



Insper

# Introdução à Pesquisa Operacional

*Prof. André Santana*



# AGENDA

- O que é Pesquisa Operacional?
- Quais os tipos de problemas e soluções admissíveis?
- Resolução de um Problema de Programação Linear
- Exercícios de Programação Linear

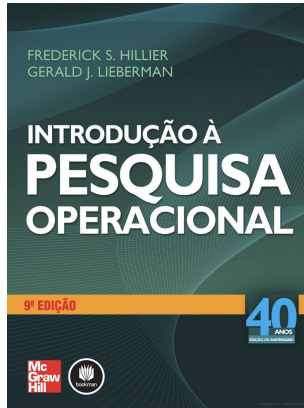
## Intervalo

- Resolução de um Problema de Programação Linear Inteira
- Exercícios de Programação Linear Inteira
- Avaliação do Workshop

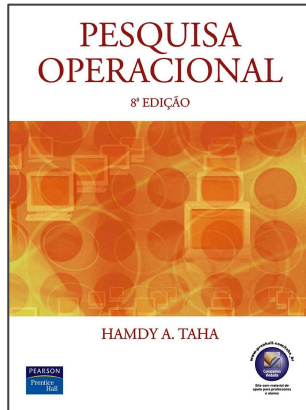
# O que é Pesquisa Operacional?

*"Pesquisa Operacional é o uso do método científico com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões" (KITTEL, 1947)*

*"Pesquisa operacional é o uso de modelos matemáticos, estatística e algoritmos para ajudar na tomada de decisões. É mais frequente o seu uso para análise de sistemas complexos reais, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar a performance. É uma forma de matemática aplicada." (Wikipedia, 2020)*



*"Trata-se da pesquisa sobre operações. É uma abordagem que emprega o método científico; Trata da gestão prática de uma organização, incluindo uma visão abrangente, focada em identificar soluções ótimas. " (HILLIER; LIEBERMAN, 2013)*



*Refere-se a uma abordagem estruturada por meio da modelagem matemática, para identificar soluções viáveis ou ótimas para tomada de decisão. Ainda, fazem parte deste processo fatores intangíveis, como o comportamento humano (TAHA, 2008)*

# O que é otimização?

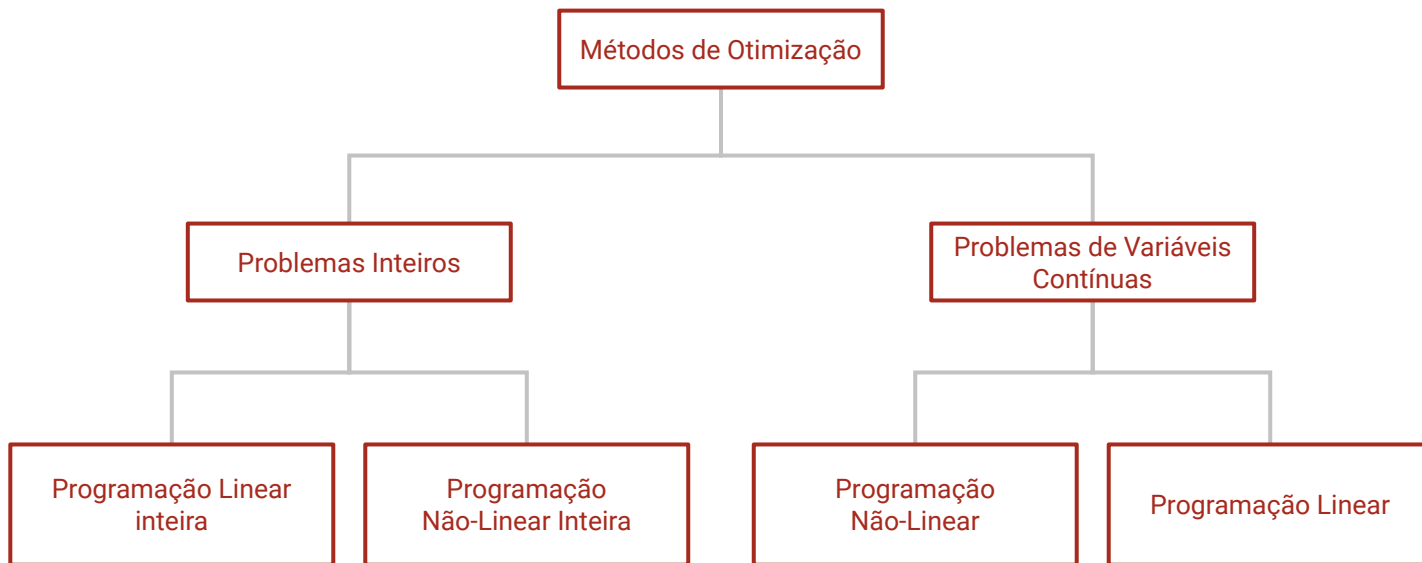
# **Quais problemas e quais áreas podem ser impactadas pela Pesquisa Operacional?**

