

PROGRAMA DE BIOINGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

LABORATORIO TEORÍA DE MODELOS Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS

Identificación aplicando técnicas paramétricas

Docente: Susana Mejía Echeverry

Andres Felipe Agudelo Mesa, Carolina Ruiz Morales, Valeria Vásquez Sánchez.

I. INTRODUCCIÓN.

La identificación de sistemas es un campo fundamental en ingeniería y ciencias aplicadas que busca construir modelos matemáticos a partir de datos experimentales de entrada y salida de un sistema real [1]. Un modelo preciso permite comprender el comportamiento dinámico de un sistema, optimizar su rendimiento y predecir su respuesta ante diferentes estímulos. Dentro de las técnicas de identificación, los métodos paramétricos se distinguen por ajustar los parámetros de una estructura de modelo predefinida a los datos observados. Estas estructuras, como los modelos ARX (AutoRegressive with eXogenous input), ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous input), OE (Output-Error) y Box-Jenkins (BJ), ofrecen representaciones compactas y físicamente interpretables de los sistemas dinámicos [2], [3]. La selección adecuada de la estructura del modelo y de su orden es un paso crítico, ya que impacta directamente en la capacidad del modelo para representar fielmente la dinámica del sistema y generalizar a datos no observados. Un modelo de orden insuficiente podría no capturar toda la complejidad del sistema, mientras que uno de orden excesivo podría conducir a un sobreajuste y a una pobre robustez frente a perturbaciones.

Para abordar la identificación paramétrica del sistema, se propuso un esquema en dos etapas: inicialmente, se entrenó cada modelo con los datos de entrada y salida del conjunto de evaluación (u - y), y posteriormente se utilizó tanto la entrada de evaluación (u) como la de validación (u_v) para generar las salidas predichas correspondientes ($\hat{y} \wedge \hat{y}_v$). Estas predicciones fueron comparadas

gráficamente con las salidas reales (y - y_v), permitiendo observar el desempeño del modelo tanto en el conjunto de entrenamiento (u - y) como en datos con los que no fue entrenado. La elección de las cuatro estructuras —ARX, ARMAX, Output Error (OE) y Box-Jenkins (BJ)— responde a su amplia representatividad en el campo de la identificación de sistemas lineales y a su capacidad para modelar diferentes características del sistema. Cada una incorpora distintos niveles de complejidad y manejo del ruido: ARX como modelo base, ARMAX incluyendo modelado explícito de la dinámica del ruido, OE enfocándose en la parte determinística del sistema, y BJ separando completamente las dinámicas de la planta y del ruido. Esta selección permite comparar el impacto de la estructura sobre la calidad

de predicción, evaluar la sensibilidad al ruido, y explorar cómo diferentes órdenes afectan la fidelidad del modelo.

A su vez, para validar el rendimiento de cada modelo, se emplean métricas cuantitativas como el porcentaje de ajuste y el error cuadrático medio (MSE), así como el análisis de residuos. Adicionalmente, se implementa una evaluación por correlación, herramienta fundamental para validar los supuestos estadísticos del modelo estimado. Este análisis se basa en el estudio de la autocorrelación de los residuos y la correlación cruzada entre residuos y entrada del sistema. Si los residuos del modelo se comportan como un ruido blanco (sin autocorrelación) y no están correlacionados con la entrada, se considera que el modelo ha capturado correctamente la dinámica del sistema. En otras palabras, la evaluación por correlación permite verificar que el modelo no deja información sistemática sin explicar, lo cual es clave para asegurar su validez [4].

Estas métricas permiten comparar la capacidad predictiva de los modelos propuestos y seleccionar el que mejor se ajusta a los datos experimentales. En este caso, los datos fueron cargados desde el archivo **D2.csv** se incluyen dos vectores principales: la entrada **u** y la salida **y** del sistema. Ambos fueron registrados bajo una frecuencia de muestreo constante de **0.1 segundos**, lo que proporciona una resolución adecuada para captar las dinámicas relevantes del sistema. La práctica desarrollada en este informe se centra en la aplicación de técnicas de identificación paramétrica a un sistema cuyos datos de entrada y salida han sido previamente registrados. El objetivo es seleccionar y evaluar adecuadamente diversas estructuras de modelos lineales paramétricos y determinar su orden óptimo, basándose en el rendimiento del modelo en relación con los datos experimentales. Para ello, se implementan y comparan al menos cuatro estructuras de modelos, evaluando su rendimiento mediante métricas cuantitativas que permiten medir el grado de ajuste entre las estimaciones y los datos reales. Además, se realiza un análisis exhaustivo de los resultados para seleccionar el modelo que mejor represente el sistema estudiado, lo que se refleja en la expresión final del modelo seleccionado.

II RESULTADOS

Parte 1: Resultados de la visualización de la señal

La primera etapa corresponde a la inspección visual de las señales de entrada y salida del sistema. Los datos se cargan desde el archivo **D2.csv** organizándose en columnas correspondientes a entrada y salida. Las señales se grafican en el dominio temporal, lo cual es necesario para evaluar visualmente la estabilidad, la variabilidad y la presencia de componentes periódicas o aleatorias. Se dividen claramente los datos en conjuntos de entrenamiento y validación. Esto se realiza para evitar el sobreajuste del modelo y para garantizar que la validación del modelo se realice sobre datos no vistos durante la etapa de entrenamiento.

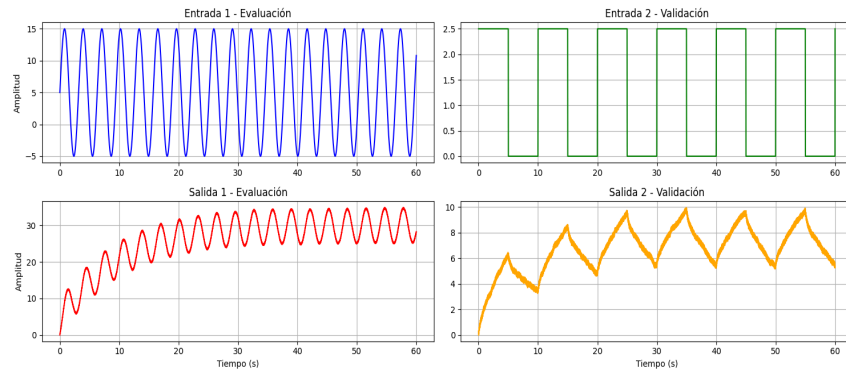


Figura 1. Señales de entrada y salida para el sistema de evaluación y validación.

La figura 1 presenta las señales de entrada y salida del sistema tanto para el conjunto de **evaluación** como de **validación**, todas representadas en el dominio del tiempo durante un intervalo de 60 segundos. Este tipo de visualización permite interpretar la naturaleza de las excitaciones, anticipar la complejidad dinámica del sistema, y evaluar la adecuación de los datos para tareas de identificación.

