Nome: Felipe Barroso de Castro
RA: 2311292
Curso: Engenharia de Software

Questão 1

Calcule a integral de linha utilizando o teorema de Green:

a)

$$\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy,$$

onde C é o círculo com centro na origem e raio 2.

O Teorema é dado por:

$$\oint C\,(P\,dx + Q\,dy) = \iint D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Para a integral de linha dada:

$$\oint C\,(x-y)\,dx + (x+y)\,dy$$

Identificamos as funções P e Q como:

$$P = x - y$$

$$Q = x + y$$

Precisamos calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x-y)}{\partial y} = -1$$

Agora, substituímos essas derivadas na fórmula do Teorema de Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint D(1-(-1))\,dA = \iint D\,2dA$$

A região D é o círculo com centro na origem e raio 2. área de um círculo é dada por πr^2, onde r é o raio do círculo. Assim, a área do círculo é:

$$Área(D) = \pi(2)^2 = 4\pi$$

Portanto, a integral dupla se torna:

$$\iint D \quad 2dA = 2 \times Área(D) = 2 \times 4\pi = 8\pi$$

Assim, a integral de linha é:

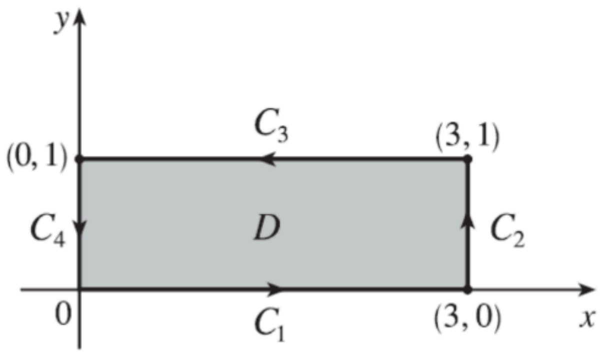
$$\oint C\,(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 8\pi$$

Portanto, a resposta é 8π.

b)

$$\oint_C xydx + x^2dy,$$

onde C é o retângulo com vértices (0, 0), (3, 0), (3, 1) e (0, 1). Caso precise, utilize o gráfico abaixo:



Para resolver a integral de linha utilizando o Teorema de Green, precisamos relembrar a forma do teorema:

$$\oint C \ (P \ dx + Q \ dy) \ = \iint D \ (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \ dA$$

Para a integral de linha dada:

$$\oint C \ xy \ dx \ + \ x^2 dy$$

Identificamos as funções P e Q como:

$P = xy$

$Q = x^2$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x$$

Agora, substituímos essas derivadas na fórmula do Teorema de Green:

$$\iint D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint D(2x - x)\, dA = \iint D\; x\; dA$$

A região D é o retângulo com vértices $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, *e* $(0,1)$.

A integral dupla sobre essa região pode ser calculada como:

$$\iint D\; x\; dA = \int_0^1 \int_0^3 x\; dx\; dy$$

Primeiro, integramos em relação a x:

$$\int_0^3 x\; dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{9}{2}\; dy = \frac{9}{2}[y]_0^1 = \frac{9}{2}\,.\,(1 - 0) = \frac{9}{2}$$

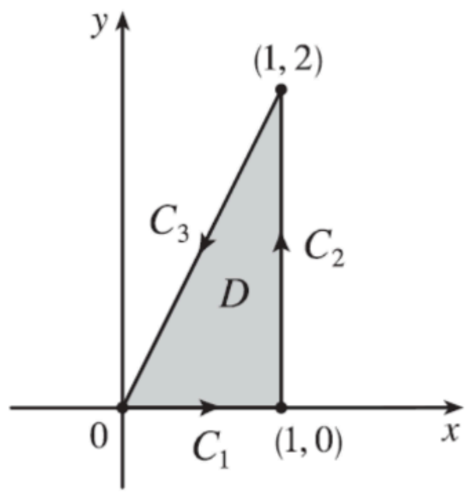
Portanto, a integral de linha é:

$$\oint C\; xy\; dx + x^2\; dy = \frac{9}{2}$$

c)

$$\oint_C xydx + x^2y^3dy,$$

onde C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2). Caso precise, utilize o gráfico abaixo:



A integral de linha dada é :

$$\oint C\ \ xy\ dx + x^2y^3\ \ dy$$

Identificamos as funções P e Q como:

$P = xy$

$Q = x^2y^3$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2y^3\right)}{\partial x} = 2xy^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$$

Agora, substituímos essas derivadas na fórmula do Teorema de Green:

$$\iint D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint D(2xy^3 - x)\ dA = \iint D\ x(2y^3 - 1)\ dA$$

A região D é o triângulo com vértices (0,0), (1,0), e (1,2).