# Setores Impactados

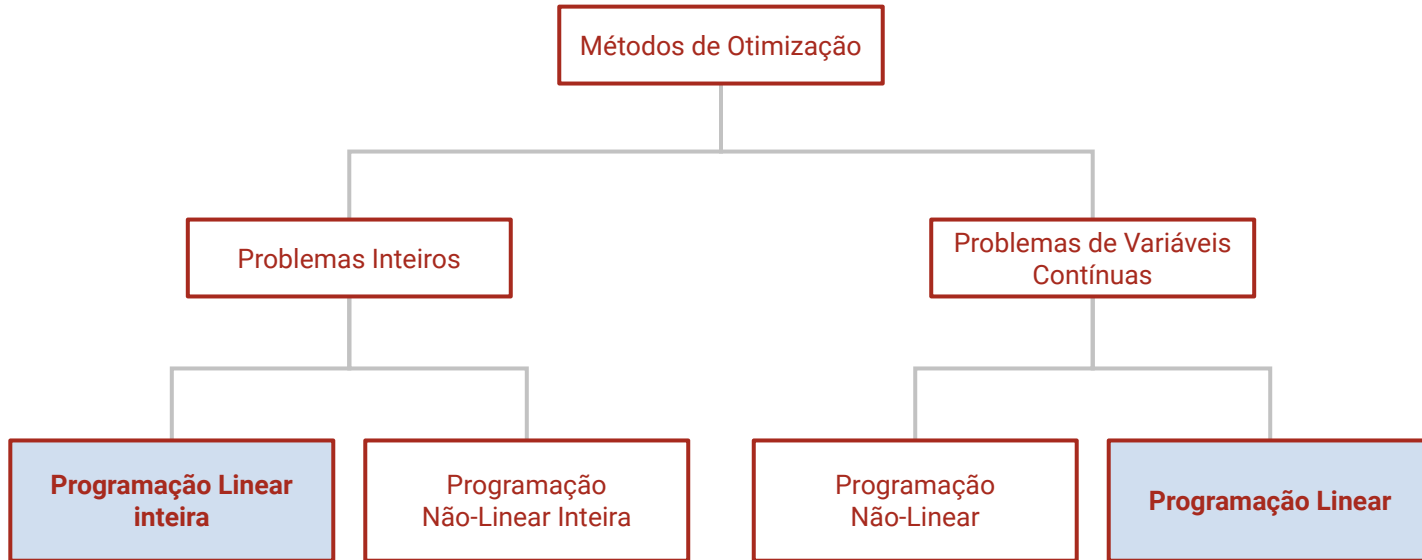
- Energia
- Telecomunicações
- Bens de Consumo
- Serviços
- Agro
- Software e Tecnologia da Informação
- Logística



