

RELATÓRIO FINAL DE ATIVIDADES DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Análise de variância utilizando o software R em problemas de Engenharia
Análise Estatística de Dados de Engenharia da UTFPR Utilizando o
Software R

Felipe Testa de Souza

Bolsista Fundação Araucária

Engenharia Química

Data de ingresso no programa: 10/2023

Profa. Dra. Elizabeth Mie Hashimoto

Área do Conhecimento: Probabilidade e Estatística Aplicadas

Londrina, 2024

FELIPE TESTA DE SOUZA
PROFA. DRA. ELIZABETH MIE HASHIMOTO

Relatório Final de Pesquisa do Programa de Iniciação Científica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Londrina, 2024

SUMÁRIO

RESUMO	1
INTRODUÇÃO	1
METODOLOGIA	3
RESULTADOS E DISCUSSÕES	10
CONCLUSÕES	13
REFERÊNCIAS	14

RESUMO

A estatística desempenha um papel essencial em diversas áreas ao proporcionar metodologias para a coleta e análise de dados. O avanço tecnológico tem contribuído para aprimorar a capacidade de armazenamento e processamento computacional, permitindo a aplicação de métodos estatísticos mais avançados. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é utilizar o software R para auxiliar na análise estatística em problemas dentro da esfera da Engenharia. Os dados analisados foram extraídos de um trabalho de conclusão de curso (TCC) a respeito da utilização de agregados reciclados na fabricação de novos concretos de uso não estrutural por meio da técnica de fabricação IPT/EPUSP. Por meio da linguagem R e do ambiente de desenvolvimento integrado Rstudio, foi realizada uma análise de variância (ANOVA) e um teste de comparação múltipla - teste de Tukey - para um delineamento completamente aleatorizado em esquema fatorial, no qual avaliou-se a interação entre o traço do concreto (fator A) e o tempo de cura (fator B) do material sobre a resistência à compressão (MPa). Com isso, constatou-se que na análise do experimento, ao nível de significância de 5%, os pressupostos da ANOVA sobre normalidade dos resíduos e homogeneidade das variâncias foram assegurados. Além disso, para o mesmo nível de significância, o tempo de cura do material (dias) juntamente com o traço da amostra não apresentaram interação. Dessa forma, o efeito do tempo de cura e o efeito do traço do concreto foram analisados separadamente. Observou-se que ambos os fatores apresentaram efeito significativo sobre resistência à compressão. Portanto, a melhor resistência foi alcançada quando o material foi exposto ao período de cura de 28 dias e composto pelo traço *rico*. Ademais, o estudo mostrou a grande aplicabilidade e benefícios do software R utilizado no decorrer do problema, no qual seu uso pode ser expandido para outras situações.

Palavras-chave: ANOVA, delineamento completamente aleatorizado, esquema fatorial, teste de Tukey, pressupostos da ANOVA.

INTRODUÇÃO

Em diferentes partes da sociedade, em destaque para as áreas relacionadas as engenharias e segmentos industriais, a estatística possui um papel fundamental, uma vez que ela fornece os métodos para os processos de coleta, filtração, análise e interpretação de dados. Por meio das informações obtidas com uma análise estatística, é possível a maximização e melhora de, praticamente, qualquer setor dentro de um ambiente de trabalho. Em outras palavras, a estatística viabiliza, por meio da utilização dos dados, tomadas de decisões baseadas em evidências [1], causando diversas vantagens, como aumento da produtividade, melhora no rendimento dos funcionários, diminuição dos custos, crescimento na eficiência energética e produtiva, dentre muitos outros fatores.

Nesse sentido, o avanço da tecnologia proporcionou uma revolução na capacidade de armazenamento e processamento dos computadores, favorecendo profundamente a área de

análise estatística [2]. Ao longo dos últimos anos, foram desenvolvidos diversos softwares voltados para o ajuste, validação e interpretação de dados. Cada um destes apresenta diversos tipos de facilidades em relação a acessibilidade, interface do usuário, quantidade de procedimentos estatístico, entre outros aspectos.

