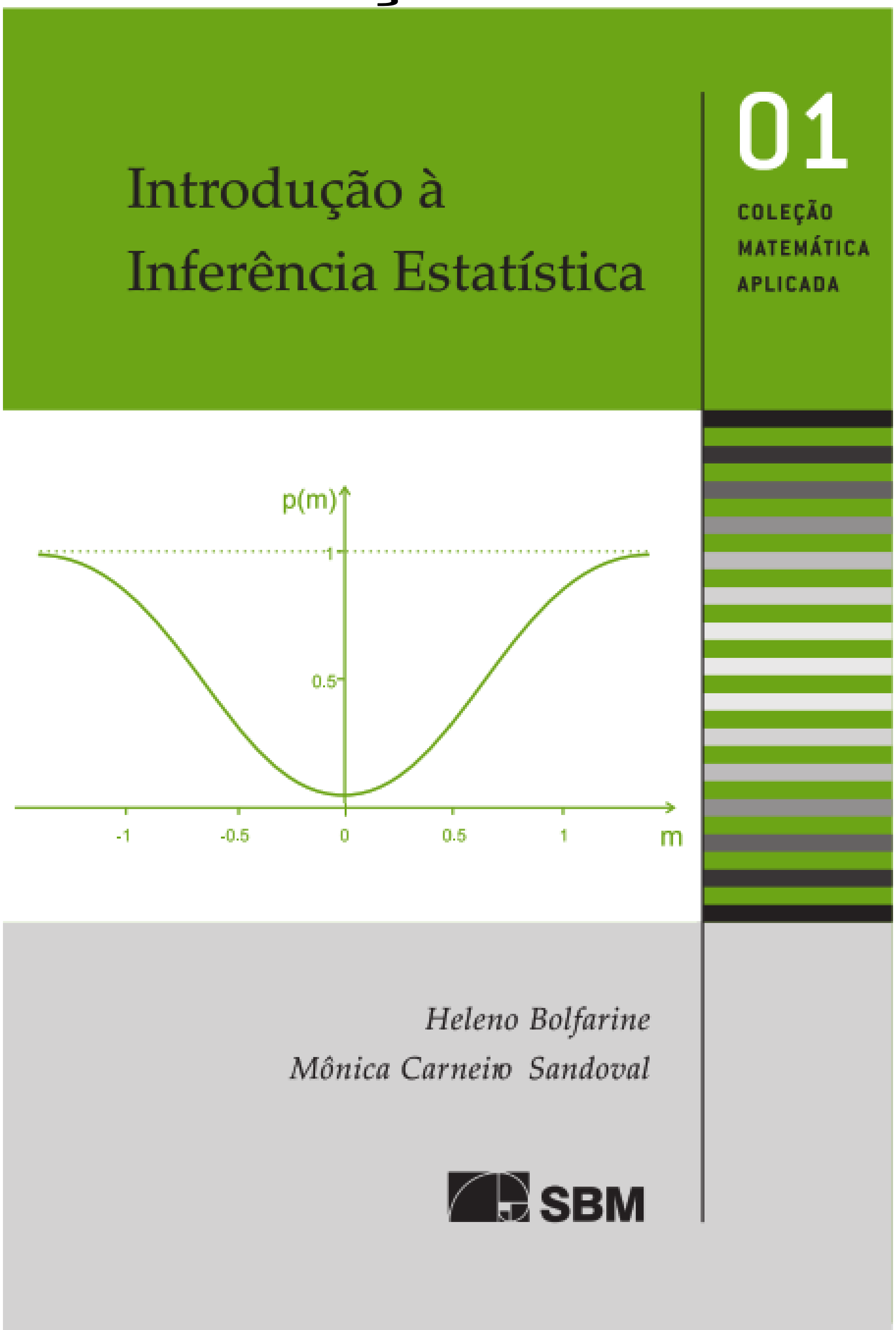
SOLUÇÕES PARA



(2ª EDIÇÃO, 2010)

Antes de lêr

Este Livro de Soluções Está Atualmente Incompleto

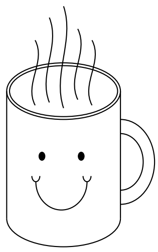
Este material é parte de uma iniciativa individual minha para desenvolver soluções para o livro "*Introdução à Inferência Estatística*" (2ª edição, 2010), de Heleno Bolfarine e Mônica Carneiro Sandoval. **Estas soluções não são oficiais, elas são minhas próprias, assim como todos erros, imperfeições e incosistências gramáticas e matemáticas nelas encontradas**. O nível de detalhamento varia de questão para questão. Para mais informações sobre o livro, visitem este *link* para sua página na loja da Sociedade Brasileira de Matemática.

Alguns comentários a respeito da organização deste material: todos Exercícios são apresentados na mesma ordem que o livro original, separados por capítulo. *Links* que referenciam fórmulas contidas neste livro (ou levam a um sítio na *Web*) estão destacados com a cor azul.

Agora aproveite uma boa citação de um bom filme, e um café de "*Bom Dia!*":

> "What do you think the Russians talk about in their councils of state, Karl Marx? They get out their linear programming charts, statistical decision theories, minimax solutions, and compute the price-cost probabilities of their transactions and investments, just like we do."
>
> Arthur Jensen, Network (1976)

"



Bom dia!"

Capítulo 1
Elementos Básicos

Exercício 1.1

Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}] + \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\
&= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])^2] + 2\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \mathbb{E}[\hat{\theta}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}] + 2(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \mathbb{E}[\hat{(\theta)}])(\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta) + (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 \\
\text{EQM}[\hat{\theta}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}] + \{B(\hat{\theta})\}^2.
\end{aligned}$$

Exercício 1.2

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, e seja o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Buscamos determinar o valor esperado de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - 2\mathbb{E}[\bar{X}^2] - \mathbb{E}[\bar{X}^2] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] - \{\mathbb{E}[\bar{X}]\}^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{1.1}$$

Exercício 1.3

Supomos que X_1, X_2, X_3 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{E}[X_1] = \theta \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{V}\text{ar}[X_1] = 1$, e seja $\hat{\theta}_2$ tal que

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_2] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_3] \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta \\
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \theta.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_2] + \frac{1}{16}\mathbb{V}\text{ar}[X_3] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] &= \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.4

Para este exercício, serão necessários os seguintes resultados:

1. Se $X \sim \textsc{Normal}(\mu, \sigma^2)$, logo $Z = \sigma^{-1}(X - \mu) \sim \textsc{Normal}(0, 1)$.
2. Se $Z_1, \ldots, Z_n$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $Z_1 \sim \textsc{Normal}(0, 1)$, logo

$$W = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2 \sim \textsc{Qui-quadrado}(n-1).$$

Consideramos aqui o mesmo contexto que do Exercício 1.2. Calculamos o valor esperado de S^2 da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] \\
&= \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 \\
\mathbb{E}[S^2] &= \sigma^2. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Buscamos agora determinar a variância de $\hat{\sigma}^2$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n^2}\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2\right] && \text{(De Item 1)} \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} && \text{(De Item 2)}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[S^2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right] \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} \\
\mathbb{V}\text{ar}[S^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}^2] + \{B(\hat{\sigma}^2)\}^2 \\
&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \left\{\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2\right\}^2 && \text{(De (1.3))} \\
&= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} && \text{(De (1.1))} \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[\frac{2(n-1)^2 + n - 1}{n^2}\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[\frac{2n^2 - 4n + 2 + n - 1}{n^2}\right] \\
&= \frac{\sigma^4}{n-1}\left[2 - \frac{(3n-1)}{n^2}\right] \\
\text{EQM}[\hat{\sigma}^2] &= \frac{2\sigma^4}{n-1}\left[1 - \frac{(3n-1)}{2n^2}\right].
\end{aligned}
$$

