NOME: Felipe Barroso de Castro
RA: 2311292
CURSO: Engenharia de Software

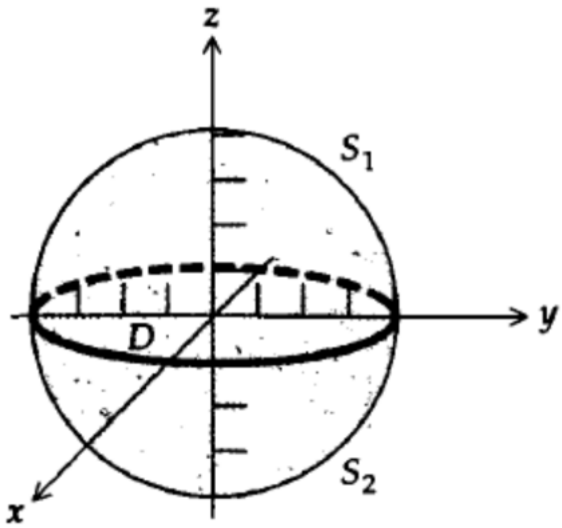
Questão 1

O Campo de velocidades de um fluido é dado por

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) = 8z\,\hat{k}$$

e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Ache, pelo teorema da divergência de Gauss, o fluxo de F através de S, se o comprimento for medido em centímetros e o tempo for medido em horas (unidade: cm^3/h).

Use como base a figura abaixo:



e o teorema de Green na versão vetorial $\int_C F \cdot \vec{n}\ ds = \iint_D \nabla \cdot F(x,\ y)\ dA.$

Teorema de Gauss: $\iint_S F\ .\ n\ dS = \iint\int_V (\nabla \cdot F)\ dV$

O Campo vetorial é: $F(x, y, z) = 8zk$

A divergência de F é:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial(8z)}{\partial z} = 8$$

A superfície S é a esfera de raio 5 ($x^2 + y^2 + z^2 = 25$). O volume V é a esfera completa.
Usamos coordenadas esféricas para calcular a integral de volume:

$x = \rho \sin\theta \cos\phi$

$y = \rho \sin\theta \sin\phi$

$z = \rho \cos\theta$

$dV = p^2\ sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi$

Aplicada a figura:

$p \ de \ 0 \ a \ 5$

$\theta \ de \ 0 \ a \ \pi$

ϕ de 0 a 2π

A integral de volume é:

$$\iint\int_{v} (\nabla \cdot f)\, dV = \iint\int_{v} 8\, dV$$

Substituindo dV:

$$8\iint\int_{V} p^2 \, sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi$$

Dividimos a integral em três partes:

$$8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5}{}_{V}\ p^2 \, sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi$$

Calculamos cada parte separadamente:

Integral em relação a ρ:

$$\int_0^5 p^2\, dp = \left[\frac{p^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3} - 0 = \frac{125}{3}$$

Integral em relação a θ:

$$\int_0^{\pi} sen\ \theta\ d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$

Integral em relação a ϕ:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Multiplicando os resultados obtemos:

$$8 \ .\ \frac{125}{3}\ .\ 2\ .\ 2\pi = \frac{2000}{3}\ .\ 2\pi = \frac{4000\pi}{3}$$

Portanto, a resposta final é:

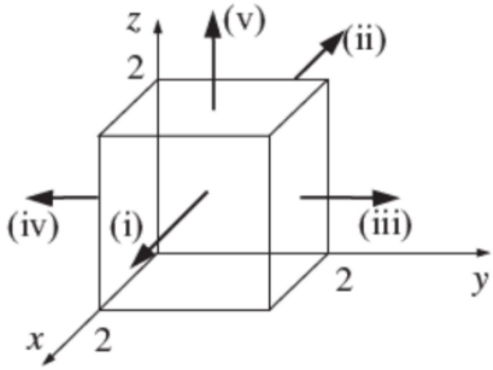
<u>4000π/3 cm³/h</u>

Questão 2

Calcule a integral de superfície de

$$\vec{V} = 2xz\hat{\imath} + (x + 2)\hat{\jmath} + y(z^2 - 3)\hat{k}$$

sobre cinco lados (excluindo o fundo) da caixa cúbica (de lado igual a 2) da figura abaixo. Considere que 'para cima e para fora' é a direção positiva, como indicam as setas. Esse cálculo dará o fluxo total.



