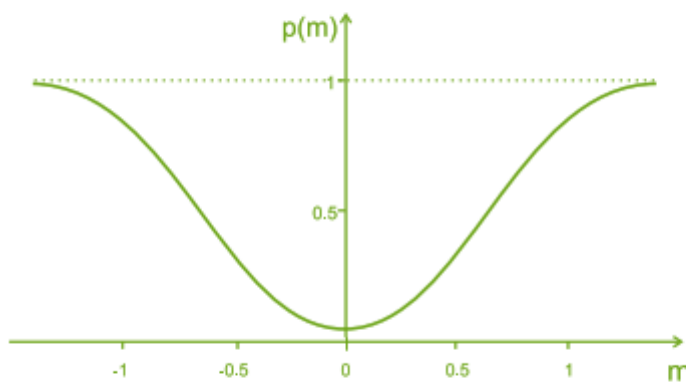


SOLUÇÕES PARA

Introdução à Inferência Estatística

01

COLEÇÃO
MATEMÁTICA
APLICADA



Heleno Bolfarine
Mônica Carneiro Sandoval



(2ª EDIÇÃO, 2010)

Antes de lêr

ESTE LIVRO DE SOLUÇÕES ESTÁ ATUALMENTE INCOMPLETO

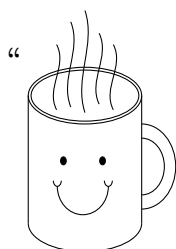
Este material é parte de uma iniciativa individual minha para desenvolver soluções para o livro “*Introdução à Inferência Estatística*” (2ª edição, 2010), de Heleno Bolfarine e Mônica Carneiro Sandoval. **Estas soluções não são oficiais, elas são minhas próprias, assim como todos erros, imperfeições e incosistências gramáticas e matemáticas nelas encontradas.** O nível de detalhamento varia de questão para questão. Para mais informações sobre o livro, visitem [este link](#) para sua página na loja da Sociedade Brasileira de Matemática.

Alguns comentários a respeito da organização deste material: todos Exercícios são apresentados na mesma ordem que o livro original, separados por capítulo. *Links* que referenciam fórmulas contidas neste livro (ou levam a um sítio na *Web*) estão destacados com a cor [azul](#).

Agora aproveite uma boa citação de um bom filme, e um café de “*Bom Dia!*”:

“What do you think the Russians talk about in their councils of state, Karl Marx? They get out their linear programming charts, statistical decision theories, minimax solutions, and compute the price-cost probabilities of their transactions and investments, just like we do.”

Arthur Jensen, Network (1976)



Bom dia!”

Capítulo 1

Elementos Básicos

Exercício 1.1

Segue que

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] + \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2] + 2\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\ &= \text{Var}[\hat{\theta}] + 2(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \mathbb{E}[\hat{\theta}]) (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \\ \text{EQM}[\hat{\theta}] &= \text{Var}[\hat{\theta}] + \{B(\hat{\theta})\}^2\end{aligned}$$

Exercício 1.2

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{NORMAL}(\mu, \sigma^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, e seja o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Buscamos determinar o valor esperado de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] - 2\mathbb{E}[\bar{X}^2] - \mathbb{E}[\bar{X}^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu^2 + \sigma^2) - \text{Var}[\bar{X}] - \{\mathbb{E}[\bar{X}]\}^2 \\ &= \mu^2 + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 \\ \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Exercício 1.3

Supomos que X_1, X_2, X_3 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{E}[X_1] = \theta \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{V}\text{ar}[X_1] = 1$, e seja $\hat{\theta}_2$ tal que

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_2] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_3] \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta \\ \mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \theta.\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_2] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_3] \\ \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Exercício 1.4

Para este exercício, serão necessários os seguintes resultados:

1. Se $X \sim \text{NORMAL}(\mu, \sigma^2)$, logo $Z = \sigma^{-1}(X - \mu) \sim \text{NORMAL}(0, 1)$.
2. Se Z_1, \dots, Z_n é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $Z_1 \sim \text{NORMAL}(0, 1)$, logo

$$W = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \text{QUI-QUADRADO}(n-1).$$

