmatrix} 1/1 & & 0 \\ 0 & 1/(-4) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* \begin{bmatrix} -1 \\ -12 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} +3 \\ -6 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obs.: } \underbrace{\mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{U} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{A})$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: inversão de matrizes

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3] = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \\ b_{3,i} \end{bmatrix}$$

Repetindo as operações

$$\underbrace{\mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3] = \mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3]$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Eliminação de Gauss-Jordan: inversão de matrizes

$$\text{Se } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo - se que

$$\underbrace{\mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\underbrace{[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_3]}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}_{\mathbf{A}^{-1}} \underbrace{[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3]}_{\mathbf{B} \equiv \mathbf{I}}$$

então

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo: Inversão de Matrizes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 \mathbf{B} = \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$





# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## • Exemplo: Inversão de Matrizes (cont.)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \mathbf{M}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^* \mathbf{B} = \mathbf{M}_1^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{B} = \mathbf{M}_2^* \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Exemplo: Inversão de matrizes (cont.)

$$\mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* = \begin{bmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(-4) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3^* \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \mathbf{B} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Na prática as matrizes  $M_i$  não são explicitamente escritas. Opera-se diretamente sobre os termos da matriz  $A$  e do vetor/matriz  $B$ .
- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_B$$
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{L3}^n \rightarrow -4\text{L1} + \text{L3}]{\text{L2}^n \rightarrow -4\text{L1} + \text{L2}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{L3}^n \rightarrow -\text{L2}/2 + \text{L3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{L2}^n \rightarrow -6\text{L3} + \text{L2}]{\text{L1}^n \rightarrow 2\text{L3} + \text{L1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{L1}^n \rightarrow \text{L2}/2 + \text{L1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{L3}^n \rightarrow \text{L3}/(-1)]{\text{L2}^n \rightarrow \text{L2}/(-4)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Eliminação de Gauss-Jordan: Inversão
- Exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L2^n \rightarrow -4L1 + L2 \\ L3^n \rightarrow -4L1 + L3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L3^n \rightarrow -L2/2 + L3} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L1^n \rightarrow 2L3 + L1 \\ L2^n \rightarrow -6L3 + L2}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L1^n \rightarrow L2/2 + L1} \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L1^n \rightarrow L1/1 \\ L2^n \rightarrow L2/(-4) \\ L3^n \rightarrow L3/(-1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 \end{array} \right] \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3/2 \\ 2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$





# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição LU

- Na decomposição de Gauss

$$\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

- As matrizes de combinação de linhas  $\mathbf{M}_i$  tem as seguintes propriedades:

- São triangulares inferiores com 1 nos elementos da diagonal principal
- A inversa  $\mathbf{M}_i^{-1}$  é também uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos da diagonal principal
- O produto  $\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1$  é uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos da diagonal
- A inversa de  $\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1$ , i.e.,  $(\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1)^{-1}$  é uma matriz triangular inferior com 1 nos elementos na diagonal principal ( $\mathbf{L} = (\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1)^{-1}$ )

- Portanto:

$$\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU}$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição LU
- A decomposição de Gauss pode ser vista como nada mais que a decomposição da matriz dos coeficientes  $A$  no produto de uma matriz triangular inferior  $L$  por uma matriz triangular superior  $U$

$$A=LU$$

- Exemplo



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

## • Decomposição LU : Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1)^{-1} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$



## DETALHES da DECOMPOSIÇÃO LU

- Eliminação de Gauss: Exemplo (3x3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & a'_{3,2} & a'_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 \mathbf{A}' = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \underbrace{(\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1)^{-1}}_{\mathbf{L}} \mathbf{U} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{U}$$





## DETALHES da DECOMPOSIÇÃO LU

- Exemplo (3x3)

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ -a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1^{-1} = \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1}/a_{1,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1}/a_{1,1} & a'_{3,2}/a'_{2,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}_i$  é igual a matriz  $\mathbf{M}_i$  com os elementos fora da diagonal multiplicados por (-1).



