Questão 1

Estime:

a) o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo

$$R = \{(x,\ y)|0 \leqslant x \leqslant 6,\ 0 \leqslant y \leqslant 4\}$$

Utilize a soma de Riemann com m = 3, n = 2, e tome como ponto de amostragem o canto superior direito de cada sub-retângulo.

b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

Soma de Riemann

M = 3
N = 2

- O Comprimento do retângulo R ao longo do eixo x é 6, portanto, cada sub-retângulo tem largura igual a:
  $\Delta x = 6/3 = 2$
- A largura do retângulo R ao longo do eixo y é 4, portanto cada sub-retângulo tem altura igual a:
  $\Delta y = 4/2 = 2$

Coordenadas dos pontos superiores direitos:

- Para $i_1 = 1 \rightarrow x = 2$
- Para $i_2 = 2 \rightarrow x = 4$
- Para $i_3 = 3 \rightarrow x = 6$
- Para $j_1 = 1 \rightarrow x = 2$
- Para $j_2 = 2 \rightarrow x = 4$

Combinando x e y, as coordenadas são:

(2, 2), (4, 2), (6, 2)
(2, 4), (4, 4), (6, 4)

Agora, calculando o volume:

$$\Delta A = \Delta X \,.\, \Delta Y = 2 \,.\, 2 = 4$$

A soma de Riemann é então dada por:

$$f(2, 2) = 2 \, . \, 2 = 4, \quad f(4, 2) = \ldots = 8, \quad f(6, 2) = \ldots = 12$$
$$f(2, 4) = \ldots = 8, \quad f(4, 4) = \ldots = 16, \quad f(6, 4) = \ldots = 24$$

Portanto, a soma de Riemann é:

$V \approx (4 + 8 + 12 + 8 + 16 + 24) \, . \, 4$
$V \approx 72 \, . \, 4$
$V \approx 288$

Portanto, o volume aproximado utilizando a soma de Riemann é 288 unidades cúbicas.

Ponto Médio

$M = 3$
$N = 2$
$\Delta x = 6/3 = 2$
$\Delta y = 4/2 = 2$

Coordenadas dos pontos médios

- Para $i_1 = 1 \rightarrow x = 1$
- Para $i_2 = 2 \rightarrow x = 3$
- Para $i_3 = 3 \rightarrow x = 5$
- Para $j_1 = 1 \rightarrow x = 1$
- Para $j_2 = 2 \rightarrow x = 3$

Combinando x e y, as coordenadas são:

$$(1, 1), (3, 1), (5, 1)$$
$$(1, 3), (3, 3), (5, 3)$$

Agora, calculando o volume: $\Delta A = \Delta X \, . \, \Delta Y = 2 \, . \, 2 = 4$

A soma de Riemann é então dada por:

$$f(1, 1) = 1 \, . \, 1 = 1, \quad f(3, 1) = \ldots = 3, \quad f(5, 1) = \ldots = 5$$
$$f(1, 3) = \ldots = 3, \quad f(3, 3) = \ldots = 9, \quad f(5, 3) = \ldots = 15$$

Portanto, a soma de Riemann é:

V ≈ (1 + 3 + 5 + 3 + 9 + 15) . 4
V ≈ 36 . 4
V ≈ 144

Logo, o volume aproximado utilizando a regra do ponto médio é 144 unidades cúbicas.

Questão 2

Estime:

a) o volume do sólido que está abaixo da superfície

$$z = 1 + x^2 + 3y$$

e acima do retângulo

$$R = [1,\ 2] \times [0,\ 3]$$

Utilize a soma de Riemann com m = n = 2, e escolha os pontos de amostragem como os cantos inferiores esquerdos.

b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

Soma de Riemann

m = n = 2
ΔX = 0.5
ΔY = 1.5

V ≈ f(1, 0) * 0.75 + f(1.5, 0) * 0.75 + f(1, 1.5) * 0.75 + (1.5, 1.5) * 0.75

Pontos na função

$z = 1 + x^2 + 3y$
f(1, 0) = 1 + 1 = 2 f(1.5, 0) = 1 + 2.25 = 3.25
f(1, 1.5) = 1 + 1 + 4.5 = 6.5 f(1.5, 1.5) = 1 + 2.25 + 4.5 = 7.75

Aplicando os valores na fórmula:
$V \approx 2 * 0.75 + 3.25 * 0.75 + 6.5 * 0.75 + 7.75 * 0.75$
$V \approx 14.625$

O volume aproximado do sólido usando a soma de Riemann com os parâmetros fornecidos é de 14.625 unidades cúbicas.