Na atualidade, embora exista um vasto conjunto de softwares estatísticos que possuem um custo e uma licença para serem utilizados, alguns ambientes de programação gratuitos se destacam nesse cenário, em especial o R e sua plataforma Rstudio [3]. R é uma linguagem de programação e um ambiente para procedimentos estatísticos e gráficos, voltado para o cálculo, desenvolvimento e exibição gráfica de dados, além de possuir várias extensões que garantem um aprimoramento no uso e experiência dos usuários [4]. Por meio de um ambiente de desenvolvimento integrado (em inglês, IDE) chamado Rstudio, é possível utilizar o R, no qual apresenta numerosas vantagens [5]. Por exemplo apresenta uma interface de interação que auxilia e facilita nas análises, apresenta um conjunto de pacotes básicos que incluem diversas funcionalidades, possui uma vasta quantidade de bibliotecas disponíveis em que auxiliam no aprendizado e na resolução de problemas, possui procedimentos simples para instalar e carregar pacotes adicionais, entre outros itens.

Além disso, esse software é adequado para análises de regressão, diferentes modelos de ANOVA (análise de variância) e diversos métodos de comparação múltipla [6]. A ANOVA é um procedimento que divide a variabilidade total dos dados da amostra em componentes, em outras palavras, quando é feita a decomposição das variações presentes no experimento. O teste de Tukey é um tipo de método de comparação múltipla, que visa identificar uma diferença significativa entre as médias [7].

Considerando o contexto apresentado, o presente estudo teve por objetivo realizar uma análise estatística de dados em problemas de Engenharia, em que o software R, mediante a uma série de comandos, foi utilizado para auxiliar na realização de uma ANOVA e teste de Tukey para um delineamento completamente aleatorizado em esquema fatorial. Os dados foram obtidos a partir do TCC “Utilização de agregado reciclado produzido na usina de reciclagem do município de Guarapuava - PR na fabricação de novos concretos para uso não estrutural”, de Ana Luísa Laurindo - graduanda de Engenharia Civil na Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Os resultados e metodologias presentes nesse estudo pretendem apresentar que o emprego deste instrumento em tal contexto permitiria a extensão de seu uso para outras áreas do conhecimento e mostraria a grande eficiência ao se utilizar os mecanismos e elementos apresentados. Nas seções a seguir, será feito o aprofundamento dos conceitos e da metodologia aplicada para a realização da ANOVA e comparação múltipla no conjunto de dados presente nesse trabalho, utilizando as ferramentas e facilidades proporcionadas pelo software R. Por fim, os resultados e as considerações finais do trabalho.

METODOLOGIA

Neste trabalho foram utilizados os seguintes métodos de análises estatísticas: a ANOVA – aplicada em esquema fatorial – e o teste de Tukey, que auxiliaram no alcance dos objetivos apresentados. Adiante, será descrito os métodos e os dados experimentais usados.

Dados experimentais

Para as análises, um conjunto de dados previamente tratado e de acesso público em plataforma online foi utilizado. Em outras palavras, esses dados já passaram por um processo de sumarização, que consistiu em simplificá-los a partir de suas contagens e agrupamentos [1], visando facilitar os estudos e melhorar o entendimento dos procedimentos da análise [7].

O conjunto de dados utilizado nessa seção foi extraído do trabalho de conclusão de curso “Utilização de agregado reciclado produzido na usina de reciclagem do município de Guarapuava - PR na fabricação de novos concretos para uso não estrutural” responsável pela aluna de graduação em Engenharia Civil pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ana Luísa Laurindo, realizado em 2022. Refere-se à um experimento para avaliar a influência do tempo de cura e do traço sobre a resistência à compressão do material, no qual foi fabricado a partir do método IPT/EPUSP.

Para este estudo, supõe-se que um delineamento inteiramente aleatorizado em esquema fatorial foi utilizado, pois o experimento foi feito em uma ordem aleatória e as combinações dos níveis dos fatores - traço do concreto e tempo de cura do material - foram aplicadas em um ambiente mais homogêneo possível [8], sem a presença de fator de ruído. Ademais, o corpo de prova, também conhecido como unidade experimental, foi o concreto com substituição do agregado graúdo, no qual o período de cura e traço apresentavam, respectivamente, os seguintes níveis: 7 ou 28 dias e *rico*, *piloto* ou *pobre*. Por fim, para cada combinação dos níveis dos fatores foram feitas três repetições.

ANOVA (Análise de Variância)

A ANOVA de dois fatores (*two way*) é aplicada para verificar se existe interação entre o traço (fator A) e o tempo de cura (fator B) das amostras, sendo testadas todas as combinações possíveis entre os fatores [9]-[10]. Por outro lado, quando a interação não é significativa, avalia-se os efeitos dos fatores principais sobre a resistência a compressão (MPa), separadamente [8].

