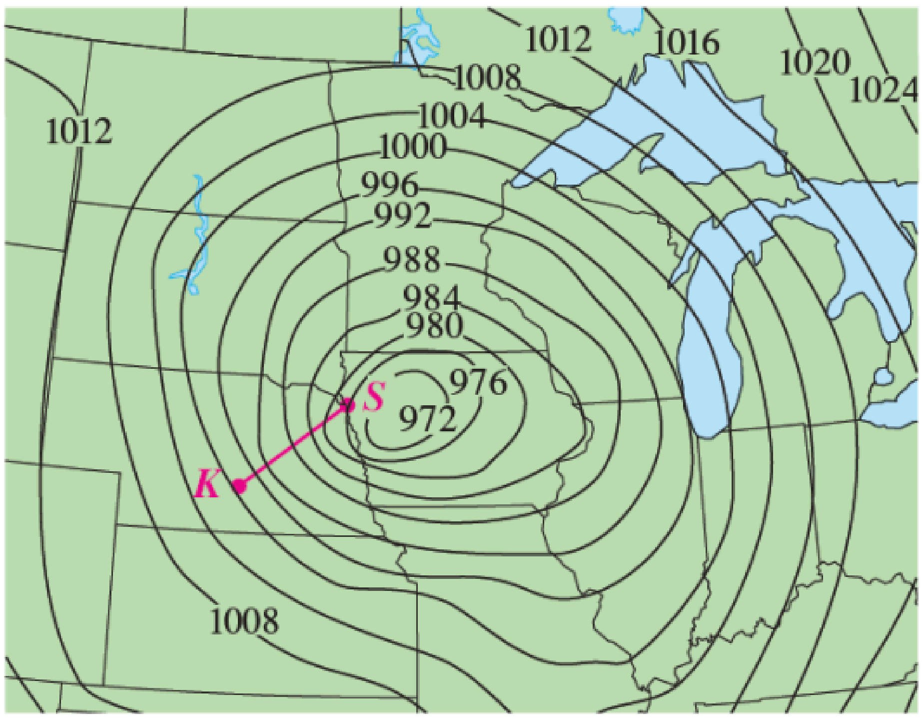
Questão 1

As curvas de nível da pressão barométrica (em milibares) são mostradas para as 6 horas da manhã de um dia de novembro. Uma baixa profunda com 972 mb de pressão está se movendo sobre o noroeste de Iowa. A distância ao longo da linha vermelha de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) é 300 km.

Estime o **valor da derivada direcional da função pressão** em Kearney na direção de Sioux City. Quais são as unidades da derivada direcional?

Detalhes: a pressão está em mb e a distância, no mapa, em km.

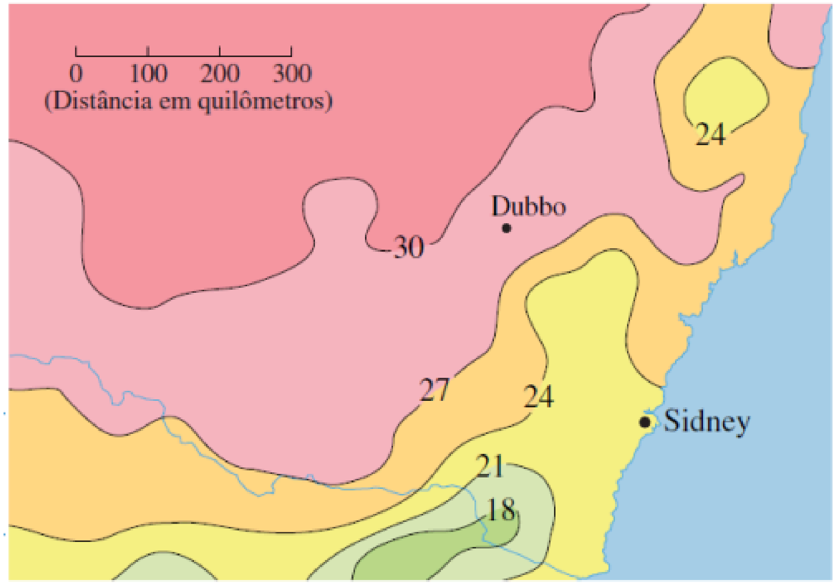


R: Avaliando a mudança na pressão barométrica entre as cidades de Kearney(K) e Sioux(S), com valores aproximados de 999mb e 975mb, respectivamente, e considerando a distância de 300km entre elas, podemos calcular a derivada direcional DuT:

DuT = (999 - 975) / 300 ≅ 24/300 ≅ 0,08 mb/km

Questão 2

O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em oc). Estime **o valor da derivada direcional da função da temperatura** em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



R: Levando em consideração a aproximação dos valores de temperatura de Dubbo e Sidney, que é 28°C e 22°C , respectivamente e o valor aproximado da distância das duas cidades que é 300km. Com esses valores, podemos calcular a Derivada direcional das duas cidades, que resulta em:

DuT = (28 - 22) / 320 ≅ 6 / 300 ≅ <u>0,02 °C/Km</u>

Questão 3

O índice de sensação térmica W é a temperatura aparente quando a temperatura real é T e a velocidade do vento é v, de modo que podemos escrever $W = f(T,\ v)$. Use a tabela abaixo para estimar o valor de $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(-20,\ 30)$, em que $\vec{\mathbf{u}} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Questão 3.