Por sua vez, uma vez que S^2 é um estimador não viciado para σ^2, como visto em (1.2), temos que o EQM associado trata-se apenas da variância do estimador, isto é

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[S^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[S^2] \\
&= \frac{2\sigma^4}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Exercício 1.5

Em suma, buscamos determinar valores de θ tal que

$$
\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \text{EQM}[\hat{\theta}_2] \\
\frac{\theta(1-\theta)}{n} &= \frac{n}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\theta - \theta^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\frac{1}{4} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{n^2}{4(n+\sqrt{n})^2} \\
\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}\right\} \\
\theta - \frac{1}{2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}} \\
\theta &= \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^2}}\right] \\
\theta &= \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right].
\end{aligned}
$$

Disto, concluímos que

$$
c_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right] \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+1}\right].
$$

Particularmente, para $n = 9$, temos que

$$
c_1 = \frac{4-\sqrt{7}}{8} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{4+\sqrt{7}}{8}.
$$

Exercício 1.6

Seja uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X_1 \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$, buscamos determinar a função acumulada de probabilidade de $X_{(n)}$, dada por

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\
&= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\
&= \{F(t)\}^n \\
F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^n}{\theta^n} & \text{se } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Segue que a função de densidade de probabilidade correspondente é da forma

$$\begin{aligned}
f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t).
\end{aligned}$$

O valor esperado de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} tn\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta n\frac{t^n}{\theta^n}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \frac{n}{n+1}\theta. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Por sua vez, o segundo momento de $X_{(n)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta n\frac{t^{n+1}}{\theta^n}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \frac{n}{n+2}\theta^2. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Por fim, a variância de $X_{(n)}$ é da forma

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] &= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 \\
&= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n-2)}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \\
&= \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}. \tag{1.7}
$$

Exercício 1.7

Sabemos que

$$\mathbb{P}(X_{(n)} = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n. \tag{1.8}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{N}_5] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \mathbb{P}(X_{(n)} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot \left\{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right\} && \text{(De (1.8))} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{N^n} \\
&= N \cdot \sum_{k=1}^{N} \left\{\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \left(\frac{k-1}{N}\right)^{n+1}\right\} \\
&= N \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_{(n+1)} = k) && \text{(De (1.8))} \\
\mathbb{E}[\hat{N}_5] &= N.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\hat{N}_5$ é um estimador não viciado para N.

Exercício 1.8

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{Normal}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Segue que, se pretendemos estimar μ, temos que os erros quadráticos médios associados $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ e $\hat{\mu}_2 = 10$ são tais que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
&= \frac{1}{n} + \{\mu - \mu\}^2 \\
\text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Por sua vez

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[10] &= \mathbb{V}\text{ar}[10] + \{B(10)\}^2 \\
&= 0 + \{10 - \mu\}^2 \\
\text{EQM}[10] &= (\mu - 10)^2.
\end{aligned}$$

A Figura 1.1 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$.

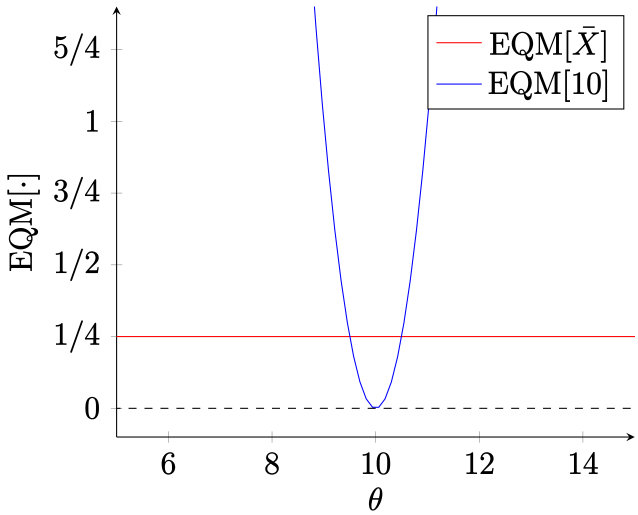


Figura 1.1: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e 10 para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.9

Seja uma variável aleatória $X \sim \textsc{Bernoulli}(\theta)$, com $\theta \in [0, 1]$. Propomos dois estimadores: $\hat{\theta}_1 = X$ e $\hat{\theta}_2 = 1/2$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{E}[X] \\ &= \theta, \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \frac{1}{2}.$$

Concluímos portanto que $\hat{\theta}_1$ é um estimador não viciado para θ, enquanto $\hat{\theta}_2$ o é. Segue que o erro quadrático médio associado a $\hat{\theta}_1$, uma vez que este estimador é não viciado, é

$$\begin{aligned} \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\theta}_1] \\ &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] \\ \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \theta(1-\theta). \end{aligned}$$

Por sua vez, o erro quadrático médio associado a $\hat{\theta}_2$ é

$$\begin{aligned} \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\theta}_2] + \{B(1/2)\}^2 \\ &= 0 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 \\ \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_2] &= 0 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2. \end{aligned}$$

A Figura 1.1 ilustra os EQMs. Para fim de comparação dos EQMs, verificamos para quais valores de $\theta \in [0, 1]$ temos $\mathrm{EQM}[\hat{\theta}_1] > \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_1] &> \mathrm{EQM}[\hat{\theta}_2] \\ \theta(1-\theta) &> \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^2 \\ \theta - \theta^2 &> \frac{1}{4} - \theta + \theta^2 \\ \theta - \theta^2 &> \frac{1}{8} \\ \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 &< \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} < \theta - \frac{1}{2} &< \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} < \theta &< \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Disto, concluímos que para $\theta \in [\sqrt{2}-1/2\sqrt{2}, \sqrt{2}+1/2\sqrt{2}]$ temos que o estimador $\hat{\theta}_2$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_1$, pelo critério do EQM.

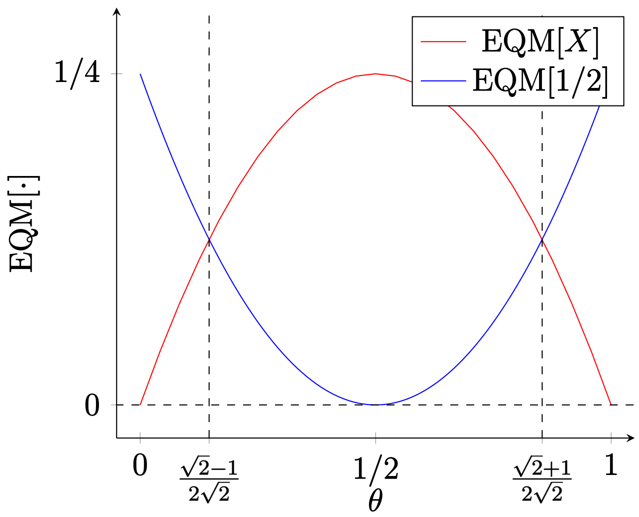


Figura 1.2: Erros quadráticos médios dos estimadores X e $1/2$.