- **Entrada 1 – Evaluación:** La señal corresponde a una onda sinusoidal con amplitud aproximada de 15 unidades. Esta entrada es ideal para excitar el sistema en un rango de frecuencias acotado, y permite evaluar la respuesta del sistema ante un estímulo continuo y suave. La regularidad y periodicidad de esta entrada facilitan el análisis de fase, amplitud y retardo en la salida.
- **Entrada 2 – Validación:** Se observa una señal cuadrada (tipo tren de pulsos binario), que alterna entre dos niveles fijos. Esta entrada introduce una dinámica distinta a la del entrenamiento y permite evaluar si el modelo identificado con la entrada sinusoidal generaliza bien frente a un estímulo abrupto y discontinuo. Esta estrategia es útil para validar la robustez del modelo ante señales con contenido espectral más amplio y cambios rápidos.
- **Salida 1 – Evaluación:** La salida asociada a la entrada sinusoidal muestra un comportamiento subamortiguado creciente, lo cual sugiere que el sistema posee una dinámica de acumulación (tipo segundo orden) combinada con oscilaciones inducidas por la entrada. La forma general es suave, con cierto retardo respecto a la entrada, indicando una respuesta física plausible y adecuadamente excitada para tareas de identificación.
- **Salida 2 – Validación:** En este caso, la salida del sistema presenta un patrón de crecimiento y caída repetitiva, con un comportamiento triangular que sigue la forma general de la entrada cuadrada, aunque con transiciones suavizadas y efectos acumulativos. Esto evidencia la dinámica inercial del sistema (por ejemplo, almacenamiento de energía o retardo interno), y sugiere que el modelo debe ser capaz de capturar no sólo la entrada directa, sino también la memoria del sistema.

La figura 2 presentada corresponde al análisis en el dominio de la frecuencia de las señales de salida del sistema, tanto del conjunto de evaluación como del de validación. Este análisis fue realizado utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT), implementada mediante las funciones `fft()` y `fftfreq()` del paquete `scipy.fft`, con el objetivo de identificar el contenido espectral de ambas señales. Esta herramienta permite descomponer la señal original, definida en el dominio temporal, en sus componentes de frecuencia, proporcionando una visión cuantitativa de las frecuencias presentes en la señal y su intensidad relativa.

En el panel izquierdo se observa el espectro de la salida de evaluación (y), mientras que el panel derecho muestra el de la salida de validación (y_v). En ambas gráficas, se representa el módulo

normalizado del espectro en función de la frecuencia (Hz), y se graficó únicamente la mitad positiva del espectro, aprovechando la simetría de la transformada para señales reales. El resultado más relevante es la presencia de un pico dominante en aproximadamente 15 Hz en ambas señales, claramente visible en las gráficas. Este componente fue identificado mediante la aplicación directa de la función `fft()`, que permitió evidenciar que la señal contiene un ruido periódico o estructurado, no aleatorio. Dado que esta frecuencia no es atribuible directamente a la dinámica del sistema, se interpreta como un componente de ruido artificial superpuesto.

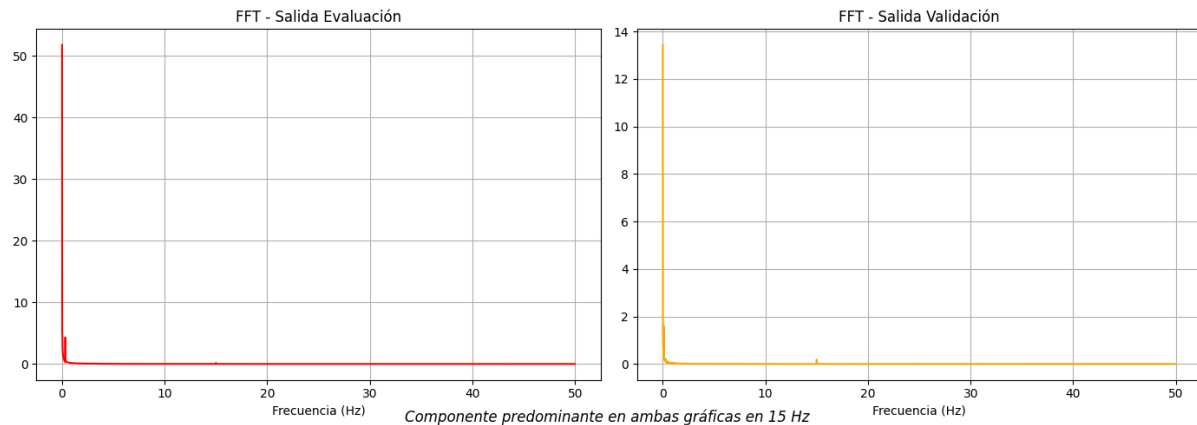


Figura 2. Espectro de frecuencia de las salidas del sistema en evaluación y validación.

Parte 2: Configuración de modelos y simulación de datos

1. Resultados para el modelo ARX

Para definir las estructuras de los modelos ARX, se propusieron tres configuraciones con diferentes combinaciones de los parámetros **na**, **nb** y **nk**, las cuales fueron seleccionadas con base en el análisis visual de las señales de entrada y salida (Figuras 1), así como en los resultados obtenidos durante la etapa de validación. La primera configuración ARX 1 (Tabla 1) se escogió considerando que la salida presenta un comportamiento oscilatorio suave y amortiguado, con dependencia de valores pasados, tanto de la salida como de la entrada. Además, se asumió un pequeño retraso entre la entrada y la respuesta, justificado con $nk=1$, lo cual se corresponde con el desfase observado entre las señales. Para la segunda configuración ARX 2, se aumentó el orden del polinomio A (**na**) con el fin de capturar una dinámica interna más compleja de la salida, sin modificar el retardo. Esta elección permitió mejorar la precisión del modelo, como se evidencia en la reducción del error cuadrático medio presentado posteriormente. Finalmente, en la tercera configuración ARX 3, se incrementó también el orden del polinomio B, buscando identificar si esta mejora la influencia de la entrada en el sistema.

Modelo	Configuración [na, nb, nk]	Error Evaluación (ECM)	Error Validación (ECM)	Error Absoluto M Evaluación (EAM)	Error Absoluto M Validación (EAM)	Correlación Evaluación	Correlación Validación
ARX 1	[2, 2, 1]	5.55	1.00	1.96	0.78	0.95	0.85
ARX 2	[3, 2, 1]	0.73	2.07	0.27	2.07	0.99	0.76

ARX 3	[3, 3, 1]	1.00×10^{18}	3.14×10^{18}	9.56×10^7	5.81×10^8	0.00	0.00
-------	-----------	-----------------------	-----------------------	--------------------	--------------------	------	------

Tabla 1. Resultados del desempeño para los modelos ARX en los conjuntos de evaluación y validación.

En las gráficas presentadas para los modelos ARX (Figura 3), se visualiza la comparación entre la salida real del sistema y la salida estimada por cada una de las tres configuraciones estructurales propuestas (u-y, uv-yv), tanto en el conjunto de evaluación como en el de validación.

En la columna izquierda de la figura se presentan los resultados obtenidos al aplicar cada modelo ARX a la entrada de evaluación, correspondiente a los datos con los que se estimaron los parámetros del modelo y en la columna derecha se presentan los resultados de validación, donde cada modelo se enfrenta a una entrada distinta no utilizada en el entrenamiento.