# Tipos de Problema



# Tipos de Problema



Inteira Binária ou  
Inteira Pura

# Definições Importantes para uma solução ...

- Solução Viável: *quando todas as restrições são contempladas*
- Solução Ótima: *quando a solução é viável e permite a identificação de uma solução ótima capaz de **maximizar** ou **minimizar** um objetivo*
- Solução Relaxada: *quando abrimos mão de alguma restrição. Geralmente aplicamos em problemas complexos, como problemas inteiros*

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

**O QUE PODEMOS "DECIDIR", NO CONTEXTO DA PIZZARIA,  
PARA ESTE PROBLEMA?**

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

**QUANTAS PIZZAS DEVEMOS PRODUZIR?**

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

A Pizzaria tem 10 kg de queijo, 8 kg de tomate, 2 kg de pepperoni e 1 kg de orégano disponíveis.

**COMO ESTA INFORMAÇÃO AFETA  
O PROBLEMA?**

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

A Pizzaria tem 10 kg de queijo, 8 kg de tomate, 2 kg de pepperoni e 1 kg de orégano disponíveis.

**RESTRIÇÕES!**



# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

A Pizzaria tem 10 kg de queijo, 8 kg de tomate, 2 kg de pepperoni e 1 kg de orégano disponíveis.

Cada pizza Vegetariana é vendida por R\$45 e cada pizza de Pepperoni é vendida por \$50. A empresa deseja maximizar a receita das vendas das pizzas, e eles têm uma política de vender pelo menos 10 pizzas vegetarianas por dia para atender à demanda dos clientes vegetarianos.

# Exemplo de um problema

Considere uma pizzeria que vende dois tipos de pizza: Vegetariana e Pepperoni. A Pizza Vegetariana requer 200g de queijo, 300g de tomate e 50g de orégano para ser feita. A Pizza de Pepperoni requer 250g de queijo, 200g de tomate, 150g de pepperoni e 50g de orégano.

A Pizzaria tem 10 kg de queijo, 8 kg de tomate, 2 kg de pepperoni e 1 kg de orégano disponíveis.

Cada pizza Vegetariana é vendida por R\$45 e cada pizza de Pepperoni é vendida por R\$60. A empresa deseja maximizar a receita das vendas das pizzas, e eles têm uma política de vender pelo menos 10 pizzas vegetarianas por dia para atender à demanda dos clientes vegetarianos.

**QUAL O OBJETIVO?**

# Exemplo de um problema

## Variáveis de decisão

qtd\_veg - quantidade de pizzas vegetarianas

qtd\_pep - quantidade de pizzas de pepperoni

## Função Objetivo

Maximizar receita:  $45 \cdot \text{qtd\_veg} + 60 \cdot \text{qtd\_pep}$

## Restrições

Estoque de Queijo:  $200 \cdot \text{qtd\_veg} + 250 \cdot \text{qtd\_pep} \leq 10000$

Estoque de Tomate:  $300 \cdot \text{qtd\_veg} + 200 \cdot \text{qtd\_pep} \leq 8000$

Estoque de Pepperoni:  $150 \cdot \text{qtd\_pep} \leq 2000$

Estoque de Orégano:  $50 \cdot \text{qtd\_veg} + 50 \cdot \text{qtd\_pep} \leq 1000$

Público Vegetariano:  $\text{qtd\_veg} \geq 10$

# Biblioteca Pyomo

```
!pip install pyomo
```

```
!apt-get install -y -qq glpk-utils
```

# Importando as bibliotecas e criando as variáveis

```
from pyomo.environ import *

# Criação do modelo
model = ConcreteModel()

# Variáveis de decisão
model.qtd_veg = Var(domain=NonNegativeIntegers) # Pizzas Vegetarianas
model.qtd_pep = Var(domain=NonNegativeIntegers) # Pizzas de Pepperoni
```

