Exercícios 4 - Derivadas parciais

Questão 1

A temperatura T (em ºC) de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x,\ y,\ t)$. Medindo o tempo em horas a partir do início de janeiro:

a) Qual o significado das derivadas parciais abaixo?

$$\frac{\partial T}{\partial x},\quad \frac{\partial T}{\partial y},\quad \frac{\partial T}{\partial t}$$

A) As derivadas parciais fornecem informações sobre como a temperatura T muda em relação a cada uma das variáveis independentes (longitude x, latitude y e tempo t), enquanto as outras variáveis são mantidas constantes.

$\partial T/\partial x$: Esta é a derivada parcial da temperatura em relação à longitude. Indica como a temperatura muda com pequenas mudanças na longitude, mantendo a latitude e o tempo constantes. Valores positivos indicam que a temperatura aumenta com o aumento da longitude, e valores negativos indicam que a temperatura diminui com o aumento da longitude.

$\partial T/\partial y$: Esta é a derivada parcial da temperatura em relação à latitude. Indica como a temperatura muda com pequenas mudanças na latitude, mantendo a longitude e o tempo constantes. Valores positivos indicam que a temperatura aumenta com o aumento da latitude, e valores negativos indicam que a temperatura diminui com o aumento da latitude.

b) Honolulu tem longitude de 158º W e latitude de 21º N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a Oeste e a Sul o ar esteja quente e a Norte e Leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158,\ 21,\ 9)$, $f_y(158,\ 21,\ 9)$ e $f_t(158,\ 21,\ 9)$ fossem positivos ou negativos? Explique.

B) Para Honolulu, que está localizada a 158° de longitude oeste e 21° de latitude norte, considerando as condições climáticas descritas, podemos deduzir a tendência das derivadas parciais da seguinte forma:

fx(158, 21, 9): Derivada parcial em relação à longitude. Como os ventos quentes vêm do oeste, ou seja, do lado positivo da longitude, espera-se que as temperaturas aumentem com o aumento da longitude. Portanto, fx(158,21,9) é positivo.

fy(158, 21, 9): Derivada parcial em relação à latitude. Como os ventos quentes vêm do sul, o lado da latitude negativa, espera-se que as temperaturas diminuam com o aumento da latitude. Portanto, fy(158,21,9) é negativo.

No entanto, não podemos determinar o sinal de ft(158, 21, 9) sem informações adicionais sobre as condições meteorológicas ao longo do tempo.

Questão 2

A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função h = f(v, t) são apresentados na seguinte tabela:

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) — $v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

a) Qual o significado das derivadas parciais?

$$\frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial t}$$

A) A expressão ∂h/∂v denota a taxa de variação de h em relação a v, mantendo t como constante, explicando como a altura das ondas se altera em resposta às mudanças na velocidade durante um intervalo de tempo específico.

A expressão ∂h/∂t indica a taxa de variação de h em relação a t, com v mantido constante, ilustrando como a altura das ondas varia conforme a duração do tempo muda, mantendo a velocidade do vento constante.

b) Estime os valores de $f_v(80,\ 15)$ e $f_t(80,\ 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

$$f_v(80,\ 15) = \lim_{h \to 0} \frac{(80 + h,\ 15) - f(80,\ 15)}{h}$$

B)

Considerando h = 20 e h = -20.

Se h → 20 ≅ 0,165

Se h → -20 ≅ 0,14

A média desses valores é de 0,152. Ou seja, quando o vento é de 80km/h e perdura por 15h, as ondas irão aumentar de altura em 0,152m a cada km/h.

Da mesma forma podemos fazer isso com f_t.

$$f_t(80,\ 15) = \lim_{h \to 0} \frac{f(80,\ 15 + h) - f(80,\ 15)}{h}$$

Considerando h = 5 e h = -5.

Se h → 5 ≅ 0,18

Se h → -5 ≅ 0,26

A média desses valores, aproximadamente 0,22, é representada por ft(80, 15). Assim, quando o vento sopra a 80 km/h por 15 horas, espera-se que a altura das ondas aumente em cerca de 0,22 metros por hora adicional em que a mesma velocidade persiste.

c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

C) Para um dado valor fixo de v, os valores de f(v, t) aumentam progressivamente mais lentamente à medida que t cresce, aproximando-se eventualmente de uma constante. Consequentemente, a taxa de variação correspondente se aproxima de zero conforme t aumenta, sugerindo o limite quando t tende ao infinito de ∂h / ∂t = 0.