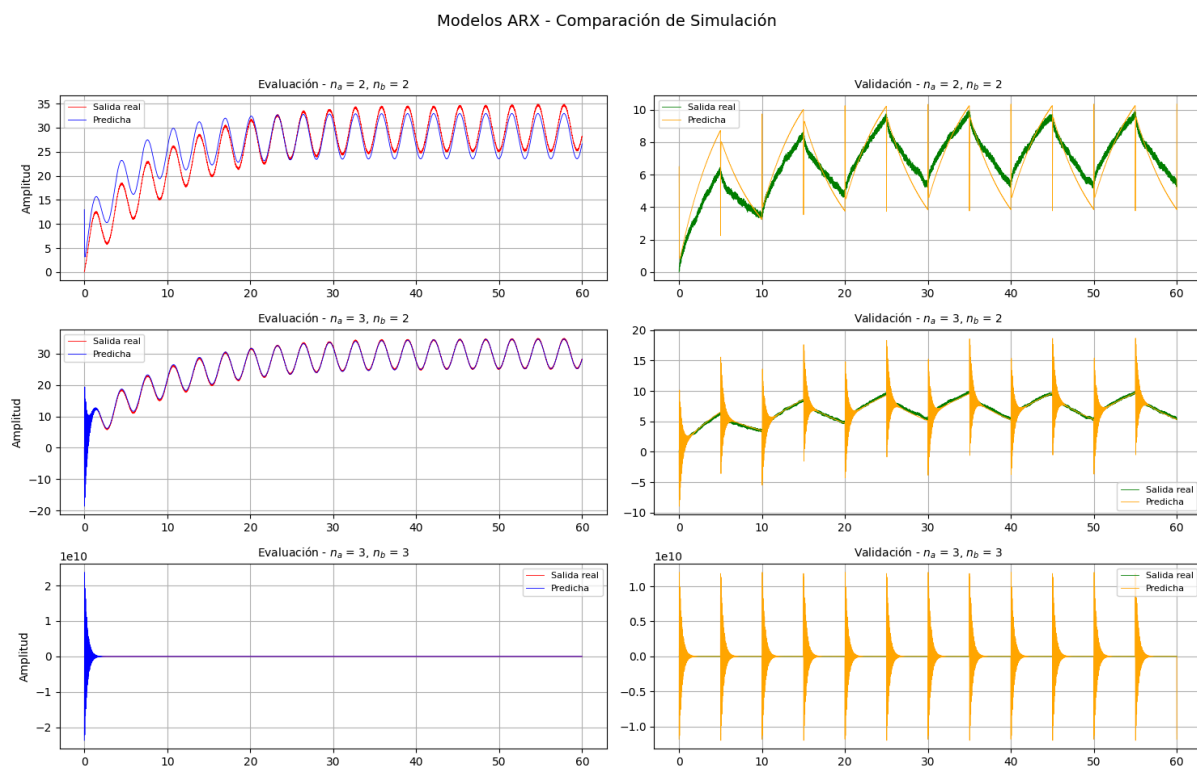


Figura 3. Comparación entre sistemas para el modelo ARX

2. Resultados para el modelo ARMAX

Para definir las estructuras de los modelos ARMAX, se propusieron tres configuraciones que combinan distintos valores de los parámetros na , nb , nc y nk . Estas configuraciones fueron diseñadas considerando la forma de las señales (Figura 1), como el comportamiento oscilatorio inducido por el ruido estructurado identificado (Figura 2). A diferencia del modelo ARX, en el modelo ARMAX se incluye un polinomio adicional C, el cual permite modelar la dinámica del ruido, siendo esta una decisión justificada por la componente espectral no blanca detectada.

La primera configuración, ARMAX 1 (Tabla 2), se estableció con los valores asumiendo que el sistema posee una dinámica moderadamente oscilatoria, con retroalimentación de salida y entrada, y un retardo leve entre la entrada y la salida. El valor $nc=2$ fue seleccionado como punto de partida para modelar una posible correlación en el ruido sin sobrecargar el modelo. Esta estructura fue elegida

como referencia base para evaluar la capacidad del modelo ARMAX de representar sistemas afectados por ruido estructurado.

En la segunda configuración, ARMAX 2, se incrementó el orden del polinomio autoregresivo A a $n_a=3$, manteniendo constante la influencia de la entrada y la dinámica del ruido. Esta modificación se realizó con el objetivo de capturar mejor los posibles efectos de memoria prolongada o inercia en la salida del sistema, sin añadir complejidad innecesaria en los términos exógenos. Esta elección parte del análisis de la Figura 1, donde se observa una evolución acumulativa prolongada y subamortiguada en la salida ante una entrada sinusoidal o cuadrada.

Por último, en la tercera configuración, ARMAX 3, se aumentó también el orden del polinomio B a $n_b=3$, buscando evaluar si una representación con mayor orden en la entrada mejora el ajuste del modelo. Esto por la posibilidad de que el efecto de la entrada no se refleje únicamente en un paso posterior, sino que se distribuya en múltiples instantes consecutivos. Al mantener constante el orden del polinomio de ruido ($n_c=2$), se asegura que los cambios en el desempeño se atribuyan únicamente a una mejor caracterización de la dinámica exógena.

Modelo	Configuración [n_a, n_b, n_c, n_k]	Error Evaluación (ECM)	Error Validación (ECM)	Error Absoluto M Evaluación (EAM)	Correlación Evaluación	Correlación Validación
ARMAX 1	[2, 2, 2, 1]	2.92	0.40	1.57	0.98	0.94
ARMAX 2	[3, 2, 2, 1]	4.10	2.5	1.69	0.95	0.70
ARMAX 3	[3, 3, 2, 1]	6.69	5.5	2.23	0.92	0.54

Tabla 2. Resultados del desempeño para los modelos ARMAX en los conjuntos de evaluación y validación.

En las gráficas presentadas para los modelos ARMAX (Figura 3), se visualiza la comparación entre la salida real del sistema y la salida estimada por cada configuración del modelo ($u-y$, $uv-yv$), tanto en el conjunto de evaluación como en el de validación. Esta representación gráfica cumple una función fundamental dentro del proceso de identificación de sistemas, ya que permite evaluar de forma directa la calidad del ajuste del modelo y su capacidad de generalización ante nuevos datos.

En la columna izquierda de la figura se muestran los resultados obtenidos al aplicar cada modelo ARMAX a la entrada de evaluación, es decir, los mismos datos utilizados para estimar los parámetros del modelo. En todos los casos, se observa que las salidas estimadas siguen de forma coherente la evolución temporal de la señal real, reproduciendo no sólo la tendencia general del sistema, sino también las oscilaciones inducidas por la entrada.