Ponto Médio

Pontos médios

$x_1 = (xi + x)/2 = (1 + 1.5)/2 = 2.5/2 = 1.25$
$x_2 = (1.5 + 2)/2 = 3.5/2 = 1.75$
$y_1 = (yi + y)/2 = (0 + 1.5)/2 = 1.5/2 = 0.75$
$y_2 = (1.5 + 3)/2 = 4.5/2 = 2.25$

Calculando o Volume com os pontos médios
$V \approx f(1.25, 0.75) * 0.75 + f(1.25, 2.25) * 0.75 + f(1.75, 0.75) * 0.75 + (1.75, 2.25) * 0.75$

Função dos Pontos

$z = 1 + x^2 + 3y$
$f(1.25, 0.75) = 1 + 1.5625 + 2.25 = 4.8125$
$f(1.25, 2.25) = 1 + 1.5625 + 6.75 = 9.3125$
$f(1.75, 0.75) = 1 + 3.0625 + 2.25 = 6.3125$
$f(1.75, 2.25) = 1 + 3.0625 + 6.75 = 10.8125$

Calculando o volume:

$V \approx 4.8125 * 0.75 + 9.3125 * 0.75 + 6.3125 * 0.75 + 10.8125 * 0.75$
$V \approx 23.4375$

O volume aproximado do sólido usando a regra do ponto médio com os parâmetros fornecidos é de 23.4375 unidades cúbicas.

Questão 3

Uma psicida, de 20 X 30 pés de dimensão, está cheia de água. A profundidade é medida intervados de 5 pés, começando em um canto da psicina, e os valores estão na tabela abaixo:

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

Estime o volume de água na piscina.

Dicas: use a Regra do Ponto Médio; $m = 2$ e $n = 3$ (que são os equivalentes à 20 e 30 pés de extensão). Lembre-se que as unidades, aqui, estão em pés.

Pontos médios:

$x_1 = (xi + x)/2 = (0 + 10)/2 = 10/2 = 5$
$x_2 = (xi + x)/2 = (10 + 20)/2 = 30/2 = 15$
$y_1 = (yi + y)/2 = (0 + 10)/2 = 10/2 = 5$
$y_2 = (yi + y)/2 = (10 + 20)/2 = 30/2 = 15$
$y_3 = (yi + y)/2 = (20 + 30)/2 = 50/2 = 25$

Calculando a área: A = 10 * 10 = 100

Pontos da Função:
V ≈ f(5, 5) * 100 + f(5, 15) * 100 + f(5, 25) * 100 + f(15, 5) * 100 + f(15, 15) * 100 + f(15, 25) * 100