Nesse contexto, um delineamento inteiramente aleatorizado que possui a níveis do fator A , tal que $i = 1, 2, \dots, a$, b níveis do fator B , de modo que $j = 1, 2, \dots, b$ e r repetições, em que cada repetição contém todas as ab combinações de níveis dos fatores; onde estudou-se a influência do par de fatores sobre a variável resposta sendo denotada por y_{ijk} .

Então, o modelo linear para o caso apresentado é descrito por:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b; \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (1)$$

sendo Y_{ijk} é uma variável aleatória, também conhecida como variável resposta, que denota a observação da ij -ésima célula para a k -ésima réplica; μ , chamado de efeito médio global, é o parâmetro constante comum a todos os níveis; τ_i é o parâmetro associado ao efeito do fator A , relacionado ao i -ésimo nível desse fator; β_j é o efeito do j -ésimo nível do fator B ; $(\tau\beta)_{ij}$ é o elemento relativo ao efeito de interação entre os fatores A e B ; e ϵ_{ijk} é a componente do erro aleatório, no qual assume-se que o mesmo seja distribuído normalmente e independentemente com média zero e variância σ^2 .

Em seguida, testou-se as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_{0\tau\beta} : (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \dots = (\tau\beta)_{ab} = 0 \\ H_{1\tau\beta} : (\tau\beta)_{ij} \neq 0, \text{ para pelo menos uma combinação } ij ; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} H_{0\tau} : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 \\ H_{1\tau} : \tau_i \neq 0, \text{ para pelo menos um } i ; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} H_{0\beta} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0 \\ H_{1\beta} : \beta_j \neq 0, \text{ para pelo menos um } j ; \end{cases} \quad (4)$$

em que $H_{0\tau\beta}$, $H_{0\tau}$ e $H_{0\beta}$ são conhecidas como hipóteses nulas, nas quais significam testar, respectivamente, que o efeito da interação, o efeito do fator A e do fator B não são significativos. Por outro lado, $H_{1\tau\beta}$, $H_{1\tau}$ e $H_{1\beta}$ são denominadas de hipóteses alternativas, no qual representam que os efeitos descritos em (2), (3) e (4), respectivamente, são significativos.

Na sequência, fixou-se o nível de significância (α) em 0,05; isto é, 5%, uma vez que é um valor mais usual em experimentos desta categoria, não sendo tão rigoroso e nem abrangente.

Assim, calculou-se as seguintes somas de quadrados com a finalidade de determinar a estatística teste (F_0) para as hipóteses em (2), (3) e (4):

- Soma dos quadrados totais (SQTot):

$$SQTot = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}; \quad (5)$$

- Soma dos Quadrados do Fator A (SQA):

$$SQA = \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}; \quad (6)$$

- Soma dos Quadrados do Fator B (SQB):

$$SQB = \frac{1}{ar} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}; \quad (7)$$

- Soma dos Quadrados da Interação entre os Fatores A e B (SQInt):

$$SQAB = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr} - SQA - SQB \quad e \quad (8)$$

- Soma dos Quadrados do Resíduo (SQRes):

$$SQRes = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2. \quad (9)$$

Além disso, as operações envolvendo a soma dos quadrados estão interligadas da seguinte maneira, por meio das equações (5), (6), (7), (8) e (9): $SQRes = SQTot - SQA - SQB - SQInt$. Portanto, de acordo com a Tabela 1, as F_0 são dadas por:

Tabela 1: Esquema da ANOVA para dois fatores

Causa de variação	Grau de liberdade	Soma do quadrado	Quadrado médio	F_0
Fator A	$a - 1$	SQA	$\frac{SQA}{a-1}$	$\frac{QMA}{QMRes}$
Fator B	$b - 1$	SQB	$\frac{SQB}{b-1}$	$\frac{QMB}{QMRes}$
Interação	$(a - 1)(b - 1)$	SQInt	$\frac{SQInt}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{QMInt}{QMRes}$
Resíduo	$ab(r - 1)$	SQRes	$\frac{SQRes}{ab(r-1)}$	—
Total	$abr - 1$	SQTot	—	—

Fonte: Applied Statistics and Probability for Engineers

Por fim, após a determinação das estatísticas dos testes, o critério de rejeição da hipótese nula é dada por:

$$P(F > F_0) = p - \text{valor} < \alpha, \quad (10)$$

em que $P(\cdot)$ é uma probabilidade e F é uma variável aleatória com distribuição F .