Exercício 1.10

Seja uma $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$F(t) = \begin{cases} \int_\theta^t e^{-(s-\theta)}\, \mathrm{d}s & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases} \tag{1.9}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, x > \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_\theta^\infty x e^{-(x-\theta)}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty (t+\theta) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t e^{-t}\, \mathrm{d}t + \theta \int_0^\infty e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \mathbb{E}[X_1] &= 1 + \theta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \ldots, X_n > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\} \\ &= 1 - \{1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= 1 - \{1 - F(t)\}^n \\ &= \begin{cases} 1 - \{1 - 1 + e^{-(t-\theta)}\}^n & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} && \text{(De (1.9))} \\ F_{X_{(1)}}(t) &= \begin{cases} 1 - e^{-n(t-\theta)} & \text{se } t \geq \theta, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(1)}$ é

$$
\begin{aligned}
f_{X_{(1)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F_{X_{(1)}}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= ne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t).
\end{aligned}
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(1)}] &= \int_{\mathbb{R}} tne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta}^{\infty} tne^{-n(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} (s+\theta)ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} sne^{-ns}\ \mathrm{d}s + \theta\int_{0}^{\infty} ne^{-ns}\ \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}[X_{(1)}] = \frac{1}{n} + \theta. \tag{1.11}
$$

E

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_1] \\
&= \mathbb{E}[X_1]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}[\bar{X}] = 1+\theta \qquad \text{(De (1.10)).} \tag{1.12}
$$

Disto, concluímos que tanto o estimador $X_{(1)}$ quanto o estimador $\bar{X}$ são estimadores viciados para θ, embora o primeiro seja assintoticamente não viciado. Para computarmos agora os respectivos erros quadráticos médios, primeiramente calculamos seus momentos de segunda ordem ou variâncias, como segue

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(1)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2ne^{-n(t-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta}^{\infty} t^2ne^{-n(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} (s+\theta)^2ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} s^2ne^{-ns}\ \mathrm{d}s + 2\theta\int_{0}^{\infty} sne^{-ns}\ \mathrm{d}s + \theta^2\int_{0}^{\infty} ne^{-ns}\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}[X_{(1)}^2] = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}+\theta\right)^2. \tag{1.13}
$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(t-\theta)} \mathbf{1}_{[\theta,\infty)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta}^{\infty} t^2 e^{-(t-\theta)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} (s+\theta)^2 e^{-s}\ \mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\infty} s^2 e^{-s}\ \mathrm{d}s + 2\theta \int_{0}^{\infty} s e^{-s}\ \mathrm{d}s + \theta^2 \int_{0}^{\infty} n e^{-ns}\ \mathrm{d}s \\
&= 2 + 2\theta + \theta^2 \\
\mathbb{E}[X_1^2] &= 1 + (1+\theta)^2. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

De forma que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
&= 1 + (1+\theta)^2 - (1+\theta)^2 && \text{(De (1.10) e (1.14))} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= 1. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} && \text{(De (1.15)).} \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Concluímos portanto que os erros quadráticos médios associados aos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(1)}$ são

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[X_{(1)}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{(1)}] + \{B(X_{(1)})\}^2 \\
&= \mathbb{E}[X_{(1)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(1)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(1)}] - \theta\}^2 \\
&= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 - \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 + \frac{1}{n^2} && \text{(De (1.11) e (1.13))} \\
\mathrm{EQM}[X_{(1)}] &= \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathrm{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
\mathrm{EQM}[\bar{X}] &= \frac{1}{n} + 1 && \text{(De (1.12) e (1.16)).}
\end{aligned}$$

Notamos que ambos erros quadráticos médios independem do valor de θ. A Figura 1.3 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$. Para fim de comparação dos

EQMs, verificamos para quais valores de $\theta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned} \text{EQM}[\bar{X}] &> \text{EQM}[X_{(1)}] \\ \frac{1}{n} + 1 &> \frac{2}{n^2} \\ n^2 + n &> 2 \\ n(n+1) &> 2. \end{aligned}$$

Notamos que $\{n, n(n+1) > 2\} \cap \mathbb{N} = \{2, \ldots\}$, logo para todo valor de θ e para todo tamanho de amostra maior do que $n = 1$ temos que $X_{(1)}$ é um estimador preferível a $\bar{X}$, pelo critério do EQM. Para $n = 1$, temos que o estimadores são iguais.

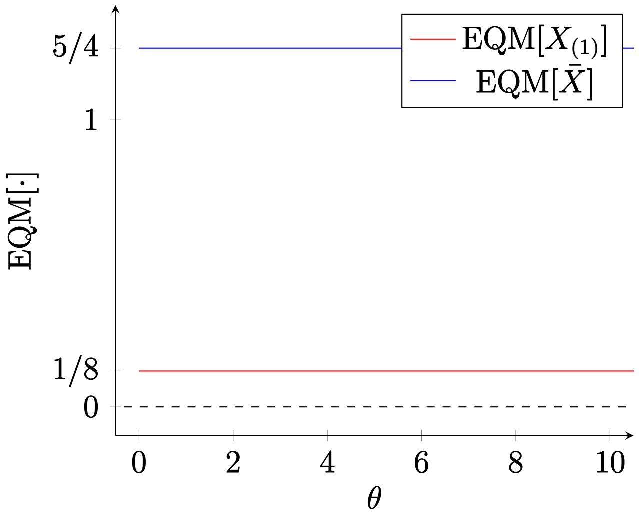


Figura 1.3: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(1)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.11

Seja uma $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x).$$

Segue que a correspondente função acumulada de probabilidade é

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \int_0^t \frac{2s}{\theta^2}\,\mathrm{d}s & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^2}{\theta^2} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Nota-se que o suporte é dado por $A(x) = \{x, 0 < x < \theta\}$, enquanto o espaço paramétrico é dado por $\Theta = \{\theta, \theta > 0\}$. Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{2x^3}{3\theta^2}\right|_0^\theta \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{2}{3}\theta. \tag{1.18}$$

Por sua vez, a função acumulada de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\ &= \{\mathbb{P}(X_1 \leq t)\}^n \\ &= \{F(t)\}^n \\ F_{X_{(n)}}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq \theta, \\ \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} & \text{se } 0 < t < \theta, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases} \qquad \text{(De (1.17))} \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que a função densidade de probabilidade associada a $X_{(n)}$ é

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(t|\theta) &= \frac{\mathrm{d}F_{X_{(n)}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= 2n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{(0,\theta)}(t). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_{\mathbb{R}} t 2n \frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta 2n \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2n}{2n+1}\theta \\
\mathbb{E}[X_{(n)}] &= \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]\theta. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{X}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1] \\
&= \mathbb{E}[X_1] \\
\mathbb{E}[\bar{X}] &= \frac{2}{3}\theta \qquad \text{(De (1.18))}. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Observamos portanto que tanto $X_{(n)}$ quanto $\bar{X}$ são estimadores viciados para θ, embora este primeiro seja assintoticamente não viciado. Com a finalidade de compararmos os respectivos erros quadráticos médios, computamos os segundos momentos e variâncias correspondentes. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 2n \frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta 2n \frac{t^{2n+1}}{\theta^{2n}}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_{(n)}^2] &= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]\theta^2. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{2t}{\theta^2} \mathbf{1}_{(0,\theta)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\theta \frac{2t^3}{\theta^2}\ \mathrm{d}t \\
\mathbb{E}[X_1^2] &= \frac{1}{2}\theta^2. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{4}{9}\theta^2 \qquad \text{(De (1.18) e (1.22))} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] &= \frac{17}{18}\theta^2. \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] &= \frac{17}{18n}\theta^2 && \text{(De (1.23)).} \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Portanto, os erros quadráticos médios associados aos estimadores são da forma