Para integrar sobre essa região, precisamos definir os limites de integração.

O triângulo está limitado por $y = 2x$ *e* $y = 0$ *entre* $x = 0$ *e* $x = 1$.

A integral dupla se torna:

$$\iint\ D\ x(2y^3\ - 1)\ dA = \int_0^1 \int_0^{2x} x(2y^3\ - 1)\ dydx$$

Primeiro, integramos em relação a Y:

$$\int_0^{2x} x(2y^3 - 1)\ dy = x\left[\frac{2y^4}{4} - y\right]_0^{2x} = x\left[\frac{y^4}{2} - y\right]_0^{2x}$$

Substituindo os limites de integração:

$$= x\left(\frac{(2x)^4}{2} - 2x - \left(\frac{0^4}{2} - 0\right)\right) = x\left(\frac{16x^4}{2} - 2x\right)$$

$$= x\left(8x^4 - 2x\right) = 8x^5 - 2x^2$$

Agora, integramos em relação a x:

$$\int_0^1 \left(8x^5 - 2x^2\right) dx = \left[\frac{8x^6}{6} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{8}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

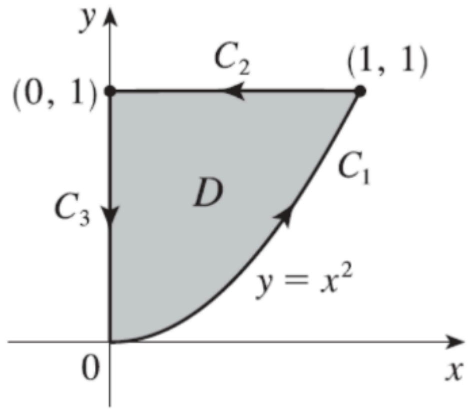
Portanto, a integral de linha é :

$$\oint C\ xy\ dx + x^2y^3\ dy = \frac{2}{3}$$

d)

$$\oint_C x^2y^2dx + xydy,$$

onde C consiste no arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) e os segmentos de reta de (1, 1) a (0, 1) de (0, 1) a (0, 0). Caso precise, utilize o gráfico abaixo:



A integral de linha dada é :

$$\oint C\, x^2y^2\, dx\ +\ xy\ dy$$

Identif icamos as f unç õ es P e Q como:

$P = x^2y^2$

$Q = xy$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2y^2\right)}{\partial y} = 2x^2y$$

Agora, substituí mos essas derivadas na f ó rmula do Teorema de Green:

$$\iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\ -\ \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\ =\ \iint_d \left(y\ -\ 2x^2y\right)\ dA\ =\ \iint_d y\left(1\ -\ 2x^2\right)\ dA$$

A regiã o D é delimitada pelo arco da pará bola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$

e os segmentos de reta de $(1,1)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.

Para integrar sobre essa regiã o, precisamos def inir os limites de integraç ã o.

A integral dupla se torna:

$$\iint_D y(1 - 2x^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} y\left(\ 1\ -\ 2x^2\right)\ dxdy$$

Primeiro, integramos em relação a X:

$$\int_0^{\sqrt{y}} y\left(1 - 2x^2\right) dx = y\left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{y}} = y\left(\sqrt{y} - \frac{2\left(\sqrt{y}\right)^3}{3}\right) = y\left(\sqrt{y} - \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$$

Substituindo $\sqrt{y}$ *e* $y^{\frac{3}{2}}$:

$$= y\left(y^{\frac{1}{2}} - \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right) = y^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2y}{3}\right)$$

Agora, integramos em relação a y:

$$\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2y}{3}\right) dy$$

Separando a integral em duas partes:

$$\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\, dy - \frac{2}{3}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}}\, dy$$

Calculando cada integral:

$$\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\, dy = \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}}\, dy = \frac{2}{3}\left[\frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

