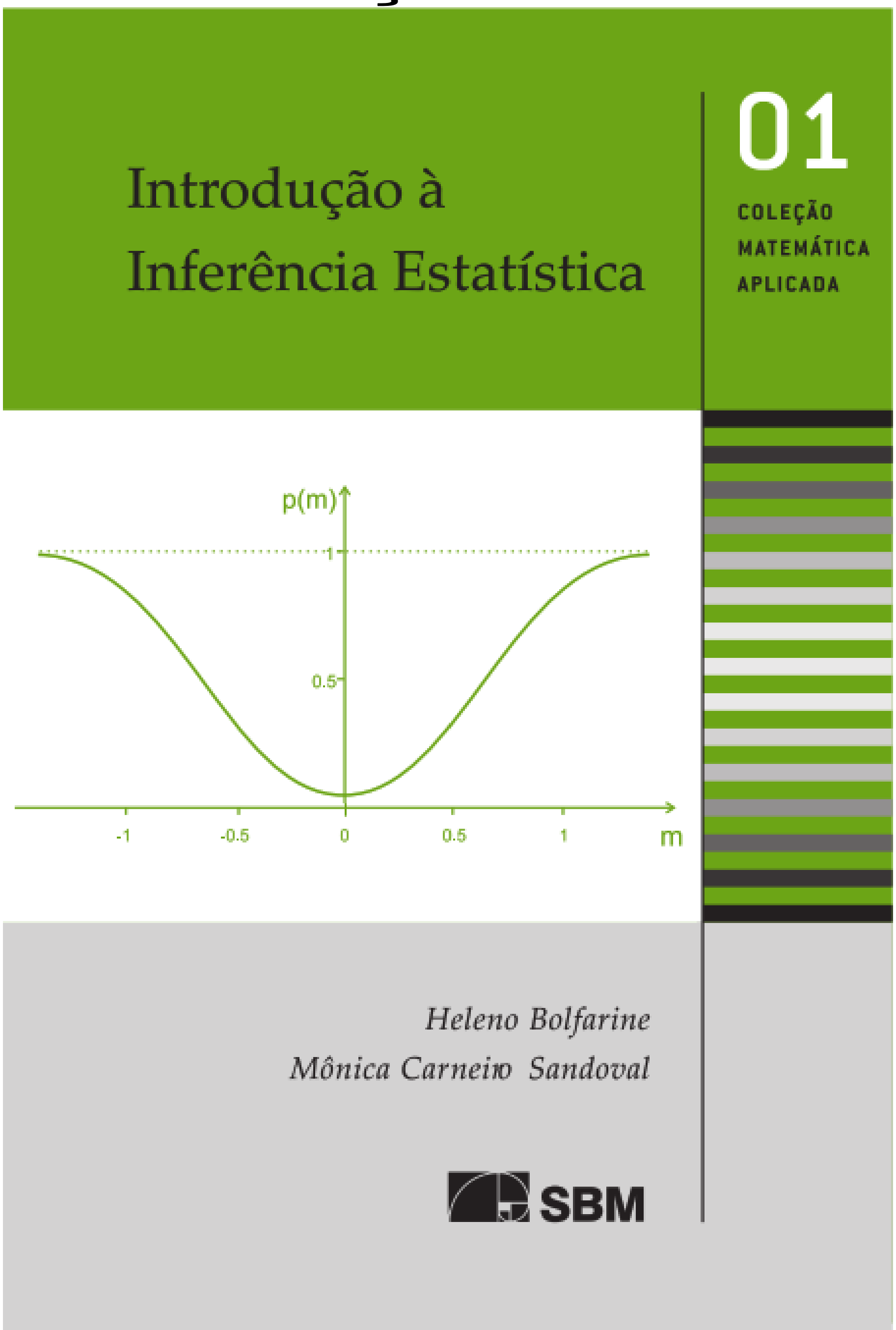
# Soluções para




(2ª edição, 2010)

# Antes de lêr

## Este Livro de Soluções Está Atualmente Incompleto

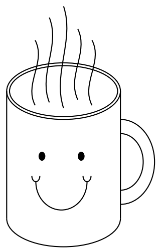
Este material é parte de uma iniciativa individual minha para desenvolver soluções para o livro “*Introdução à Inferência Estatística*" (2ª edição, 2010), de Heleno Bolfarine e Mônica Carneiro Sandoval. **Estas soluções não são oficiais, elas são minhas próprias, assim como todos erros, imperfeições e incosistências gramáticas e matemáticas nelas encontradas**. O nível de detalhamento varia de questão para questão. Para mais informações sobre o livro, visitem este *link* para sua página na loja da Sociedade Brasileira de Matemática.

