Questão 1

Suponha que

$$\lim_{(x,\ y) \to (3,\ 1)} f(x,\ y) = 6.$$

O que pode ser dito do valor de f(3, 1)? E se a função for contínua?

O limite f(x, y) = 6 com limite de (x, y) tendendo a (3, 1) significa que os valores da função se aproximam de 6 quando x e y respectivamente se aproximam de 3 e 1, mas não tendo seus valores iguais a 3 e 1. Quanto a continuidade da função, se f for contínuo então sabendo que lim f (x, y) = f(a, b) quando (x, y) tende a (a, b), logo essa função é possível.

Questão 2

Explique por que cada função é contínua ou descontínua:

a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.

b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.

c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

A) Essa função é contínua, pois a temperatura não salta muito de um valor para outro.

B) Essa função não necessariamente é contínua. Pois podemos colocar situações hipotéticas, como por exemplo uma montanha muito inclinada que por sua vez pequenas mudanças na longitude ou latitude implicam diretamente na mudança brusca na altitude da mesma, ou seja, ela pode saltar de um valor para outro.

C) Essa função possui valores discretos com aumentos abruptos. Logo, pequenas mudanças na distância e/ou no tempo afetam diretamente o custo da viagem.

Questão 3

Utilize uma tabela de valores numéricos de f(x, y) para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de f(x, y) quando (x, y) → (0, 0). Em seguida, explique por que sua conjectura está correta. Também, **faça o gráfico** da função.

(a)

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$$

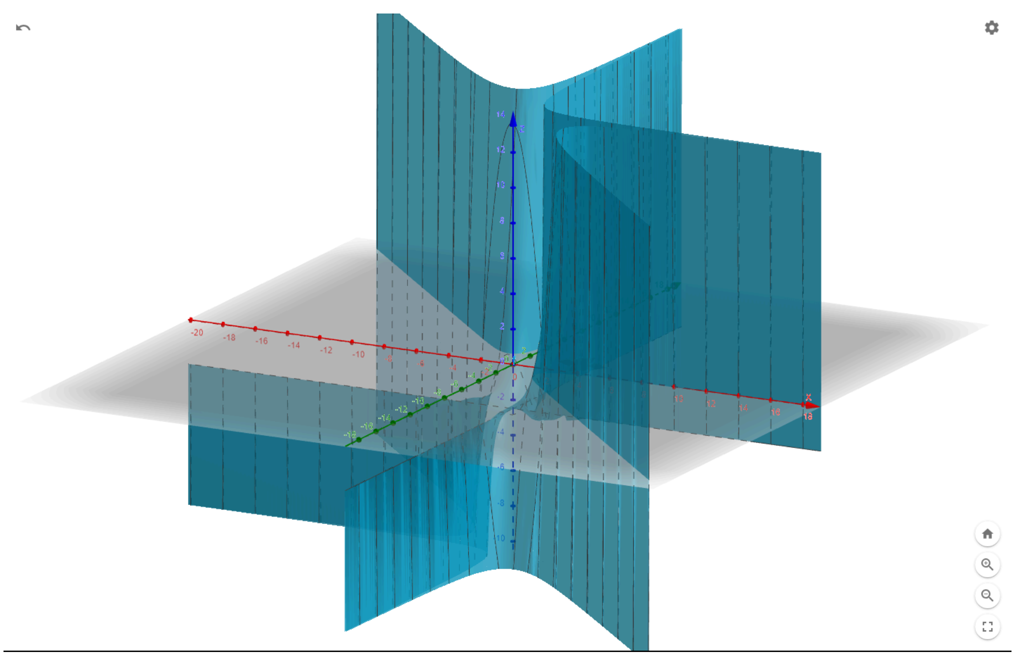
(b)