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição LU

- Qualquer matriz quadrada não singular  $A$  pode ser decomposta em  $A = LU$
- Observando-se as operações matemáticas envolvidas é possível obter um algoritmo simples para decompor  $A$  em  $LU$
- Algoritmo (sem pivotamento)

```
A(N,N)
DO K = 1, N-1
  DO I = K+1,N
    A(I,K) = A(I,K) / A(K,K)
  ENDDO
  DO J = K+1,N
    DO I = K+1,N
      A(I,J) = A(I,J) - A(I,K) * A(K,J)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição LU : Dados armazenados/processados pelo algoritmo

**Entrada**       $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$

**Saída**       $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ l_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ l_{3,1} & l_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}$

Lembrando que  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição LU : Solução de um sistema  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{L}\underbrace{\mathbf{UX}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \text{Resolve-se } \mathbf{Y} \text{ facilmente por substituição "para frente"}$$

Depois

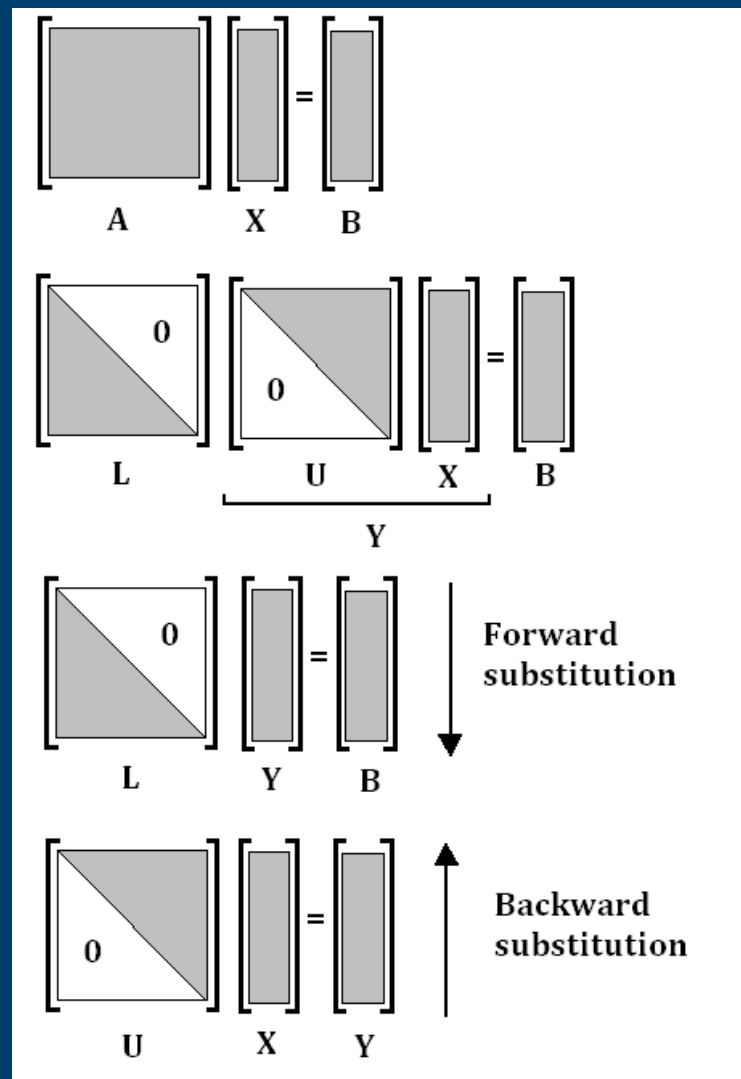
$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \quad \text{Resolve-se } \mathbf{X} \text{ facilmente por retro - substituição}$$





# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## • Decomposição LU : Solução de um sistema $AX=B$



Substituição para a frente

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j}{l_{i,i}} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Retro-substituição

$$x_n = \frac{y_n}{u_{n,n}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} y_j}{u_{i,i}} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

## • Decomposição LU : Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{UX}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{UX} = \mathbf{Y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



# SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Decomposição de Cholesky:

Se  $A$  for uma matriz simétrica positiva definida é possível demonstrar que:

$$A = LL^T \quad U = L^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$U = L^T = \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{bmatrix}$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição de Cholesky: Algoritmo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$(l_{1,1})^2 = a \quad \rightarrow l_{1,1} = +\sqrt{a}$$

$$l_{1,1} \times l_{2,1} = b \quad \rightarrow l_{2,1} = b / l_{1,1}$$

$$(l_{2,1})^2 + (l_{2,2})^2 = c \quad \rightarrow l_{2,2} = +\sqrt{c - (l_{2,1})^2}$$





# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

- Decomposição de Cholesky: Algoritmo Genérico

$\mathbf{A}(N, N)$

$i = 1, 2, \dots, N$

$$l_{i,i} = \left( a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{i,k})^2 \right)^{1/2}$$

$j = i + 1, i + 2, \dots, N$

$$l_{j,i} = \frac{1}{l_{i,i}} \left( a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} l_{j,k} \right)$$

- Solução de um sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$  usa os mesmos dois processos de substituição (“para frente e para trás”) da decomposição LU



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

## • Decomposição de Cholesky: Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{1,1} = +\sqrt{1} = +1$$

$$l_{2,1} = \frac{1}{1} \left( 0.2 - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \right) = 0.2$$

$$l_{3,1} = \frac{1}{1} \left( 0.4 - \sum_{k=1}^0 l_{1,k} \right) = 0.4$$

$$l_{2,2} = \left( 1 - \sum_{k=1}^1 (l_{2,k})^2 \right)^{1/2} = (1 - 0.2^2)^{1/2} = 0.9798$$

$$l_{3,2} = \frac{1}{0.9798} \left( 0.5 - \sum_{k=1}^1 l_{2,k} l_{3,k} \right) = \frac{1}{0.9798} (0.5 - 0.2 \times 0.4) = 0.429$$

$$l_{3,3} = \left( 1 - \sum_{k=1}^2 (l_{3,k})^2 \right)^{1/2} = (1 - 0.4^2 - 0.429^2)^{1/2} = 0.81009$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.98 & 0 \\ 0.4 & 0.43 & 0.81 \end{bmatrix}$$



# *SOLUÇÃO DIRETA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES*

## • Decomposição de Cholesky: Exemplo

Sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} +0.6 \\ -0.3 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.98 & 0 \\ 0.4 & 0.43 & 0.81 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.40 \\ 0 & 0.98 & 0.43 \\ 0 & 0 & 0.81 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LUX} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{LY} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \mathbf{UX} = \mathbf{Y}$$

$$\text{Resolvendo para } \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} +0.600 \\ -0.429 \\ -0.810 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolvendo para } \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} +1.000 \\ -0.000 \\ -1.000 \end{bmatrix}$$