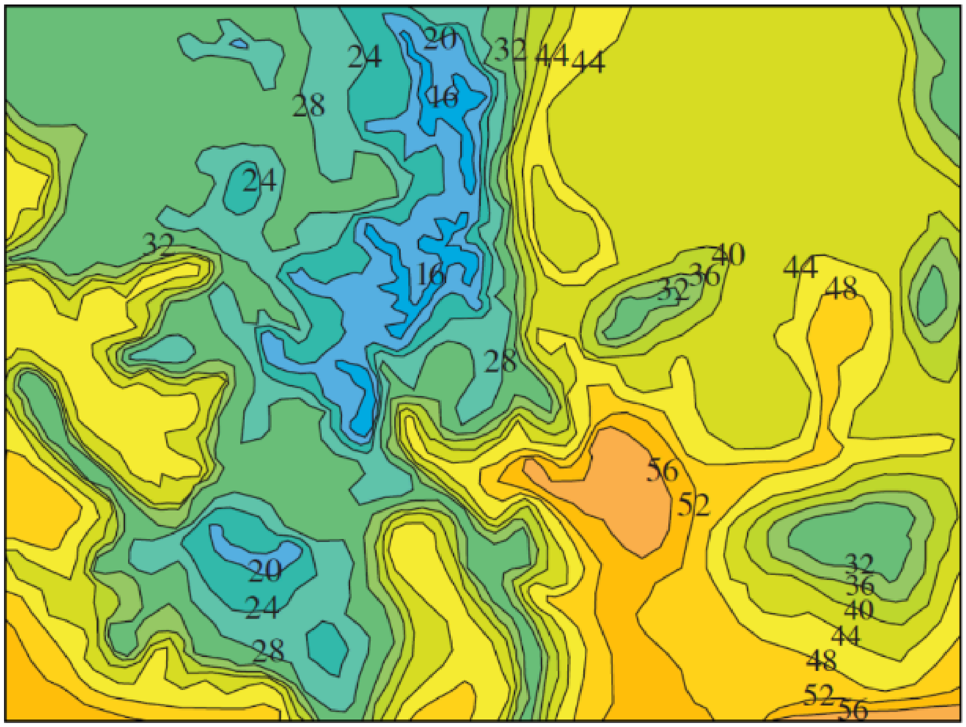
Com base na tabela dada temos as informações suficientes para realizar a questão:

V ≈ 3 * 100 + 7 * 100 + 10 * 100 + 3 * 100 + 5 * 100 + 8 * 100
V ≈ 300 + 700 + 1000 + 300 + 500 + 800
V ≈ 3600

O volume da piscina é de aproximadamente 3600 pés cúbicos.

Questão 4

O mapa de contorno mostra a temperatura, em graus Fahrenheit, às 4 horas da tarde do dia 26 de fevereiro de 2007, no Estado do Colorado. O Estado mede 388 milhas de Leste a Oeste e 276 milhas de norte a sul.



Utilize a Regra do Ponto Médio com m = n = 4 para estimar a temperatura média do Colorado nessa hora. Lembre-se que as unidades, aqui, estão em ºF.

m=n=4
Ponto Médio (x, y)

Temperatura Estimada (ºF)

(48.5, 34.5)30	(48.5, 103.5)35	(48.5, 172.5)40	(48.5, 241.5)45
(145.5, 34.5)32	(145.5, 103.5)36	(145.5, 172.5)42	(145.5, 241.5)46
(242.5, 34.5)34	(242.5, 103.5)38	(242.5, 172.5)44	(242.5, 241.5)48
(339.5, 34.5)36	(339.5, 103.5)39	(339.5, 172.5)46	(339.5, 241.5)50

Calculando a temperatura Média:

T = (30 + 35 + 40 + 45 + 32 + 36 + 42 + 46 + 34 + 38 + 44 + 48 + 36 + 39 + 46 + 50) / 16
T = 641/16
T ≅ 40 °F

R = No Colorado, a temperatura média às 4h da tarde em Fahrenheit é de aproximadamente 40°F.

Questão 5

Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido:

a)

$$\iint_R 3\ dA, \quad R = \{(x,\ y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 6\}$$

b)

$$\iint_R (5-x)\ dA, \quad R = \{(x,\ y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$$

c)

$$\iint_R (4-2y)\ dA, \quad R = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$$

(Q.5. A)

$\iint_R 3dA, \ R = \{(X, Y) \mid -2 \le X \le 2, 1 \le Y \le 6\}$

$A = 3$ | $C = 6-1 \rightsquigarrow C = 5$

$B = 2-(-2) \rightsquigarrow B = 4$

$\iint_R 3dA = 60$

B) $\iint_R (5-x)dA, \ R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 3\}$

$\iint (5-x)dA = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = \frac{75}{2}$

$\iint (5-x)dA = 37{,}5$

C) $\iint_R (4-2y)dA, \ R = [0,1] \times [0,1]$

$\iint_R (4-2y)dA = 1 \cdot 1 \cdot 2 + \left(\frac{2 \cdot 1}{2}\right) \cdot 1 = 3$

$\iint_R (4-2y)dA = 3$