Precisaremos realizar 5 cálculos de integrais diferentes, um para cada face, logo precisaremos separar em F1, F2, F3, F4, F5.

F1: X = 0

A normal a esta face é n = -i.

$$V\ .\ n = \left(2xzi + (x + 2)j + y\left(z^2 - 3\right)k\ .\ (-i)\right) = -2xz$$

$$= -2(0)z = 0$$

$$Logo,\ a\ integral\ sobre\ essa\ face\ é\ zero$$

F2: Y = 2

A normal a esta face é n = j.

$$V\ .\ n = \left(2xzi + (x + 2)j + y\left(z^2 - 3\right)k\right).\ j = x + 2$$

Os limites de integração para X e Z são de 0 *a* 2.

$$\int_0^2\int_0^2 (x + 2)\ dx\,dz = \int_0^2 \left[x + 2\right]_0^2 dz = \int_0^2 \left(\frac{4}{2} + 4\right) dz$$

$$= \int_0^2 (2 + 4)\ dz = \int_0^2 6\,dz = \left[6z\right]_0^2 = 12$$

F3: x = 2

A normal a esta face é n = i.

$V \, . \, n = \left(2xzi + (x + 2)j + y\left(z^2 - 3\right)k \right) \, . \, i = 2xz$

$= -2(2)z = 4z$

Os limites de integração para y e z são de 0 *a* 2.

$$\int_0^2 \int_0^2 4z \, dy \, dz = \int_0^2 4z \left(\int_0^2 dy \right) dz = \int_0^2 4z \, . \, 2 \, dz = 8 \int_0^2 z \, dz = 8 \, . \, 2 = 16$$

F4: y = 0

A normal a esta face é n = -j.

$V \, . \, n = \left(2xzi + (x + 2)j + y\left(z^2 - 3\right)k \right) \, . \, (-j) = -(x + 2)$

Os limites de integração para x e z são de 0 *a* 2.

$$\int_0^2 \int_0^2 -(x + 2) \, dx \, dz = -\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 dz = -\int_0^2 \left(\frac{4}{2} + 4 \right) dz$$

$$= -\int_0^2 (2 + 4) \, dz = -\int_0^2 6 \, dz = \left[-6z \right]_0^2 = -6 \, . \, 2 = -12$$

F5: z = 2

A normal a esta face é n = k.

$V \, . \, n = \left(2xzi + (x + 2)j + y\left(z^2 - 3\right)k \right) \, . \, k = y\left(z^2 - 3\right) = y(4 - 3) = y$

Os limites de integração para x e y são de 0 *a* 2.

$$\int_0^2 \int_0^2 y \, dx \, dy = \int_0^2 \left[\int_0^2 y \, dx \right] dy = \int_0^2 y \left[\int_0^2 dx \right] dy = \int_0^2 y \, . \, 2 \, dy =$$

$$= 2 \int_0^2 y \, dy = 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2 \, . \, 2 = 4$$

Soma dos Resultados

Agora somamos os resultados das integrais sobre as cinco faces: 0 + 12 + 16 − 12 + 4 = 20

Portanto, o fluxo total de V através das cinco faces é: 20

Questão 3

Use o Teorema de Stokes para calcular:

$$\iint_S \nabla \cdot \vec{F}\ .\ d\vec{S},\ onde\ \vec{F}(x,\ y,\ z)\ = ze^{y}\hat{i}\ +\ x\cos y\hat{j}\ +\ xz\ sen\ y\hat{k}$$

S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \geq 0$, orientado na direção positiva do eixo y.