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[X_{(n)}] &= \mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] + \{B(X_{(n)})\}^2 \\
&= \mathbb{E}[X_{(n)}^2] - \{\mathbb{E}[X_{(n)}]\}^2 + \{\mathbb{E}[X_{(n)}] - \theta\}^2 \\
&= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]\theta^2 - \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]^2\theta^2 + \frac{1}{(2n+1)^2}\theta^2 \quad \text{(De (1.19) e (1.21))} \\
&= \frac{2}{2n+1}\theta^2 - \frac{1}{n+1}\theta^2 \\
&= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2 \\
\text{EQM}[X_{(n)}] &= \frac{1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] + \{B(\bar{X})\}^2 \\
&= \frac{17}{18n}\theta^2 + \{\mathbb{E}[\bar{X}] - \theta\}^2 \quad \text{(De (1.24))} \\
&= \frac{17}{18n}\theta^2 + \frac{1}{9}\theta^2 \quad \text{(De (1.20))} \\
\text{EQM}[\bar{X}] &= \frac{17+2n}{18n}\theta^2.
\end{aligned}$$

A Figura 1.4 ilustra os EQMs para uma amostra de tamanho $n = 4$. Para fim de comparação dos EQMs, verificamos para quais valores de $\theta < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\bar{X}] &> \text{EQM}[X_{(n)}] \\
\frac{17+2n}{18n}\theta^2 &> \frac{1}{(2n+1)(n+1)}\theta^2 \\
(17+2n)(2n+1)(n+1) &> 18n.
\end{aligned}$$

Observamos que $\{n(17+2n)(2n+1)(n+1) > 18n\} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Concluímos que, para todo valor de $\theta > 0$ e tamanho de amostra $n \geq 1$, temos que o estimador $X_{(n)}$ é preferível ao estimador $\bar{X}$ com respeito ao critério do EQM.

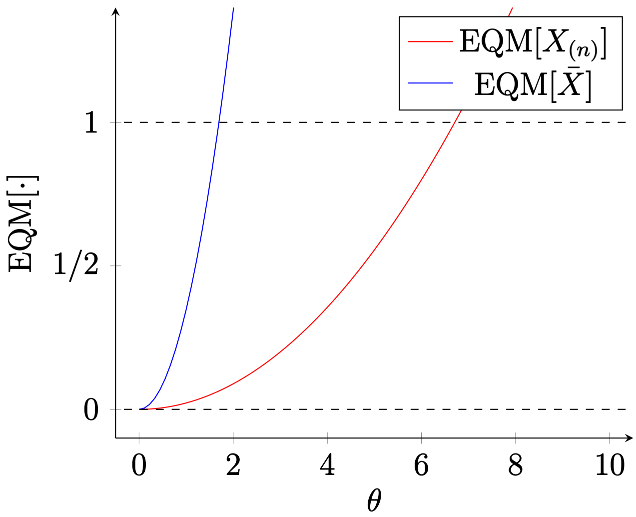


Figura 1.4: Erros quadráticos médios dos estimadores $\bar{X}$ e $X_{(n)}$ para uma amostra de tamanho $n = 4$.

Exercício 1.12

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Uniforme}(0, \theta)$, $\theta > 0$. Buscamos estimar θ, e propomos $\hat{\theta}_1 = c_1\bar{X}$ e $\hat{\theta}_2 = c_2X_{(n)}$. Buscamos determinar c_1 tal que $\hat{\theta}_1$ seja não viciado: segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] &= \theta \\
\mathbb{E}[c_1\bar{X}] &= \theta \\
c_1\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] &= \theta \\
c_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] &= \theta \\
c_1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_1] &= \theta \\
c_1\theta &= \theta \\
c_1 &= 1.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ é um estimador não viciado para θ. Por sua vez, para $\hat{\theta}_2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] &= \theta \\
\mathbb{E}[c_2X_{(n)}] &= \theta \\
c_2\frac{n}{n+1}\theta &= \theta \qquad\qquad \text{(De (1.5))} \\
c_2 &= \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\hat{\theta}_2 = n^{-1}(n+1)X_{(n)}$ é um estimador não viciado para θ. Como ambos estimadores são não viciados com respeito a θ, temos que seus respectivos erros quadráticos médios são da forma

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_1] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}[\bar{X}] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &= \frac{\theta^2}{12n},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_2] \\
&= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right] \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\text{ar}[X_{(n)}] \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \quad \text{(De (1.7))} \\
\text{EQM}[\hat{\theta}_2] &= \frac{\theta^2}{n(n+2)}.
\end{aligned}$$

Comparamos o desempenho dos estimadores agora determinando para quais valores de $\theta > 0$ temos que $\text{EQM}[\hat{\theta}_1] > \text{EQM}[\hat{\theta}_2]$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\theta}_1] &> \text{EQM}[\hat{\theta}_2] \\
\frac{\theta^2}{12n} &> \frac{\theta^2}{n(n+2)} \\
n+2 &> 12 \\
n &> 10.
\end{aligned}$$

Concluímos que, para todo valor de θ, temos que para $n < 10$, com respeito ao EQM, temos que o estimador $\hat{\theta}_1$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_2$. Por sua vez, para $n = 10$, temos que ambos estimadores tem mesmo EQM. Por fim, se $n > 10$, temos que o estimador $\hat{\theta}_2$ é preferível ao estimador $\hat{\theta}_1$.

Exercício 1.13

Para este exercício, será necessário o seguinte resultado:

1. Se $Z_1, \dots, Z_n$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $Z_1 \sim \textsc{Normal}(0,1)$, logo

$$W = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \textsc{Qui-quadrado}(n).$$

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Normal}(0, \sigma^2)$, com $\sigma^2 > 0$, buscamos computar o valor esperado de $\sigma_c^2 = cS^2$ e sua variância. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} cX_i^2\right] \\
&= c\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] \\
\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] &= nc\sigma^2; && (1.25)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} cX_i^2\right] \\
&= c^2\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] \\
&= c^2\sigma^4\mathbb{V}\text{ar}\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^2\right] \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] &= 2nc^2\sigma^4 && \text{(Do Item 1)}. \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Concluímos que o erro quadrático médio do estimador $\hat{\sigma}_c^2$ é

$$\begin{aligned}
\text{EQM}[\hat{\sigma}_c^2] &= \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_c^4] + \{B(\hat{\sigma}_c^2)\} \\
&= 2nc^2\sigma^4 + \{\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] - \sigma^2\}^2 && \text{(De (1.26))} \\
&= 2nc^2\sigma^4 + \{nc\sigma^2 - \sigma^2\}^2 && \text{(De (1.25))} \\
&= [2nc^2 + \{nc-1\}^2]\sigma^4 \\
&= [(n+2)nc^2 - 2nc + 1]\sigma^4 \\
&= (n+2)n\left[c^2 - 2\frac{c}{n+2} + \frac{1}{n(n+2)}\right]\sigma^4 \\
&= (n+2)n\left[\left(c - \frac{1}{n+2}\right)^2 - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{n(n+2)}\right]\sigma^4 \\
\text{EQM}[\hat{\sigma}_c^2] &= \left[(n+2)n\left(c - \frac{1}{n+2}\right)^2 + \frac{2}{n+2}\right]\sigma^4. && (1.27)
\end{aligned}$$

É trivial concluirmos que, para minimização de (1.27) com respeito a c, basta tomar $c = 1/(n+2)$.