Verificação de adequação ao modelo da ANOVA

Para as etapas presentes em uma ANOVA serem válidas, é necessário que algumas pressuposições sejam atendidas [8]:

- a) Aditividade: os efeitos têm que se somar;
- b) Independência: os erros ϵ_{ijk} são independentes;
- c) Normalidade: os erros ϵ_{ijk} seguem uma distribuição normal;
- d) Homogeneidade de variâncias: os erros ϵ_{ijk} devem possuir uma variância constante, denotada por σ^2 .

Cada um desses pressupostos pode ser verificado por meio de testes de hipóteses ou, até mesmo, elementos gráficos.

Então, considerando que o modelo descrito em (1) assume que os erros ϵ_{ijk} sejam normal e independentemente distribuídos, com média zero e variância constante representada por σ^2 , foram conduzidos os seguintes testes para avaliar se os pressupostos da ANOVA foram satisfeitos.

- Normalidade dos resíduos: teste de Shapiro-Wilk

A princípio, define-se o resíduo de um modelo fatorial de dois fatores como:

$$\epsilon_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b; \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (11)$$

no qual ϵ_{ijk} é o resíduo associado a uma observação; y_{ijk} é a variável resposta observada e $\bar{y}_{ij.}$ é o valor ajustado ou estimado.

Entretanto, de modo a facilitar a execução e compreensão do teste de Shapiro-Wilk, os índices i , j e k foram englobados no índice l , que representa a observação estudada. Com isso, o resíduo do modelo trabalhado é dado por:

$$\epsilon_l = y_l - \bar{y}_l, \quad l = 1, \dots, n, \quad (12)$$

sendo n o tamanho da amostra.

Então, as seguintes hipóteses foram testadas:

$$\begin{cases} H_{0N} : \text{Os erros seguem uma distribuição normal} \\ H_{1N} : \text{Os erros seguem outra distribuição de probabilidade.} \end{cases} \quad (13)$$

Em seguida, para a obtenção da estatística do teste, os resíduos foram ordenados de forma crescente, denotados por:

$$\epsilon_{(1)}, \dots, \epsilon_{(n)}, \quad (14)$$

sendo $\epsilon_{(1)}$ o menor valor do resíduo e $\epsilon_{(n)}$ o maior valor do resíduo, de acordo com as instruções presentes em “An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)” [11], de S. S. Shapiro e M. B. Wilk.

Assim, calcula-se o valor de b , definido por:

$$b = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n/2} a_l [e_{(n-l+1)} - e_l], & \text{se } n \text{ é par} \\ \sum_{l=1}^{(n-1)/2} a_l [e_{(n-l+1)} - e_l], & \text{se } n \text{ é ímpar;} \end{cases} \quad (15)$$

em que a_l é um coeficiente contido na Tabela 5 em [11], na qual é obtido a partir do tamanho da amostra, definido anteriormente como n .

Por fim, a estatística do teste é dada por:

$$w = \frac{b^2}{\sum_{l=1}^n (e_l - \bar{e})^2}. \quad (16)$$

- Homogeneidade de variâncias: teste de Bartlett

Considerando que os dados das amostras obtidas seguem uma distribuição normal, foram testadas as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_{0B} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_{ab}^2 \\ H_{1B} : \sigma_l^2 \neq \sigma_{l'}^2, \text{ para pelo menos um par de observações } ijk \text{ com } l \neq l'; \end{cases} \quad (17)$$

sendo H_{0B} significa testar que as variâncias dos erros são homogêneas; e H_{1B} representa que as variâncias dos erros não são homogêneas.

Assim, a estatística do teste, de acordo com [12], é definida por

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (r_{ij} - 1) \ln(s_c^2) - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (r_{ij} - 1) \ln(s_{ij}^2)}{1 + \frac{1}{3(a-1)(b-1)} \left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{1}{r_{ij}-1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (r_{ij}-1)} \right]}, \quad (18)$$

em que b_0 é a estatística do teste; a e b são, respectivamente, os níveis do fator A e B ; r_{ij} é a réplica do i -ésimo nível do fator A e j -ésimo nível do fator B ; s_{ij}^2 é a variância da ij -ésima medida; e $s_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (r_{ij}-1)s_{ij}^2}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (r_{ij}-1)}$.