Teorema de Stokes

$$\oint F\ .\ dr = \iint (\nabla \times F)\ .\ nds$$

Primeiramente, iremos calcular o rotacional:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ze^{y} & x\cos y & xz\ sen\ y \end{vmatrix}$$

Determinante V x F:

$$i\left(\frac{\partial(xz\ sen\ y)}{\partial y} - \frac{\partial(x\cos y)}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial(xz\ sen\ y)}{\partial x} - \frac{\partial(ze^{y})}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial(x\cos y)}{\partial x} - \frac{\partial ze^{y}}{\partial y}\right)$$

Calculando cada parte temos:

$$\frac{\partial(xz\ sen\ y)}{\partial y} = xz\cos y\ ,\ \frac{\partial(x\cos y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(xz\ sen\ y)}{\partial x} = z\ sen\ y\ ,\ \frac{\partial(ze^{y})}{\partial z} = e^{y}$$

$$\frac{\partial(x\cos y)}{\partial x} = \cos y\ ,\ \frac{\partial(ze^{y})}{\partial y} = ze^{y}$$

Portanto temos:

$$\nabla \times F = \hat{i}(xz\cos y\ -\ 0)\ -\ \hat{j}(z\ sen\ y\ -\ e^{y})\ +\ \hat{k}(\cos y\ -\ ze^{y})$$

$$\nabla \times F = xz\cos y\ \hat{i}\ -\ (z\ sen\ y\ -\ e^{y})\ \hat{j}\ +\ (\cos y\ -\ ze^{y})\ \hat{k}$$

Agora iremos determinar a curva C: $\mathbf{x^2 + z^2 = 16,\ y = 0}$

Utilizando o teorema de Stokes, vamos parametrizar a curva:

X = 4 cos t Y = 0 Z = 4 sen t $0 \leq t \leq 2\pi$

$$dr = \frac{dr}{dt}dt\ =\ (-4\ sen\ t\ \hat{i}\ +\ 4\cos t\ \hat{k})\ dt$$

Substituindo na integral de linha temos:

$$F(x,\ 0,\ z) = z\hat{i} + x\hat{j} + 0\hat{k} = z\hat{i} + x\hat{j}$$

Portanto:

$$F\ .\ dr = (z\hat{i} + x\hat{j})\ .\ (-4\ sen\ t\hat{i} + 4\cos t\hat{k})\ dt = -4z\ sen\ t\ dt$$

Substituindo $z = 4\ sen\ t$ *temos*:

$$\oint_C F\ .\ dr = \int_0^{2\pi} -4(4\ sen\ t)\ sen\ t\ dt = -16\int_0^{2\pi} sen^2\ t\ dt$$

Integrando:

$$-8\left[t - \frac{sen\ 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = -8[2\pi - 0] = -16\pi$$

R: Pelo teorema de Stokes: $\iint_S (\nabla \cdot F)\ .\ ds = -16\pi$

Questão 4

Use o Teorema de Stokes para calcular:

$$\int_C \nabla \cdot \vec{F}\ .\ d\vec{r},\ onde\ \vec{F}(x,\ y,\ z) = yz\hat{i} + 2xz\hat{j} + e^{xy}\hat{k}$$

C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$. C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

Teorema de Stokes

$$\oint F\ .\ dr = \iint (\nabla \times F)\ .\ nds$$

Primeiramente, iremos calcular o rotacional:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix}$$

Determinante V x F:

$$i\left(\frac{\partial e^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial(2xz)}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial e^{xy}}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z}\right) + K\left(\frac{\partial(2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y}\right)$$

Calculando cada parte temos:

$$\frac{\partial e^{xy}}{\partial y} = xe^{xy}, \ \frac{\partial(2xz)}{\partial z} = 2x$$

$$\frac{\partial e^{xy}}{\partial x} = ye^{xy}, \ \frac{\partial(yz)}{\partial z} = y$$

$$\frac{\partial(2xz)}{\partial x} = 2z, \ \frac{\partial(yz)}{\partial y} = z$$

Portanto temos:

$$\nabla \times F = i(xe^{xy} - 2x) - j(ye^{xy} - y) + k(2z - z)$$

$$\nabla \times F = ix(e^{xy} - 2) - jy(e^{xy} - 1) + Kz$$

Agora iremos escolher a superfície S.