Capítulo 2
Estimadores Eficientes e Estatísticas Suficientes

Exercício 2.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$, com $\sigma^2 > 0$, buscamos determinar o limite inferior da variância dos estimadores não viciados para σ^2. Para este fim, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{LI}(\sigma^2) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log f(X)}{\mathrm{d}\sigma^2}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2\log f(X)}{\mathrm{d}\sigma^4}\right]} \\
&= \frac{1}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\sigma^4}\left(-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}X^2\right)\right]} \\
&= \frac{1}{-n\mathbb{E}\left[\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}X^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\left(\frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^4}\right)}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{LI}(\sigma^2) = \frac{2\sigma^4}{n}. \tag{2.1}$$

Buscamos determinar uma estatística suficiente para σ^2. Segue que a função de verossimilhança associada à amostra observada é dada por

$$\begin{aligned}
L(\sigma^2|\tilde{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}T(\tilde{x})\right\} && \left(\text{De } T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\
&= h(\tilde{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}t - \frac{n}{2}\log\sigma^2\right\} && \left(\text{De } h(\tilde{x}) = (2\pi)^{-n/2}\right)
\end{aligned}$$

$$L(\sigma^2|\tilde{x}) = h(\tilde{x}) g_{\sigma^2}(T(\tilde{x})) \qquad \left(\text{De } g_\theta(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2\theta}t - \frac{n}{2}\log\theta\right\}\right). \tag{2.2}$$

Aplicamos então a Fatoração de Neyman em (2.2), de forma a concluirmos que $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é um estimador suficiente para σ^2. Propomos aqui como estimador não viesado de σ^2 o estimador $\hat{\sigma}_c^2$ proposto no Exercício 1.13, tomando $c = 1/n$. De (1.25), temos que $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_c^2] = \sigma^2$, de forma que o estimador $\hat{\sigma}_{1/n}^2$, que é baseado na estatística suficiente, é não viciado. Substituindo $c = 1/n$ em (1.26), temos que

$$\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\sigma}_{1/n}^2] = \frac{2\sigma^4}{n}. \tag{2.3}$$

Uma vez que a variância do estimador $\hat{\sigma}_{1/n}^2$ calculada em (2.3) é igual ao limite inferior em (2.1), concluímos que $\hat{\sigma}_{1/n}^2$ é um estimador eficiente para σ^2.

Exercício 2.2

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Bernoulli}(2, \theta)$, com $\theta \in [0,1]$, buscamos determinar o limite inferior da variância dos estimadores não viciados para θ. Para este fim, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{LI}(\theta) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log f(X)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\log\binom{2}{x} + X\log\theta + (2-X)\log(1-\theta)\right\}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{X}{\theta} - \frac{2-X}{1-\theta}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{X - X\theta - 2\theta + X\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right]} \\
&= \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{n\mathbb{E}[(X-2\theta)^2]} \\
&= \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{n\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]} \\
&= \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{n\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]} \\
\mathrm{LI}(\theta) &= \frac{\theta(1-\theta)}{2n}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Segue que, a fim de determinarmos uma estatística suficiente para θ. A função de verossimilhança associada à amostra é dada por

$$\begin{aligned}
L(\theta|\tilde{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{2-x_i} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}\right]\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{2n-\sum_{i=1}^n x_i} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}\right]\theta^{T(\tilde{x})}(1-\theta)^{2n-T(\tilde{x})} && \left(\text{De } T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n x_i\right) \\
&= h(\tilde{x})\theta^{T(\tilde{x})}(1-\theta)^{2n-T(\tilde{x})} && \left(\text{De } h(\tilde{x}) = \left[\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}\right]\right) \\
L(\theta|\tilde{x}) &= h(\tilde{x})g_\theta(T(\tilde{x})) && (\text{De } g_\theta(t) = \theta^t(1-\theta)^{2n-t}). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Aplicamos então a Fatoração de Neyman em (2.5), de forma a concluirmos que $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ é um estimador suficiente para θ. Propomos então como estimador $\hat{\theta}_c = cT(\tilde{X})$.

Segue que o valor esperado correspondente é

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] &= \mathbb{E}\left[c\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= c\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \\
&= c\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1] \\
&= cn2\theta. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Tomando $c = (2n)^{-1}$, temos que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] = \theta$. Segue que a variância deste estimador é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_{(2n)^{-1}}] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{(2n)^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \\
&= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}[X_1] \\
&= \frac{n2\theta(1-\theta)}{4n^2} \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_{(2n)^{-1}}] &= \frac{\theta(1-\theta)}{2n}. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Notamos que a variância associada ao estimador $\hat{\theta}_{(2n)^{-1}}$ corresponde ao limite inferior dado em (2.4), de forma a concluirmos que este estimador é eficiente.

Exercício 2.3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que X_1 apresenta a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x), \tag{2.8}$$

onde $\theta > 0$. Segue que a função acumulada de probabilidade correspondente é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1, \\ \int_0^x \theta t^{\theta-1}\, \mathrm{d}t & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1, \\ x^{\theta} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Segue que podemos reescrever (2.8) como

$$f(x|\theta) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)\exp\{\theta \log x + \log\theta - \log x\}.$$

Disto, temos que a distribuição em (2.8) é pertencente à família exponencial, com $c(\theta) = \theta$, $T(x) = \log x$, $d(\theta) = \log\theta$ e $S(x) = -\log x$. Temos que o limite inferior para variância dos estimadores não viciados para θ pode ser computado como

$$\begin{aligned} \mathrm{LI}(\theta) &= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log f(X)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2\log f(X)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]} \\ &= \frac{1}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left\{\log\theta + (\theta-1)\log X\right\}\right]} \\ &= \frac{1}{n\mathbb{E}\left[1/\theta^2\right]} \end{aligned}$$

$$\mathrm{LI}(\theta) = \frac{\theta^2}{n}. \tag{2.10}$$

Consideramos agora determinar uma estatística suficiente para θ. Segue que a função de verossimilhança associada a esta amostra é dada por

$$\begin{aligned}
L(\theta|\tilde{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right] \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} \log x_i + n\log\theta\right\} \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right] \exp\{-\theta T(\tilde{x}) + n\log\theta\} && \left(\text{De } T(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right) \\
&= h(\tilde{x}) \exp\{-\theta T(\tilde{x}) + n\log\theta\} && \left(\text{De } h(\tilde{x}) = \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right]\right) \\
&= h(\tilde{x}) g_\theta(T(\tilde{x})) && (\text{De } g_\theta(t) = \exp\{-\theta t + n\log\theta\}). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Concluímos a partir de (2.11), através do Critério de Fatoração de Neyman, que $T(\tilde{X}) = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i$ é estatística suficiente para θ. Para determinar a distribuição correspondente, primeiramente determinamosa distribuição de $-\log X_1$. Segue que

