No livro do Stewart (vol. 2, 9^a ed.), na sessão 15.8, é trabalho o conceito de integrais triplas em coordenadas esféricas.

a) Descreva como funciona as coordenadas esféricas e as relações com as coordenadas cartesianas (como uma se transforma na outra)

- As coordenadas esféricas constituem um sistema tridimensional de coordenadas, que um ponto no espaço é descrito por: r, θ e Φ.

- Logo, apenas com dois ângulos e uma distância as coordenadas esféricas fornecem a localização dos pontos naquele espaço.

Cada uma das incógnitas usadas para descrever aquele ponto no espaço (r, θ e Φ) tem significados e valores diferentes, sendo r = distância radial do ponto até sua origem, sendo paralela com sua definição sendo de módulo de um vetor. θ = 1° Ângulo usado para descrever um ponto nesse espaço, sendo um ângulo polar ou colatitude, que em suma é o ângulo que fica entre o eixo z e o vetor posicionado no ponto, variando trigonometricamente de 0 a π. Φ = 2° Ângulo usado para descrever um ponto nesse espaço, que é um ângulo posicionado no plano xy em relação ao eixo x, que varia trigonometricamente de 0 a 2π.

As coordenadas cartesianas (x, y, z) descrevem um ponto no espaço usando três valores que correspondem às distâncias ao longo dos eixos x, y e z. A relação entre coordenadas esféricas P(r,θ,ϕ)P(r, \theta, \phi)P(r,θ,ϕ) e coordenadas cartesianas P(x,y,z)P(x, y, z)P(x,y,z) é feita usando as seguintes fórmulas:

$$r = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = r\, sen\ \phi \cos\theta$$

$$y = r\, sen\ \phi\ sen\ \theta$$

$$z = r\cos\phi$$

Podemos usar as fórmulas acima para transformar coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas. Para transformar coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, podemos usar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = arc\cos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = arc\tan 2(y,\ x)$$

b) Encontre o volume de uma esfera de raio R. Ou seja, você deverá deduzir a equação clássica do volume de uma esfera de raio R a partir da integral tripla em coordenadas esféricas.

As coordenadas esféricas (ρ,θ,ϕ) estão relacionadas às coordenadas cartesianas (x,y,z) da seguinte forma:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi$

Onde:

ρ é a distância do ponto à origem (0 ≤ p ≤ R),
θ é o ângulo no plano xy em relação ao eixo x (0 ≤ θ < 2π),
ϕ é o ângulo em relação ao eixo z (0 ≤ ϕ ≤ π).

O volume infinitesimal em coordenadas esféricas é dado por:
$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

A integral tripla que representa o volume da esfera de raio R é:

$$V = \iiint_E$$

$$dV = \iiint_E \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

onde E é a região que descreve a esfera com

- 0 ≤ ρ ≤ R
- 0 ≤ θ < 2π
- 0 ≤ ϕ ≤ π

$$\int_0^R p^2 \, dp = \left[\frac{p^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin(\phi) \, d\phi = [-\cos(\phi)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$V = \left(\frac{R^3}{3}\right)(2)(2\pi) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Portanto:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

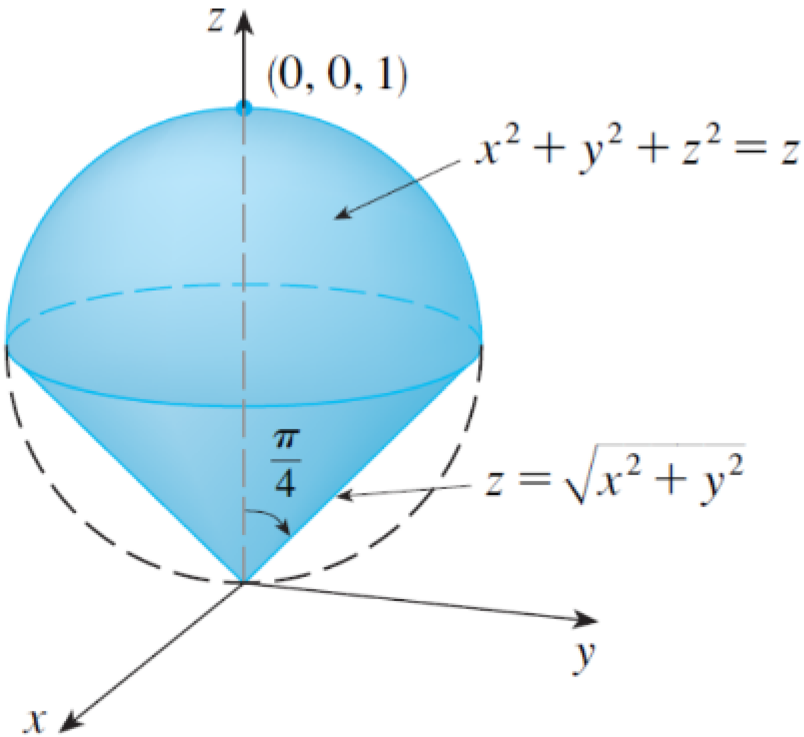
c) Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e abaixo da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

Uma representação deste problema pode ser visto na figura abaixo:



Dados Apresentados:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 + z^2 = z$

1° Passo: <u>Analisar a Imagem</u>

Ao observarmos a esfera podemos notar que a esfera tem centro em **(0, 0, ½)** e **R =** ½.

2° Passo: <u>Coordenadas Esféricas</u>

Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = z \rightarrow \rho^2 = \rho\cos\phi \rightarrow$ <u>**$\rho = \cos\phi$**</u>

Cone: $z = \sqrt{(x^2 + y^2)} \rightarrow \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \rightarrow \cos\phi = \sin\phi \rightarrow$ <u>**$\phi = \pi/4$**</u>

3° Passo: <u>Intervalos de Integração</u>

- $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- $0 \leq \phi \leq 4\pi$
- $0 \leq \rho \leq \cos\phi$

4° Passo: <u>Volume da figura</u>

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} p^2 \sin(\phi)\, dp\, d\phi\, d\theta$$

5° Passo: <u>Integrar</u>

$$\int_0^{\cos(\phi)} p^2 dp = \left[\frac{p^3}{3}\right]_0^{\cos(\phi)}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi) \ . \ \frac{\cos(\phi)^3}{3} d\phi d\theta$$

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi) \cos^3\phi \ d\phi d\theta$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi) \cos^3\phi \ d\phi\right)$$

Integral em θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Integral em ϕ por meio de substituição:

$u = \cos\phi, \ du = -\sin(\phi)\, d\phi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi) \cos^3\phi \ d\phi = \int_1^{\sqrt{\frac{2}{2}}} -u^3 \ du = \left[-\frac{u^4}{4}\right]_1^{\sqrt{\frac{2}{2}}}$$

$$\left[-\frac{u^4}{4}\right]_1^{\sqrt{\frac{2}{2}}} = -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 1^4\right) = \frac{3}{16}$$

Volume Final:

$$V = \frac{1}{3} \times 2\pi \times \frac{3}{16} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{8}$$