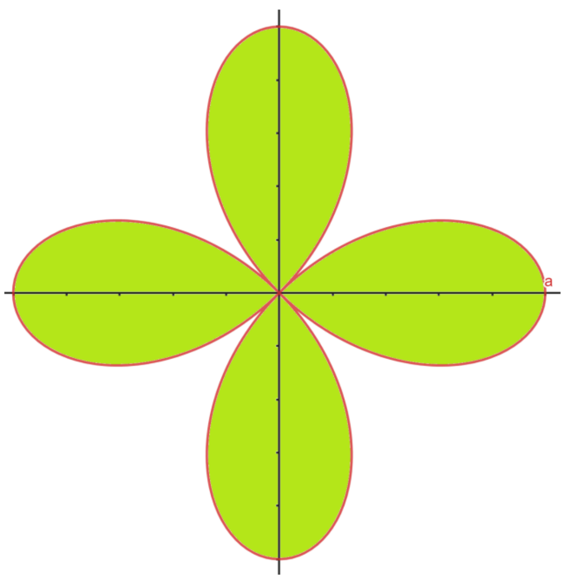
Cálculo II - Lista 0,20 - A1

No livro do Stewart (vol. 2, 9^a ed.), na sessão 10.3 e 10.4, é trabalho o sistema de coordenadas polares. Com base nestas sessões:

a) Descreva como funciona as coordenadas polares e as relações com as coordenadas cartesianas (como uma se transforma na outra e vice versa);

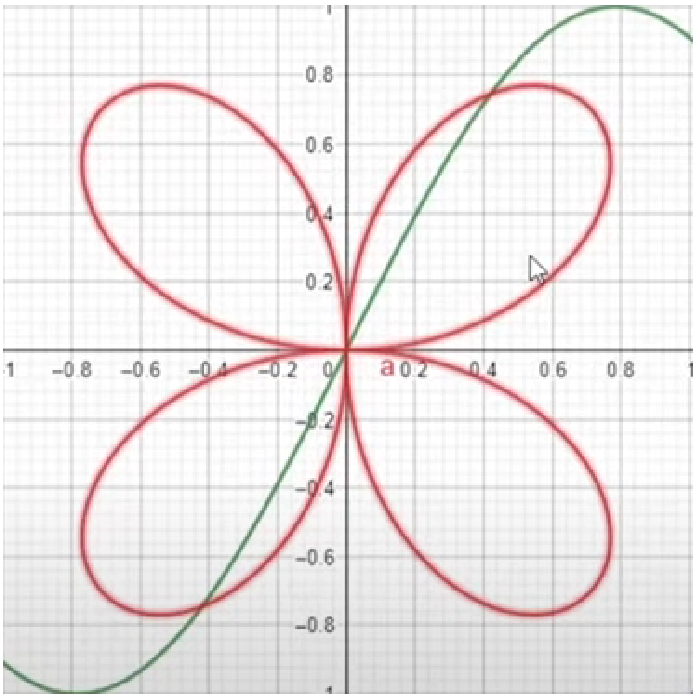
b) Descreva como funcionam as curvas polares em termos de descrição gráfica. Dê exemplo de curvas polares (com Geogebra, à mão ou com qualquer outra ferramenta gráfica);

c) Utilizando a ideia de cálculo de área (exemplo 1 da sessão 10.4; detacado verde), calcule a área de uma rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$. Dica: use simetria de 1 pétala.



A) O sistema de coordenadas polares oferece uma perspectiva alternativa para descrever pontos no plano, destacando curvas notáveis neste contexto. Ao contrário do sistema cartesiano, onde os pontos são definidos por coordenadas retangulares (x, y), no sistema polar, cada ponto é identificado por um ângulo e uma distância em relação ao ponto de referência, conhecido como pólo. Isso implica que as coordenadas polares são expressas como (r, θ), onde r representa a distância do ponto ao pólo e θ é o ângulo formado com o eixo polar, medido no sentido anti-horário. A relação entre os sistemas polar e cartesiano é estabelecida por meio de equações de conversão. Para passar de coordenadas cartesianas para polares, usamos as fórmulas: $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $\theta = \arctan(y / x)$. Por outro lado, para converter coordenadas polares em cartesianas, empregamos as equações: $x = r * \cos(\theta)$ e $y = r * \sin(\theta)$. Essas expressões permitem traduzir eficientemente entre os dois sistemas, proporcionando uma compreensão abrangente das posições dos pontos no plano.

B) As curvas polares operam ao representar graficamente uma curva, onde pontos (r, θ) são traçados no plano polar conforme a equação que governa a curva. Esse método permite explorar uma variedade de formas e padrões geométricos que podem ser difíceis de alcançar em um sistema de coordenadas cartesianas.



$r(x) = \text{sen}(2x)$

$a = \text{Curva}(r(t)\ \cos(t), r(t)\ \text{sen}(t), t, 0, 2\pi)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \text{sen}(2t)\ \cos(t) \\ y = \text{sen}(2t)\ \text{sen}(t) \end{array}\right\} 0 \le t \le 6.2831853071796$$

C) Podemos calcular a área de uma rosa com quatro pétalas, cuja equação polar é $r = \cos(2\theta)$, aproveitando a simetria da figura para determinar a área de uma única pétala e multiplicando o resultado por quatro. A integral que nos dá a área A de uma pétala em coordenadas polares é expressa como:

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Neste contexto, uma pétala se estende de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Assim, ao calcular a área de uma única pétala e multiplicá-la por quatro, podemos obter a área total da rosa.

A área da rosa com quatro pétalas, definida pela equação polar $r = \cos(2\theta)$, é aproximadamente 1,571 unidades quadradas. Este resultado é obtido ao calcular a área de uma única pétala e, em seguida, multiplicá-la por quatro, aproveitando a simetria da rosa.