$$\begin{aligned}
F_{-\log X_1}(t) &= \mathbb{P}(-\log X_1 \le t) \\
&= \mathbb{P}(\log X_1 \ge -t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\log X_1 < -t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-t}) \\
&= 1 - F(e^{-t}) \\
&= \begin{cases} 1-1 & \text{se } e^{-t} \ge 1, \\ 1 - e^{t\theta} & \text{se } 0 < e^{-t} < 1, \\ 1-0 & \text{se } e^{-t} \le 0. \end{cases} \quad (\text{De } (2.9)) \\
F_{-\log X_1}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ 1 - e^{\theta t} & \text{se } t > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Isto é, temos que $Y_1 = -\log X_1 \sim \text{Exponencial}(\theta)$. Uma vez que a amostra $X_1, \ldots, X_n$ é composta de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, temos que a amostra $Y_1 = -\log X_1, \ldots, Y_n = -\log X_n$ é também composta de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, tal que $Y_1 \sim \text{Exponencial}(\theta)$. Sabemos que a soma de n variáveis aleatórias com distribuição exponencial de média comum $\lambda > 0$ apresenta distribuição Gama, de parâmetros n e θ. Isto é $Z = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i \sim \text{Gama}(n, \theta)$. Propomos então como estimador de θ o estimador dado por $\hat{\theta}_c = -c\sum_{i=1}^{n} \log X_i$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] &= \mathbb{E}\left[-c\sum_{i=1}^{n} \log X_i\right] \\
&= c\mathbb{E}\left[-\sum_{i=1}^{n} \log X_i\right] \\
\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] &= cn\theta. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Vemos em (2.12) que, se tomarmos $c = 1/n$, temos que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{1/n}] = \theta$. Buscamos agora determinar se este é um estimador eficiente. Verificamos que a variância deste é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_{1/n}] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\text{ar}\left[-\sum_{i=1}^{n}\log X_i\right] \\
&= \frac{n\theta^2}{n^2} \\
\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\theta}_{1/n}] &= \frac{\theta^2}{n}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Uma vez que a variância do estimador dada em (2.13) coincide com o limite inferior em (2.10), temos que o estimador $\hat{\theta}_{1/n}$ é um estimador eficiente.

Exercício 2.4

Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Buscamos demonstrar que $T = X_1 + 2X_2$ não é uma estatística suficiente para λ. Primeiramente, notamos que, uma vez que X_1 e X_2 certamente são valores naturais (incluindo zero), o seguinte é verdadeiro

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=2) &= \mathbb{P}(X_1 + 2X_2 = 2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1 \text{ ou } X_1 = 2, X_2 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 0) \\
&= e^{-\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}(T=2) = \lambda e^{-2\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.14}
$$

Segue, portanto que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = t, X_2 = s | T = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = t, X_2 = s, T = 2)}{\mathbb{P}(T=2)} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\mathbf{1}_A(t,s)}{\lambda e^{-2\lambda}(1+\lambda/2)} && \text{(De (2.14))}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}(X_1 = t, X_2 = s | T = 2) = \frac{\lambda^{t+s-1}\mathbf{1}_A(t,s)}{t!s!(1+\lambda/2)}, \tag{2.15}
$$

onde $A = \{(t,s) \in \mathbb{N}_0^2, t + 2s = 2\} = \{(0,1),(2,0)\}$. Em suma, temos de (2.15) que

$$
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1 | T = 2) = \frac{1}{1+\lambda/2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 0 | T = 2) = \frac{\lambda/2}{1+\lambda/2}, \tag{2.16}
$$

onde se $(t,s) \notin A$, segue que $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1 | T = 2) = 0$. Concluímos através de (2.16) que, se condicionarmos a distribuição de (X_1, X_2) por $T = 2$, ela é ainda função do parâmetro λ. Disto, temos que $T = X_1 + 2X_2$ não é estatística suficiente para λ.

Exercício 2.5

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias parametrizadas por $\theta \in \Theta$ que obedecem às condições de regularidade, e seja $\hat{\gamma}$ um estimador não viciado para $g(\theta)$. Primeiramente, verificamos o seguinte: uma vez que as condições de regularidade são satisfeitas, o seguinte é válido:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x_1|\theta)\ \mathrm{d}x_1 &= 1 \\
\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}} f(x_1|\theta)\ \mathrm{d}x_1 &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x_1|\theta)}{\partial\theta}\ \mathrm{d}x_1 &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{f(x_1|\theta)}\frac{\partial f(x_1|\theta)}{\partial\theta} f(x_1|\theta)\ \mathrm{d}x_1 &= 0 \\
\mathbb{E}\left[\frac{1}{f(X_1|\theta)}\frac{\partial f(X_1|\theta)}{\partial\theta}\right] &= 0 \\
\mathbb{E}\left[\frac{\partial \log f(X_1)}{\partial\theta}\right] &= 0. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Sabemos também que a função de verossimilhança associada à amostra obedece às seguintes restrições

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\theta|\tilde{x})\ \mathrm{d}\tilde{x} = 1 \qquad (2.18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\gamma} L(\theta|\tilde{x})\ \mathrm{d}\tilde{x} = g(\theta) \qquad (2.19)$$

Derivando ambos lados de (2.18) e (2.19) com respeito a θ, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(\theta|\tilde{x})}{\partial\theta}\ \mathrm{d}\tilde{x} = 0 \qquad (2.20)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\gamma}\frac{\partial L(\theta|\tilde{x})}{\partial\theta}\ \mathrm{d}\tilde{x} = \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} \qquad (2.21)$$

Temos que

$$\frac{\partial L(\theta|\tilde{x})}{\partial\theta} = t(\tilde{x},\theta)L(\theta|\tilde{x}) \quad \text{em que} \quad t(\tilde{x},\theta) = \frac{\partial \log L(\theta|\tilde{x})}{\partial\theta}. \qquad (2.22)$$

Aplicando (2.22) em (2.20) e (2.21), temos que

$$\mathbb{E}[t(\tilde{X},\theta)] = 0 \qquad (2.23)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\gamma}t(\tilde{X},\theta)] = \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}. \qquad (2.24)$$

Notamos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[t(\tilde{X},\theta)] &= \mathbb{E}[\{t(\tilde{X},\theta)\}^2] - \{\mathbb{E}[t(\tilde{X},\theta)]\}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log L(\theta|\tilde{X})}{\partial\theta}\right)^2\right] - \left\{\mathbb{E}\left[\frac{\partial \log L(\theta|\tilde{X})}{\partial\theta}\right]\right\}^2 && \text{(De (2.22))} \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log \prod_{i=1}^n f(X_i|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] && \text{(De (2.23))} \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \mathbb{E}\left[\frac{\partial \log f(X_i|\theta)}{\partial\theta}\right]\mathbb{E}\left[\frac{\partial \log f(X_j|\theta)}{\partial\theta}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{V}\mathrm{ar}[t(\tilde{X},\theta)] = n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X_1|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] \qquad \text{(De (2.17))}. \tag{2.25}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\{\mathbb{C}\mathrm{or}[t(\tilde{X},\theta),\hat{\gamma}]\}^2 &\leq 1 \\
\left\{\frac{\mathbb{E}[\hat{\gamma}t(\tilde{X},\theta)] - \mathbb{E}[\hat{\gamma}]\mathbb{E}[t(\tilde{X},\theta)]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[t(\tilde{X},\theta)]\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\gamma}]}}\right\}^2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\right)^2}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X_1|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]} \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\gamma}] \qquad \text{(De (2.23), (2.24) e (2.25))}. \tag{2.26}
$$

Exercício 2.6

Seja uma função densidade de probabilidade, ou de probabilidade no contexto de distribuições discretas, tal que $f(x|\theta)$ obedece às condições de regularidade usuais, de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x|\theta)\,\mathrm{d}x = 1$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathbb{R}} f(x|\theta)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f(x|\theta)}{\partial\theta^2}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.27}$$

Disto, temos que

$$\begin{aligned}
-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial\theta^2}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\{f(X|\theta)\}^2}\left\{\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial\theta}\right\}^2 - \frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\partial^2 f(X|\theta)}{\partial\theta^2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\partial^2 f(X|\theta)}{\partial\theta^2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] - \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{f(x|\theta)}\frac{\partial^2 f(x|\theta)}{\partial\theta^2} f(x|\theta)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{f(X|\theta)}\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] - \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2 f(x|\theta)}{\partial\theta^2}\,\mathrm{d}x \\
-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f(X|\theta)}{\partial\theta^2}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] && \text{(De (2.27)).}
\end{aligned}$$

E daí concluímos.