En la columna de la derecha (validación), se muestra la respuesta de cada modelo frente a una señal de entrada distinta a la utilizada en la etapa de entrenamiento. Esta evaluación determina si el modelo ha aprendido la estructura del sistema y no simplemente memoriza los datos. Las gráficas muestran que a medida que se aumenta la complejidad estructural del modelo ARMAX, la capacidad de predicción mejora, pero también se incrementa el riesgo de sobreajuste.

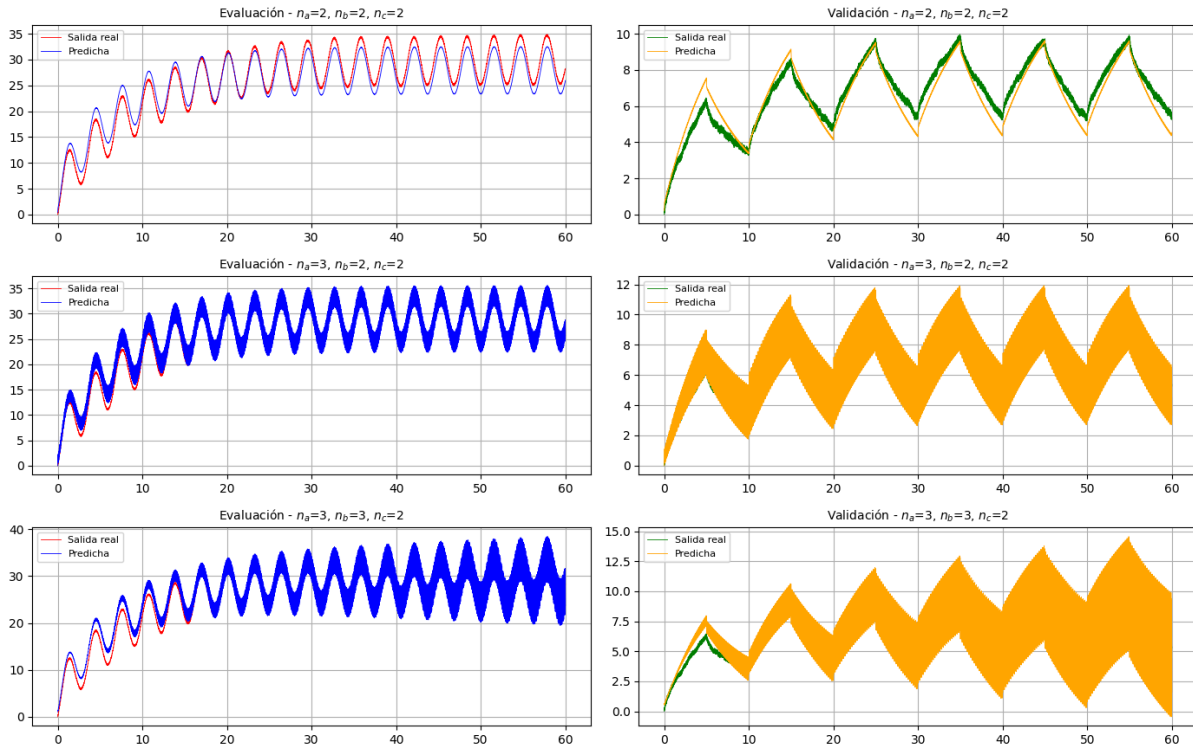


Figura 4. Comparación entre sistemas para el modelo ARMAX

4. Resultados para el modelo OE

Para la construcción del modelo OE (Output Error) se propusieron tres configuraciones estructurales con distintas combinaciones de los parámetros nb , nf y nk . A diferencia de los modelos ARX y ARMAX, el modelo OE asume que el ruido no tiene dinámica propia y que la perturbación se incorpora directamente en la salida como un error aditivo sin retroalimentación. En otras palabras, se considera que la única dinámica relevante es la del sistema mismo, y no la del entorno o ruido. Esta característica hace al modelo OE útil cuando se busca evaluar la relación pura entre entrada y salida, en presencia de ruido que puede considerarse acotado o de alta frecuencia.

La configuración inicial, OE 1 (Tabla 2) se basa en la suposición de que el efecto de la entrada es mínimo (un solo coeficiente de entrada) pero que la dinámica interna del sistema (representada por el polinomio B y F) requiere al menos dos coeficientes para capturar la inercia de la respuesta observada. Esta decisión se justificó a partir de la inspección visual de las señales en el dominio temporal, donde la salida muestra un crecimiento progresivo que no puede explicarse únicamente con efectos instantáneos. El retardo $nk=1$ se mantuvo constante en todas las configuraciones, en coherencia con el desfase observado entre los cambios en la entrada y la respuesta del sistema. En la segunda configuración, OE 2, se incrementó el número de coeficientes del polinomio B a $nb=3$, manteniendo $nf=2$. Esta modificación se realizó para explorar si una mayor resolución en la modelación de la entrada permite mejorar la predicción, especialmente considerando que la entrada de validación presenta transiciones abruptas. La tercera configuración, OE 3, fue diseñada como una expansión equilibrada de la primera, incrementando tanto nb como nf a 3. Este modelo intenta capturar simultáneamente una mayor influencia de la entrada y una dinámica sin modificar el retardo.

Modelo	Configuración n [nb, nf, nk]	Error Evaluación (ECM)	Error Validación (ECM)	Error Absoluto M Evaluación (EAM)	Correlación Evaluación	Correlación Validación
OE 1	[1, 2, 1]	0.05	0.04	0.18	0.99	0.99
OE 2	[3, 2, 1]	3.19×10^7	2.11×10^6	5.46×10^3	-0.95	-0.97
OE 3	[3, 3, 1]	0.05	0.08	0.15	0.99	0.98

Tabla 3. Resultados del desempeño para los modelos OE en los conjuntos de evaluación y validación.

En la Figura 4 se presentan los resultados obtenidos al aplicar los modelos OE en los conjuntos de evaluación y validación. Como en los casos anteriores, se muestran dos columnas: la izquierda corresponde a la fase de evaluación (datos de entrenamiento), y la derecha a la fase de validación (datos no vistos).