# Função objetivo e restrições ...

```
# Função objetivo
```

```
model.receita = Objective(expr = 45*model.qtd_veg + 60*model.qtd_pep,  
sense=maximize)
```

```
# Restrições
```

```
model.queijo = Constraint(expr = 200*model.qtd_veg + 250*model.qtd_pep <= 10000)  
model.tomate = Constraint(expr = 300*model.qtd_veg + 200*model.qtd_pep <= 8000)  
model.pepperoni = Constraint(expr = 150*model.qtd_pep <= 2000)  
model.oregano = Constraint(expr = 50*model.qtd_veg + 50*model.qtd_pep <= 1000)  
model.cliente = Constraint(expr = model.qtd_veg >= 10)
```

## Instanciando o solver e imprimindo os resultados ...

```
#SolverFactory('glpk', executable='/usr/bin/glpsol')
#Solucionando o problema - GNU Linear Programming Kit
solver = SolverFactory('glpk')
solver.solve(model)

# Imprimindo a solução
print("Quantidade de Pizzas Vegetarianas =" , model.qtd_veg())
print("Quantidade de Pizzas de Pepperoni =" , model.qtd_pep())
print("Receita = R$", model.receita())
```

# Exercício 1

Considere uma fábrica de móveis que produz três tipos de móveis: mesa individual (MesaInd), mesa para duplas (MesaDup) e cadeiras (Cadeira).

- Cada MesaInd requer 10kg de madeira, 5 horas de trabalho e 2 horas para pintura.
- Cada MesaDup requer 15kg de madeira, 8 horas de trabalho e 3 horas para pintura.
- Cada Cadeira requer 5kg de madeira, 2 horas de trabalho e 1 hora para pintura.

A fábrica tem 500kg de madeira, 200 horas de montagem disponíveis e 50 horas de pintura disponíveis.

Cada MesaInd é vendida por \$300, cada MesaDup por \$500 e cada Cadeira por \$100. A empresa deseja maximizar a receita das vendas dos móveis.



## Exercício 1

```
Quantidade de Mesas Individuais = 1.0  
Quantidade de Mesas para Duplas = 16.0  
Quantidade de Cadeiras = 0.0  
Receita Máxima = 8300.0
```

## Exercício 2

Considere um problema de transporte de mercadorias. Uma empresa precisa enviar mercadorias de dois armazéns (A e B) para três lojas (1, 2 e 3). A quantidade de mercadorias disponíveis nos armazéns A e B é, respectivamente, 100 e 150 unidades. As demandas das lojas 1, 2 e 3 são, respectivamente, 70, 80 e 100 unidades.

O custo de transporte por unidade do armazém A para as lojas 1, 2 e 3 é, respectivamente, R\$10, R\$15 e R\$20. O custo de transporte por unidade do armazém B para as lojas 1, 2 e 3 é, respectivamente, R\$15, R\$10 e R\$7. O objetivo é minimizar o custo total de transporte.

	Armazém A	Armazém B
Loja 1	R\$10	R\$15
Loja 2	R\$15	R\$10
Loja 3	R\$20	R\$7

## Exercício 2

```
Transporte do Armazém A para Loja 1 = 70.0
Transporte do Armazém A para Loja 2 = 30.0
Transporte do Armazém A para Loja 3 = 0.0
Transporte do Armazém B para Loja 1 = 0.0
Transporte do Armazém B para Loja 2 = 50.0
Transporte do Armazém B para Loja 3 = 100.0
Custo total = R$ 2350.0
```

## Exercício 3

Considere um cenário de investimento simplificado. Neste cenário, um investidor deseja investir R\$5000 em três opções de investimento: ações, títulos do tesouro e CDBs.