$$f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$$

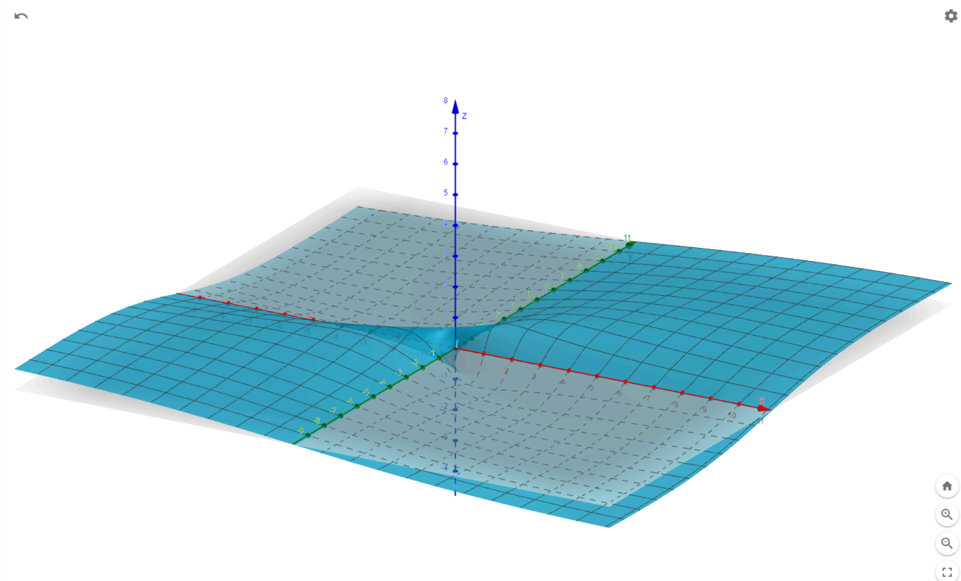
Sugestão: utilize um programa de planilhas que gostar. Para o gráfico, utilize a linguagem de programação que estiver mais familiarizado.

A)

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$$



B) $f(x,\ y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$



x \ y	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3
-0,3	0,667	0,706	0,545	0,000	-0,545	-0,706	-0,667
-0,2	0,545	0,667	0,667	0,000	-0,667	-0,667	-0,545
-0,1	0,316	0,444	0,667	0,000	-0,667	-0,444	-0,316
0	0,000	0,000	0,000	#DIV/0!	0,000	0,000	0,000
0,1	-0,316	-0,444	-0,667	0,000	0,667	0,444	0,316
0,2	-0,545	-0,667	-0,667	0,000	0,667	0,667	0,545
0,3	-0,667	-0,706	-0,545	0,000	0,545	0,706	0,667

À medida que (x, y) se aproxima da origem, os valores de f(x, y) não convergem para um único valor de acordo com a tabela. Ao nos aproximarmos inicialmente dá origem ao longo do eixo x ou do eixo y, resulta em f(x, 0) = 0 e f(0, y) = 0, levando a f(x, y) → 0. Entretanto, se nos aproximarmos ao longo da linha y = x, temos $f(x, y) = (2x^2) / (x^2 + 2x^2) = 2/3$ para $x \neq 0$, e f(x, y) → 2/3. Dado que F se aproxima de valores diferentes ao longo de trajetórias distintas em direção à origem, o limite não é determinado.

Questão 4

Determine o limite, se existir, ou demonstre que o limite não existe:

a)

$$\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} (5x^3 - x^2y^2)$$

R: 1

b)

$$\lim_{(x,\ y)\to(1,\ -1)} e^{-xy}\cos(x+y)$$

R: e

c)

$$\lim_{(x,\ y)\to(2,\ 1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$$

R: 2/7.

d)

$$\lim_{(x,\ y)\to(1,\ 0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$$

]

R: 0

e)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+\operatorname{sen}^2 y}{2x^2+y^2}$$

R: ∄

f)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

R: 0

g)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$$

R: $\nexists$

h)

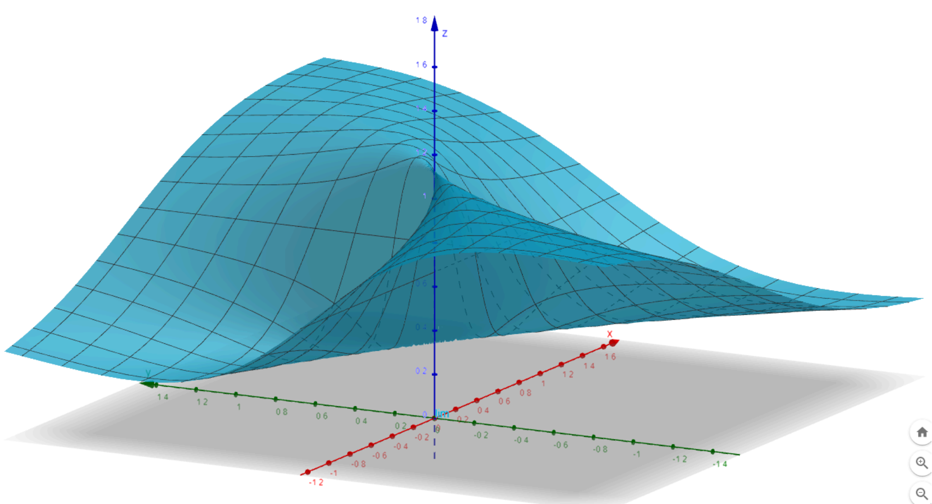
$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} e^{y^2}\,\mathrm{tg}(xz)$$

R: 0

Questão 5

Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe. **Coloque a imagem**:

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} = \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$$

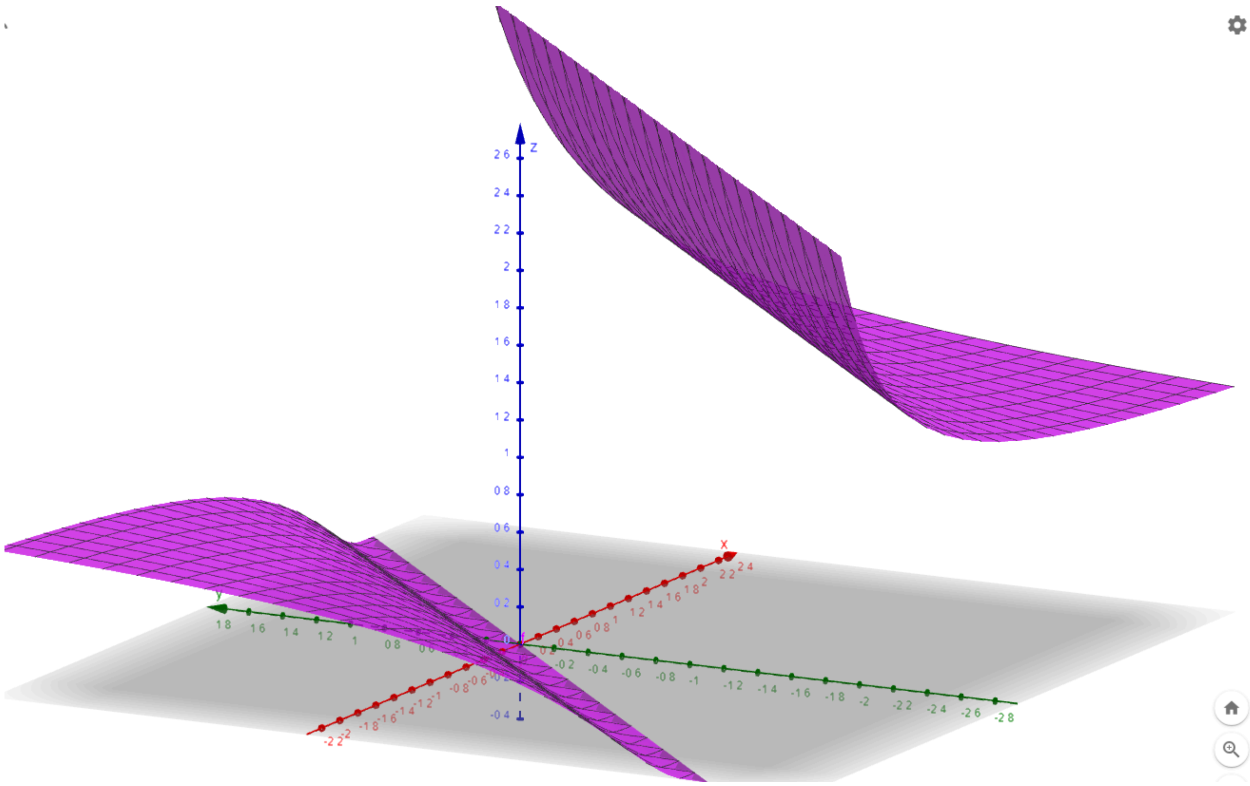


O Limite não pode existir pois o resultado do limite seria 0/0, e 0/0 não existe, logo esse limite não existe.

Questão 6

Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou. **Coloque a imagem:**:

$$f(x,\ y) = e^{\frac{1}{x-y}}$$



A função é descontínua em pontos onde o denominador se torna zero. Isso ocorre porque a função exponencial e^t é contínua em todos os pontos t do seu domínio. No entanto, quando x e y são tais que x - y = 0 a função se torna indefinida pois teríamos uma divisão por zero.

Questão 7

Determine o maior conjunto no qual a função é contínua:

a) $F(x,\ y) = \frac{xy}{1+e^{x-y}}$

b) $G(x,\ y) = \cos\sqrt{1+x-y}$

c) $H(x,\ y) = \frac{e^x+e^y}{e^{xy}-1}$

d) $I(x,\ y) = \ln\left(x^2+y^2-4\right)$

e) $J(x,\ y,\ z) = \sqrt{y-x^2}\ lnz$

A) {(x, y) I x, y ∈ R}
B) {(x, y) ∈ R I y ≤ 1 + x}
C) {(x, y) ∈ R I xy ≠ 0}

D) $\{(x, y) \in R \mid |x| \geq 2 \text{ e } |y| \geq 2\}$.
E) $\{(x, y, z) \in R \mid y \geq x^2 \text{ e } z > 0\}$