



Universidade de Brasília

Faculdade UnB Planaltina

Licenciatura em Ciências Naturais

**COPÉRNICO ESTAVA CERTO?
UMA ANÁLISE DE EPICICLOS E SÉRIES DE FOURIER**

Maria Licia de Lima Farias

Orientador: Prof. Dr. Paulo Eduardo de Brito

Planaltina-DF
Novembro 2016



Universidade de Brasília

Faculdade UnB Planaltina

Licenciatura em Ciências Naturais

**COPÉRNICO ESTAVA CERTO?
UMA ANÁLISE DE EPICICLOS E SÉRIES DE FOURIER**

Maria Licia de Lima Farias

Orientador: Prof. Dr. Paulo Eduardo de Brito

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Banca Examinadora, com exigência parcial para a
obtenção de título de Licenciado do Curso de Licenciatura
em Ciências Naturais, da Faculdade UnB Planaltina
sob a orientação do Prof. Paulo Eduardo de Brito

Planaltina-DF
Novembro 2016

*“What I am saying may be obscure right now,
nevertheless it will become clearer in the proper place.”*



NICOLAUS COPERNICUS (1473-1543)

(Preface dedicated to Pope Paul III)

*“Aquelas coisas que estou dizendo agora podem parecer obscuras,
mas elas ainda vão ficar claras algum dia.*

NICOLAU COPÉRNICO (1473-1543)

(Prefácio dedicado ao Papa Paulo III)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais e irmã pelo amor incondicional, apoio em todas as minhas decisões e por serem o melhor presente que a vida poderia me dar.

Ao meu orientador Paulo Eduardo de Brito pela confiança, incentivo, paciência e livros. Saiba que diante da vastidão do tempo e da imensidão do espaço, é uma imensa alegria compartilhar uma época e um planeta com o senhor¹.

Ao meu orientador Marco Aurélio Alves Barbosa por me inspirar a explorar as coisas mais espetaculares do Universo. Acredito que em algum lugar por aí, algo incrível nos espera para ser desvendado.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos por terem feito da minha graduação um momento tão especial.

¹ Carl Sagan.

COPÉRNICO ESTAVA CERTO? UMA ANÁLISE DE EPICICLOS E SÉRIES DE FOURIER

Maria Licia de Lima Farias¹ e Paulo Eduardo de Brito 

¹*Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Planaltina-DF, Brasil*

²*Programa de Pós-Graduação em Ciências de Materiais,
Universidade de Brasília, Planaltina-DF, Brasil*

RESUMO

Neste estudo apresentamos uma descrição acerca dos modelos propostos por Ptolomeu e Copérnico para o movimento irregular dos corpos celestes. Analisamos se as reais órbitas dos planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno podem ser descritas como uma soma de senos e cossenos com frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental. Da mesma forma, investigamos se os raios dos epiciclos propostos por Copérnico para os cinco planetas se aproximam dos raios da expansão da Série de Fourier para as suas reais órbitas. Nossos resultados indicaram que a simulação da expansão de Fourier com apenas dois termos da série é uma excelente aproximação para as órbitas reais. Por fim, verificamos que uma pequena modificação no modelo de Copérnico o torna razoavelmente aceitável para a simulação das órbitas reais dos cinco planetas.

Palavras-chave: Copérnico, Ptolomeu, epiciclos, Séries de Fourier, órbitas planetárias; 

ABSTRACT

In this study we present a description about the models proposed by Ptolemy and Copernicus about the irregular movement of the heavenly bodies. We analyze if the actual orbits of the planets Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn can be described as a sum of sines and cosines with frequencies that are integer multiples of the fundamental frequency. Similarly, it was investigated if the radius of the epicycles proposed by Copernicus approach the values of the radius found by the Fourier series for the real orbits of the planets. Our results indicated that the simulation of the Fourier expansion with only two terms of the series is an excellent approximation to the real orbits. Finally, we find out that a small change in the Copernican model makes it reasonably acceptable for the simulation of the actual orbits of the five planets.

Key-words: Copernicus, Ptolemy, epicycles, Fourier Series, planetary orbits; 

1. INTRODUÇÃO

Observar o céu é uma das mais primordiais atividades realizadas pelo homem. Desde a antiguidade  percebemos a ocorrência de fenômenos celestes que se repetiam regularmente como o nascer e pôr-do-Sol, as diferentes fases da Lua, o aparente movimento das estrelas, a identificação de constelações e outros [1]. Segundo um instinto de explorar novos lugares e expandir seus horizontes, os olhos da humanidade se voltavam cada vez mais para o céu. Distintas interpretações sobre os movimentos celestes promoveram a construção de diferentes modelos que tentavam explicar a harmonia do universo. Observações realizadas desde Heráclito² a Hawking³ sejam estas empíricas ou exatas,  transformando a história da Astronomia e nos possibilitando uma maior compreensão sobre quem somos, de onde viemos e para onde vamos.

A revolução científica ocorrida entre os séculos XVI e XVII marcou a passagem de uma visão de mundo Aristotélica para um pensamento científico basicamente descrito em uma linguagem matemática. Tal revolução foi marcada pelo impacto das obras de Copérnico, Kepler e Isaac Newton, todos estes influenciados por outros pensadores, uma vez que entendemos o pensamento científico como uma construção coletiva produzida por seres humanos que estão constantemente sofrendo influências históricas, sociais e filosóficas do contexto em que vivem [2]. 

Progressivamente, astrônomos gregos começaram a elaborar modelos que “salvassem as aparências”  e se ajustassem ao aparente movimento dos corpos celestes. Um dos ápices foi a elaboração do livro *Almagesto* (*Almagest*)  conhecido em árabe como “O Majestoso”, a obra mais famosa de Claudio Ptolomeu que apresenta um grande tratado matemático sobre o mecanismo do movimento planetário [1]. Após estudar assiduamente o Almagesto, o polonês Nicolau Copérnico propôs seu próprio modelo para o movimento celeste que foi descrito em seu livro *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes* (*On the Revolutions of the Heavenly Spheres*)  também conhecido como *De Revolutionibus Orbium Coelestium* publicado no ano de sua morte [3].