Alguns comentários a respeito da organização deste material: todos Exercícios são apresentados na mesma ordem que o livro original, separados por capítulo. *Links* que referenciam fórmulas contidas neste livro (ou levam a um sítio na *Web*) estão destacados com a cor azul.

Agora aproveite uma boa citação de um bom filme, e um café de “*Bom Dia!*":

> “What do you think the Russians talk about in their councils of state, Karl Marx? They get out their linear programming charts, statistical decision theories, minimax solutions, and compute the price-cost probabilities of their transactions and investments, just like we do."
>
> Arthur Jensen, Network (1976)

“



*Bom dia!*”

# Capítulo 1
# Elementos Básicos

## Exercício 1.1

Segue que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathbb{E}[(\hat{\theta}-\theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}]+\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}])^2]+2\mathbb{E}[(\hat{\theta}-\mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)]+\mathbb{E}[(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)^2] \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\theta}]+2(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\mathbb{E}[\hat{(\theta)}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)+(\mathbb{E}[\hat{\theta}]-\theta)^2 \\
\mathrm{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\theta}]+\{B(\hat{\theta})\}^2.
\end{aligned}
$$

# Exercício 1.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, e seja o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Buscamos determinar o valor esperado de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - 2\mathbb{E}[\bar{X}^2] - \mathbb{E}[\bar{X}^2] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] - \{\mathbb{E}[\bar{X}]\}^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{1.1}$$

# Exercício 1.3

Supomos que $X_1, X_2, X_3$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{E}[X_1] = \theta \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{V}\text{ar}[X_1] = 1$, e seja $\hat{\theta}_2$ tal que

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_2] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_3] \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta \\
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \theta.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_2] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_3] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

# Exercício 1.4

Para este exercício, serão necessários os seguintes resultados:

1. Se $X \sim \textsc{Normal}(\mu, \sigma^2)$, logo $Z = \sigma^{-1}(X - \mu) \sim \textsc{Normal}(0, 1)$.
2. Se $Z_1, \ldots, Z_n$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $Z_1 \sim \textsc{Normal}(0, 1)$, logo

$$W = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2 \sim \textsc{Qui-quadrado}(n-1).$$

Consideramos aqui o mesmo contexto que do Exercício 1.2. Calculamos o valor esperado de $S^2$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] \\
&= \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 \\
\mathbb{E}[S^2] &= \sigma^2. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Buscamos agora determinar a variância de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2\right] && \text{(De Item 1)} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} && \text{(De Item 2).} \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[S^2] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\sigma}^2] \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[S^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] + \{B(\hat{\sigma}^2)\}^2 \\
&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \left\{ \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2 \right\}^2 && \text{(De (1.3))} \\
&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} && \text{(De (1.1))} \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[\frac{2(n-1)^2 + n - 1}{n^2}\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[\frac{2n^2 - 4n + 2 + n - 1}{n^2}\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[2 - \frac{(3n-1)}{n^2}\right] \\
\text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1}\left[1 - \frac{(3n-1)}{2n^2}\right].
\end{aligned}
$$

Por sua vez, uma vez que $S^2$ é um estimador não viciado para $\sigma^2$, como visto em (1.2), temos que o EQM associado trata-se apenas da variância do estimador, isto é

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[S^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[S^2] \\
&= \frac{2\sigma^4}{n-1}.
\end{aligned}
$$

# Exercício 1.5

Em suma, buscamos determinar valores de $\theta$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_2] \\
\frac{\theta(1-\theta)}{n} &= \frac{n}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\theta - \theta^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\frac{1}{4} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}\right\} \\
\theta - \frac{1}{2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}} \\
\theta &= \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}}\right] \\
\theta &= \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right].
\end{aligned}$$

Disto, concluímos que

$$c_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right] \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right].$$

Particularmente, para $n = 9$, temos que

$$c_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{8} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{8}.$$