- Superfície S de Disco: $16 \geq x^2 + y^2$, $z = 5$
- Vetor normal é n = k

$$\nabla \times F = x(e^{xy} - 2);\ -y(e^{xy} - 1);\ +zK$$

$$(\nabla \times F) \ . n = Z$$

$$obs: z = 5$$

$$(\nabla \times F) \ . n = 5$$

$$Logo, \ a \ integral \ da \ superf icie \ f ica \ assim:$$

$$\iint_S 5 \, dS$$

$$\acute{A}rea \ do \ Circulo = x^2 + y^2 \leq 16 \ \acute{e} \ \pi r^2 \text{ com } r = 4$$

$$\text{A} = \pi \ . \ 4^2 = 16\pi$$

Portanto,

$$5 \ . \ 16\pi = 80\pi$$

$$\oint_C \text{F . dr} = 80\pi$$

? Questão 5

Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos (1, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 1), e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) = z^2\hat{i} + 2xy\hat{j} + 4y^2\hat{k}$$

Encontre o trabalho realizado.

DICA: Use o teorema de Stokes: $\oint_C \vec{F} \ . \ \vec{r} = \iint_S \nabla \cdot \vec{F} \ . \ d\vec{S}$

Questão 6

Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície:

$$\iint_S \vec{F} \ . \ d\vec{S}$$

ou seja, calcule o fluxo de F através de S:

A) S é a superfície da caixa delimitada pelos planos coordenados e pelos planos
x = 3, y = 2, z = 1.

$$\vec{F}(x,\ y,\ z) \ = xye^2\hat{i} + xy^2z^3\hat{j} - ye^z\hat{k}$$

$$\vec{F}\ (x,\ y,\ z) \ = xye^2\hat{i} + xy^2z^3\hat{j} - ye^z\hat{k}$$

$$\frac{\partial(xye^2\hat{i})}{\partial x} = ye^2$$

$$\frac{\partial(xy^2z^3\hat{j})}{\partial y} = 2xyz^3$$

$$\frac{\partial(ye^z\hat{k})}{\partial z} = -ye^z$$

$$ye^2 + 2xyz^3 - ye^z$$

$$\iiint_V \left(ye^2 + 2xyz^3 - ye^z\right) dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 ye^2 + 2xyz^3 - ye^z \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_0^3 ye^2 + 2xyz^3 - ye^z \, dx = \left[xye^2 + 2yz^3 \ . \ \frac{x^2}{2} - xye^z\right]_0^3$$

$$3ye^2 + 9yz^3 - 3ye^z\, dx$$

$$\int_0^2 3ye^2 + 9yz^3 - 3ye^z\, dy = \left[3\frac{y^3}{3}e^2 + 9\,\frac{y^2}{2}z^3 - 3\frac{y^2}{2}e^z\right]_0^2 =$$

$$= 8e^2 + 9z^3 - 3e^z = 8e^2 + 18z^3 - 6e^z$$

$$\int_0^1 8e^2 + 18z^3 - 6e^z\, dz$$

$$8e^2\left[18\frac{z^4}{4} - 6e^z\right]_0^1 = 8e^2\left[\frac{18}{4} - \left(6e^1 - 6e^0\right)\right]$$

$$8e^2\left[\frac{9}{2} - (6e - 6)\right] = \frac{72e^2}{2} - 48e^3 + 48e^2 = 36e^2 - 48e^3 + 48e^2$$

$$84e^2 - 48e^3$$

B) S é a superfície da caixa delimitada pelos planos x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c, onde a, b e c são números positivos.