Ptolomeu e Copérnico foram bem sucedidos  tentar explicar o movimento celeste, no entanto o modelo de Copérnico foi considerado mais sintético e aceitável.  dos maiores desafios da época era a explicação do movimento irregular aparente de algumas estrelas, hoje denominadas planetas. Assim como seus predecessores Ptolomeu explicou que este movimento era composto por uma combinação de círculos e epiciclos, introduzindo a ideia de um sistema geostático em que a Terra, embora imóvel nos céus, não se encontra exatamente no centro do Universo. O sistema adotado por Copérnico também utilizava de círculos para a explicação do movimento celeste, preservando a hipótese de que o movimento circular é a forma geométrica mais perfeita [4].

² Filósofo pré-socrático considerado o pai da dialética.

³ Físico teórico e cosmólogo britânico, considerado um dos mais renomados cientistas da atualidade.

O grande legado deixado por Copérnico foi a colocação da Terra em movimento em torno do Sol, um sistema heliocêntrico apoiado basicamente em uma reinterpretação de dados. Convém ressaltar que o sistema adotado por Copérnico não substituiu as ideias de um astrônomo equivocado, mas uma ciência do mais alto nível defendida por Ptolomeu. Em uma concepção copernicana o movimento dos corpos celestes é descrito como uma superposição de movimentos circulares de vários centros, raios e velocidades [1].

A fim de descrever o complexo movimento de alguns corpos celestes, Copérnico apresenta uma descrição dos epiciclos que compõem o movimento de cada uma das estrelas que vagueavam de forma irregular no céu. Dados como a velocidade angular e tamanho dos raios dos epiciclos são fornecidos no *On the Revolutions of The Heavenly Spheres* e no *Commentariolus*⁴ de Nicolau Copérnico.

Motivada por um querido professor e pela possibilidade de relacionar o pensamento astronômico com a matemática subjacente, neste estudo pretendemos analisar se as reais órbitas de Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno podem ser descritas como uma composição de senos e cossenos. Da mesma forma, analisaremos se os valores dos raios dos epiciclos propostos por Copérnico representam os raios da expansão da Série de Fourier para as reais órbitas dos cinco planetas observados. A proposta é investigar se o modelo de Copérnico é matematicamente correto, embora seja fruto apenas de percepções e evidências empíricas. Convém mencionar que a mesma análise pode ser realizada para os valores dos epiciclos propostos por Ptolomeu no Almagesto, entretanto neste trabalho nos concentraremos apenas em analisar os dados apresentados por Copérnico, uma vez que extrair os dados do livro de Ptolomeu é uma tarefa árdua.

2. O MOVIMENTO RETRÓGRADO

 Observações diárias do movimento do Sol, Lua e estrelas de leste a oeste levaram a conclusões de que se o movimento dos corpos celestes não seguisse um padrão circular, a distância da Terra a qualquer ponto do universo não seria uniforme. Desta forma, distâncias angulares e magnitudes das estrelas apresentariam valores diferentes para observadores localizados em distintos pontos da Terra. Os astros se movem em um movimento circular e qualquer figura geométrica que não seja um círculo, não é eficiente para explicar o seu movimento [6].

Todas as estrelas possuíam uma posição fixa no céu completando uma volta em torno do eixo geográfico da Terra a cada 23 horas, 56 minutos e 4 segundos. Entretanto, os objetos mais fascinantes eram aqueles considerados uma exceção ao movimento

⁴ O Commentariolus fornece apenas os valores dos raios dos epiciclos.

circular regular que além de se moverem junto às estrelas, possuíam um movimento próprio girando como pequenos vagalumes na superfície do globo. Estes pontos luminosos, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno foram chamados de *estrelas errantes*. Apesar de possuírem um movimento particular eles não se moviam por todo o céu. O seu deslocamento era restrito em torno de uma faixa de uma linha estreita denominada *eclíptica*, a qual forma um ângulo de aproximadamente 23° com o equador terrestre. Este caminho percorrido também é chamado de *Zodíaco* e é dividido em 12 seções conhecidas como as constelações do Zodíaco [7].

Em virtude de estarem localizados mais próximos da Terra, foi possível verificar com mais facilidade que os planetas não possuíam um movimento circular perfeito, no qual notou-se que as posições de cada planeta em relação à eclíptica não eram regularmente espaçadas. Ocionalmente, o planeta se movia mais rapidamente em relação às estrelas e outras vezes mais lentamente, outras vezes ainda, ele parava e continuava o seu movimento na direção oposta, caracterizando o *movimento retrógrado*. O planeta se desloca durante algum tempo para oeste e não para leste [1]. Esse movimento planetário perturbava os astrônomos, uma vez que estava em dissonância com o modelo de um céu perfeito [4]. 

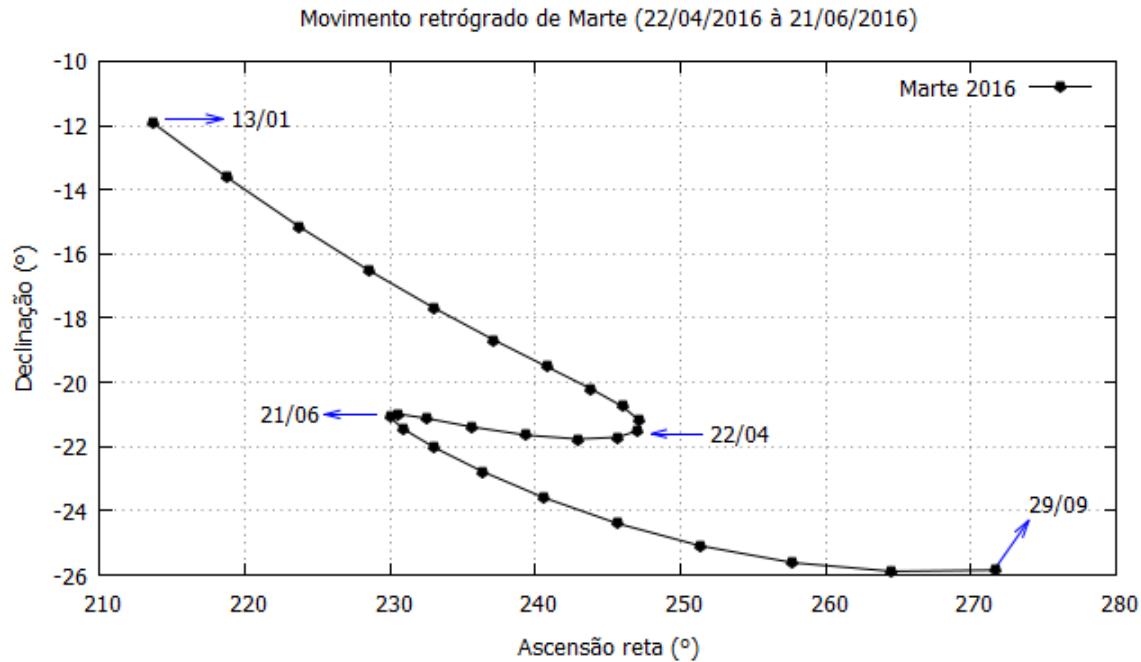


Figura 1: Representação do movimento retrógrado de Marte ocorrido de 22/04/2016 à 21/06/2016. A figura foi obtida a partir das datas fornecidas pela NASA, com os dados de declinação e ascensão reta obtidos através do software Stellarium.