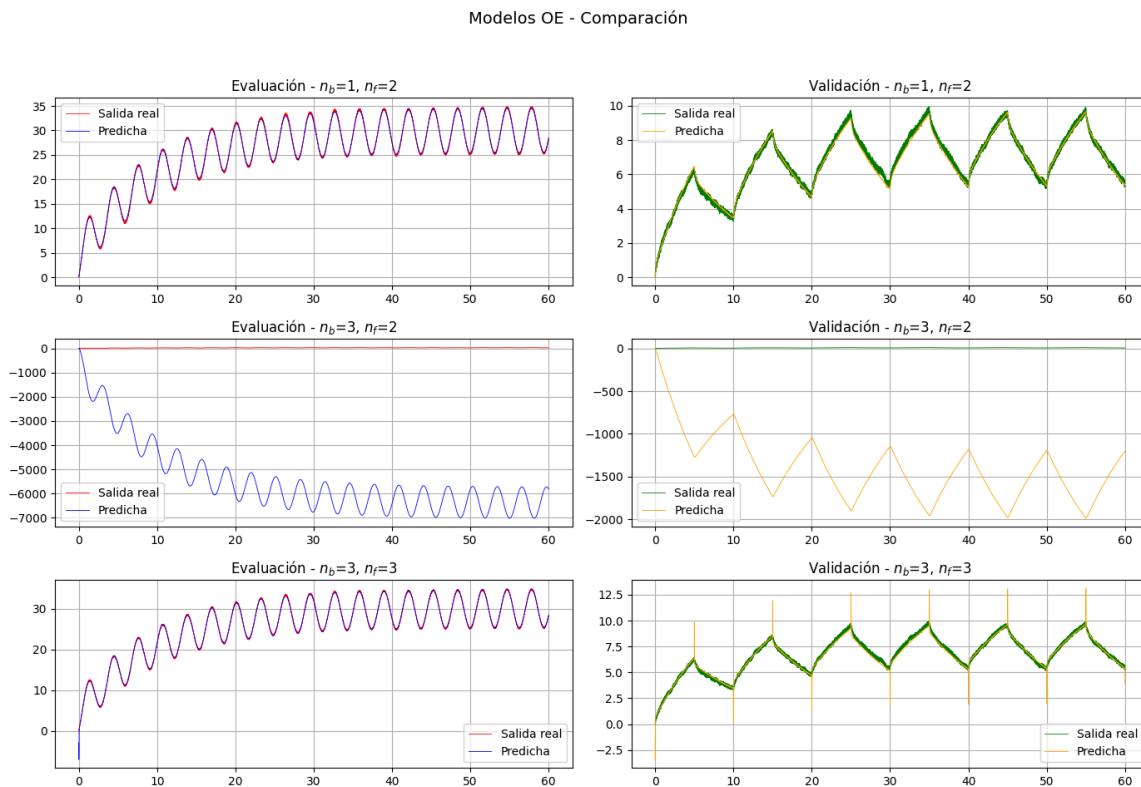


Figura 5. Comparación entre sistemas para el modelo OE.

4. Resultados para el modelo BJ

Para definir las configuraciones del modelo Box-Jenkins (BJ), se plantearon tres combinaciones estructurales que integran todos los elementos que caracterizan a esta arquitectura: la dinámica propia del sistema y la dinámica del ruido. A diferencia de las estructuras ARX, ARMAX y OE, el modelo BJ modela por separado tanto la relación entrada-salida como el comportamiento del ruido como un sistema autoregresivo con media móvil (ARMA), lo cual resulta congruente cuando se ha identificado previamente que la señal está afectada por perturbaciones no blancas, como en este caso.

La primera configuración, BJ 1, fue diseñada como una estructura mínima, utilizando un orden igual a uno para cada uno de sus polinomios: $n_a = n_b = n_c = n_d = n_k = 1$. Esta elección busca establecer un punto de referencia básico para evaluar si una estructura muy simple puede capturar al menos las características generales del sistema. Como muestran los resultados (Tabla 4), este modelo logra una buena correlación entre la salida estimada y la salida real, tanto en evaluación como en validación, pero con errores más altos en términos de precisión cuantitativa. En particular, el ECM y el EAM son considerablemente mayores que en los modelos más complejos, lo que sugiere que la estructura es insuficiente para capturar con detalle tanto la dinámica del sistema como la del ruido.

En la segunda configuración, BJ 2, se optó por incrementar el orden del polinomio autoregresivo A del sistema ($n_a = 2$) y del polinomio D del ruido ($n_d = 2$), manteniendo constantes los demás parámetros. Esta elección respondió a dos objetivos: por un lado, capturar de forma más precisa la inercia presente en la salida, evidenciada en la fase de crecimiento subamortiguado (Figura 1) y por el otro, modelar adecuadamente la estructura temporal del ruido, que se había identificado previamente como estructurado y no blanco (Figura 2).

Finalmente, en la tercera configuración, BJ 3, se mantuvo una estructura simétrica y relativamente simple, con todos los órdenes en dos esto para evaluar si el aumento del orden de todos los polinomios sobre ajustaba el modelo o daba una respuesta igual a BJ 1.

Adicionalmente vimos que cuando subimos los órdenes a 3 el sistema se sobre ajusta y deja de funcionar.

Modelo	Configuración n [n_a, n_b, n_k]	Error Evaluación (ECM)	Error Validación (ECM)	Error Absoluto M Evaluación (EAM)	Correlación Evaluación	Correlación Validación
BJ 1	[1, 1, 1, 1, 1]	2.15	0.23	1.19	0.98	0.96
BJ 2	[2, 1, 1, 2, 1]	0.04	0.04	0.16	0.99	0.99
BJ 3	[2, 2, 2, 2, 1]	0.79	0.13	0.64	0.99	0.97

Tabla 4. Métricas de desempeño para los modelos BJ en los conjuntos de evaluación y validación.

En la figura 6 correspondiente al modelo Box-Jenkins (BJ), se representa la comparación entre la salida real y la salida estimada por cada una de las configuraciones propuestas, tanto en la fase de evaluación como en la de validación. En la primera fila se presenta la simulación del modelo BJ 1. En el conjunto de evaluación, se observa que la señal predicha sigue razonablemente la forma de la salida real, aunque con ciertas discrepancias en magnitud en las crestas y valles de la señal. Esta diferencia también se manifiesta en la validación, donde la forma general de la salida es replicada, pero la amplitud presenta ligeros errores.

El modelo BJ 2 corresponde a una repetición de la configuración anterior (también con órdenes bajos), lo cual permite confirmar la estabilidad del desempeño frente a condiciones similares. En este caso, se observa una mejora significativa en la correspondencia entre la señal real y la estimada, tanto en evaluación como en validación. En la tercera fila se encuentran los resultados del modelo BJ 3, configurado con órdenes más altos en todos los polinomios [2,2,2,2,1] En evaluación, la salida predicha se ajusta casi perfectamente a la señal real. Las oscilaciones y transiciones se reproducen con gran precisión, y no se observan desfases ni sobreajustes evidentes. Sin embargo, en la validación,

aunque la señal estimada sigue la forma general, aparecen ligeras distorsiones o transitorios que no estaban presentes en las fases anteriores.