# Exercício 1.6

Seja uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_1, \dots, X_n$ tal que $X_1 \sim \textsc{Uniforme}(0, \theta)$, buscamos determinar a função acumulada de probabilidade de $X_{(n)}$, dada por

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\
&= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\
&= \{F(t)\}^n \\
F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^n}{\theta^n} & \text{se } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Segue que a função de densidade de probabilidade correspondente é da forma

$$\begin{aligned}
f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t).
\end{aligned}$$

O valor esperado de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} tn\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta n\frac{t^n}{\theta^n}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \frac{n}{n+1}\theta. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Por sua vez, o segundo momento de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta n\frac{t^{n+1}}{\theta^n}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \frac{n}{n+2}\theta^2. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Por fim, a variância de $X_{(n)}$ é da forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{(n)}] &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 \\
&= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n-2)}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \\
&= \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{(n)}] &= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

# Exercício 1.7

Sabemos que

$$\mathbb{P}(X_{(n)} = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n. \tag{1.8}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{N}_5] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \mathbb{P}(X_{(n)} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \left\{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right\} && \text{(De (1.8))} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{N^n} \\
&= N \cdot \sum_{k=1}^{N} \left\{\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \left(\frac{k-1}{N}\right)^{n+1}\right\} \\
&= N \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_{(n+1)} = k) && \text{(De (1.8))} \\
\mathbb{E}[\hat{N}_5] &= N.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\hat{N}_5$ é um estimador não viciado para $N$.

# Exercício 1.8

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{Normal}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Segue que, se pretendemos estimar $\mu$, temos que os erros quadráticos médios associados $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ e $\hat{\mu}_2 = 10$ são tais que

$$\begin{aligned} \text{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\ &= \frac{1}{n} + \{\mu - \mu\}^2 \\ \text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por sua vez

$$\begin{aligned} \text{EQM}[10] &= \mathbb{V}\text{ar}[10] + \{B(10)\}^2 \\ &= 0 + \{10 - \mu\}^2 \\ \text{EQM}[10] &= (\mu - 10)^2. \end{aligned}$$

A Figura 1.1 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$.

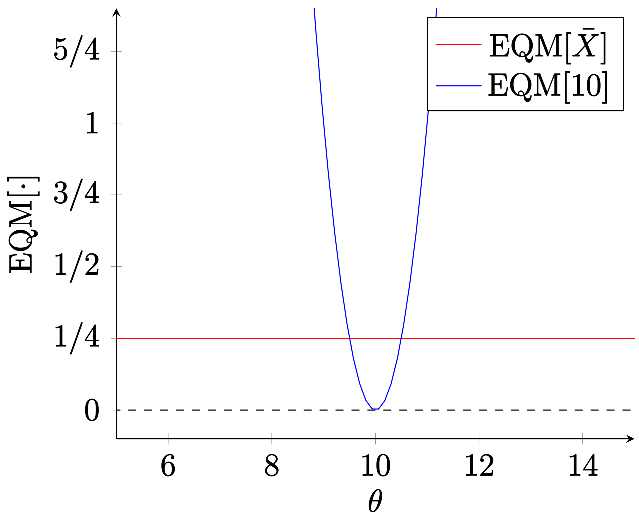



Figura 1.1: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e 10 para uma amostra de tamanho $n = 4$.

# Exercício 1.9

Seja uma variável aleatória $X \sim \textsc{Bernoulli}(\theta)$, com $\theta \in [0, 1]$. Propomos dois estimadores: $\hat{\theta}_1 = X$ e $\hat{\theta}_2 = 1/2$. Segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{E}[X] \\ &= \theta,\end{aligned}$$

e

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \frac{1}{2}.$$

Concluímos portanto que $\hat{\theta}_1$ é um estimador não viciado para $\theta$, enquanto $\hat{\theta}_2$ o é. Segue que o erro quadrático médio associado a $\hat{\theta}_1$, uma vez que este estimador é não viciado, é

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_1] \\ &= \mathbb{V}\text{ar}[X] \\ \text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \theta(1-\theta).\end{aligned}$$

Por sua vez, o erro quadrático médio associado a $\hat{\theta}_2$ é

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] + \{B(1/2)\}^2 \\ &= 0 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 \\ \text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= 0 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2.\end{aligned}$$