3. MODELO PTOLEMAICO

Em seu trabalho, Ptolomeu transformou dados observacionais em valores numéricos, elaborando um modelo de sistema planetário que correspondesse às suas observações [8]. No universo de Ptolomeu, a única forma geométrica aceitável para explicar os fenômenos na Terra era o formato esférico. O Sol, a Lua e as estrelas não nascem e se põem ao mesmo tempo para todos os observadores na Terra, mas acontecem mais cedo para os que se situam no leste e mais tarde para aqueles localizados no oeste. Da mesma forma, eclipses lunares acontecem simultaneamente para todos os observadores, entretanto não são registrados no mesmo horário, sendo que a hora verificada por espectadores situados no leste é sempre mais tarde do que aquela registrada no oeste. Esta diferença é proporcional às distâncias entre os lugares de observação [6, 9].

Portanto, é coerente concluir que a Terra possui um formato esférico, uma vez que sua superfície curva separa os corpos celestes de forma regular para observadores em diferentes pontos do planeta. Se porventura a Terra fosse plana, todos os astros nasceriam e se poriam ao mesmo tempo para todos; se ela tivesse a forma de um triângulo ou um quadrado, todos os espectadores localizados no mesmo plano observariam os mesmos fenômenos ao mesmo tempo. Quando navegadores velejavam em direção a montanhas ou lugares altos, notou-se que de qualquer ângulo e em qualquer direção, era possível observar que aos poucos o ponto mais alto ia aparecendo como se estivesse ascendendo do mar [6].

Até ser definitivamente abalada pela astronomia copernicana, a cosmologia de Aristóteles que mais tarde seria adotada por Ptolomeu, foi o único pensamento sistemático que permaneceu intacto por mais de dez séculos [10]. De acordo com Aristóteles, quanto mais pesado um corpo, maior é a sua tendência em ser atraído pelo centro da Terra, assim como maior a sua velocidade de queda [11]. Na concepção aristotélica a Terra era imóvel, pois se ela girasse então um objeto lançado verticalmente para cima não cairia no mesmo lugar, uma vez que o solo se deslocaria para leste enquanto o objeto permanecesse no ar. Posteriormente, esta ideia foi aperfeiçoada por Ptolomeu, que argumentou que se a Terra realmente girasse seria mais difícil atirar uma flecha para leste do que para oeste, ou mesmo que corpos na sua superfície deveriam ser atirados para longe devido à grande velocidade de rotação do planeta [1].

Segundo Aristóteles, o movimento celeste observado só poderia ser explicado se a Terra além de não possuir rotação, estivesse localizada no meio dos céus. Com a Terra no centro do universo, de horizonte a horizonte seria possível enxergar um céu noturno com metade das estrelas, ou seja, metade do Zodíaco. No entanto, se a Terra não estivesse no centro da esfera estelar, não veríamos exatamente metade do Zodíaco, mas algumas vezes mais que a metade, enquanto outras vezes menos da metade da esfera de estrelas [1].

Ao propor um modelo de Sistema Solar, o objetivo de Ptolomeu era fazer com que ele se adequasse às observações realizadas. Na época, a maioria dos astrônomos concordavam que as órbitas das estrelas fixas estavam muito mais longe da Terra, e que a esfera da Lua era a mais próxima. No primeiro modelo proposto por Ptolomeu, representado pela figura 2, a Terra é localizada no centro do Sistema Solar, sendo seguida pela Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno, uma concepção que tamanha a

autoridade de Ptolomeu foi aceita por praticamente todos os astrônomos subsequentes até o século XVI.

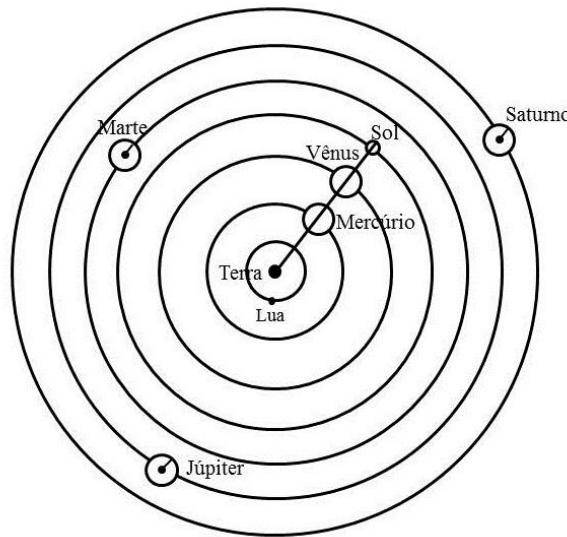


Figura 2: Representação do primeiro modelo proposto por Ptolomeu. Fonte: Elaborada pela autora, porém inspirada por Linton, 2004, p. 62.

A figura 2 já ilustra a natureza epicíclica do movimento planetário, no qual o movimento dos planetas é descrito por uma composição de movimentos circulares. É pertinente notar que a linha que conecta o centro da Terra ao Sol também liga o centro dos epiciclos das órbitas de Mercúrio e Vênus, enquanto que para os planetas exteriores, o raio que o conecta ao centro de seu epiciclo é paralelo à linha Terra-Sol [8].