Exercício 2.7

Consideramos o mesmo contexto visto no Exercício 1.10. A fim de determinarmos uma estatística suficiente para θ, escrevemos a seguir a função de verossimilhança associada à amostra

$$\begin{aligned}
L(\theta|\tilde{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbf{1}_{(\theta,\infty)}(x_i) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n} e^{-x_i}\right] e^{n\theta} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(\theta,\infty)}(x_i) \\
&= h(\tilde{x}) e^{n\theta} \mathbf{1}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) && \left(\text{De } h(\tilde{x}) = \left[\prod_{i=1}^{n} e^{-x_i}\right]\right) \\
&= h(\tilde{x}) e^{n\theta} \mathbf{1}_{(0,T(\tilde{x}))}(\theta) && (\text{De } T(\tilde{x}) = x_{(1)}) \\
L(\theta|\tilde{x}) &= h(\tilde{x}) g_\theta(T(\tilde{x})) && (\text{De } g_\theta(t) = e^{n\theta}\mathbf{1}_{(0,t)}(\theta))
\end{aligned} \tag{2.28}$$

A partir de (2.28) concluímos, através do Critério da Fatoração de Neyman, que $T(\tilde{X}) = X_{(1)}$ é estatística suficiente para θ. Propomos como estimador de θ o estimador $\hat{\theta}_c = X_{(1)} + c$. Segue que o seu valor esperado é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] &= \mathbb{E}[X_{(1)} + c] \\
&= \mathbb{E}[X_{(1)}] + c \\
\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] &= \theta + \frac{1}{n} + c && (\text{De } (1.11)).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Se tomamos $c = -1/n$ em (2.29), temos que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{-1/n}] = \theta$.

Exercício 2.8

Sabe-se que $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|T]]$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \theta \\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|T]] &= \theta, \end{aligned}$$

daí concluímos.

Exercício 2.9

Para este exercício, será necessário os seguinte resultado:

1. Se Y é uma variável aleatória tal que $Y \sim \textsc{Normal}(\mu, \sigma^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, logo
$$\mathbb{E}[Y^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4.$$

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Normal}(\mu, 1)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\bar{X} \sim \textsc{Normal}(\mu, 1/n)$. Buscamos então determinar se $\hat{\gamma} = \bar{X}^2 - 1/n$ é não viciadoa para $g(\mu) = \mu^2$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\gamma}] &= \mathbb{E}[\bar{X}^2 - 1/n] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{n} \\
&= \frac{\mu^2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\mu^2 - \frac{1}{n} \\
\mathbb{E}[\hat{\gamma}] &= \mu^2.
\end{aligned}$$

Concluímos portanto que $\hat{\gamma}$ é não viciado para μ^2. Notamos que podemos reescrever a função de verossimilhança da amostra como segue

$$\begin{aligned}
L(\mu|\tilde{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\mu) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2\right\} \\
L(\mu|\tilde{x}) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\mu - \frac{n}{2}\mu^2\right\}. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

De (2.30) concluímos que a distribuição conjunta da amostra pertence à família exponencial, com componentes $c(\mu) = \mu$, $T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $d(\mu) = -n2^{-1}\mu^2$ e $S(\tilde{x}) = -2^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n2^{-1}\log(2\pi)$. Uma vez que o espaço paramétrico $\Theta = \mathbb{R}$ contém retângulos undimensionais abertos, concluímos que $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa para μ. Uma vez que $\hat{\gamma} = n^{-1}T(\tilde{X})$ e $\mathbb{E}[\hat{\gamma}] = \mu^2$, concluímos que este é ENVVUM de μ^2. Sabemos a partir do exposto no Exercício 2.5 que o limite inferior para a variância de estimadores dessa forma é dado por (2.26), tal que

$$\begin{aligned}
\mathrm{LI}(\mu) &= \frac{\left(\frac{\mathrm{d}g(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)^2}{n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log f(X_1|\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)^2\right]} \\
&= \frac{4\mu^2}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2\log f(X_1|\mu)}{\mathrm{d}\mu^2}\right]} \\
&= \frac{4\mu^2}{-n\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}\left(\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}(x_i-\mu)^2\right)\right]}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{LI}(\mu) = \frac{4\mu^2}{n} \tag{2.31}$$

Segue que a variância de $\hat{\gamma}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\gamma}] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\bar{X}^2 - \frac{1}{n}\right] \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}[\bar{X}^2] \\
&= \mathbb{E}[\bar{X}^4] - \{\mathbb{E}[\bar{X}^2]\}^2 \\
&= \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2} - \left\{\frac{1}{n} + \mu^2\right\}^2 && \text{(De Item 1)} \\
&= \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2\mu^2}{n^2} - \mu^4
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[\hat{\gamma}] = \frac{4\mu^2}{n} + \frac{2}{n^2} \tag{2.32}$$

Notamos, ao comparar (2.31) e (2.32), que o estimador não atinge o limite inferior para estimadores não viesados, e por consequência não é eficiente.

Exercício 2.10

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Bernoulli}(\theta)$, com $\theta \in [0,1]$, buscamos determinar um estimador ENVVUM para $\theta(1-\theta)$. Para este fim, primeiramente determinamos um estatística completa para esta família de distribuições. Segue que podemos reescrever a função de probabilidade conjunta desta amostra como

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \\
&= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \\
\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) &= \exp\left\{ \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i + n\log(1-\theta) \right\}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

De (2.33) concluímos que a distribuição conjunta da amostra pertence à família exponencial, com componentes $c(\theta) = \log(\theta/[1-\theta])$, $T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $d(\theta) = n\log(1-\theta)$ e $S(\tilde{x}) = 0$. Uma vez que o espaço paramétrico $\Theta = [0,1]$ trivialmente contém retângulos unidimensionais abertos, concluímos que $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa para θ. Buscamos agora verificar se o estimador $S = n(n-1)^{-1}\bar{X}(1-\bar{X})$ é viciado para $\theta(1-\theta)$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i - \frac{1}{n}X_iX_j\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] - \frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\right\} \\
&= \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[X_1] - \frac{1}{n(n-1)}\left\{n\mathbb{E}[X_1^2] + n(n-1)\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\right\} \\
&= \frac{n}{n-1}\theta - \frac{1}{n-1}\left\{\theta(1-\theta) + \theta^2 + (n-1)\theta^2\right\} \\
&= \frac{n\theta - \theta + \theta^2 - \theta^2 - (n-1)\theta^2}{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\theta - (n-1)\theta^2}{n-1} \\
\mathbb{E}[S] &= \theta(1-\theta).
\end{aligned}$$

Em conclusão, uma vez que S é não viciado para $\theta(1-\theta)$, e adicionalmente é função de uma estatística suficiente completa, concluímos que S é ENVVUM para $\theta(1-\theta)$.