A Figura 1.1 ilustra os EQMs. Para fim de comparação dos EQMs, verificamos para quais valores de $\theta \in [0, 1]$ temos $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &> \text{EQM}[\hat{\theta}_2] \\ \theta(1-\theta) &> \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 \\ \theta - \theta^2 &> \frac{1}{4} - \theta + \theta^2 \\ \theta - \theta^2 &> \frac{1}{8} \\ \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &< \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} < \theta - \frac{1}{2} &< \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} < \theta &< \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Disto, concluímos que para $\theta \in [{}^{\sqrt{2}-1}/_{2\sqrt{2}}, {}^{\sqrt{2}+1}/_{2\sqrt{2}}]$ temos que o estimador $\hat{\theta}_2$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_1$, pelo critério do EQM.

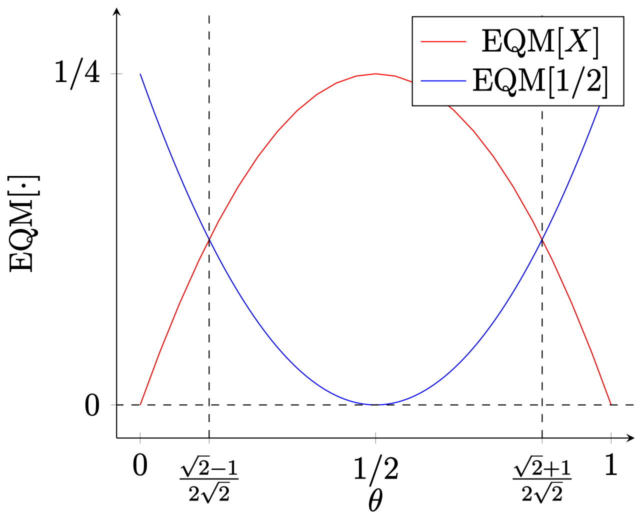



Figura 1.2: Erros quadráticos médios dos estimadores $X$ e 1/2.

# Exercício 1.10

Seja uma $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$F(t) = \begin{cases} \int_\theta^t e^{-(s-\theta)} \, \mathrm{d}s & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases} \tag{1.9}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, x > \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\theta^\infty x e^{-(x-\theta)} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty (t+\theta) e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t e^{-t} \, \mathrm{d}t + \theta \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ \mathbb{E}[X_1] &= 1 + \theta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \dots, X_n > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\} \\ &= 1 - \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= 1 - \{1 - F(t)\}^n \\ &= \begin{cases} 1 - \{1 - 1 + e^{-(t-\theta)}\}^n & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{(De (1.9))} \\ F_{X_{(1)}}(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-n(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F_{X_{(1)}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= ne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(1)}] &= \int_{\mathbb{R}} tne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\theta}^{\infty} tne^{-n(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} (s+\theta)ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty} sne^{-ns}\ \mathrm{d}s + \theta\int_0^{\infty} ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\ \mathbb{E}[X_{(1)}] &= \frac{1}{n} + \theta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

E

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_1] \\ &= \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{E}[\bar{X}] &= 1+\theta \qquad \text{(De (1.10))}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Disto, concluímos que tanto o estimador $X_{(1)}$ quanto o estimador $\bar{X}$ são estimadores viciados para $\theta$, embora o primeiro seja assintoticamente não viciado. Para computarmos agora os respectivos erros quadráticos médios, primeiramente calculamos seus momentos de segunda ordem ou variâncias, como segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(1)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2ne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\theta}^{\infty} t^2ne^{-n(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} (s+\theta)^2ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty} s^2ne^{-ns}\ \mathrm{d}s + 2\theta\int_0^{\infty} sne^{-ns}\ \mathrm{d}s + \theta^2\int_0^{\infty} ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 \\ \mathbb{E}[X_{(1)}^2] &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}+\theta\right)^2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

E

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta}^{\infty} t^2 e^{-(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} (s+\theta)^2 e^{-s}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} s^2 e^{-s}\ \mathrm{d}s + 2\theta \int_{0}^{\infty} s e^{-s}\ \mathrm{d}s + \theta^2 \int_{0}^{\infty} n e^{-ns}\ \mathrm{d}s \\
&= 2 + 2\theta + \theta^2 \\
\mathbb{E}[X_1^2] &= 1 + (1+\theta)^2. \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