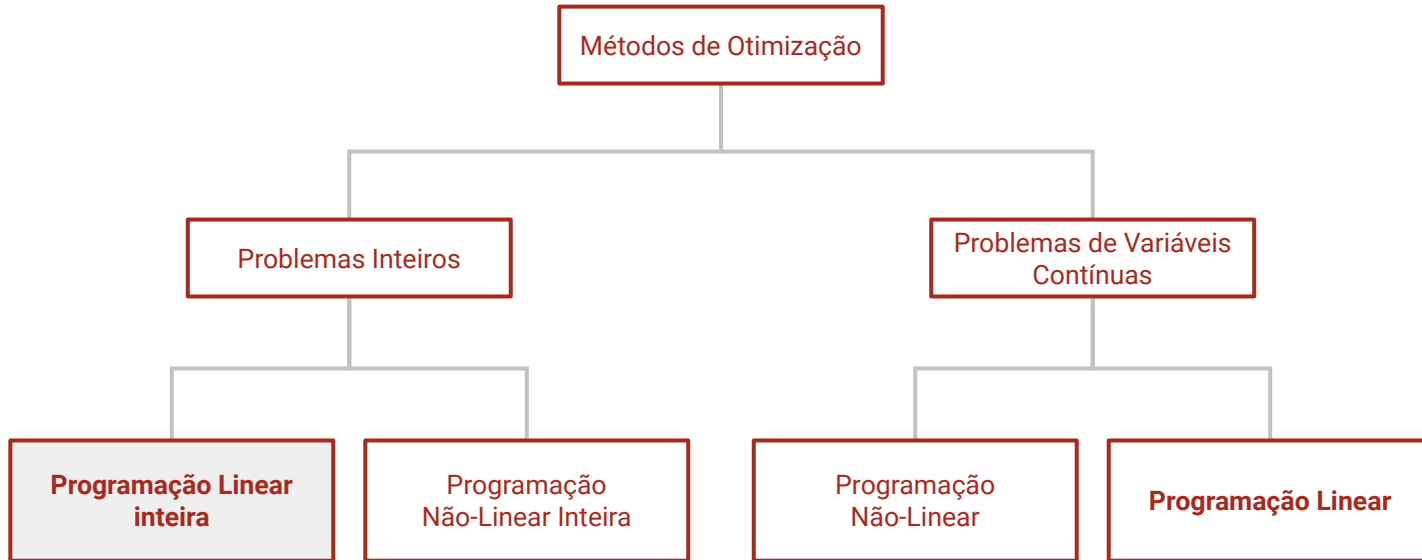
Cada tipo de investimento tem um retorno esperado: ações 8%, títulos do tesouro 4%, e CDBs 5%.

Considere ainda que o investidor não possui um perfil arrojado e que deseja que no mínimo 30% de seu portfólio seja composto por títulos do tesouro e no mínimo 20% seja composto por CDBs para a diversificação. Como podemos maximizar o retorno esperado para este investidor?

## Exercício 3

```
Investimento em Ações = 2500.0  
Investimento em Tesouro = 1500.0  
Investimento em CDB = 1000.0  
Retorno esperado = 310.0
```

# Tipos de Problema



Inteira Binária ou  
Inteira Pura

# Exemplo de um problema

Uma instituição de ensino superior abriu um edital para apoio a projetos de base tecnológica e conta com um orçamento de R\$4000. Sabendo dos custos para implantação de cada projeto, e do retorno esperado, modele um problema de solução binária para seleção dos projetos. Admita que pelo menos três projetos precisam ser selecionados.

	Investimento Necessário	Retorno
Projeto 1	R\$1000	R\$2000
Projeto 2	R\$1500	R\$2500
Projeto 3	R\$2000	R\$3000
Projeto 4	R\$1200	R\$2300
Projeto 5	R\$1700	R\$2900

# Exemplo de um problema

Uma instituição de ensino superior abriu um edital para apoio a projetos de base tecnológica e conta com um orçamento de R\$4000. Sabendo dos custos para implantação de cada projeto, e do retorno esperado, modele um problema de solução binária para seleção dos projetos. Admita que pelo menos três projetos precisam ser selecionados.

