Nome: Felipe B Castro
Curso: Engenharia de Software

Questão 1

Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

a) $f(x,\ y) = y^2 - x^2$; $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

A)

Q. 1. A)

$f(x,y) = y^2 - x^2 \,;\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

$h(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$

$\nabla f = \langle -2x, 2y \rangle \quad \nabla g = \langle \frac{1}{2}x, 2y \rangle$

$$\begin{cases} -2x = \lambda \cdot \frac{1}{2}x \\ 2y = \lambda \cdot 2y \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolução do Sistema:

$-2x = \frac{\lambda}{2} \cdot x \rightsquigarrow x \neq 0 \rightsquigarrow \lambda = -4$

$2y = 2\lambda y \rightsquigarrow y \neq 0 \rightsquigarrow \lambda = 1$

Logo,

- Max = 1
- Min = -4

B)

Q. 1. B)

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

$\nabla f = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$

$\nabla g = \langle 1, 1, 1 \rangle$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

Logo,

$x, y, z = \frac{\lambda}{2}$

$x, y, z = 4$

Ao final…

4^2+4^2+4^2 = 48
Logo, os valores de máximo e mínimo da função são iguais, sendo ambos 48.

Questão 2

Determine os valores extremos de f sujeita a ambas as restrições

a) $f(x,\ y,\ z) = x + 2y;\ x + y + z = 1,\ y^2 + z^2 = 4$

b) $f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2;\ x - y = 1,\ y^2 - z^2 = 1$

A)

Q.2. A)

$f(x,y,z) = x + 2y$

$g(x,y,z) = x + y + z = 1$

$h(x,y,z) = y^2 + z^2 + 4$

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + \lambda_1(1-x-y-z) + \lambda_2(4-y^2-z^2)$

$1/2y = -1/2z$

$2z = -2y$

$z = -2y/2$

$z = -y$

$y^2 + z^2 = 4$

$y^2 + (-y)^2 = 4$

$y = \pm\sqrt{2}$

$z = \mp\sqrt{2}$

$1 + 2\sqrt{2}$ como ponto Max e $1 - 2\sqrt{2}$ por MIN

B)

(Q. 2. B)

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $x-y=1$, $y^2-z^2=1$

$\nabla f = (2x,2y,2z)$; $\nabla g = (1,-1,0)$; $\nabla h = (0,2y,-2z)$

Na formula temos...

$(2x,2y,2z)\lambda\cdot(1,-1,0)+\mu\cdot(0,2y,-2z)$

$2x = 4/3 \to x = \frac{2}{3}$ | $2y = 4/3 - 2y$

| $4y = -4/3 \to y = -\frac{1}{3}$

$-\left(\frac{1}{3}\right)^2 - z^2 = 1 \to \frac{1}{9} - 1 = z^2 \to z = \pm\sqrt{-8/9}$

$P_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt{-\frac{8}{9}}\right)$ $\quad F(P_1) = F(P_2) = -\frac{1}{3}$

$P_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\sqrt{-\frac{8}{9}}\right)$

MAX $= -\frac{1}{3}$

Questão 3

Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade:

$$f(x,\ y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$$

$L(X, Y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$

$4x - 4 + 2\lambda x = 0$
$6y + 2\lambda y = 0$
$x^2 + y^2 - 16 = 0$

Logo,

$x = 0$ ou $4 - 2\lambda = 0$

Se $x = 0$, substituímos na segunda equação e obtemos $y = 0$. Usando a terceira equação, encontramos $\lambda = -1$. Portanto, um ponto crítico é (0,0)

Se $4 - 2\lambda = 0$, então $\lambda = 2$. Substituindo isso na segunda equação, temos $y = 0$. Usando a terceira equação, obtemos $x^2 = 16$, resultando em $x = \pm 4$. Assim, os pontos críticos são (4,0) \) e (-4,0).

$f(0,0) = -5$
$f(4,0) = 2(4)^2 + 3(0)^2 - 4(4) - 5 = 32 - 16 - 5 = 11$
$f(-4,0) = 2(-4)^2 + 3(0)^2 - 4(-4) - 5 = 32 + 16 - 5 = 11$

$f(t) = 32\cos^2(t) + 48\sin^2(t) - 16\cos(t) - 20$

Questão 4

Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1.500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

Se a soma dos comprimentos das arestas é 200cm, então:

$a + b + c = 50$
$2ab + 2ac + 2bc = 1500$

Pela teoria de Lagrange, podemos deduzir que a área máxima ocorre quando temos um quadrado, ou seja a = b, temos:

$2a^2 + 4a(50 - 2a) = 1500$
$a^2 + 2a(50 - 2a) = 750$
$3a^2 + 100a + 750 = 0$

Agora, para resolver por Bhaskara, temos:

a = 21,93 ou a=11,39

Multiplicando a.b.c para encontrar o volume para cada caso (Máximo e mínimo):
Vmax = 3533,54
Vmin = 2947,9