-

Questão 3

O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. Considerando a tabela abaixo

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

a) Estime os valores de $f_T(-15,\ 30)$ e $f_v(-15,\ 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

$$\frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial t}$$

A) -26 e . As interpretações seriam: se a temperatura real for -15 e a velocidade dos ventos for 30, a sensação termica será de -26 graus

b) Estime os valores de $f_v(80,\ 15)$ e $f_t(80,\ 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

B) B

c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

C) O valor do limite aparenta ser infinito.

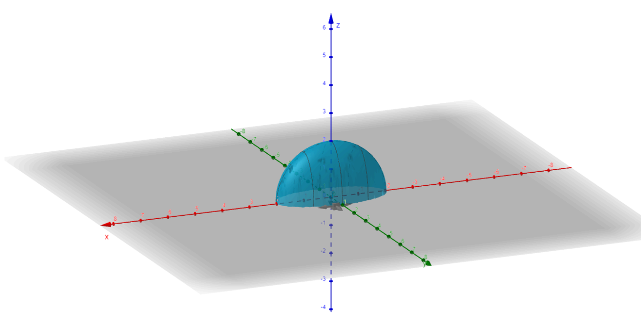
Questão 4

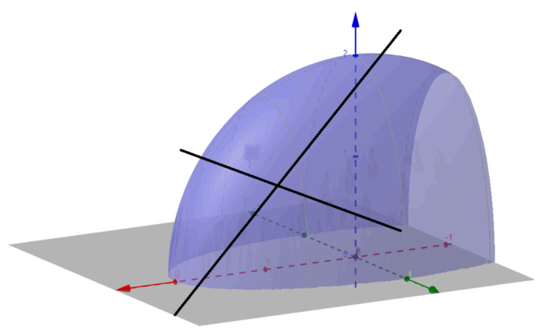
Se $f(x,\ y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1,\ 0)$ e $f_y(1,\ 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre os gráficos da função com suas derivadas