Exercício 2.11

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $X_1 \sim \textsc{Geométrica}(\theta)$, com $\theta \in (0,1]$, buscamos determinar um estimador ENVVUM para θ. Primeiramente, temos que é possível reescrever a função de probabilidade conjunta desta amostra como

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i}\\ &= \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) = \exp\left\{ n\log\theta + \log(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i \right\}. \tag{2.34}$$

De (2.34) concluímos que a distribuição conjunta da amostra pertence à família exponencial, com componentes $c(\theta) = \log(1-\theta)$, $T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, $d(\theta) = n\log\theta$ e $S(\tilde{x}) = 0$. Uma vez que o espaço paramétrico $\Theta = (0,1]$ contém retângulos unidimensionais, concluímos que $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística completa para θ. Notamos que o valor esperado de X_1 é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\theta(1-\theta)^k\\ &= \theta(1-\theta)\sum_{k=0}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1}\\ &= \theta(1-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[-(1-\theta)^k]\right]\\ &= -\theta(1-\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(1-\theta)^{k-1}\right]\\ &= -\theta(1-\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\theta}\\ &= \frac{1-\theta}{\theta}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\theta} - 1. \tag{2.35}$$

A partir do exposto em (2.35), propomos como estimador

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1. \tag{2.36}$$

Segue que

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right] \qquad \text{(De (2.36))}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] + 1$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n}{\theta} - n\right] + 1 \qquad \text{(De (2.35))}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{1}{\theta}. \tag{2.37}$$

Uma vez que $\hat{\theta}$ é função da estatística completa $T(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, e adicionalmente é tal que $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta^{-1}$, concluímos que (2.36) é o ENVVUM de θ.

Exercício 2.12

Seja uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e distribuídas tal que $Y_i \sim \textsc{Normal}(x_i\beta, \sigma^2)$, onde $\beta \in \mathbb{R}$ e σ^2 são parâmetros desconhecidos, e $x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\}$ são constantes conhecidas. Segue que a função de verossimilhança associada à amostra pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
L(\beta, \sigma^2|\tilde{y}) &= \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i|\beta, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - x_i\beta)^2 \right\} \\
L(\beta, \sigma^2|\tilde{y}) &= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{\beta^2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \right. \\
&\quad \left. -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi) \right\}. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

De (2.38), concluímos que a amostra pertence à família exponencial, de componentes $c_1(\beta, \sigma^2) = -2^{-1}\sigma^{-2}$, $c_2(\beta, \sigma^2) = \beta\sigma^{-2}$, $T_1(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $T_2(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $d(\beta, \sigma^2) = -\beta^2 2^{-1}\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2^{-1}n\log\sigma^2$ e $S(\tilde{x}) = -2^{-1}n\log(2\pi)$. Uma vez que o espaço paramétrico $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ contém retângulos bidimensionais, concluímos que $\tilde{T}(\tilde{Y}) = (T_1(\tilde{Y}), T_2(\tilde{Y}))$ é estatística suficiente e completa para (β, σ^2). Buscamos determinar um estimador não viciado para (β, σ^2) da forma

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} c_1 T_2(\tilde{Y}) \\ c_2 T_1(\tilde{Y}) + c_3\{T_2(\tilde{Y})\}^2 \end{pmatrix}^\top, \qquad (2.39)$$

em que c_1, c_2, c_3 são constantes tal que o estimador torne-se não viciado. Segue que o respectivo valor esperado é da forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\theta}] &= \begin{pmatrix} c_1\mathbb{E}[T_2(\tilde{Y})] \\ c_2\mathbb{E}[T_1(\tilde{Y})] + c_3\mathbb{E}[\{T_2(\tilde{Y})\}^2] \end{pmatrix}^\top \\
&= \begin{pmatrix} c_1\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{E}[Y_i] \\ c_2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[Y_i^2] + c_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\mathbb{E}[Y_i Y_j] \end{pmatrix}^\top \\
&= \begin{pmatrix} \beta c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ c_2(n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\beta^2) + c_3(\beta^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 x_j^2 + \sigma^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \end{pmatrix}^\top \\
&= \begin{pmatrix} \beta c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ (c_2 n + c_3\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\sigma^2 + (c_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 x_j^2)\beta^2 \end{pmatrix}^\top \\
\mathbb{E}[\hat{\theta}] &= \begin{pmatrix} \beta c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ (c_2 n + c_3\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\sigma^2 + (c_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c_3[\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^2)\beta^2 \end{pmatrix}^\top. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

A fim de garantirmos que $\hat{\theta}$ é não viciado, tomando como partida (2.40), temos de solucionar o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = 1, \\ c_2 n + c_3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = 1, \\ c_2 + c_3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & = 0. \end{cases}$$

Disto, obtemos os seguintes valores

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1} \\ c_2 &= (n-1)^{-1} \\ c_3 &= -\left(\{n-1\}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1} \\ &= -c_1c_2. \end{aligned}$$

Disto, substituindo em (2.39) os valores obtidos, temos

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iY_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\{\sum_{i=1}^{n} x_iY_i\}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right] \end{pmatrix}^{\top}. \tag{2.41}$$

De (2.41), temos que $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = (\beta, \sigma^2)$ e, uma vez que este estimador é função da estatística completa $\tilde{T}(\tilde{Y}) = (T_1(\tilde{Y}), T_2(\tilde{Y}))$, concluímos que $\hat{\theta}$ é ENVVUM de (β, σ^2).

Capítulo 3
Métodos de Estimação

Exercício 3.1

Exercício 3.2

Exercício 3.3

Exercício 3.4

Exercício 3.5

Exercício 3.6

Exercício 3.7

Exercício 3.8

Exercício 3.9

Exercício 3.10

Exercício 3.11

Exercício 3.12

Exercício 3.13

Exercício 3.14

Exercício 3.15

Exercício 3.16

Exercício 3.17

Exercício 3.18

Exercício 3.19

Exercício 3.20

Exercício 3.21

Capítulo 4
Introdução à Teoria das Decisões

Exercício 4.1

Exercício 4.2

Exercício 4.3

Exercício 4.4

Exercício 4.5

Exercício 4.6

Exercício 4.7

Exercício 4.8

Exercício 4.9

Exercício 4.10

Exercício 4.11

Exercício 4.12

Capítulo 5
Estimação por Intervalo

Exercício 5.1

Exercício 5.2

Exercício 5.3

Exercício 5.4

Exercício 5.5

Exercício 5.6

Exercício 5.7

Exercício 5.8

Exercício 5.9

Exercício 5.10

Exercício 5.11

Exercício 5.12

Exercício 5.13

Exercício 5.14

Capítulo 6
Testes de Hipóteses

Exercício 6.1

Exercício 6.2

Exercício 6.3

Exercício 6.4

Exercício 6.5

Exercício 6.6

Exercício 6.7

Exercício 6.8

Exercício 6.9

Exercício 6.10

Exercício 6.11

Exercício 6.12

Exercício 6.13

Exercício 6.14

Exercício 6.15

Exercício 6.16

Exercício 6.17