Para o teste de normalidade dos resíduos e de homogeneidade das variâncias, foi estabelecido o seguinte critério de rejeição: rejeita-se as hipóteses nulas, definidas como H_{0N} e H_{0B} , caso o p -valor de ambas for menor que o nível de significância α fixado. Dessa forma, o p -valor para o teste de Shapiro-Wilk é dado por:

$$p - \text{valor}_N = 1 - P \left[Z < \frac{\ln(1 - w) - \mu}{\sigma} \right]; \quad (19)$$

em que Z é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, $\mu = 0,0038915 \ln(n)^3 - 0,083751 \ln(n)^2 - 0,31082 \ln(n) - 1,5861$ e $\sigma = \exp[0,0030302 \ln(n)^2 - 0,082676 \ln(n) - 0,4803]$ [13]. Para o teste de Bartlett, tem-se:

$$p - \text{valor}_B = P(\chi > b_0), \quad (20)$$

em que χ segue uma distribuição qui-quadrado com ab graus de liberdade.

Comparação múltipla

Na ANOVA descrita anteriormente, se o efeito da interação definido em (2) não for significativo, pode ocorrer a rejeição das hipóteses nulas referentes a cada fator, no caso $H_{0\tau}$ e $H_{0\beta}$. Dessa forma, busca-se determinar quais níveis desses fatores são diferentes entre si, individualmente, por meio de métodos de comparação múltipla. Portanto, torna-se possível identificar qual ou quais níveis do fator analisado diferem-se significativamente dos demais [8].

Dentre os métodos possíveis, utilizou-se o teste de Tukey, também conhecido como teste da diferença honestamente significativa (em inglês, HSD), no qual é utilizado para comparar as médias aos pares [8], aplicado de modo individual para cada fator.

Então, o teste de Tukey, testou-se as seguintes hipóteses relacionadas aos pares de a

médias dos tratamentos do fator A ou b médias dos tratamentos do fator B :

$$\begin{cases} H_0 : \mu_i = \mu_j \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \text{ para todo } i \neq j; \end{cases} \quad (21)$$

no qual i e j são os índices das médias calculadas dos níveis do fator A ou B ; H_0 representa que duas médias não são diferentes; e H_1 significa que as médias comparadas apresentam uma diferença significativa entre si.

Para proceder o teste de Tukey, calculou-se a diferença mínima significativa (dms), dada por:

$$\Delta = q \cdot \sqrt{\frac{QMRes}{r}}; \quad (22)$$

sendo $q_{(G.L.Res; \alpha; a \text{ ou } b)}$ é o valor da amplitude total estudentizada, em que é obtido por meio de tabelas, em função do nível de significância α fixado, graus de liberdade do resíduo e do número de níveis - número de médias à serem comparadas - do fator escolhido (a ou b); $QMRes$ é dado na Tabela 1 da ANOVA; e r é o número de repetições.

Em seguida, determinou-se as estatísticas do teste, realizando todas as combinações possíveis envolvendo duas médias de níveis diferentes do fator investigado, na qual é descrita por:

$$d_{om} = |\bar{y}_i - \bar{y}_j|; \quad (23)$$

sendo m é o número da comparação.

Por conseguinte, definiu-se um critério de rejeição, individualmente, para cada fator, no qual comparou-se os valores das estatísticas dos testes (d_{om}) em relação à diferença mínima significativa ($\Delta = dms$). Logo, se a estatística do teste for maior que o dms , $d_{om} > \Delta$, rejeita-se H_0 , com isso, as médias comparadas, do fator selecionado, possuem uma diferença relevante, ao nível de significância considerado. No entanto, caso a estatística do teste for menor que o dms , $d_{om} > \Delta$, não rejeita-se H_0 , portanto, as duas médias não contrastam entre si.

Caso o efeito da interação entre os fatores seja significativo, o teste de Tukey é realizado dentro de um fator A , no qual fixa-se o nível do mesmo e avalia o efeito do fator B e vice-versa.

Instrumentos e materiais

Para auxiliar nas análises, fez-se necessário o uso de um suporte computacional. O R (versão 4.3.0) é uma linguagem de programação [14] de livre acesso direcionado à estatística e visualização gráfica de dados [15]. O software pode ser adquirido pelo site do CRAN [16].

Um de seus principais atributos é apresentar uma grande gama de técnicas estatísticas e gráficas, além de apresentar uma interface interativa. Outra vantagem deste programa é seu alto nível de expansividade, uma vez que existem inúmeros “pacotes” (disponíveis para download no CRAN ou nas próprias plataformas de uso do R) com funções, algoritmos e procedimentos que servem para aprimorar ferramentas já existentes ou até mesmo desenvolver novas [17]. Por fim, O R apresenta uma volumosa quantidade de conteúdo disponível na internet, facilitando o aprendizado e possibilitando a troca de experiência entre os usuários.