$fx(x, y) = -x(4 - x^2 - 4y^2)$^$-½ = -x \sqrt{(1 / 4 - x^2 - 4y^2)}$

$fx(1, 0) = -1(4 - 1^2 - 0)$^$-½ =$ **$- 1 / \sqrt{3}$**

Resposta: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

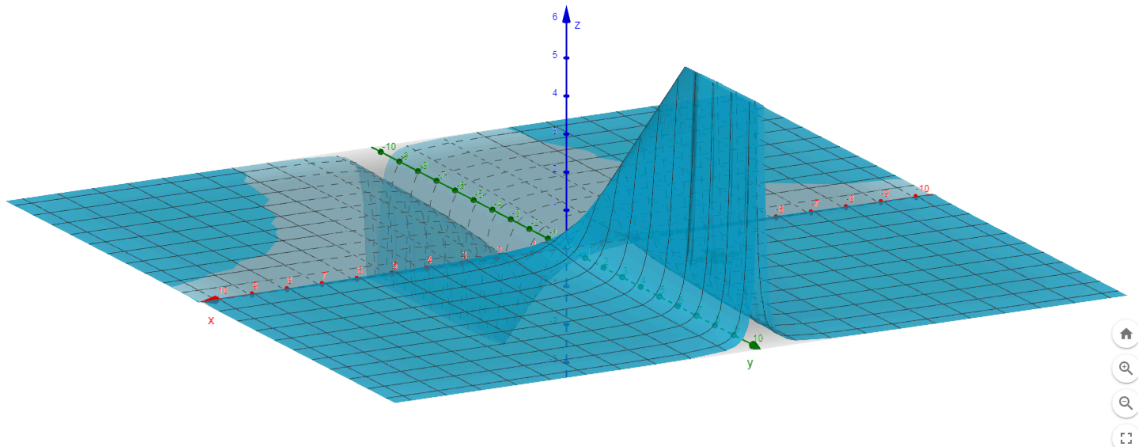




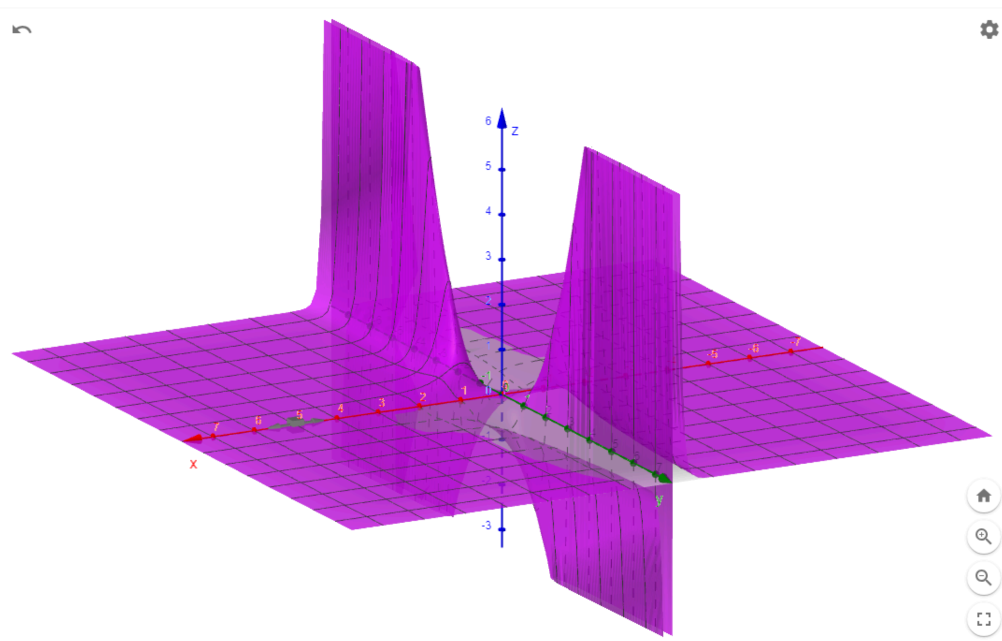
Questão 5

Determine f_x e f_y e faça o gráfico de f, f_x e f_y com domínios e ponto de vista que lhe permitam ver a relação entre eles da função:

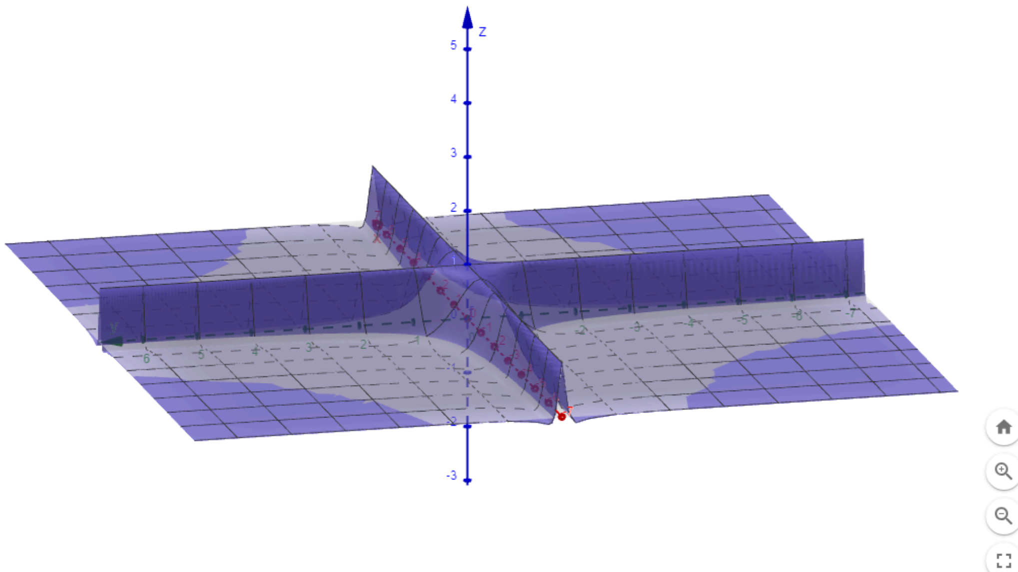
$$f(x,\ y) = \frac{y}{1 + x^2y^2}$$

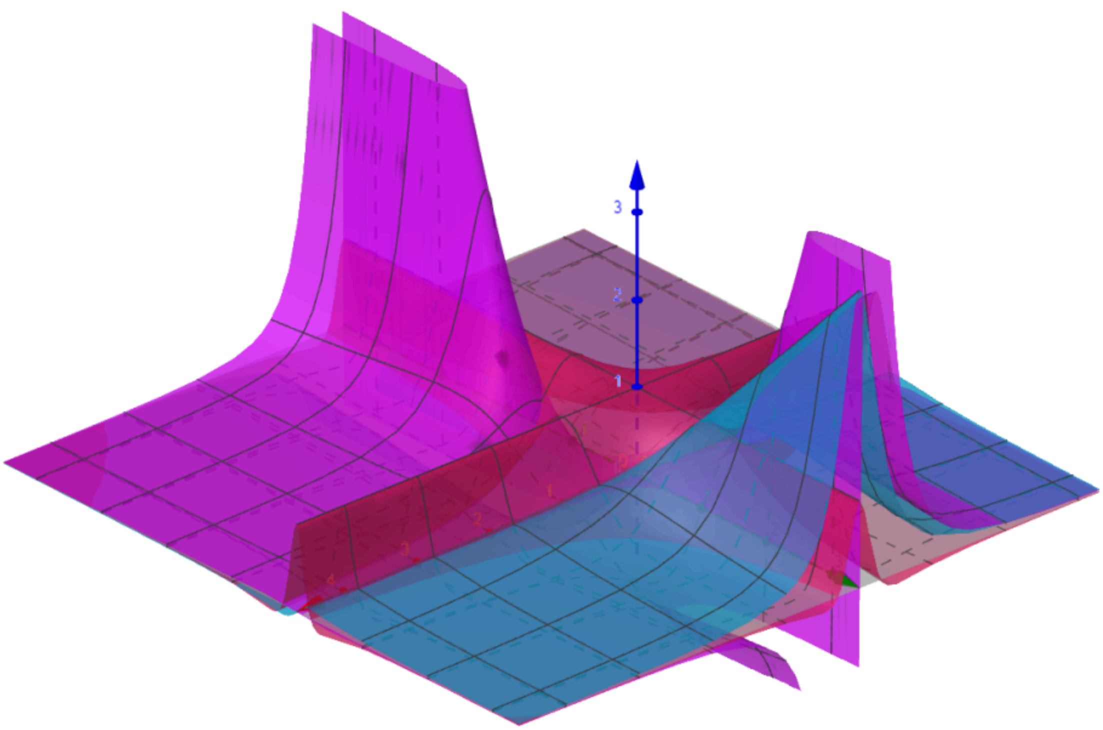


$$f_x = \frac{(1+x^2y^2)(0) - y(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^3} = -\frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}$$



$$f_y = \frac{(1+x^2y^2)(1) - y(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$


z
5
4
3
2
-3


3
2
1

Questão 6

Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função:

a)
$$f(x,\ y) = y^5 - 3xy$$

b)
$$f(x,\ y) = e^{-t} \cos \pi x$$

c)
$$f(x,\ t) = \sqrt{x}\ \ln t$$

d)
$$z = \operatorname{tg} xy$$

e)
$$f(x,\ y) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{t})$$

A) fx(x, y) = 0 - 3y = -3y
fy(x, y) = $5y^4$ - 3x
B) fx(x, y) = e^(-t) . (-senπx)(π) = -πe^(-t) senπx
fy(x, y) = 0

C)

D) ∂z / ∂x = (sec^2 xy)(y) = ysec²xy
∂z / ∂y = (sec^2xy)(x) = xsec²xy
E)

Questão 7

Determine as derivadas parciais indicadas:

a)
$$f(x,\ y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right); \quad f_x(3,\ 4)$$

b)
$$f(x,\ y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right); \quad f_x(2,\ 3)$$

c)
$$f(x,\ y,\ z) = \frac{y}{x + y + z}; \quad f_y(2,\ 1,\ -1)$$

d)
$$f(x,\ y,\ z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}; \quad f_z\left(0,\ 0,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

e)
$$f(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}}; \quad f_t\left(0,\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ 0\right)$$

Questão 8

Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem (*Dica: as derivadas parciais de segunda ordem tem os elementos cruzados de f_{xy} e f_{yx}*):

a)
$$f(x,\ y) = x^3 y^5 + 2x^4 y$$

b)
$$v = e^{xe^y}$$

Questão 7

Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s):

a)

$$f(x,\ y) = x^4y^2 - x^3y; \quad f_{xxx},\ f_{xyx}$$

b)

$$h(x,\ y) = \operatorname{sen}(2x + 5y); \quad h_{yxy}$$

c)

$$f(x,\ y, z) = e^{xyz^2}; \quad f_x yz$$

d)

$$g(r,\ s,\ t) = e^r \operatorname{sen}(st); \quad g_{rst}$$

e)

$$u = e^{r\theta} \operatorname{sen}\theta; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial \theta}$$

f)

$$z = u\sqrt{v - w}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$$