No Sistema geostático de Ptolomeu, os planetas se movem ao longo de um círculo menor chamado **epiciclo**, cujo centro se move em um círculo principal denominado **deferente**. Embora o modelo proposto por Ptolomeu tenha sido baseado na filosofia de Aristóteles, ele não hesitou em realizar devidas adaptações quando exigido pelos seus dados observacionais. No segundo modelo de Ptolomeu, ilustrado pela figura 3, a Terra é levemente deslocada do centro do universo, não estando localizada exatamente no centro no deferente. Para ajustar melhor à teoria às observações, Ptolomeu ainda introduziu um ponto chamado de *equante*, cuja posição é exatamente simétrica a da Terra em relação ao centro do círculo, que é localizado entre o equante e a Terra [12].

O equante representa um ponto em torno do qual o centro do epiciclo do planeta se desloca com velocidade angular constante, contemplando a ideia de um movimento uniforme não mais em relação ao centro do deferente ou em relação à Terra, mas em torno de um ponto vazio [2].

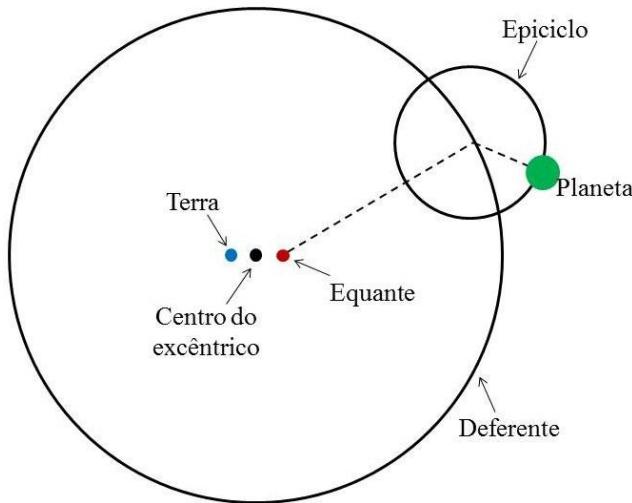


Figura 3: Representação do segundo modelo proposto por Ptolomeu. Fonte: Elaborada pela autora, porém inspirada por Saraiva, p. 3.

Movimentos mais simples podem ser descritos por um deferente com apenas um epiciclo, enquanto outros mais complexos são uma composição do movimento de vários epiciclos que se movem com velocidades múltiplas da velocidade do deferente.

4. MODELO COPERNICANO

Na obra *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, publicada inicialmente em 1543, o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) apresenta uma nova abordagem acerca do pensamento astronômico, marcando o início de um período de intensas mudanças de paradigmas. A denominada Revolução Copernicana não foi baseada em fatos novos e/ou observações diretas, porém em uma reinterpretação de dados que além de resultarem em um novo modelo de Sistema Solar, transformaram os principais conceitos da Astronomia, assim como a visão que o homem tinha do universo [2,3,13].

Analizado a partir de uma perspectiva histórica, a obra de Copérnico apresenta um caráter paradoxal na qual é ao mesmo tempo, antiga e conservadora, moderna e radical. O trabalho possui uma íntima relação com a antiga tradição astronômica, pois utiliza de métodos e figuras semelhantes às de Ptolomeu, como o uso de deferentes, epiciclos, esferas concêntricas, assim como a ideia de um universo “pequeno” ao redor do Sol, que não é visto como uma das estrelas. Por outro lado, Copérnico produz um texto que influencia significativamente o desenvolvimento das obras de Johannes Kepler, Galileu Galilei e Isaac Newton. É com estes revolucionários que a verdadeira revolução copernicana acontece, somente mais de meio século após a morte do astrônomo polonês [13].

No prefácio de seu livro, dedicado ao Papa Paulo III, Copérnico transferiu ao Sol muitas das funções astronômicas atribuídas inicialmente à Terra, colocando-o no centro do Universo com o nosso planeta em movimento ao seu redor. Em um contexto social no qual levaram-se séculos para o estabelecimento de um sistema geocêntrico, Copérnico reconhece o impacto que tais inovações provocariam na sociedade vigente: “Bem posso presumir, Santíssimo Padre, que certas pessoas, assim que ouvirem que, neste livro sobre as Revoluções das Esferas do Universo, eu atribuo movimento ao globo terrestre, gritarão que, sustentando tais opiniões, devia ser imediatamente obrigado a deixar o palco sobre vrias” [13].

Apesar de não ter sido o primeiro a sugerir um modelo heliocêntrico⁵, a grande contribuição de Copérnico foi realizar modificações no modelo de Ptolomeu que se ajustassem aos movimentos observados [8]. Pela primeira vez, as técnicas tradicionais da astronomia foram contestadas, uma vez que o modelo de Ptolomeu deixou lacunas acerca do problema dos planetas (movimento retrógrado). Uma das grandes insatisfações de Copérnico estava relacionada ao uso do equante por Ptolomeu, que violava os ideais platônicos de um movimento circular uniforme em relação à Terra [2].

Pressupondo-se que a esfera é a figura mais perfeita  que todas as coisas possuem uma tendência a assumir esta forma, Copérnico concluiu  que o universo é esférico e utilizando de argumentos clássicos como os de Ptolomeu, ele também reconheceu a esfericidade da Terra, assumindo que esta é a forma geométrica predominante entre os corpos celestes. Até este momento, Copérnico não rompe com a cosmologia tradicional predominante, quando também declara que somente o movimento circular uniforme ou uma combinação de tais movimentos, conseguia explicar a ocorrência dos movimentos irregulares observados.

O rompimento com as ideias conservadoras culminou com a percepção de que se a Terra era uma esfera como os outros corpos celestes, ela então deveria compor os movimentos circulares que eram naturais de uma esfera. Admitindo-se a possibilidade do movimento da Terra, surge então uma indagação acerca da sua posição relativa, que até o momento é mantida no centro do Universo [13].