Modelos BJ - Comparación

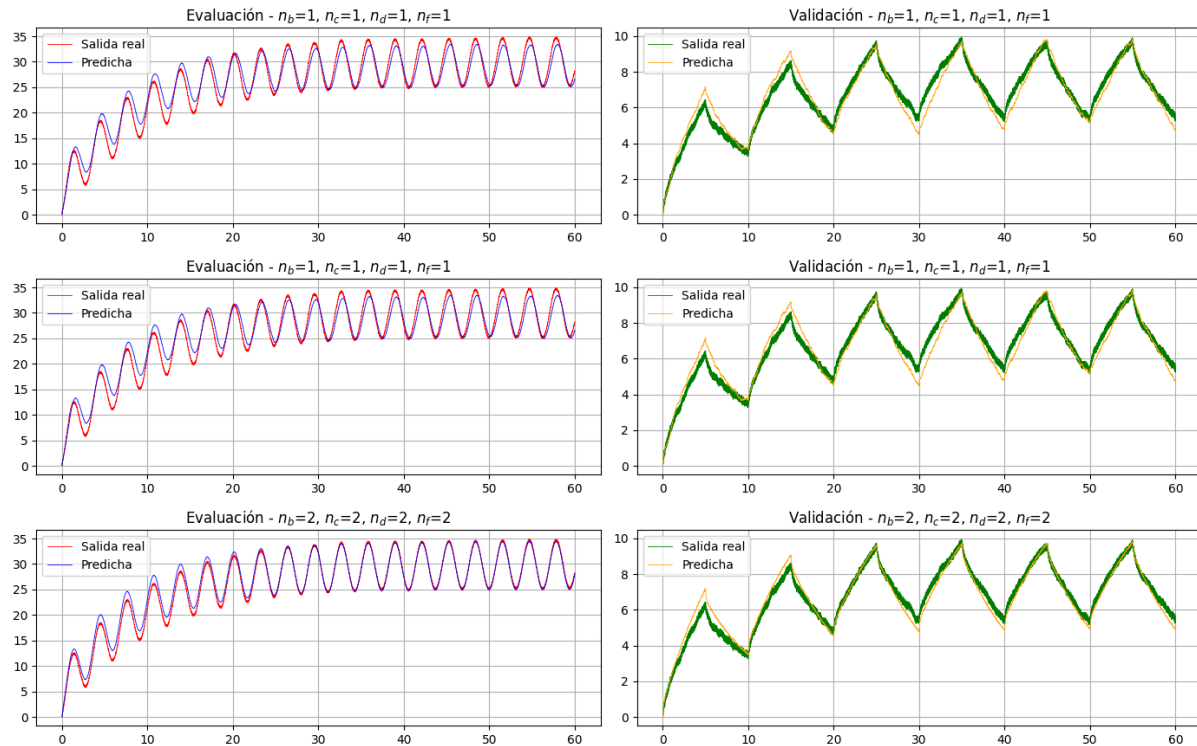


Figura 6. Comparación entre sistemas para el modelo BJ

Parte 3: Métricas cuantitativas para cada modelo

La evaluación del desempeño de los modelos se llevó a cabo utilizando tres métricas cuantitativas fundamentales: el error cuadrático medio (MSE), el error absoluto medio (MAE) y el coeficiente de correlación de Pearson. Estas métricas permiten no solo cuantificar la precisión con la que cada modelo reproduce la salida del sistema, sino también evaluar la similitud estructural entre las señales estimadas y las reales. El MSE brindó una medida sensible a grandes desviaciones, destacando la presencia de errores significativos en la predicción, mientras que el MAE ofreció una estimación más robusta del error promedio típico; la correlación permitió analizar el grado de alineación entre las formas de las señales simuladas y las reales, aportando información clave sobre la fidelidad estructural de los modelos. Las métricas fueron calculadas tanto en la etapa de evaluación como en validación, con el fin de verificar la capacidad de generalización de cada modelo ante nuevos datos.

Ecuaciones de los modelos:

MODELO ARX

$$A(q)y(n) = B(q)u(n) + e(n)$$

MODELO ARMAX

$$A(q)y(n) = C(q)e(n)$$

MODELO OE

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)}u(n) + e(n)$$

MODELO BJ

$$y(n) = \frac{B(q)}{F(q)}u(n) + \frac{C(q)}{D(q)}e(n)$$

III ANÁLISIS.

Resultados de la visualización de la señal

La inspección visual de las señales de entrada y salida es una etapa crucial en la identificación de sistemas, ya que permite detectar patrones, variaciones, inestabilidades o comportamientos no lineales antes de aplicar modelos matemáticos. Este enfoque inicial está respaldado por Ljung (1999) [5], quien señala que el análisis exploratorio de los datos en el dominio del tiempo y la frecuencia constituye una herramienta indispensable para decidir sobre la complejidad y tipo de modelo a utilizar.

En los resultados observados, se identificaron características dinámicas distintas entre los conjuntos de evaluación y validación. En particular, la señal de entrada de evaluación, de tipo sinusoidal, promueve una excitación continua y controlada del sistema [6], mientras que la señal cuadrada utilizada en validación permite comprobar la robustez del modelo frente a discontinuidades y alta variabilidad espectral. En cuanto al comportamiento de las salidas, la respuesta asociada a la entrada sinusoidal muestra un retardo suave y una tendencia subamortiguada, lo que se asocia con sistemas de segundo orden, mientras que la respuesta frente a la entrada cuadrada evidencia una forma triangular, lo que indica una inercia o dinámica acumulativa del sistema. Este fenómeno, también denominado efecto de "memoria dinámica", es común en sistemas con componentes retardados [7].

Finalmente, el análisis espectral de las salidas mediante la FFT reveló un componente dominante cercano a los 15 Hz en ambas señales. La presencia de este pico puede interpretarse como un ruido estructural o componente periódica no deseada, posiblemente introducida por el entorno de medición o por artefactos del sistema de adquisición. Este conjunto de observaciones justifica la necesidad de utilizar estrategias adecuadas de identificación, aplicar validación con diferentes estímulos de entrada, y considerar el preprocesamiento de señales para minimizar la influencia del ruido estructurado en el ajuste de modelos [7].

Configuración de modelos, simulación de datos y métricas cuantitativas

1. Análisis para el modelo ARX

Para el modelo ARX se plantearon tres configuraciones seleccionadas con base en las características dinámicas observadas en las señales: retardo entre entrada y salida, comportamiento oscilatorio y dependencia temporal. La primera configuración, ARX 1 [na=2,nb=2,nk=1], ofreció un ajuste sólido tanto en evaluación como en validación. Según la Tabla 1, este modelo alcanzó un ECM de 5.55 en

evaluación y 1.00 en validación, junto con correlaciones de 0.95 y 0.85, respectivamente. Estos valores indican que la estructura es suficientemente expresiva para capturar la dinámica del sistema sin caer en sobreajuste, mostrando además robustez frente al conjunto de validación. La salida simulada sigue de cerca la señal real, como se aprecia en la Figura 3, lo que valida la elección de una arquitectura simple y bien condicionada.

La segunda configuración, ARX 2, incorporó un mayor orden en el polinomio de salida [$n_a=3$], lo que se tradujo en una mejora significativa durante la evaluación: el ECM se redujo a 0.73 y la correlación aumentó a 0.99. No obstante, en la validación, el desempeño disminuyó de forma notable (ECM = 2.07; correlación = 0.76), lo que indica un modelo más ajustado al conjunto de entrenamiento, pero menos capaz de generalizar. Este fenómeno es característico del sobreajuste estructural, en el que el modelo comienza a capturar ruido y particularidades no representativas del sistema. La literatura sobre teoría del aprendizaje estadístico advierte que este tipo de comportamiento es común en modelos con exceso de parámetros frente a la cantidad de información disponible en los datos de entrenamiento [9].