$D_{\vec{u}} F(-20, 30)$

$\vec{u} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$

$f_t(D_{\vec{u}}F) \cong \frac{(-20 \pm 5, 30) - f(-20,30)}{\pm 5}$

$f_1 = \frac{(-15,30) - f(-20,30)}{5}$

$f_1 = \frac{7}{5} = 1,4$

$f_2 = \frac{(-25,30) - f(-20,30)}{-5} = \frac{-6}{-5} = 1,2$

$f_t(D_{\vec{u}}F) \cong \frac{1,4 + 1,2}{2} = 1,3$

$f_v(-20,30) \cong \frac{f(-20, 30 \pm 10)\ f(-20,30)}{\pm 10}$

$f_1 = \frac{(-20,40) - f(-20,30)}{10} = \frac{-1}{10} = -0,1$

$f_2 = \frac{(-20,20) - f(-20,30)}{-10} = \frac{3}{-10} = -0,3$

$f_v(D_{\vec{u}}F) \cong \frac{-0,1 - 0,3}{2} = -0,2$

$D_{\vec{u}} f(-20, 30) \cong \frac{1,3 + (-0,2)}{\sqrt{2}} = \frac{1,1}{\sqrt{2}} \cong \underline{0,78}$

R ≅ 0,78

Questão 4

Determine a derivada direcional de $f(x,\ y) = y\cos(xy)$ no ponto $(0,\ 1)$ e na direção $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Questão 4

$f(x, y) = y\cos(x, y)$

no ponto $(0, 1)$

na direção $\theta = \pi/4$

$V = (\cos(\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/4)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \operatorname{sen}(xy)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(x, y)$

$\nabla f(0,1) = (-1 \cdot \operatorname{sen}(0 \cdot 1), \cos(0 \cdot 1) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0 \cdot 1))$

$\nabla f(0,1) = (0, 1)$

$\nabla f(0,1) \cdot V = (0,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

R = $\sqrt{2}/2$

Questão 5

Dada a função $f(x,\ y) = \frac{x}{y}$, o ponto P(2, 1) e o vetor $\vec{\mathbf{u}} = \frac{3}{5}\hat{\mathbf{i}} - \frac{4}{5}\hat{\mathbf{j}}$,

(a) Determine o gradiente de f.

(b) Calcule o gradiente no ponto P dado.

(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}}$.

Questão 5

$f(x,y) = \frac{x}{y}$

$P(2,1)$

$\vec{u} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}$

A) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{y^2}$

$\nabla f(P) = (1/(1), -2/(1^2)) = \underline{(1, -2)}$

$\nabla f(2,1) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}\right)$

$\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}.$

A) ∇f(∂f/∂x, ∂f,∂y) = <u>(1/y, -x/y²)</u>

B) ∇f(2, 1) = <u>(1, -2)</u>

C) <u>11/5</u>

Questão 6

Dada a função $f(r,s,t) = \ln(3r+6s+9t)$, o ponto P$(1,\,1,\,1)$ e o vetor $\vec{\mathbf{u}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$, determine a derivada direcional da função f no ponto P e na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}}$

Questão 6.

$f(r,s,t) = \ln(3r + 6s + 9t)$

$P(1,1,1)$

$\vec{u} = 4\hat{i} + 12\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{3}{3r + 6s + 9t} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{9}{3r + 6s + 9t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{6}{3r + 6s + 9t}$$

$$\nabla f(P) = \left(\frac{3}{18}, \frac{6}{18}, \frac{9}{18}\right)$$

$$\boxed{\nabla f(P) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(4)^2 + (12)^2 + (-6)^2}$$

$$\sqrt{16 + 144 + 36} = \sqrt{196} = 14$$

$$\boxed{\hat{u} = \frac{1}{14}(4\hat{i} + 12\hat{j} - 6\hat{k})}$$

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f(P) \cdot \hat{u}$$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{14}(4\hat{i} + 12\hat{j} - 6\hat{k})\right)$$

$$D_{\vec{u}}f = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} - \frac{3}{14} \rightsquigarrow \frac{4}{42} + \frac{8}{42} - \frac{9}{42}$$

$$D_{\vec{u}}f = \frac{1}{14}$$

R = 1/14

Questão 7

Determine a taxa de variação máxima de $f(x,\ y) = \text{sen}(xy)$ no ponto $(1,\ 0)$ e a direção em que isso ocorre.