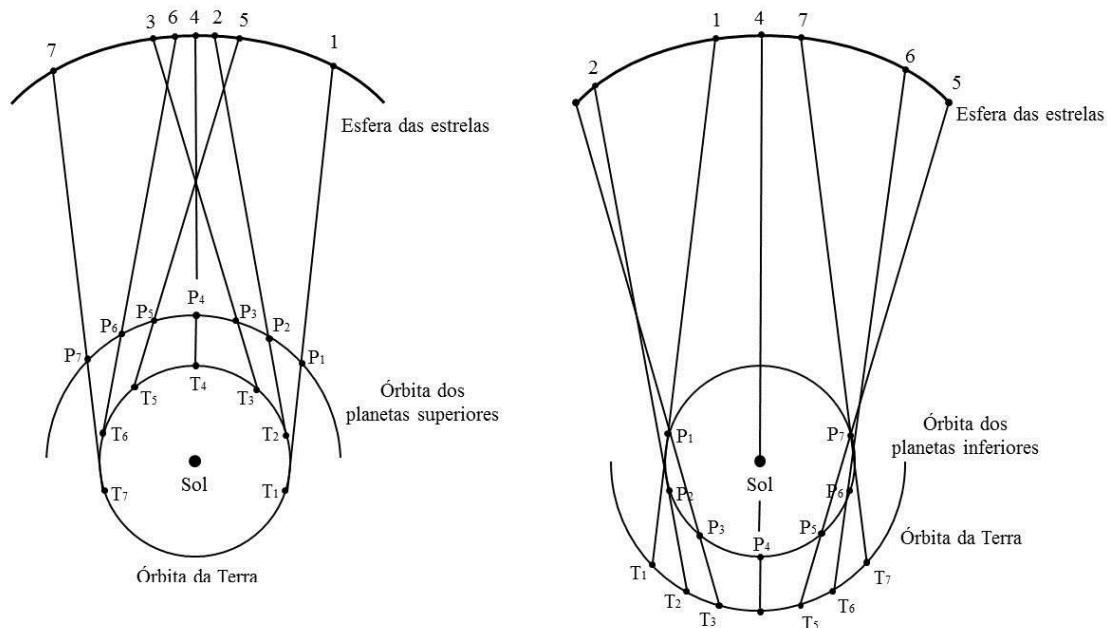
O argumento mais poderoso que ainda mantinha a Terra fixa no centro do universo, tinha por base uma concepção aristotélica que afirmava que a Terra⁶ como o elemento mais pesado atraia para si todas as outras coisas. Desta forma, devido ao seu próprio peso, ela permaneceria em repouso no centro do universo, com todos os outros corpos girando ao seu redor. Apesar disso, Copérnico assume que o movimento da Terra é natural e que é mais provável que ela se move do que permaneça em repouso, porém para muitos seus argumentos não foram mais convincentes do que aqueles que defendiam uma Terra imóvel [8,13].

Assim como Ptolomeu, Copérnico discute o movimento retrógrado dos planetas e ao contrário do primeiro que utilizou de epiciclos para esclarecer os padrões de movimento observados, Copérnico não os utiliza e conclui que o movimento retrógrado é um movimento aparente causado pelo próprio movimento orbital da Terra, como observado na figura 4a. Nela identificamos as posições da Terra que se move de T₁ à T₇ e

⁵ O astrônomo pitagórico Aristarco já havia apresentado uma hipótese acerca de um modelo heliocêntrico do Sistema Solar.

⁶ Aqui a palavra “Terra” apresenta um duplo sentido, expressando o significado de “planeta”, assim como um dos quatro elementos.

as sucessivas posições de um planeta superior⁷ em sua órbita de P_1 à P_7 . Os números de 1 a 7 representam as aparentes posições do planeta observadas da Terra, que são encontradas ao traçarmos uma linha reta entre a Terra e o planeta até a esfera das estrelas. De acordo com a primeira figura, o planeta se move para leste (movimento normal), de 1 para 2 e de 2 para 3, porém de 3 para 4 ele inverte o seu movimento (oeste) até a posição 5 e só então retorna para leste, de 5 para 6 e de 6 para 7. Esse fenômeno é observado quando a Terra que possui uma velocidade orbital maior ultrapassa o planeta mais distante com velocidade orbital menor. A figura 4b representa a órbita de um planeta inferior⁸ que ao ultrapassar a Terra, possibilita a visualização do movimento retrógrado [13].



Figuras 4a e 4b: Movimento retrógrado para a órbita de um planeta superior e para a órbita de um planeta inferior, respectivamente. Fonte: Elaborada pela autora, porém inspirada por Kuhn, 2002, p. 183.

Inicialmente, Copérnico utilizou apenas um círculo (deferente) para cada planeta totalizando oito círculos (um para cada um dos seis planetas conhecidos⁹, um centrado no Sol e um círculo para a Lua) com o objetivo de esclarecer o movimento retrógrado observado. Entretanto, quando utilizado para a previsão da posição dos planetas, o modelo de Copérnico demonstrava ser muito menos preciso que o de Ptolomeu. Como consequência, ele foi forçado a reformular o seu modelo acrescentando epiciclos para cada um dos planetas, porém quando novamente analisado seu modelo provou ser tão bom quanto o de Ptolomeu, porém não mais exato [13].

⁷ Planeta cuja órbita é exterior à órbita da Terra. Ex: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

⁸ Planeta cuja órbita é interior à órbita da Terra. Ex: Mercúrio e Vênus.

⁹ Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno.

Assim sendo, somos levados a discutir sobre o porquê de hoje sabermos que esses modelos são razoavelmente eficazes. A resposta só viria aparecer três séculos após a morte de Copérnico com a emergência da teoria de Fourier, que nos forneceu uma descrição mais completa sobre diversas teorias astronômicas.

5. SÉRIES DE FOURIER

A construção de máquinas térmicas, o aperfeiçoamento de termômetros e investigações acerca de fenômenos relacionados ao calor, despertaram a atenção de muitos estudiosos no século XVIII. É neste contexto que o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier apresenta em 1807 um estudo a respeito da lei de propagação do calor, no qual deduz a equação da condução do calor através de equações diferenciais parciais, desenvolvendo a solução a partir de séries trigonométricas [14].

De acordo com Fourier toda função periódica pode ser descrita como uma soma de senos e cossenos com frequências que são múltiplos inteiros da frequência fundamental de uma função. Assim, todo sistema periódico ao redor de um ponto pode ser descrito como uma soma de círculos com velocidades radiais múltiplas da velocidade média do sistema.