En la tercera configuración, ARX 3, se incrementó también el orden del polinomio de entrada [$n_b = 3$]. Sin embargo, esto condujo a una situación de inestabilidad numérica severa. Según la Tabla 1, el ECM alcanzó valores del orden de 10^{18} , mientras que el error absoluto medio (EAM) superó los 10^{18} . Las correlaciones, por su parte, cayeron a 0.00 en ambas fases, lo que sugiere una pérdida total de relación entre la salida real y la salida predicha. Las simulaciones produjeron señales que divergen completamente del comportamiento físico del sistema, lo que se traduce en una curva desbordada e incoherente en la Figura 3. Este resultado indica que el modelo quedó mal condicionado, y refleja cómo una complejidad excesiva puede conducir no solo a sobreajuste, sino también a una ruptura funcional del modelo cuando se ve enfrentado a nuevas entradas.

En conjunto, los resultados muestran que si bien aumentar la complejidad estructural puede mejorar superficialmente el ajuste en entrenamiento, sin una validación rigurosa puede comprometer seriamente la capacidad de generalización y la estabilidad numérica del modelo. En este caso, ARX 1 se consolida como la configuración más adecuada, logrando un equilibrio entre precisión, robustez y simplicidad, tal como se espera en procesos de identificación fiables.

2. Análisis para el modelo ARMAX

La Figura 4 presenta la comparación entre la salida real y la salida estimada por tres configuraciones distintas del modelo ARMAX, evaluadas tanto en el conjunto de entrenamiento (evaluación) como en el de prueba (validación). Estas gráficas permiten valorar de forma cualitativa la capacidad de los modelos para capturar la dinámica del sistema bajo diferentes niveles de complejidad estructural. El modelo ARMAX 1 mostró el mejor desempeño general, tanto cuantitativa como visualmente. En el conjunto de evaluación, reproduce con precisión las oscilaciones y la tendencia amortiguada de la salida, con un MSE de 2.93 y correlación de 0.98, lo que indica un alto grado de ajuste. En validación, conserva su rendimiento, reduciendo el MSE a 0.40 y manteniendo una alta correlación (0.94), lo que sugiere buena capacidad de generalización y resistencia al sobreajuste. Logrando un balance adecuado entre complejidad y estabilidad, validando su utilidad para sistemas con dinámica oscilatoria y ruido estructurado[1][6][7].

Al aumentar el orden del polinomio A (ARMAX 2), se buscó capturar una dinámica interna más rica. Aunque el modelo ajusta bien la señal de evaluación (MSE: 4.10; Corr: 0.96), sufre una notable degradación mayormente visible en la validación, con una caída en la correlación a 0.70 y aumento en

el MSE a 2.53. Este comportamiento sugiere un sobreajuste parcial, y se hace evidente que ante el aumento excesivo del orden sin mejora significativa en los residuos puede comprometer la capacidad predictiva del modelo[5][8].

Cuando en el ARMAX 3 incremento en la complejidad del polinomio B provocó una inestabilidad numérica durante la identificación, evidenciada por una advertencia sobre la mala condición de la matriz del sistema. Como resultado, el modelo presenta el peor desempeño, con un MSE elevado (evaluación: 6.69; validación: 5.56) y una correlación reducida en validación (0.55). Este deterioro ilustra la sensibilidad del modelo ARMAX al sobreajuste, que puede amplificar el error cuando el conjunto de validación se desvía levemente del de entrenamiento. Es por esto que, si bien los términos MA (Moving average, polinomio C) mejoran la capacidad de capturar el ruido estructurado, deben usarse con precaución para evitar soluciones inestables[2][6].

3. Análisis para el modelo OE

El modelo OE (Output Error) se caracteriza por suponer que la única dinámica relevante es la del sistema, modelando el ruido como un término adicional que no posee estructura ni realimentación interna. Esta característica lo hace especialmente útil cuando se dispone de mediciones donde el ruido puede considerarse de alta frecuencia o no correlacionado con la entrada, y su aplicación se destaca en entornos donde se busca una estimación precisa de la dinámica pura entrada-salida sin distorsiones inducidas por la modelación del ruido [5][7].

En este caso, la primera configuración con parámetros [1, 2, 1] mostró un rendimiento sobresaliente tanto en evaluación como en validación, con errores MSE muy bajos (0.05 y 0.04, respectivamente) y coeficientes de correlación cercanos a 0.99. Este resultado confirma que, a pesar de su relativa simplicidad, el modelo logra capturar adecuadamente la dinámica del sistema, reflejando que una estructura lenta puede ser suficiente cuando la señal de entrada posee contenido frecuencial claro y bien distribuido (como la señal sinusoidal empleada en la fase de evaluación). La segunda configuración, con una mayor complejidad en el polinomio de entrada [3, 2, 1], presentó un comportamiento numéricamente inestable, arrojando errores extremadamente altos (MSE de 3.19×10^7 en evaluación y 2.11×10^6 en validación), así como correlaciones negativas. Esta situación indica condiciones del modelo negativas, posiblemente causada por la inclusión de demasiados coeficientes de entrada frente a un sistema cuya respuesta no justifica tal nivel de complejidad; este tipo de sistema puede volverse sensibles a pequeñas perturbaciones en los datos cuando se sobreparametrizan, provocando inestabilidad numérica e interpretaciones erróneas de la dinámica [10]. La tercera configuración coeficientes de [3, 3, 1], mostró nuevamente un comportamiento excelente, comparable con la primera configuración. Los valores de MSE (0.05 en evaluación y 0.08 en validación) y correlaciones por encima de 0.98 evidencian una excelente capacidad predictiva.

Este modelo logró un seguimiento preciso de los cambios rápidos inducidos por la señal cuadrada, así como una reconstrucción fiel de las oscilaciones senoidales. Su rendimiento sugiere que una estructura balanceada puede mejorar sin caer en los problemas de sobreajuste observados en la configuración dos. Como señalan Söderström y Stoica, la elección adecuada de órdenes polinómicos que reflejen tanto la dinámica del sistema como la resolución temporal de la entrada es clave para obtener modelos OE estables y precisos [11].

4. Análisis para Box Jenkins

La Figura 6 muestra la comparación entre la salida real y la salida estimada para tres configuraciones del modelo Box-Jenkins (BJ), evaluadas tanto en el conjunto de entrenamiento (evaluación) como en el de prueba (validación). Este tipo de modelo es especialmente potente al permitir una separación explícita entre la dinámica del sistema (polinomios B y F) y la dinámica del ruido (polinomios C y D)[5][6][7].

El modelo BJ 1, con una estructura mínima, presenta un buen desempeño general. Aunque sus indicadores de evaluación (MSE: 2.16, Corr: 0.98) son los más altos del grupo, logra una buena generalización con un MSE de solo 0.24 y correlación de 0.96 en validación. Esto indica que, a pesar de su simplicidad, la estructura captura adecuadamente la tendencia de la señal. El buen ajuste en validación sugiere una buena separación del ruido mediante los términos MA y AR de la parte estocástica (polinomios C y D), esto destaca la eficiencia de la estructura BJ en entornos ruidosos cuando se mantiene un orden reducido[6].