Consideramos aqui o mesmo contexto que do [Exercício 1.2](#). Calculamos o valor esperado de S^2 da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\ &= \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] \\ &= \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 \\ \mathbb{E}[S^2] &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Buscamos agora determinar a variância de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] \\ &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \frac{\sigma^4}{n^2} \mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2\right] \\ \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[S^2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\ &= \frac{n^2}{(n-1)^2} \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] \\ &= \frac{n^2}{(n-1)^2} \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} \\ \mathbb{V}\text{ar}[S^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \text{Var}[\hat{\sigma}^2] + \{B(\hat{\sigma}^2)\}^2 \\&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \left\{ \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2 \right\}^2 \\&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} \\&= \frac{\sigma^4}{n-1} \left[\frac{2(n-1)^2 + n-1}{n^2} \right] \\&= \frac{\sigma^4}{n-1} \left[\frac{2n^2 - 4n + 2 + n - 1}{n^2} \right] \\&= \frac{\sigma^4}{n-1} \left[2 - \frac{(3n-1)}{n^2} \right] \\ \text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1} \left[1 - \frac{(3n-1)}{2n^2} \right].\end{aligned}$$

Exercício 1.5

Em suma, buscamos determinar valores de θ tal que

$$\begin{aligned}
 \text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \text{EQM}[\hat{\theta}_2] \\
 \frac{\theta(1-\theta)}{n} &= \frac{n}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
 \theta - \theta^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
 \frac{1}{4} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2} \right\} \\
 \theta - \frac{1}{2} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}} \\
 \theta &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}} \right] \\
 \theta &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1} \right].
 \end{aligned}$$

Disto, concluimos que

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1} \right] \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1} \right].$$

Particularmente, para $n = 9$, temos que

$$c_1 = \frac{4 - \sqrt{7}}{8} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{4 + \sqrt{7}}{8}.$$

Exercício 1.6

Seja uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas X_1, \dots, X_n tal que $X_1 \sim \text{UNIFORME}(0, \theta)$, buscamos determinar a função acumulada de probabilidade de $X_{(n)}$, dada por

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\ &= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= \{F(t)\}^n \\ F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^n}{\theta^n} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Segue que a função de densidade de probabilidade correspondente é da forma

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{dF(t)}{dt} \\ &= n \frac{t^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t). \end{aligned}$$

O valor esperado de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} t n \frac{t^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) dt \\ &= \int_0^\theta n \frac{t^n}{\theta^n} dt \\ \mathbb{E}[X_{(n)}] &= \frac{n}{n+1} \theta. \end{aligned}$$

Por sua vez, o segundo momento de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 n \frac{t^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) dt \\ &= \int_0^\theta n \frac{t^{n+1}}{\theta^n} dt \\ \mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \frac{n}{n+2} \theta^2. \end{aligned}$$

Por fim, a variância de $X_{(n)}$ é da forma

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 \\ &= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 \\ &= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \\ \mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] &= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Exercício 1.7

Sabemos que

$$(1.1) \quad \mathbb{P}(X_{(n)} = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{N}_5] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n}\right] \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \mathbb{P}(X_{(n)} = k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \left\{ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \right\} \quad (\text{De (1.1)}) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{N^n} \\ &= N \cdot \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \left(\frac{k-1}{N}\right)^{n+1} \right\} \\ &= N \cdot \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X_{(n+1)} = k) \quad (\text{De (1.1)}) \\ \mathbb{E}[\hat{N}_5] &= N. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que \hat{N}_5 é um estimador não viciado para N .

Exercício 1.8

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{NORMAL}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Segue que, se pretendemos estimar μ , temos que os erros quadráticos médios associados $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ e $\hat{\mu}_2 = 10$ são tais que

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\bar{X}] &= \text{Var}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\ &= \frac{1}{n} + \{\mu - \mu\}^2 \\ \text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Por sua vez

$$\begin{aligned}\text{EQM}[10] &= \text{Var}[10] + \{B(10)\}^2 \\ &= 0 + \{10 - \mu\}^2 \\ \text{EQM}[10] &= (\mu - 10)^2.\end{aligned}$$

A Figura 1.1 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$.