No R, os pacotes utilizados para realização dos procedimentos apresentados foram: *readxl* (importação de dados) e *ExpDes.pt* (funções e comandos para análises estatísticas) [16]. Os scripts das análises realizadas estão disponíveis em <https://github.com/FelipeTestadeSouza/IC-Script>.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A priori, antes da realização das análises principais dos dados, verificou-se a inexistência de *outliers*, ou seja, de valores discrepantes no conjunto de dados que poderiam causar uma distorção na ANOVA [8], quando foram analisadas todas as resistências à compressão coletadas, através do método de fabricação IPT/EPUSP. Este fato pode ser confirmado através do *boxplot* mostrado na Figura 1, no qual é uma ferramenta gráfica que retrata importantes aspectos de um conjunto de dados, sendo um deles a identificação de *outliers* [7]. Ademais, observa-se um grau de assimetria da distribuição de probabilidade, uma vez que a resistência mediana à compressão está deslocada para a esquerda.

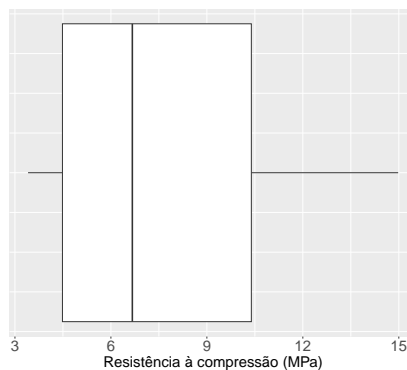


Figura 1: *Boxplot* da resistência à compressão obtida pelo método IPT/EPUSP.

Fonte: Autoria própria (2024).

Em seguida, estudou-se as relações entre os níveis dos fatores de traços e períodos de cura do concreto, com o auxílio de um gráfico de interação apresentado na Figura 2.

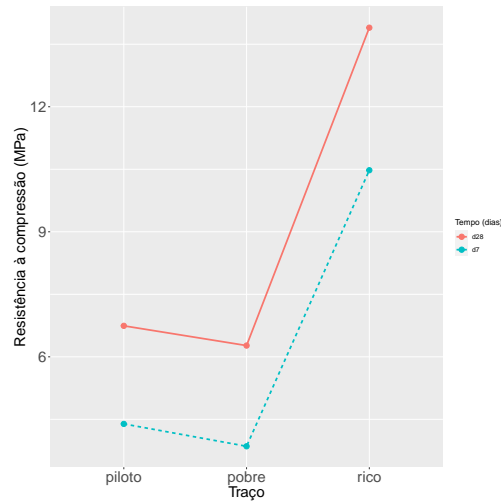


Figura 2: Gráfico de interação da resistência à compressão pelo traço, estratificado pelo tempo de cura.

Fonte: Autoria própria (2024).

Por meio da análise exploratória, existem indícios de que não há interação significativa entre os fatores estudados, devido ao paralelismo das linhas presentes no gráfico apresentado na Figura 2. Por outro lado, evidencia-se que, para um mesmo nível de traço, o período de 28 dias apresenta um desempenho superior. Por sua vez, para um tratamento fixo de tempo, o traço *rico* possui melhor performance.

A posteriori, realizou-se uma ANOVA para avaliar se informações interpretadas dos elementos gráficos são válidas e concretas. Dessa maneira, visando garantir a adequação do modelo apresentado em (1), avaliou-se os pressupostos da ANOVA descritos na seção “Metodologia”, no qual os resultados são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: Verificação dos pressupostos da ANOVA

Teste	Estatística do teste	Grau de liberdade	p -valor
Shapiro-Wilk	0,923	—	0,145
Bartlett	10,011	5	0,075

Fonte: Autoria própria (2024).

De acordo com a Tabela 2, observou-se um p -valor menor do que 0,05; seguindo o critério de rejeição adotado em “Verificação de adequação ao modelo da ANOVA”. Portanto, ao nível de significância de 5%, em relação ao teste de Shapiro-Wilk, a hipótese definida em (13) não foi rejeitada, isto é, os erros seguem uma distribuição normal. Em relação ao teste de Bartlett, a hipótese H_{0B} , estabelecida em (17), também não foi rejeitada, indicando que as variâncias dos erros são homogêneas.

Assim, visto que os pressupostos da ANOVA foram satisfeitos, realizou-se uma ANOVA, em que foram calculados os graus de liberdade, as somas dos quadrados ($SQTot$, SQA ,

SQB , $SQInt$ e $SQRes$), os quadrados médios (QMA , QMB , $QMInt$ e $QMRes$) e as F'_0 s, estabelecidos, respectivamente, na Tabela 1 e pelas expressões (5-9). Os resultados são mostrados nas Tabelas 3.