Agora, subtraímos as integrais:

$$\frac{2}{5} - \frac{4}{21} = \frac{42 - 20}{105} = \frac{22}{105}$$

Portanto, a integral de Linha é :

$$\oint C\, x^2y^2\, dx + xy\, dy = \frac{22}{105}$$

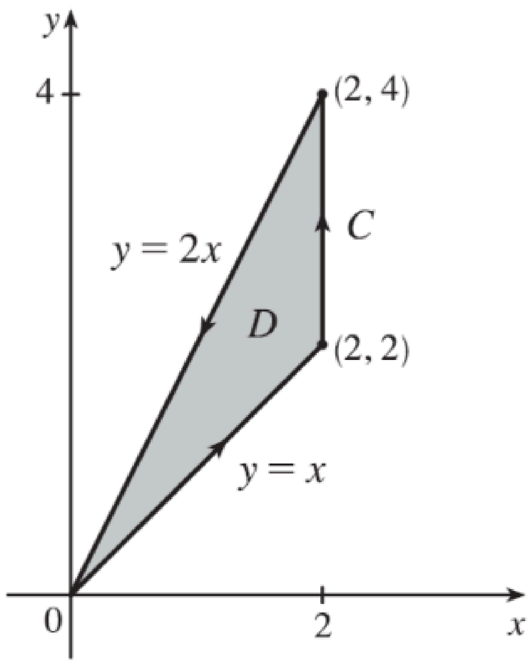
Questão 2

Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva:

a)

$$\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$$

onde C é o triângulo com vértices (0,0), (2, 2) e (2, 4). Caso precise, utilize o gráfico abaixo:



A integral de linha dada é :

$$\oint C\, xy^2\, dx \; + \; 2x^2y\, dy$$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$:

Identificamos as Funções P e Q como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(2x^2y\right)}{\partial x} = 4xy$$

$P = xy^2$

$Q = 2x^2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y} = 2xy$$

A região D é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(2,2)$, *e* $(2,4)$.

Para integrar sobre essa região, precisamos definir os limites de integração.

Para este triângulo, os limites são de $x = 0$ *a* $x = 2$.

Para cada x, y *varia de* x *a* $2x$.

A integral dupla se torna:

$$\iint D\, 2xy\; dA = \int_0^2 \int_x^{2x} 2xy\; dy\; dx$$

Primeiro, integramos em relação a y:

$$\int_{x}^{2x} 2xy\, dy = 2x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} = 2x\left(\frac{(2x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$2x\left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right) = 2x\left(\frac{4x^2 - x^2}{2}\right) = 2x\left(\frac{3x^2}{2}\right) = 3x^3$$

Agora, integramos em relação a x:

$$\int_{0}^{2} 3x^3\, dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2} = 3\left(\frac{2^4}{4} - 0\right) = 3\left(\frac{16}{4}\right) = 3 . 4 = 12$$

Portanto, a integral de linha é:

$$\oint Cxy^2\, dx + 2x^2 y\, dy = 12$$

b)

$$\int_C \cos y dx + x^2 \operatorname{sen} y dy$$

onde C é o retângulo com vértices (0, 0), (5, 0), (5, 2) e (0, 2).

A integral de linha dada é:

$$\oint C \cos y\, dx + x^2 \sin y\, dy$$

Identificamos as funções P e Q como:

$P = \cos y$

$Q = x^2\, sen\, y$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2\, sen\, y\right)}{\partial x} = 2x\, sen\, y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(\cos y)}{\partial y} = sen\, y$$

Agora, substituímos essas derivadas na fórmula do Teorema de Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D (2x\, sen\, y - (-sen\, y))\ dA =$$

$$= \iint_D (2x\, sen\, y + sen\, y)\ dA = \iint_D 3x\, sen\, y\, dA$$

A região D é o retângulo com vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,2)$ *e* $(0,2)$.

Para integrar sobre essa região, precisamos definir os limites de integração.