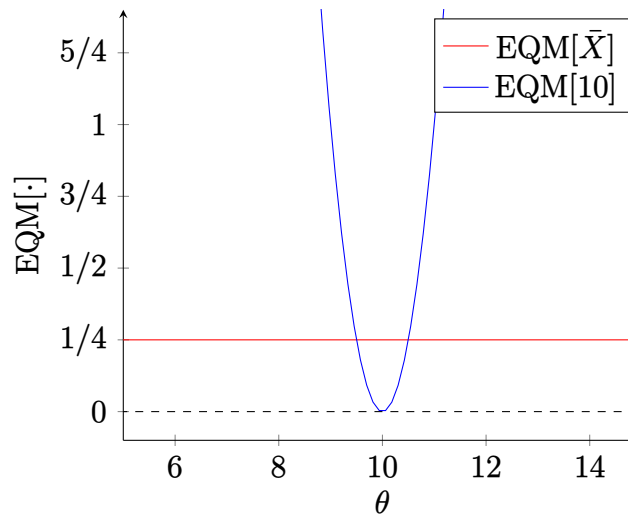


Figura 1.1: Erros quadráticos médios dos estimadores \bar{X} e 10 para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.9

Exercício 1.10

Seja uma X_1, \dots, X_n uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$(1.2) \quad F(t) = \begin{cases} \int_{\theta}^t e^{-(s-\theta)} ds & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, x > \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(x) dx \\ &= \int_{\theta}^{\infty} x e^{-(x-\theta)} dx \\ &= \int_0^{\infty} (t + \theta) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t e^{-t} dt + \theta \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ \mathbb{E}[X_1] &= 1 + \theta. \end{aligned}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \dots, X_n > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\} \\ &= 1 - \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= 1 - \{1 - F(t)\}^n \\ &= \begin{cases} 1 - \{1 - 1 + e^{-(t-\theta)}\}^n & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{De (1.2)}) \\ F_{X_{(1)}}(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-n(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(t|\theta) &= \frac{dF_{X_{(1)}}(t)}{dt} \\ &= ne^{-n(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(t). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(1)}] &= \int_{\mathbb{R}} tne^{-n(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(t) dt \\ &= \int_{\theta}^{\infty} tne^{-n(t-\theta)} dt \\ &= \int_0^{\infty} (s + \theta)ne^{-ns} ds \\ &= \int_0^{\infty} sne^{-ns} ds + \theta \int_0^{\infty} ne^{-ns} ds \\ (1.4) \quad \mathbb{E}[X_{(1)}] &= \frac{1}{n} + \theta. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1] \\ &= \mathbb{E}[X_1] \\ (1.5) \quad \mathbb{E}[\bar{X}] &= 1 + \theta \quad (\text{De (1.3)}). \end{aligned}$$

Disto, concluímos que tanto o estimador $X_{(1)}$ quanto o estimador \bar{X} são estimadores viciados para θ , embora o primeiro seja assintoticamente não viciado. Para computarmos agora os respectivos erros quadráticos médios, primeiramente calculamos seus momentos de segunda ordem ou variâncias, como segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(1)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 ne^{-n(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(t) dt \\ &= \int_{\theta}^{\infty} t^2 ne^{-n(t-\theta)} dt \\ &= \int_0^{\infty} (s + \theta)^2 ne^{-ns} ds \\ &= \int_0^{\infty} s^2 ne^{-ns} ds + 2\theta \int_0^{\infty} sne^{-ns} ds + \theta^2 \int_0^{\infty} ne^{-ns} ds \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 \\ (1.6) \quad \mathbb{E}[X_{(1)}^2] &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(t) \, dt \\
 &= \int_{\theta}^{\infty} t^2 e^{-(t-\theta)} \, dt \\
 &= \int_0^{\infty} (s + \theta)^2 e^{-s} \, ds \\
 &= \int_0^{\infty} s^2 e^{-s} \, ds + 2\theta \int_0^{\infty} s e^{-s} \, ds + \theta^2 \int_0^{\infty} e^{-s} \, ds \\
 &= 2 + 2\theta + \theta^2 \\
 (1.7) \quad \mathbb{E}[X_1^2] &= 1 + (1 + \theta)^2
 \end{aligned}$$

De forma que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}\text{ar}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
 &= 1 + (1 + \theta)^2 - (1 + \theta)^2 \quad (\text{De (1.3) e (1.7)}) \\
 (1.8) \quad \mathbb{V}\text{ar}[X_1] &= 1.
 \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
 &= \frac{1}{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
 (1.9) \quad \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} \quad (\text{De (1.8)}).
 \end{aligned}$$

Concluimos portanto que os erros quadráticos médios associados aos estimadores \bar{X} e $X_{(1)}$ são

$$\begin{aligned}
 \text{EQM}[X_{(1)}] &= \mathbb{V}\text{ar}[X_{(1)}] + \{B(X_{(1)})\}^2 \\
 &= \mathbb{E}[X_{(1)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(1)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta\}^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 + \frac{1}{n^2} \quad (\text{De (1.4) e (1.6)}) \\
 \text{EQM}[X_{(1)}] &= \frac{2}{n^2}.
 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
 \text{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
 \text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} + 1 \quad (\text{De (1.5) e (1.9)}).
 \end{aligned}$$

Notamos que ambos erros quadráticos médios independem do valor de θ . A Figura 1.2 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$.