Tabela 3: Análise de variância dos dados de resistência a compressão (MPa)

Causa de variação	Grau de liberdade	Soma do quadrado	Quadrado médio	F_0	p -valor
Traço	2	189,69	94,85	111,59	0,00
Tempo	1	33,54	33,54	39,46	0,00
Interação	2	1,07	0,54	0,64	0,55
Resíduo	12	10,25	0,85	—	—
Total	17	234,55	—	—	—

Fonte: Autoria própria (2024).

Considerando a Tabela 3, observou-se os seguintes aspectos, respeitando os critérios de rejeição da ANOVA e o nível de significância de 5%: o p -valor (0,55) relacionado a interação entre os fatores traço e tempo de cura, definido em (2), foi maior que 0,05. Logo, têm-se evidências de que não existe efeito do tempo de cura juntamente com o traço do material sobre a resistência à compressão do concreto não estrutural produzido.

Desta forma, os fatores principais foram estudados separadamente. As hipóteses nulas definidas em (3) e (4) foram rejeitadas, pois os seus respectivos p -valores (0,00 e 0,00) foram menores do que 0,05. Então, observa-se que há efeito significativo do período de cura e do traço do material, isoladamente, sobre a resistência a compressão do concreto produzido.

Para determinar qual ou quais níveis dos fatores são distintos dos demais, realizou-se o teste de Tukey, como descrito na subseção "Comparação múltipla", para os respectivos fatores: traço e período de cura.

Calculou-se os valores do dms (Δ) e das estatísticas dos testes (d_{om}), definidos, respectivamente, pelas equações (22) e (23), para cada fator. Com isso, aplicou-se o teste, inicialmente, para o fator "traço do concreto", no qual foram realizadas um total de três comparações possíveis entre duas médias dos níveis desse fator. Assim, ao nível de significância de 5%, verificou-se que H_0 , definido em (21), foi rejeitado em duas comparações, indicando que existe uma diferença significativa entre as médias analisadas (*rico* e *piloto*; *rico* e *pobre*), como ilustra a Tabela 4. Por outro lado, houve apenas uma comparação em que não rejeitou-se H_0 , sendo ela referente as médias dos níveis dos traços *piloto* e *pobre* (Tabela 4). Posteriormente, realizou-se a tomada de decisão e a separação dos níveis do fator A examinado em dois grupos (a e b), como mostrado na Tabela 5.

Tabela 4: Esquema do teste de Tukey - Traço

Níveis comparados	Decisão
Rico \times Piloto	Grupos distintos
Rico \times Pobre	Grupos distintos
Piloto \times Pobre	Grupos iguais

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 5: Teste de Tukey - Traço do material

Grupos	Níveis	Médias dos traços do material
a	Rico	12,19
b	Piloto	5,57
b	Pobre	5,06

Fonte: Autoria própria (2024).

Na sequência, realizou-se o mesmo teste para o fator “tempo de cura do concreto”. Nesse caso, pelo fato desse fator apresentar somente dois tratamentos, foi realizada a única comparação possível entre as médias dos níveis 7 dias e 28 dias. Portanto, ao nível de significância de 5%, verificou-se que H_0 foi rejeitada, mostrando que existe uma diferença significativa entre as médias dos tempos de cura. De modo análogo ao fator traço, separou-se os níveis do fator B estudado em dois grupos (a e b), como apresentado nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6: Esquema do teste de Tukey - Período de cura (dias)

Níveis comparados	Decisão
7 dias \times 28 dias	Grupos distintos

Fonte: Autoria própria (2024).

Tabela 7: Teste de Tukey - Tempo de cura (dias)

Grupos	Níveis	Médias dos períodos de cura do material
a	d28	8,97
b	d7	6,24

Fonte: Autoria própria (2024).

CONCLUSÕES

Perante o trabalho realizado, têm-se que a ANOVA é um método estatístico utilizado para comparar as médias dos níveis ou tratamentos de um ou mais fatores. Os elementos

que determinam o modelo linear de uma ANOVA em um cenário genérico são: o tipo de delineamento utilizado no experimento, a quantidade de fatores de interesse e o termo aleatório. Considerando um delineamento inteiramente casualizado com dois fatores (tempo de cura e traço), são verificados os seguintes aspectos: a ausência de fatores de ruído e o efeito de interação entre eles. Então, após a execução de uma ANOVA no qual a hipótese nula referente a interação dos fatores não é rejeitada, realiza-se um método de comparação múltipla, como o teste de Tukey, individualmente, para os fatores que apresentam efeito relevante, visando definir qual ou quais níveis do fator analisado se distinguem de maneira significativa em relação aos outros.