De forma que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
&= 1 + (1+\theta)^2 - (1+\theta)^2 && \text{(De (1.10) e (1.14))} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= 1. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Daí, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} && \text{(De (1.15)).} \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Concluímos portanto que os erros quadráticos médios associados aos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(1)}$ são

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[X_{(1)}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{(1)}] + \{B(X_{(1)})\}^2 \\
&= \mathbb{E}[X_{(1)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(1)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta\}^2 \\
&= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 + \frac{1}{n^2} && \text{(De (1.11) e (1.13))} \\
\mathrm{EQM}[X_{(1)}] &= \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}
$$

E

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
\mathrm{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} + 1 && \text{(De (1.12) e (1.16)).}
\end{aligned}
$$

Notamos que ambos erros quadráticos médios independem do valor de $\theta$. A Figura 1.3 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$. Para fim de comparação dos

EQMs, verificamos para quais valores de $\theta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &> \text{EQM}[X_{(1)}] \\
\frac{1}{n} + 1 &> \frac{2}{n^2} \\
n^2 + n &> 2 \\
n(n+1) &> 2.
\end{aligned}$$

Notamos que $\{n, n(n+1) > 2\} \cap \mathbb{N} = \{2, \ldots\}$, logo para todo valor de $\theta$ e para todo tamanho de amostra maior do que $n = 1$ temos que $X_{(1)}$ é um estimador preferível a $\bar{X}$, pelo critério do EQM. Para $n = 1$, temos que o estimadores são iguais.

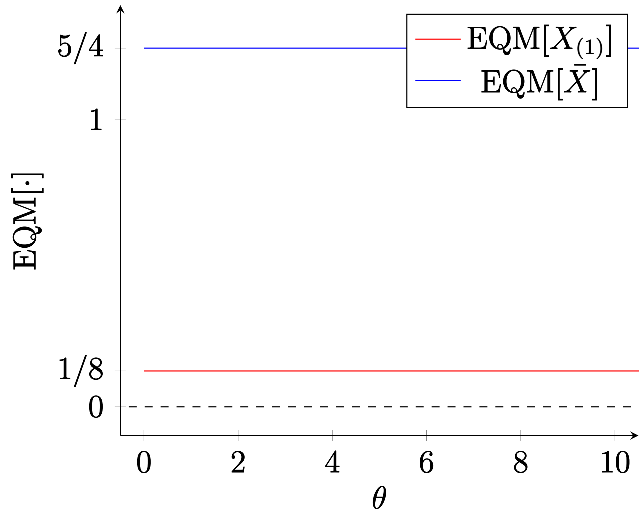



Figura 1.3: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(1)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

# Exercício 1.11

Seja uma $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \int_0^t \frac{2s}{\theta^2}\,\mathrm{d}s & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^2}{\theta^2} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, 0 < x < \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{2x^3}{3\theta^2}\right|_0^\theta \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{2}{3}\theta. \tag{1.18}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\ &= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= \{F(t)\}^n \\ F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \qquad \text{(De (1.17))} \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F_{X_{(n)}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= 2n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} t2n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta 2n\frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2n}{2n+1}\theta \\
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]\theta. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1] \\
&= \mathbb{E}[X_1] \\
\mathbb{E}[\bar{X}] &= \frac{2}{3}\theta \qquad \text{(De (1.18))}. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Observamos portanto que tanto $X_{(n)}$ quanto $\bar{X}$ são estimadores viciados para $\theta$, embora este primeiro seja assintoticamente não viciado. Com a finalidade de compararmos os respectivos erros quadráticos médios, computamos os segundos momentos e variâncias correspondentes. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 2n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta 2n\frac{t^{2n+1}}{\theta^{2n}}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]\theta^2. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2\frac{2t}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta \frac{2t^3}{\theta^2}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_1^2] &= \frac{1}{2}\theta^2. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{4}{9}\theta^2 \qquad \text{(De (1.18) e (1.22))} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \frac{17}{18}\theta^2. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \frac{17}{18n}\theta^2 \qquad \text{(De (1.23)).} \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Portanto, os erros quadráticos médios associados aos estimadores são da forma