Questão 7

$f(x, y) = sen(x, y)$

$P(1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy)$$

$\cancel{\nabla f(P)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$$

$\cancel{\nabla f}$

$\nabla f(P) = (0, 1 \cdot \cos(0)) = (0, 1)$

R = <u>(0, 1)</u>

Questão 8

Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,\ y,\ z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em P(3, 4, 5) na direção do vetor $\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Questão 8

$$V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

$$\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \qquad P(3,4,5)$$

A) Derivadas parciais:

$$V_x = 10x - 3y + yz \quad \Big| \quad \vec{v} = (1, 1, -1)$$

$$V_y = -3x + xz \qquad |v| = \sqrt{3}\ \text{m}$$

$$V_z = xy$$

$$|V_v| = \frac{1+1-1}{\sqrt{1^2+1^2-1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$D_{\vec{v}}V(P) = \frac{30-12+20}{\sqrt{3}} + \frac{15-9}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$D_{\vec{v}}V(P) = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

B) $\nabla V(P) = (38, 6, 12)$

C) $|\nabla V(3,4,5)| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$

R: A) <u>(32√3) / 3</u> ; B) <u>(38, 6, 12)</u> ; C) <u>√1624</u>

Questão 9

Dada a superfície $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2$ e o ponto (1, 1, 1), encontre:

(a) uma equação do plano tangente;

(b) uma equação da reta normal à superfície.

Questão 9

$X^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2$

$P = (1, 1, 1)$

A) $\gamma = (x_0, y_0, z_0)$

$F_x(\gamma)(x - x_0) + F_y(\gamma)(y - y_0) + F_z(\gamma)(z - z_0) = 0$

$F_x(\gamma) = 4x^3 - 4x \cdot y^2 \cdot z^2 \rightsquigarrow 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 1^2 = 0$

$F_y(\gamma) = 4y^3 - 4yx^2z^2 \rightsquigarrow 4 - 4 = 0$

$F_z(\gamma) = 0$

Todas as derivadas parciais são zero, ou seja, não é possivel gerar a equação do plano tangente.

B) $\nexists$

Questão 10

Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g (máximo local, mínimo local, sem informação, ponto de sela)?

$$g_{xx}(0,\ 2) = -1$$
$$g_{xy}(0,\ 2) = 6$$
$$g_{yy}(0,\ 2) = 1$$

Questão 10

$P(0,2) \rightsquigarrow D(0,2) = -1 \cdot 1 - 6^2 = -1 - 36 = -37$

Logo se $D(0,2) = -37$ e $0 > -37$ então a função no ponto existe um ponto de sela.

Questão 11

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x,\ y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ no conjunto $D = \{(x,\ y) |\ |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$.

Questão 11

$x^2 + y^2 + x^2y + 4$

$f_x = 2x + 2y$; $f_y = 2y + x^2$

Considerando o domínio e o sistema:

$D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

$$\begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

Então: $x = y = 0$

→ Logo, se $y = -1 \rightsquigarrow f(x, -1) = 5$

→ Logo, se $x = \pm 1$ → MAX $f(\pm 1, 1) = 7$; → MIN $f(\pm 1, -\frac{1}{2}) = \frac{19}{4}$

MAX ABSOL. → $f(\pm 1, 1) = 7$

MIN ABSOL. → $f(0, 0) = 4$

R: <u>MAX ABSOLUTO</u> → <u>F(±1, 1) = 7</u>

<u>MIN ABSOLUTO</u> → <u>F(0, 0) = 4</u>

Questão 12

Determine a menor distância entre o ponto (2, 0, -3) e o plano $x + y + z = 1$.

Questão 12

P(2, 0, 3) | (A = 1, B = 1, C = 1, D = -1)

$x + y + z = 1$ | ($x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = -3$)

Aplicando a formula...

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|1 \cdot (2) + 1 \cdot (0) + 1 . (-3) + (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 0 - 3 - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

R = <u>2 / √3</u>

Questão 13

Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2.

Questão 13

Superficie = 64 cm^2

$$2xy + 2xz + 2yz = 64$$

$$x = \frac{64 - 2yz}{2(y+z)} = V(y,z) = \frac{(64-2yz)yz}{2(y+z)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{64z}{(y+z)^2} - \frac{2z^2}{(y+z)} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{64y}{(y+z)^2} - \frac{2y^2}{y+z} = 0 \end{aligned}\right\} y = z$$

$$\frac{64z}{2(z)^2} - \frac{2z^2}{2z} = 0 \rightarrow \frac{64}{4z^2} - z = 0 \rightarrow \frac{16}{z} - z = 0.(z$$

$$\frac{16z}{z} - z^2 = 0 \cdot z \rightarrow 16 - z^2 = 0 \rightarrow z = 4 = y$$

$$2x \cdot 4 + 2x \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$16x + 32 = 64$$

$$x = 2$$

$x = 2 \quad y = 4$

$z = 4$

R: <u>X = 2 ; Y = 4 ; Z = 4</u>