A fim de esclarecer o conceito de funções periódicas, apresentamos uma função $f: R \rightarrow R$ com período T que é periódica se $f(t + T) = f(t)$ para todo t , a exemplo da figura 5 que é uma representação gráfica da seguinte função:

Equação 1

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ 2, & \text{se } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

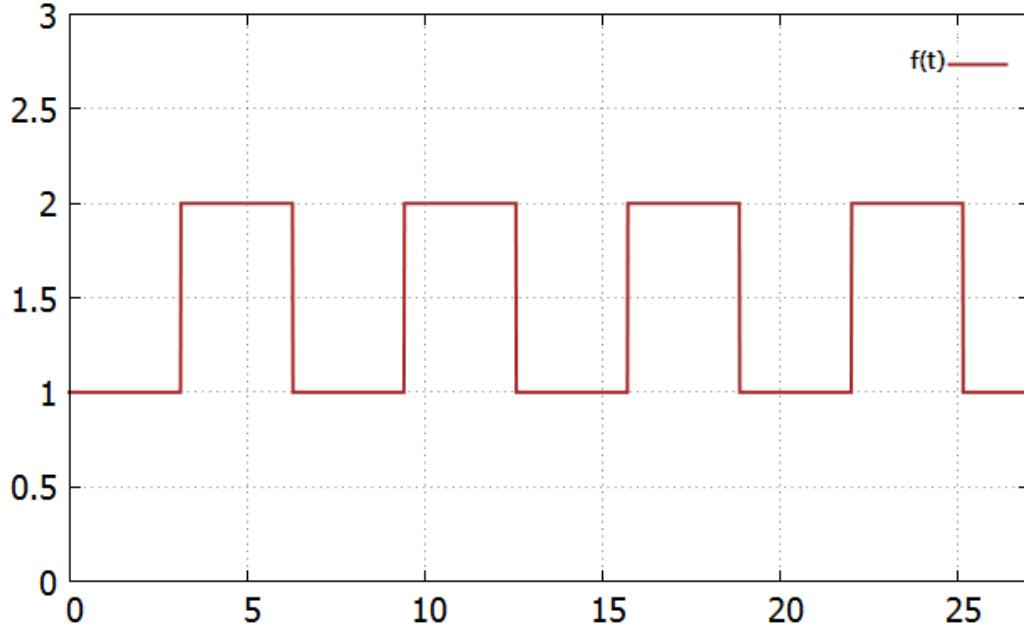


Figura 5: Representação da função $f(t)$

A Série de Fourier que converge uniformemente para $f(t)$ é dada por:

Equação 2

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Os coeficientes de Fourier são expressos por:

Equação 3

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

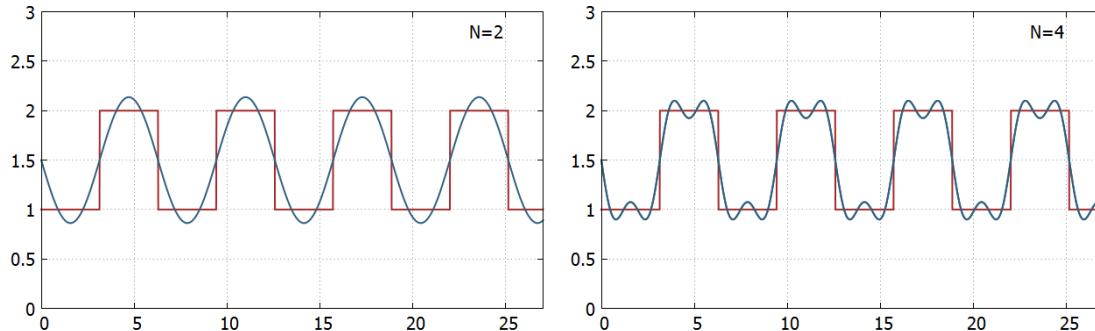
Equação 4

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

Equação 5

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt$$

Onde $\frac{2\pi}{T}$ representa a frequência angular¹⁰, T o período da função e n os múltiplos inteiros da frequência fundamental. Os valores das constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ e b_1, b_2, \dots, b_n fazem de $f(t)_n$ a melhor aproximação possível de $f(t)$. A aproximação da função aumenta conforme o aumento no número de termos da Série de Fourier, como observado na figura 6.



¹⁰ Representada pela letra ω .

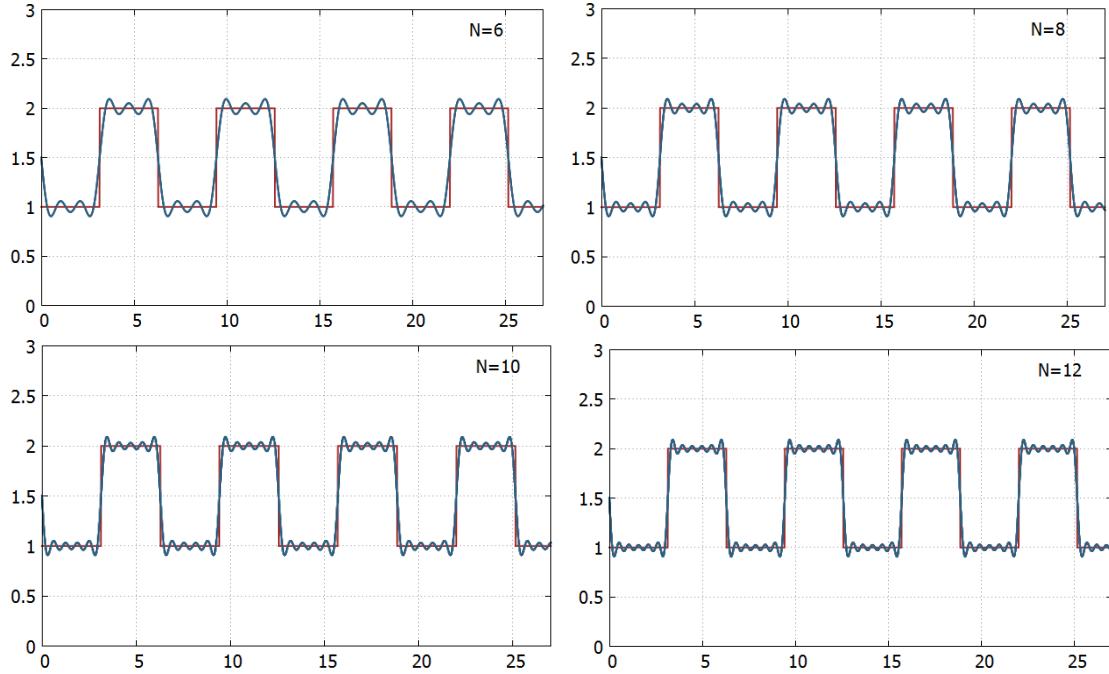


Figura 6: Aproximações da Série de Fourier para a função $f(t)$

As figuras acima representam a aproximação de Fourier $f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}$ da função¹¹ descrita pela equação 1 [15].