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2yz\hat{i} + xy^2z\hat{j} + xyz^2\hat{k}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2yz\hat{i} + xy^2z\hat{j} + xyz^2\hat{k}$$

$$\frac{\partial\left(x^2yz\hat{i}\right)}{\partial x} = 2xyz$$

$$\frac{\partial\left(xy^2z\hat{j}\right)}{\partial y} = 2xyz$$

$$\frac{\partial\left(xyz^2\hat{k}\right)}{\partial z} = 2xyz$$

$$2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$$

$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a 6xyz\, dxdydz$$

$$\int_0^a 6xyz\, dx = 6yz\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 3yza^2$$

$$\int_0^b 3yza^2\, dy = 3a^2z\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{3a^2b^2z}{2}$$

$$\int_0^c \frac{3a^2b^2z}{2}\, dz = \frac{3a^2b^2}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^c = \frac{3a^2b^2c^2}{4}$$

Questão 7

Use o Teorema do Divergente para avaliar (dar o valor)

$$\iint_S \left(2x + 2y + z^2 \right) \, dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Para utilizar o Teorema do Divergente para avaliar a integral apresentada, precisaremos reformular a integral de superfície por uma de volume.

O Teorema do Divergente é dado por:

$$\iint_S F \, . \, n \, dS = \iint \int_S (\nabla \cdot F) \, dV$$

$$onde \; F = \left(2x, \; 2y, \; z^2 \right)$$

Calculamos a divergência do campo vetorial F:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 \right) = 2 + 2 + 2z =$$

$$= 4 + 2z$$

Agora, precisamos integrar esse resultado sobre o volume S (esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).
A Integral do volume é:

$$\iint \int_V (4 + 2z) \; dV$$

Vamos utilizar coordenadas esféricas para facilitar a integração.

$$x = p \; sen \; \theta \cos \phi$$

$$y = p \; sen \; \theta \; sen \; \phi$$

$$z = p \cos \theta$$

$$dV = p^2 \; sen \; \theta \; dp \; d\theta \; d\phi$$

Logo, os limites da integração são: $0 \leq p \leq 1, \; 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

Assim, podemos reescrever a integral:

$$\iint \int_V (4 + 2p \cos \theta) \, p^2 \; sen \; \theta \; dp \; d\theta \; d\phi$$

E então, dividimos a integral em duas integrais diferentes:

$$\iint \int_V 4p^2 \; sen \; \theta \; dp \; d\theta \; d\phi + \iint \int_V 2p^3 \cos \theta \; sen \; \theta \; dp \; d\theta \; d\phi$$

Agora iremos resolver cada parte separadamente:

Integral de $4p^2$ *sen* θ:

$$4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} p^2\, sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi$$

Integrando em p:

$$4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{p^3}{3}\right]_0^1 sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\ \theta\ d\theta\ d\phi$$

Intengrando em θ:

$$\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\phi = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}(-(-1)-(-1))\, d\phi = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} 2d\phi =$$

$$\frac{8}{3}\ .\ 2\pi = \frac{16\pi}{3}w$$

Integral de $2p^3 \cos\theta$ *sen* θ:

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} p^3 \cos\theta\ sen\ \theta\ dp\ d\theta\ d\phi$$

Integrando em p:

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{p^4}{4}\right]_0^1 \cos\theta\ sen\ \theta\ d\theta\ d\phi$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\cos\theta\ sen\ \theta\ d\theta\ d\phi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\ sen\ \theta\ d\theta\ d\phi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen(2\theta)\ d\theta\ d\phi$$

Integrando em θ:

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} d\phi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos(2\pi)}{2} + -\frac{\cos(0)}{2}\right) d\phi$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) d\phi$$

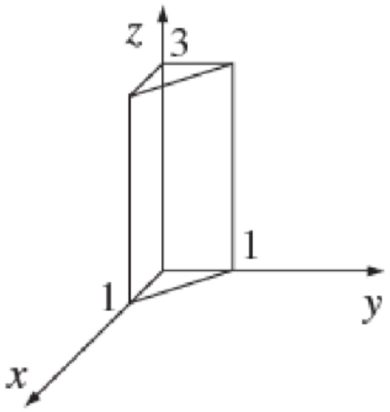
$$= 0$$

Portanto, a Integral total é:

$$\frac{16\pi}{3} + 0 = \frac{16\pi}{3}$$

Questão 8

Calcule a integral de volume de $T = xyz^2$ para o prisma na figura abaixo:



dica: Use integrais triplas.