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[X_{(n)}] &= \mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] + \{B(X_{(n)})\}^2 \\
&= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(n)}] - \theta\}^2 \\
&= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]\theta^2 - \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]^2\theta^2 + \frac{1}{(2n+1)^2}\theta^2 \quad \text{(De (1.19) e (1.21))} \\
&= \frac{2}{2n+1}\theta^2 - \frac{1}{n+1}\theta^2 \\
&= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2 \\
\text{EQM}[X_{(n)}] &= \frac{1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
&= \frac{17}{18n}\theta^2 + \{\mathbb{E}[\bar{X}] - \theta\}^2 \quad \text{(De (1.24))} \\
&= \frac{17}{18n}\theta^2 + \frac{1}{9}\theta^2 \quad \text{(De (1.20))} \\
\text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{17+2n}{18n}\theta^2.
\end{aligned}$$

A Figura 1.4 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$. Para fim de comparação dos EQMs, verificamos para quais valores de $\theta < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &> \text{EQM}[X_{(n)}] \\
\frac{17+2n}{18n}\theta^2 &> \frac{1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2 \\
(17+2n)(2n+1)(n+1) &> 18n.
\end{aligned}$$

Observamos que $\{n(17+2n)(2n+1)(n+1) > 18n\} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Concluímos que, para todo valor de $\theta > 0$ e tamanho de amostra $n \geq 1$, temos que o estimador $X_{(n)}$ é preferível ao estimador $\bar{X}$ com respeito ao critério do EQM.

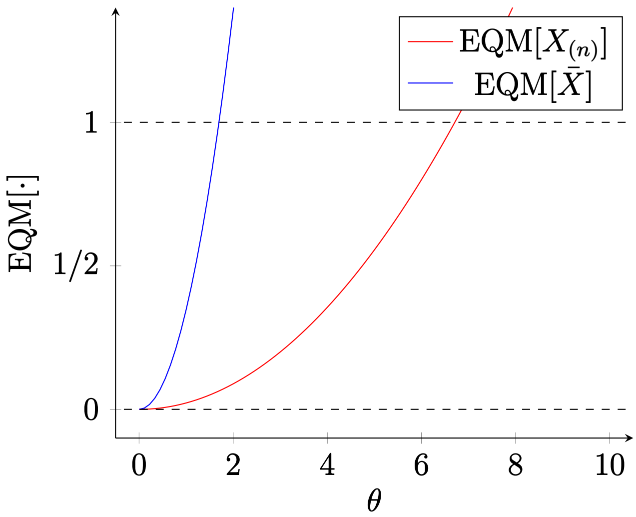



Figura 1.4: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(n)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

# Exercício 1.12

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Uniforme}(0, \theta)$, $\theta > 0$. Buscamos estimar $\theta$, e propomos $\hat{\theta}_1 = c_1 \bar{X}$ e $\hat{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}$. Buscamos determinar $c_1$ tal que $\hat{\theta}_1$ seja não viciado: segue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] &= \theta \\
\mathbb{E}[c_1 \bar{X}] &= \theta \\
c_1 \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \theta \\
c_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] &= \theta \\
c_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1] &= \theta \\
c_1 \theta &= \theta \\
c_1 &= 1.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ é um estimador não viciado para $\theta$. Por sua vez, para $\hat{\theta}_2$, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \theta \\
\mathbb{E}[c_2 X_{(n)}] &= \theta \\
c_2 \frac{n}{n+1}\theta &= \theta && \text{(De (1.5))} \\
c_2 &= \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que $\hat{\theta}_2 = n^{-1}(n+1)X_{(n)}$ é um estimador não viciado para $\theta$. Como ambos estimadores são não viciados com respeito a $\theta$, temos que seus respectivos erros quadráticos médios são da forma

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_1] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \frac{\theta^2}{12n},
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right] \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \quad \text{(De (1.7))} \\
\text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \frac{\theta^2}{n(n+2)}.
\end{aligned}$$

Comparamos o desempenho dos estimadores agora determinando para quais valores de $\theta > 0$ temos que $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &> \text{EQM}[\hat{\theta}_2] \\
\frac{\theta^2}{12n} &> \frac{\theta^2}{n(n+2)} \\
n+2 &> 12 \\
n &> 10.
\end{aligned}$$

Concluímos que, para todo valor de $\theta$, temos que para $n < 10$, com respeito ao EQM, temos que o estimador $\hat{\theta}_1$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_2$. Por sua vez, para $n = 10$, temos que ambos estimadores tem mesmo EQM. Por fim, se $n > 10$, temos que o estimador $\hat{\theta}_2$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_1$.