6. METODOLOGIA

Como citado, o objetivo desta pesquisa é comparar as órbitas do cinco planetas, obtidas a partir dos valores dos raios dos epiciclos de Copérnico, com as reais órbitas que hoje podem simuladas a partir de dados fornecidos pela NASA (National Aeronautics and Space Administration – Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço). Convém ressaltar que todos os cálculos e simulações foram realizados no software Maple V¹², porém as órbitas aqui apresentadas foram geradas a partir do software Gnuplot¹³, visto que este permite uma visualização de gráficos esteticamente melhor.

¹¹ Os índices 2,4,6,8,10 e 12 representam a quantidade de termos da Série de Fourier utilizados para a composição dos gráficos da função.

¹² Software desenvolvido pela Maplesoft utilizado para solução de expressões algébricas e desenho gráfico em duas ou três dimensões.

¹³ Software de construção de gráficos em duas ou três dimensões.

6.1. O movimento celeste;

Copérnico esclareceu que o movimento de um corpo celeste se dá pela combinação de círculos que se movimentam uniformemente em torno de si (de seus centros), assumindo um grande número de *orbes* para a explicação do movimento aparente dos planetas. Ele utiliza a palavra *orbe* em um sentido de *esférico* ou *circular*, e descreve que os orbes celestes se encaixam na seguinte ordem: o mais exterior e imóvel é o das estrelas fixas, seguido pelo de Saturno, Júpiter, Marte, o orbe o qual giramos, em seguida o de Vênus e o último é o de Mercúrio. O orbe da Lua gira em torno do centro da Terra.

Ao determinar os raios os epiciclos, Copérnico primeiramente divide o deferente da Terra¹⁴, o qual denomina de grande orbe, em 25 partes e assim assume valores para cada um dos deferentes e epiciclos dos planetas em relação ao número de partes do deferente da Terra [1].

6.2. Simulação das órbitas de Copérnico;

Nesta seção nos concentraremos em demonstrar como realizamos a simulação da órbita para os valores de Copérnico. No Commentarioulus, ele fornece os valores dos raios dos três epiciclos que aqui denominaremos r_1 , r_2 e r_3 para os cinco planetas estudados (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno).

A partir destes valores estruturamos as equações para o movimento do planeta nos eixos x e y, em função do tempo. Sabemos que qualquer ponto no plano cartesiano pode ser representado pelo par ordenado (x, y) , no qual x representa a distância que o ponto se encontra da origem em relação a horizontal, e y nos diz o quanto o ponto se afasta da origem em relação a vertical, como ilustrado na figura 7.

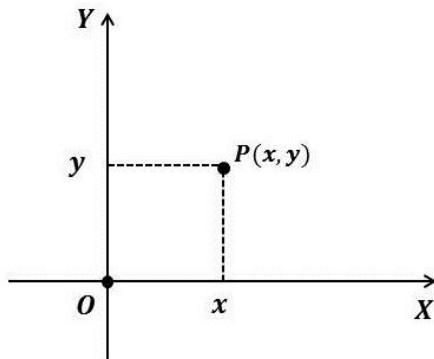


Figura 7: Representação do ponto $P(x, y)$ em coordenadas cartesianas. Fonte: Elaborada pela autora.

O ponto $P(x, y)$ também pode ser representado em um sistema de coordenadas bidimensional denominado coordenadas polares, no qual é localizado pelo par ordenado $P(r, \theta)$, em que r é a distância do ponto a origem, e θ o ângulo formado pela reta que une

¹⁴ Distância média da Terra ao Sol.

este ponto a origem em relação ao eixo x . No caso de uma órbita planetária, consideramos o ponto $P(r, \theta)$ como a localização do planeta em um determinado tempo, como representado na figura 8.

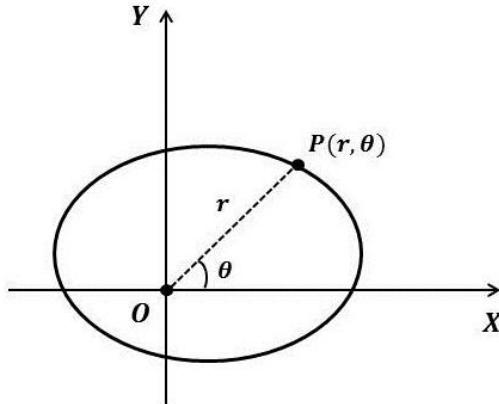


Figura 8: Representação da posição de um planeta (ponto $P(r, \theta)$) em coordenadas polares. Fonte: elaborada pela autora.

As coordenadas cartesianas e polares podem ser relacionadas de acordo com as seguintes equações:

Equação 6

$$x = r \cdot \cos \theta$$

Equação 7

$$y = r \cdot \sin \theta$$

Equação 8

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Equação 9

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Considerando que os corpos celestes se movimentam com uma frequência angular ω , temos que:

Equação 10

$$x = r \cdot \cos \omega t$$

Equação 11

$$y = r \cdot \sin \omega t$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$ as equações 10 e 11 pode ser escritas da seguinte forma:

Equação 12

$$x = r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Equação 13

$$y = r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

Assim as equações para a simulação da órbita de Copérnico podem ser representadas pelas expressões 14 e 15. Convém mencionar que o terceiro epiciclo (r_3) apresenta um movimento circular com o dobro da frequência fundamental e que a componente y do segundo epiciclo (r_2) apresenta um valor negativo visto que ele gira no sentido oposto aos outros epiciclos.

Equação 14

$$x(t) = r_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + r_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + r_3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} 2t\right)$$

Equação 15

$$y(t) = r_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - r_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + r_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} 2t\right)$$

Nas expressões T representa o período orbital do planeta. Os gráficos destas equações em função do tempo para cada planeta serão apresentados na próxima seção.