Visto isto, de acordo com os resultados obtidos da ANOVA em esquema fatorial e teste de Tukey aplicados aos dados de resistência à compressão [18], pôde-se concluir que não houve interação entre o tempo de cura e o traço utilizados na confecção do material estudado. Separadamente, ambos apresentaram influência significativa sobre a resistência a compressão dos concretos fabricados para uso não estrutural. Assim, verificou-se que o traço *rico* e o tempo de 28 *dias* ocasionam essa diferença, sendo eles os níveis mais apropriados para o contexto analisado, ao nível de significância de 5%.

Em relação ao software R, utilizado como suporte computacional para a realização das análises, mostrou-se extremamente desejável no estudo de dados em contextos dentro da Engenharia, devido a uma série de aspectos: simplicidade dos comandos utilizados, velocidade na execução das análises e obtenção dos resultados. Além disso, sendo uma ferramenta de código aberto, o R é acessível a toda comunidade científica, promovendo a transparência e a colaboração na análise de dados.

REFERÊNCIAS

- [1] CORREA, S. *Probabilidade e Estatística*. [S.l.]: PUC Minas Gerais, 2003.
- [2] JELIHOVSCHI, E. *Análise Exploratória de Dados usando o R*. [S.l.]: Ilhéus: Editus, 2014.
- [3] SMOLSKI F. M. S.; BATTISTI, I. E. C. T. R. D. I. K. E. R. D. S. Capacitação em análise estatística de dados com uso do software livre R. Disponível em: <https://ojs.unesp.br/index.php/revista_roex/article/view/1823>.
- [4] WHAT is R? Acessado: 21-11-2023. Disponível em: <<https://www.r-project.org/about.html>>.
- [5] RSTUDIO Desktop. Acessado: 08-01-2024. Disponível em: <<https://posit.co/download/rstudio-desktop/>>.
- [6] GOVAERTS B.; FRANCO, B. M. R. M. M. T. M. *The Essentials on Linear Regression, ANOVA, General Linear and Linear Mixed Models for the Chemist*. [S.l.]:

- Elsevier, 2020. (2nd Edition ;Comprehensive Chemometrics, Chemical and Biochemical Data Analysis - p. 431-463).
- [7] MONTGOMERY D.C.; RUNGER, G. *Applied Statistics and Probability for Engineers, Seventh Edition*. [S.l.]: Hoboken, NJ : Wiley, 2018.
- [8] MONTGOMERY, D. *Design and Analysis of Experiments, 9th Edition*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 2017.
- [9] SARTORIO, S. D. Aplicações de técnicas de análise multivariada em experimentos agropecuários usando o software r. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/11/11134/tde-06082008-172655/pt-br.php>>.
- [10] RIBEIRO J. L. D.; TEN CATEN, C. *Projeto de Experimentos*. [S.l.]: UFRGS: Academic Press, 2001. (Monográfica Qualidade). ISBN 8588085119.
- [11] SHAPIRO S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, v. 52, n. 3/4: p. 591–611, 1965. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2333709>>.
- [12] BARBIN, D. *Planejamento e Analise Estatística de Experimentos Agronômicos*. [S.l.]: MECENAS LTDA, 2013. ISBN 978-85-89687-13-3.
- [13] ROYSTON, J. P. An extension of shapiro and wilk's w test for normality to large samples. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, v. 31, n. 2: p. 115–124, 1982. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2347973>>.
- [14] DALGAARD, P. *Introductory statistics with R*. [S.l.]: Springer, 2002. (Statistics and computing).
- [15] TIPPMANN, S. Programming tools: Adventures with r. *Nature Journal*, v. 517, n. 120, 12 2014. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/519120a>>.
- [16] THE R Project for Statistical Computing. Acessado: 12-01-2024. Disponível em: <<https://www.r-project.org/>>.
- [17] HACKENBERGER, B. K. R software: unfriendly but probably the best. *CROATIAN MEDICAL JOURNAL*. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7063554/>>.
- [18] LAURINDO, A. L. Utilização de agregado reciclado produzido na usina de reciclagem do município de Guarapuava - PR na fabricação de novos concretos para uso não estrutural. *RIUT*. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29194>>.

Nome completo
Orientadora

Nome completo
Estudante