	Investimento Necessário	Retorno
Projeto 1	R\$1000	R\$2000
Projeto 2	R\$1500	R\$2500
Projeto 3	R\$2000	R\$3000
Projeto 4	R\$1200	R\$2300
Projeto 5	R\$1700	R\$2900

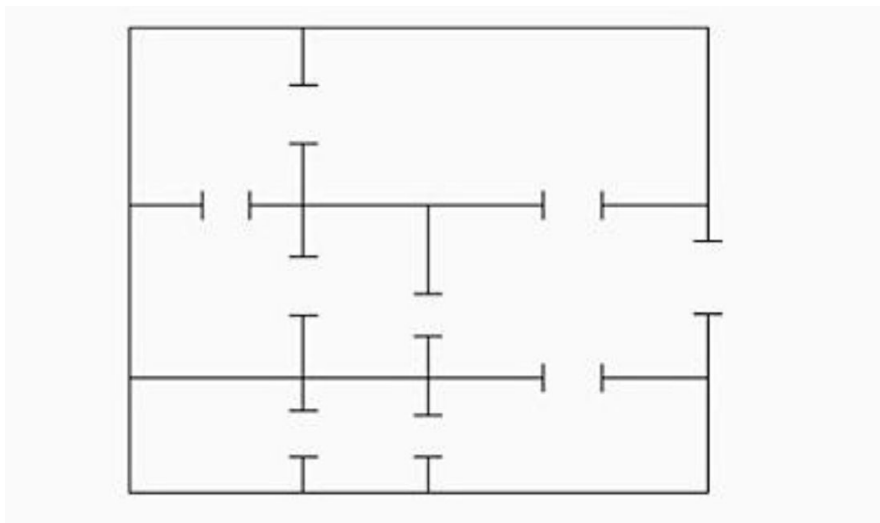
**Quais as  
variáveis?**

**Quantas  
restrições temos?**



# Exercício 4

Um museu está montando uma nova exposição e o layout para a estrutura está representado na figura abaixo. Um guarda posicionado em uma porta pode vigiar duas salas adjacentes. O museu deseja posicionar o menor número possível de guardas para vigiar todas as salas. Resolva este problema utilizando um modelo de programação inteira.



## Exercício 4

Guarda 1 = 1.0

Guarda 2 = 0.0

Guarda 3 = 0.0

Guarda 4 = 1.0

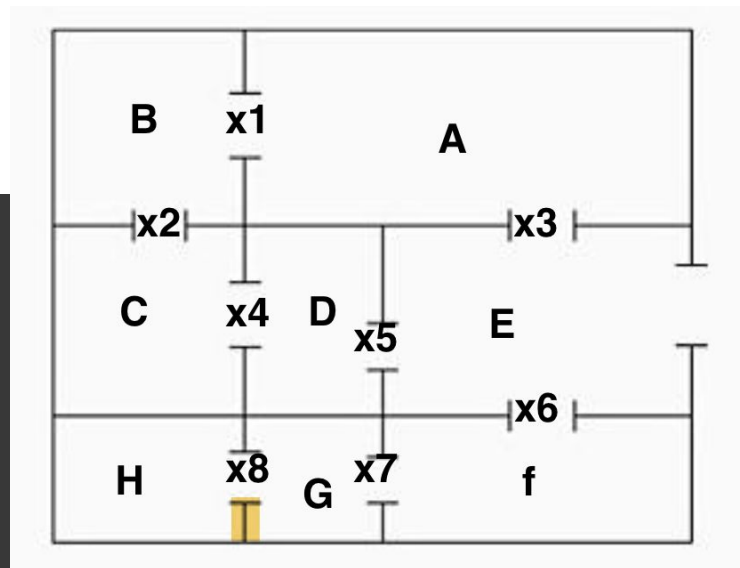
Guarda 5 = 0.0

Guarda 6 = 1.0

Guarda 7 = 0.0

Guarda 8 = 1.0

Quantidade de guardas contratados = 4.0



## Exercício 5

Uma universidade pretende formar um comitê para tratar das reclamações dos estudantes. A administração quer que o comitê seja composto por ao menos uma mulher, um homem, um estudante, um administrador e um membro da faculdade. Dez indivíduos (identificados, para simplificar, pelas letras *A* a *J* foram indicados. O mix desses indivíduos nas diferentes categorias é apresentado na Tabela F.