A integral dupla se torna:

$$\iint_D 3x\, sen\, y\, dA = \int_0^5 \int_0^2 3x\, sen\, y\, dy\, dx$$

Primeiro, integramos em relação a y:

$$\int_0^2 3x \, sen \, y \, dy = 3x\left[-\cos y\right]_0^2 = 3x(-\cos 2 + \cos 0) = 3x(-\cos 2 + 1)$$

Agora, integramos em relação a x:

$$\int_0^5 3x(1 - \cos 2)\, dx = 3(1 - \cos 2)\int_0^5 x \, dx = 3(1 - \cos 2)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 =$$

$$= 3(1 - \cos 2)\left(\frac{5^2}{2} - 0\right) = \frac{75}{2}(1 - \cos 2)$$

Portanto, a Integral de linha é:

$$\oint C \cos y \, dx + x^2 \sin y \, dy = \frac{75}{2}(1 - \cos 2)$$

c)

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$$

onde C é o limite da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

A integral de linha dada é:

$$\oint C\,(y + e^{\sqrt{y}})\, dx + (2x + \cos^2 y)\, dy$$

Identificamos as funções P e Q como:

$P = y + e^{\sqrt{y}}$

$Q = 2x + \cos^2 y$

Precisamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial P}{\partial y}$*:*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(2x + \cos^2 y\right)}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(y + e^{\sqrt{y}}\right)}{\partial y} = 1 + \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

Agora, substituímos essas derivadas na fórmula do Teorema de Green:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_D\left(2 - \left(1 + \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right)\right)dA = \iint_D\left(1 - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right)dA$$

$A\ região\ D\ é\ delimitada\ pelas\ parábolas\ y = x^2\ e\ x = y^2.$

$Para\ integrar\ sobre\ essa\ região,\ precisamos\ definir\ os\ limites\ de\ integração.$

$Primeiro,\ encontramos\ os\ pontos\ de\ interseção\ das\ parábolas:$

$y = x^2$

$x = y^2$

$Igualando\ as\ duas\ equações,\ temos:$

$y = (y^2)^{2 = y^4}$

$y - y^4 = 0$

$y\left(1 - y^3\right) = 0$

$As\ soluções\ são:$

$y = 0\ ou\ y = 1$

$Portanto,\ os\ limites\ de\ integração\ são\ de\ y = 0\ a\ y = 1\ para\ y,\ e\ de\ x = y^2$

$a\ x = \sqrt{y}\ para\ x$

$A\ integral\ dupla\ se\ torna:$

$$\iint_D \left(1 - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right) dA = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(1 - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right) dx\, dy$$

$Primeiro,\ integramos\ em\ relação\ a\ x:$

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(1 - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right) dx = \left(x - x\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right)_{y^2}^{\sqrt{y}}$$

$Substituindo\ os\ limites\ de\ integração:$

$$\left(\sqrt{y} - \sqrt{y}\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right) - \left(y^2 - y^2\frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\right) = \left(\sqrt{y}\ \frac{e^{\sqrt{y}}}{2}\right) - \left(y^2 - y\frac{e^{\sqrt{y}}}{2}\right)$$

$Simplificando:$

$$= \sqrt{y} - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2} - y^2 + y^2\frac{e\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y} - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2} - y^2 + \frac{e^{\sqrt{y}}y^2}{2}$$

$Agora,\ integramos\ em\ relação\ a\ y:$

$$\int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{e^{\sqrt{y}}}{2} - y^2 + \frac{e^{\sqrt{y}}y^2}{2}\right) dy$$

$Vamos\ calcular\ cada\ uma\ dessas\ integrais\ separadamente:$

$$\int_0^1 \sqrt{y}\ dy = [\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{e\sqrt{y}}{2}\,dy \approx \left[\frac{e\sqrt{y}\ .\ 2\sqrt{y}}{4}\right]_0^1 = \frac{e}{4}$$

$$\int_0^1 -y^2\,dy \approx \left[-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{e\sqrt{y}y^2}{2}\,dy \approx \left[\frac{e\sqrt{y}y^2\ .\ 2\sqrt{y}}{4}\right]_0^1 = \frac{e}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{e}{8}$$

Assim, a resposta aproximada é:

$$\frac{1}{3} + \frac{e}{8} - \frac{e}{4} = \frac{1}{3} - \frac{2e}{8} + \frac{e}{8} = \frac{1}{3} - \frac{e}{8}$$

Portanto, a resposta final é:

$$\frac{1}{3} - \frac{e}{8}$$