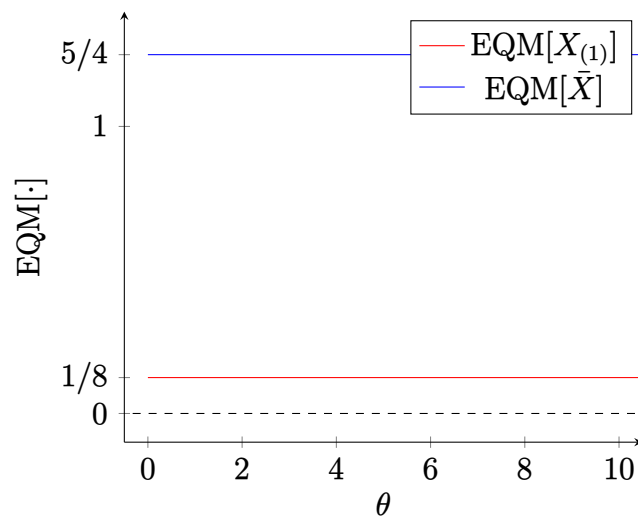


Figura 1.2: Erros quadráticos médios dos estimadores \bar{X} e $X_{(1)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.11

Seja uma X_1, \dots, X_n uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$(1.10) \quad F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \int_0^t \frac{2s}{\theta^2} ds & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^2}{\theta^2} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, 0 < x < \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(x) dx \\ &= \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2} dx \\ &= \frac{2x^3}{3\theta^2} \Big|_0^\theta \\ &= \frac{2}{3}\theta. \end{aligned}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\ &= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= \{F(t)\}^n \\ F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \quad (\text{De (1.10)}) \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{dF_{X_{(n)}}(t)}{dt} \\ &= 2n \frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} t 2n \frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) \, dt \\
 &= \int_0^\theta 2n \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} \, dt \\
 &= \frac{2n}{2n+1} \theta \\
 (1.12) \quad \mathbb{E}[X_{(n)}] &= \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] \theta.
 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1] \\
 &= \mathbb{E}[X_1] \\
 (1.13) \quad \mathbb{E}[\bar{X}] &= \frac{2}{3} \theta \quad (\text{De (1.11)}).
 \end{aligned}$$

Observamos portanto que tanto $X_{(n)}$ quanto \bar{X} são estimadores viciados para θ , embora este primeiro seja assintoticamente não viciado. Com a finalidade de compararmos os respectivos erros quadráticos médios, computamos os segundos momentos e variâncias correspondentes. Segue que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 2n \frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) \, dt \\
 &= \int_0^\theta 2n \frac{t^{2n+1}}{\theta^{2n}} \, dt \\
 (1.14) \quad \mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \theta^2.
 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_1^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{2t}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t) \, dt \\
 &= \int_0^\theta \frac{2t^3}{\theta^2} \, dt \\
 (1.15) \quad \mathbb{E}[X_1^2] &= \frac{1}{2} \theta^2.
 \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{4}{9} \theta^2 \quad (\text{De (1.11) e (1.15)}) \\
 (1.16) \quad \text{Var}[X_1] &= \frac{17}{18} \theta^2
 \end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\bar{X}] &= \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_1] \\
 &= \frac{1}{n} \text{Var}[X_1] \\
 (1.17) \quad \text{Var}[\bar{X}] &= \frac{17}{18n} \theta^2 \quad (\text{De (1.16)}).
 \end{aligned}$$

Portanto, os erros quadráticos médios associados aos estimadores são da forma

$$\begin{aligned}
 \text{EQM}[X_{(n)}] &= \text{Var}[X_{(n)}] + \{B(X_{(n)})\}^2 \\
 &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(n)}] - \theta\}^2 \\
 &= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \theta^2 - \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]^2 \theta^2 + \frac{1}{(2n+1)^2} \theta^2 \quad (\text{De (1.12) e (1.14)}) \\
 &= \frac{2}{2n+1} \theta^2 - \frac{1}{n+1} \theta^2 \\
 &= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(n+1)} \theta^2 \\
 \text{EQM}[X_{(n)}] &= \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \theta^2.
 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
 \text{EQM}[\bar{X}] &= \text{Var}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
 &= \frac{17}{18n} \theta^2 + \{\mathbb{E}[\bar{X}] - \theta\}^2 \quad (\text{De (1.17)}) \\
 &= \frac{17}{18n} \theta^2 + \frac{1}{9} \theta^2 \quad (\text{De (1.13)}) \\
 \text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{17+2n}{18n} \theta^2.
 \end{aligned}$$

A Figura 1.3 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$.