**Tabela F**

Categoria	Indivíduos
Mulheres	<i>a, b, c, d, e</i>
Homens	<i>f, g, h, i, j</i>
Estudantes	<i>a, b, c, j</i>
Administradores	<i>e, f</i>
Membros da faculdade	<i>d, g, h, i</i>

A universidade em questão quer formar o menor comitê que tenha representação de cada uma das cinco categorias. Formule a questão como um problema de PLI e ache a solução ótima.

## Exercício 5

Valor de a = 0.0

Valor de b = 0.0

Valor de c = 0.0

Valor de d = 0.0

Valor de e = 1.0

Valor de f = 0.0

Valor de g = 1.0

Valor de h = 0.0

Valor de i = 0.0

Valor de j = 1.0

Quantidade de colaboradores contratados = 3.0

# Exercício 6

- \*1. A ABC é uma empresa de caminhões de transporte que entrega diariamente cargas menores do que a capacidade total dos caminhões a cinco clientes. A Tabela D apresenta os clientes associados com cada rota.

**Tabela D**

Rota	Cientes atendidos na rota
1	1, 2, 3, 4
2	4, 3, 5
3	1, 2, 5
4	2, 3, 5
5	1, 4, 2
6	1, 3, 5

Os segmentos de cada rota são ditados pela capacidade do caminhão que está fazendo as entregas. Por exemplo, na rota 1, a capacidade do caminhão é suficiente para entregar cargas apenas aos clientes 1, 2, 3 e 4. A Tabela E apresenta uma lista de distâncias (em milhas) entre o terminal de caminhões (ABC) e os clientes.

**Tabela E**

		Milhas de $i$ a $j$					
$i \backslash j$		ABC	1	2	3	4	5
ABC		0	10	12	16	9	8
1		10	0	32	8	17	10
2		12	32	0	14	21	20
3		16	8	14	0	15	18
4		9	17	21	15	0	11
5		8	10	20	18	11	0

O objetivo é determinar a menor distância necessária para fazer as entregas diárias aos cinco clientes. Embora a solução possa resultar no atendimento de um cliente por mais de uma rota, a fase de implementação usará somente uma dessas rotas. Formule a questão como um problema de PLI e ache a solução ótima.

## Exercício 6

Valor de  $x_1 = 0.0$

Valor de  $x_2 = 0.0$

Valor de  $x_3 = 0.0$

Valor de  $x_4 = 0.0$

Valor de  $x_5 = 1.0$

Valor de  $x_6 = 1.0$

Valor do custo total = R\$ 104.0

# Avaliação do Workshop

**Disciplina:** WORKSHOP VIII

**Turma:** PADSW06WKVIII

- **Link para avaliação:** <https://insper.avaliar.org/>
- **Código da avaliação:** 70665
- **Chave:** 405442

## *Avaliação Prêmio Chafi*

- **Link para avaliação:** <https://insper.avaliar.org/>
- **Código da avaliação:** CH23210
- **Chave:** 692213

# Referências

- KITTEL, Charles. The nature and development of operations research. **Science**, v. 105, n. 2719, p. 150-153, 1947.
- HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. McGraw Hill Brasil, 2013.
- TAHA, Hamdy A. **Pesquisa operacional**. Pearson Educación, 2008.



# Obrigado

Prof. André L. M. Santana  
[andrelms4@insper.edu.br](mailto:andrelms4@insper.edu.br)