En el modelo BJ 2 se logra mejorar el desempeño global. Con un MSE de 0.0415 en evaluación y 0.0408 en validación, y correlaciones superiores al 0.99, demuestra una capacidad sobresaliente para representar tanto la dinámica del sistema como del ruido. La incorporación de un orden más alto en los polinomios B y F permite una mejor modelación de la dinámica interna, sin perder estabilidad, como lo refleja la baja MAE y el fuerte ajuste visual. Los modelos BJ son particularmente adecuados cuando se desea un desacoplamiento explícito entre el ruido y el sistema determinista, favoreciendo la precisión sin sobreajuste[7].

En BJ 3 aunque este modelo ofrece una correlación alta (Evaluación: 0.9958; Validación: 0.9767), su rendimiento cuantitativo es inferior al de BJ 2, con MSE más altos (0.7938 y 0.1399 respectivamente). Visualmente, también se observan pequeñas oscilaciones no presentes en la señal real. Este resultado sugiere un ligero sobreajuste pues al aumentar los órdenes de C y D (ruido), se incrementa la complejidad del modelo y, si no se justifica por una mejora sustancial en el error, puede afectar la capacidad de generalización ya que el modelo capta adecuadamente el ruido, pero introduce pequeños errores acumulativos.[5]

Elección del mejor modelo

Luego del análisis comparativo entre distintas estructuras de identificación paramétrica —ARX, ARMAX, OE y BJ—, se concluyó que el modelo OE con configuración [1, 2, 1] representa la opción confiable para describir la dinámica del sistema bajo estudio. Esta elección se fundamenta en un enfoque objetivo basado en múltiples métricas: el modelo OE 1 obtuvo el mejor desempeño global en términos de error cuadrático medio (MSE) y correlación, al presentar una puntuación combinada de MSE de 0.04701 y una correlación promedio de 0.99696 entre las salidas reales y simuladas en fases de evaluación y validación.

A pesar de que la configuración OE 3 mostró el menor error absoluto medio (MAE), su ventaja frente a OE 1 no fue suficiente para superar el rendimiento global del primero, especialmente considerando la estabilidad y capacidad de generalización observadas en la validación cruzada. Esto sugiere que OE 1 es capaz de capturar de forma eficiente la dinámica del sistema sin requerir una estructura polinómica compleja, lo cual refuerza su idoneidad ante señales que presentan una respuesta

relativamente lenta o bien definida en frecuencia, como es el caso de la señal sinusoidal de evaluación.

En concordancia con lo anterior y lo señalado por Söderström y Stoica [11], este modelo es especialmente útil cuando se busca aislar la verdadera relación entrada-salida sin contaminar la dinámica con componentes de ruido. Además, el resultado obtenido valida que una estructura sencilla pero bien calibrada puede superar en rendimiento a configuraciones más complejas, siempre que respete las características espectrales y temporales del sistema a modelar.

IV CONCLUSIONES

- Se observó que para la estructura **ARX**, la configuración de baja complejidad (ARX 1) fue la más adecuada, ofreciendo un buen equilibrio entre precisión y capacidad de generalización. El aumento de complejidad en ARX 2 trajo mejoras en entrenamiento, pero afectó negativamente la validación. ARX 3 evidenció inestabilidad numérica severa, lo que confirma que el uso excesivo de parámetros en modelos ARX puede comprometer completamente su desempeño.
- Para la estructura **ARMAX**, el modelo ARMAX 1 logró capturar con precisión tanto la dinámica del sistema como la del ruido, manteniendo estabilidad en ambas fases. Al aumentar los órdenes en ARMAX 2 y ARMAX 3, se presentó un deterioro progresivo, desde sobreajuste hasta inestabilidad estructural, mostrando que una complejidad mal administrada en esta estructura puede amplificar el error en lugar de reducirlo. Este comportamiento sugiere una menor capacidad para modelar adecuadamente la dinámica del ruido, dado que la estructura ARMAX incorpora el término MA (polinomio C) pero no incluye explícitamente un modelado independiente para la perturbación como en BJ.
- Las tres configuraciones del modelo **OE** evidencian la importancia crítica de una selección estructural adecuada en la identificación de sistemas dinámicos. Las configuraciones OE 1 y OE 3 demostraron que modelos bien balanceados, con órdenes polinómicos consistentes con la complejidad del sistema y el tipo de entrada, permiten obtener estimaciones precisas, estables y generalizables. Por el contrario, el caso de OE 2 ilustra cómo una parametrización no adecuada puede conducir a resultados erráticos y pérdida total de confiabilidad, incluso cuando se dispone de datos adecuados.
- Las estructuras **BJ** demostraron un rendimiento superior tanto en evaluación como en validación, alcanzando errores mínimos (MAE y MSE) y altos niveles de correlación incluso con órdenes reducidas. Esto se debe a su estructura más flexible, que permite una modelación separada y precisa de la dinámica del sistema (mediante los polinomios B y F) y del ruido (a través de los polinomios C y D).

VI REFERENCIAS

[1] "System identification requirements - Summary and discussion". 1Library - documents sharing platform. Accedido el 17 de junio de 2025. [En línea]. Disponible: https://1library.net/article/system-identification-requirements-summary-and-discussion.z195p83q?utm_source=chatgpt.com

- [2]“GRU-ARX model-based adaptive error compensation predictive control strategy with application to quadrotor”. sciencedirect. Accedido el 17 de junio de 2025. [En línea]. Disponible: <https://www.sciencedirect-com.udea.lookproxy.com/science/article/pii/S1568494625001401>
- [3]“ARX model identification for thermal virtual sensors in a vacuum heating furnace”. sciencedirect. Accedido el 17 de junio de 2025. [En línea]. Disponible: <https://www.sciencedirect-com.udea.lookproxy.com/science/article/pii/S1290072925002947>
- [4] «What is Correlation Assessment | IGI Global Scientific Publishing». <https://www.igi-global.com/dictionary/technology-student-achievement/38604>
- [5] A. Simpkins, “Identificación de sistemas: Teoría para el usuario, 2.^a edición (Ijung, L.; 1999) [en la estantería]”, IEEE Robot. Autom. Mag. doi: 10.1109/MRA.2012.2192817
- [6] R. Pintleon, J. Schoukens y R. Pintelon, Identificación de sistemas: Un enfoque en el dominio de la frecuencia . Nashville, TN: John Wiley & Sons, 2001.
- [7] R. Isermann y M. Munchhof, Identificación de sistemas dinámicos: Introducción con aplicaciones . Berlín, Alemania: Springer, 2009.
- [9] V. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*, 2nd ed., New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2000.
- [10] O. Nelles, Identificación de sistemas no lineales: De los enfoques clásicos a las redes neuronales y los modelos difusos . Berlín, Alemania: Springer, 2010. doi: 10.1007/978-3-662-04323-3
- [11] Deistler M. Identificación de Sistemas; T. Söderström y P. Stoica; Prentice Hall International, 1989. Teoría Econométrica . 1994;10(3-4):813-815. doi:10.1017/S026646660000880X.