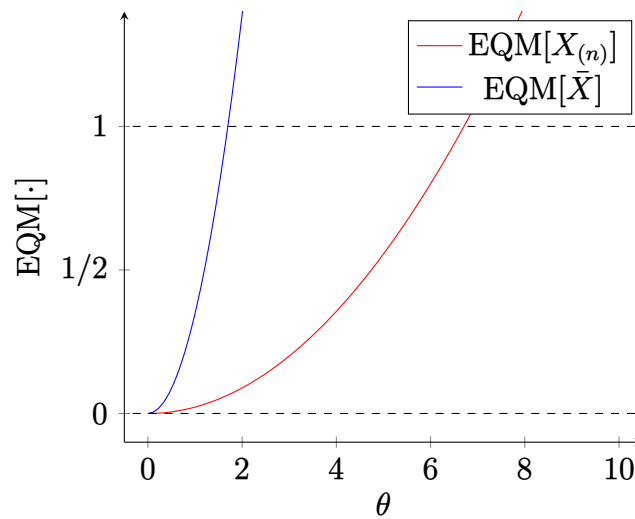


Figura 1.3: Erros quadráticos médios dos estimadores \bar{X} e $X_{(n)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.12

Exercício 1.13

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n cX_i^2\right] \\ &= c \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] \\ \mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= nc\sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[c^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i^2 X_j^2\right] &= 3nc^2\sigma^4 + n(n-1)c^2\sigma^4 \\ &= 2nc^2\sigma^4 + n^2c^2\sigma^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\sigma}_c^2] &= 2nc^2\sigma^4 + n^2c^2\sigma^4 - n^2c^2\sigma^4 + \{nc\sigma^2 - \sigma^2\}^2 \\ &= 2nc^2\sigma^4 + \{nc - 1\}^2\sigma^4 \\ &= 2nc^2\sigma^4 + \{n^2c^2 - 2nc + 1\}\sigma^4 \\ &= \{n^2c^4 + 1\}\sigma^4\end{aligned}$$

Capítulo 2

Estimadores Eficientes e Estatísticas Suficientes

Exercício 2.1

Exercício 2.2

Exercício 2.3

Exercício 2.4

Exercício 2.5

Exercício 2.6

Exercício 2.7

Exercício 2.8

Exercício 2.9

Exercício 2.10

Exercício 2.11

Exercício 2.12

Capítulo 3

Métodos de Estimação

Exercício 3.1

Exercício 3.2

Exercício 3.3

Exercício 3.4

Exercício 3.5

Exercício 3.6

Exercício 3.7

Exercício 3.8

Exercício 3.9

Exercício 3.10

Exercício 3.11

Exercício 3.12

Exercício 3.13

Exercício 3.14

Exercício 3.15

Exercício 3.16

Exercício 3.17

Exercício 3.18

Exercício 3.19

Exercício 3.20

Exercício 3.21

Capítulo 4

Introdução à Teoria das Decisões

Exercício 4.1

Exercício 4.2

Exercício 4.3

Exercício 4.4

Exercício 4.5

Exercício 4.6

Exercício 4.7

Exercício 4.8

Exercício 4.9

Exercício 4.10

Exercício 4.11

Exercício 4.12

Capítulo 5

Estimação por Intervalo

Exercício 5.1

Exercício 5.2

Exercício 5.3

Exercício 5.4

Exercício 5.5

Exercício 5.6

Exercício 5.7

Exercício 5.8

Exercício 5.9

Exercício 5.10

Exercício 5.11

Exercício 5.12

Exercício 5.13

Exercício 5.14

Capítulo 6

Testes de Hipóteses

Exercício 6.1

Exercício 6.2

Exercício 6.3

Exercício 6.4

Exercício 6.5

Exercício 6.6

Exercício 6.7

Exercício 6.8

Exercício 6.9

Exercício 6.10

Exercício 6.11

Exercício 6.12

Exercício 6.13

Exercício 6.14

Exercício 6.15

Exercício 6.16

Exercício 6.17