Para calcularmos a integral de volume de T = xyz² do prisma da figura, precisaremos especificar os limites, então iremos definir os limites da integração que iremos realizar em seguida:

De forma geral temos:
- X varia de A até B
- Y varia de C até D
- Z varia de E até F

De forma aplicada a figura temos:
- X varia de 0 a 1
- Y varia de 0 a 1
- Z varia de 0 a 3

Como dito na questão pela sua dica, iremos utilizar integrais triplas para a resolução da mesma. logo a integral do volume do prisma T vai ser escrito da seguinte forma:

$$\iint\int_V T\,dv = \iint\int_V xyz^2\,dz\,dy\,dx$$

Resolvendo a integral em relação a Z:

$$\int_0^3 xyz^2\,dz = xy\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^3 = xy\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = xy\ .\ \frac{27}{3} = 9xy$$

Agora, continuando a resolução desta integral em relação a Y:

$$\int_0^{1-x} 9xy\,dy = 9x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = 9x\ .\ \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{9x.\left(1 - 2x + x^2\right)}{2}$$

Finalmente, a resolução da integral em relação a X:

$$\int_0^1 \frac{9}{2}\left(x - 2x^2 + x^3\right) dx = \frac{9}{2}\left(\int_0^1 xdx - 2\int_0^1 x^2dx + \int_0^1 x^3\, dx\right)$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2} \,.\, 2\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{6 - 8 + 3}{12}\right) = \frac{9}{2} \,.\, \frac{1}{12} = \frac{9}{24}$$

Portanto. o valor da integral tripla do prisma é: **⅜ w**

Questão Extra

As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico E e o campo magnético H , quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

onde c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

A) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

B) $$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

C) $$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D) $$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Dicas:

- tome H = <h1, h2, h3> e E = <E1, E2, E3>;
- Use o terceiro teorema de Fubini;
- Use a identidade $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações que descrevem como os campos elétrico (**E**) e magnético (**H**) se comportam no espaço e no tempo. Estas equações são fundamentais para entender o eletromagnetismo.

1. Divergência do campo elétrico:

$$\nabla \cdot E = 0$$

Isso significa que não há fontes ou sumidouros de campo elétrico na região considerada.

2. Divergência do campo magnético:

$$\nabla \cdot H = 0$$

Isso significa que não há monopolos magnéticos; o campo magnético forma sempre linhas fechadas.

3. Rotacional do campo elétrico:

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

Isso mostra como o campo elétrico muda no tempo gera um campo magnético.

4. Rotacional do campo magnético:

$$\nabla \times H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Isso mostra como o campo magnético muda no tempo gera um campo elétrico.

Identidade Vetorial

A identidade vetorial que utilizaremos é:

$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$

Para qualquer campo vetorial F.

(A). Queremos demonstrar:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Podemos simplificar com a equação de divergência:

Como $\nabla \cdot E = 0$:

$\nabla(\nabla \cdot E) = 0$

Então:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

$Simplif\ icando\ com\ cons\mathrm{tan}tes\ temos$:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

Usando a quarta equação de Maxwell:

$$\nabla \times H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Tomando a derivada parcial no tempo:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

Simplificando:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

Conclusão:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

(B). Queremos demonstrar:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Identidade Vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H$$

Simplificando com a equação de divergência:

Como $\nabla \cdot H = 0$:

$$\nabla(\nabla \cdot H) = 0$$

Então: $\nabla(\nabla \cdot H) = -\nabla^2 H$

Substituindo o rotacional do campo magnético

Usamos a quarta equação de Maxwell:

$$\nabla \times H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Tomando o rotacional novamente:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

*Simplificando as cons*tantes:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \frac{1}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

Usando a terceira equação de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

Tomando a derivada parcial no tempo:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

Simplificando:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right) = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Conclusão:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

(C & D). As partes (C) e (D) podem ser deduzidas diretamente das identidades vetoriais e dos resultados das partes (A) e (B).

(C) $$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(D) $$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Dessa forma, comprovamos que tanto o campo elétrico quanto o campo magnético em uma região livre de cargas e correntes se comportam como ondas, obedecendo a equações de onda que relacionam a variação espacial e temporal dos campos.