# Exercício 1.13

Para este exercício, serão necessários os seguintes resultados:

1. Se $Z_1, \ldots, Z_n$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $Z_1 \sim \text{Normal}(0, 1)$, logo
$$W = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \text{Qui-quadrado}(n).$$

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$, com $\sigma^2 > 0$, buscamos computar o valor esperado de $\sigma_c^2 = cS^2$ e sua variância. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} cX_i^2\right] \\
&= c\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= nc\sigma^2; \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} cX_i^2\right] \\
&= c^2\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] \\
&= c^2\sigma^4\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] &= 2nc^2\sigma^4 \qquad \text{(Do Item 1)}. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Concluímos que o erro quadrático médio do estimador $\hat{\sigma}_c^2$ é

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\sigma}_c^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] + \{B(\hat{\sigma}_c^2)\} \\
&= 2nc^2\sigma^4 + \{\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] - \sigma^2\}^2 && \text{(De (1.26))} \\
&= 2nc^2\sigma^4 + \{nc\sigma^2 - \sigma^2\}^2 && \text{(De (1.25))} \\
&= [2nc^2 + \{nc - 1\}^2]\sigma^4 \\
&= [(n+2)nc^2 - 2nc + 1]\sigma^4 \\
&= (n+2)n\left[c^2 - 2\frac{c}{n+2} + \frac{1}{n(n+2)}\right]\sigma^4 \\
&= (n+2)n\left[\left(c - \frac{1}{n+2}\right)^2 - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{n(n+2)}\right]\sigma^4 \\
\text{EQM}[\hat{\sigma}_c^2] &= \left[(n+2)n\left(c - \frac{1}{n+2}\right)^2 + \frac{2}{n+2}\right]\sigma^4. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

É trivial concluirmos que, para minimização de (1.27) com respeito a $c$, basta tomar $c = 1/(n+2)$.

# Capítulo 2
# Estimadores Eficientes e Estatísticas Suficientes

## Exercício 2.1

# Exercício 2.2

# Exercício 2.3

# Exercício 2.4

# Exercício 2.5

# Exercício 2.6

# Exercício 2.7

# Exercício 2.8

# Exercício 2.9

# Exercício 2.10

# Exercício 2.11

# Exercício 2.12

# Capítulo 3
# Métodos de Estimação

## Exercício 3.1

# Exercício 3.2

# Exercício 3.3

# Exercício 3.4

# Exercício 3.5

# Exercício 3.6

# Exercício 3.7

# Exercício 3.8

# Exercício 3.9

# Exercício 3.10

# Exercício 3.11

# Exercício 3.12

# Exercício 3.13

# Exercício 3.14

# Exercício 3.15

# Exercício 3.16

# Exercício 3.17

# Exercício 3.18

# Exercício 3.19

# Exercício 3.20

# Exercício 3.21

# Capítulo 4
# Introdução à Teoria das Decisões

## Exercício 4.1

# Exercício 4.2

# Exercício 4.3

# Exercício 4.4

# Exercício 4.5

# Exercício 4.6

# Exercício 4.7

# Exercício 4.8

# Exercício 4.9

# Exercício 4.10

# Exercício 4.11

# Exercício 4.12

# Capítulo 5
# Estimação por Intervalo

## Exercício 5.1

# Exercício 5.2

# Exercício 5.3

# Exercício 5.4

# Exercício 5.5

# Exercício 5.6

# Exercício 5.7

# Exercício 5.8

# Exercício 5.9

# Exercício 5.10

# Exercício 5.11

# Exercício 5.12

# Exercício 5.13

# Exercício 5.14

# Capítulo 6
# Testes de Hipóteses

## Exercício 6.1

# Exercício 6.2

# Exercício 6.3

# Exercício 6.4

# Exercício 6.5

# Exercício 6.6

# Exercício 6.7

# Exercício 6.8

# Exercício 6.9

# Exercício 6.10

# Exercício 6.11

# Exercício 6.12

# Exercício 6.13

# Exercício 6.14

# Exercício 6.15

# Exercício 6.16

# Exercício 6.17