6.3. Simulação das reais órbitas dos planetas;

O modelo heliocêntrico de Copérnico foi uma grande inspiração para o trabalho de Johannes Kepler, que apesar de ter vivido em uma época de grande perigo para aqueles que concordassem com tais ideias, dedicou sua vida para desvendar os grandes mistérios que envolviam o Cosmos. Utilizando dados astronômicos do dinamarquês Tycho Brahe, Kepler investigou o movimento real da Terra e Marte em torno do Sol, abandonando a ideia de que as órbitas eram curvas perfeitas, propondo então que Marte assim como os outros planetas girava em torno do Sol não em um círculo, mas em uma elipse com o Sol em dos seus focos¹⁵.

As conclusões empíricas de Kepler somente foram comprovadas anos após a sua morte pelo físico inglês Isaac Newton, que demonstrou matematicamente a partir das leis da mecânica e da gravitação universal que as órbitas elípticas dos planetas são dadas por¹⁶ [16].

¹⁵ Essa é a descrição da primeira Lei de Kepler que diz que “um planeta se move em uma elipse com o Sol em um dos seus focos”.

¹⁶ Apresentamos a demonstração desta equação no Apêndice A.

Equação 16

$$r(\varepsilon, \theta) = \frac{r_m \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$$

Onde r_m é a distância média do planeta ao Sol, ε é a excentricidade do planeta e θ representa o ângulo que o planeta faz com o eixo que liga o Sol ao periélio.

A partir de estudos sobre a velocidade dos planetas e através de inúmeras tentativas, Kepler concluiu que a “a linha que liga o Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais¹⁷”, porém o planeta não percorre ângulos iguais em tempos iguais. Portanto, a equação que utilizamos para a simulação das órbitas é uma integral¹⁸ de t que descreve como o tempo varia com os valores dos ângulos:

Equação 17

$$t = \int_0^\theta \frac{1}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \theta)^2} d\theta$$

Dessa forma, obtemos uma função inversa que descreve a variação dos ângulos percorridos pelo planeta em função do tempo, cujas componentes x e y podem ser escritas da seguinte forma:

Equação 18

$$x(t) = r[\theta(t)] \cdot \cos [\theta(t)]$$

Equação 19

$$y(t) = r[\theta(t)] \cdot \sin [\theta(t)]$$

Uma vez que as órbitas planetárias podem ser descritas como uma soma de senos e cossenos, ao realizarmos a expansão de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, obtemos:

Equação 20

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi}{T} nt \right)$$

Equação 21

$$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left(\frac{2\pi}{T} nt \right) + d_n \sin \left(\frac{2\pi}{T} nt \right)$$

¹⁷ Descrição da segunda Lei de Kepler que é uma consequência direta da conservação do momento angular, como foi demonstrada por Newton.

¹⁸ Fonte: Symon, 1982.

Os coeficientes, a_0, a_n, b_n, c_n, d_n são calculados a partir das equações 3, 4 e 5, sendo que a_0 e c_0 correspondem ao deslocamento do Sol em relação ao centro da circunferência, isto é, o movimento não é heliocêntrico, porém heliotático (o Sol não está no centro do movimento). Como o Sol apresenta um deslocamento apenas no eixo x , o valor de c_0 é igual a zero. Os coeficientes são utilizados para o cálculo dos raios dos deferentes e epiciclos dos planetas, que mais tarde compararemos com os valores propostos por Copérnico:

Equação 22

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{a_n + d_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_n - b_n}{2}\right)^2}$$

Equação 23

$$r_n = \sqrt{\left(\frac{a_n - d_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_n + b_n}{2}\right)^2}$$

Onde R_n é o raio do epiciclo de frequência $\frac{2\pi n}{T}$ e r_n é o raio do epiciclo que se move com sentido contrário e com frequência $-\frac{2\pi n}{T}$. Cada epiciclo também possui em suas componentes $x(t)$ e $y(t)$ fases (ângulos), denominadas de α_n e β_n , porém supomos que a medida desses ângulos seja em relação ao periélio, assim os valores de α_n e β_n são geralmente zero ($\alpha_n = \beta_n = 0$).

Dessa maneira, as equações que utilizaremos para a simulação das órbitas reais dos planetas, a fim de comparação com a órbita proposta por Copérnico, são da seguinte forma:

Equação 24

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \alpha_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \beta_n\right)$$

Equação 25

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \alpha_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \beta_n\right)$$

Apresentamos no apêndice B, para o caso do planeta Marte, o programa em Maple com a solução de todas as equações aqui descritas.

7. RESULTADOS

Os gráficos apresentados abaixo representam a simulação das órbitas de cada um dos cinco planetas aqui considerados. O gráfico de cor azul (Copérnico) representa a simulação da órbita a partir dos valores dos raios dos epiciclos fornecidos por Copérnico, apresentados na tabela 1; o de cor preta (Órbita real) demonstra a real órbita do planeta com base nos valores da sua distância orbital média e excentricidade, indicados na tabela 2; por fim, o gráfico de cor vermelha (Expansão de Fourier) representa a expansão de Fourier com dois coeficientes para a equação da órbita real do planeta.

RAIOS DOS EPICICLOS DE COPÉRNICO			
	r_1	r_2	r_3
Mercúrio	$9 + 2/5$	$1 + 41'$	$34'$
Vênus	18	$3/4$	$1/4$
Marte¹⁹	38	$5 + 34'$	$1 + 51'$
Júpiter	$130 + 5/12$	$10 + 6'$	$3 + 22'$
Saturno	$230 + 1/6$	$19 + 41'$	$6 + 34'$

Tabela 1: Valores dos raios dos epiciclos propostos por Copérnico. O raio r_1 representa o deferente do planeta em número de partes; os raios r_2 e r_3 são o primeiro e segundo epiciclos respectivamente, em número de partes e minutos²⁰. Fonte: Commentariolus

DADOS ORBITAIS		
	Distância média ao Sol (10^6 km)	Excentricidade (ϵ)
Mercúrio	57	0.205
Vênus	108	0.067
Marte	228	0.093
Júpiter	779	0.048
Saturno	1420	0.053

Tabela 2: Valores da distância média ao Sol e excentricidade de cada planeta. Fonte: NASA

¹⁹ No Commentariolus o valor para o grande orbe de Marte é de 30 partes, porém utilizando dados do *De revolutionibus* e anotações originais de Copérnico, o autor Edward Rosen em seu livro “*Copernicus’ spheres and epicycles: Archives Internationales d’Histoire des Sciences*” corrige o valor para 38 partes.

²⁰ Antigamente era comum a utilização do minuto como 1/60 da unidade estudada.

Mercúrio:

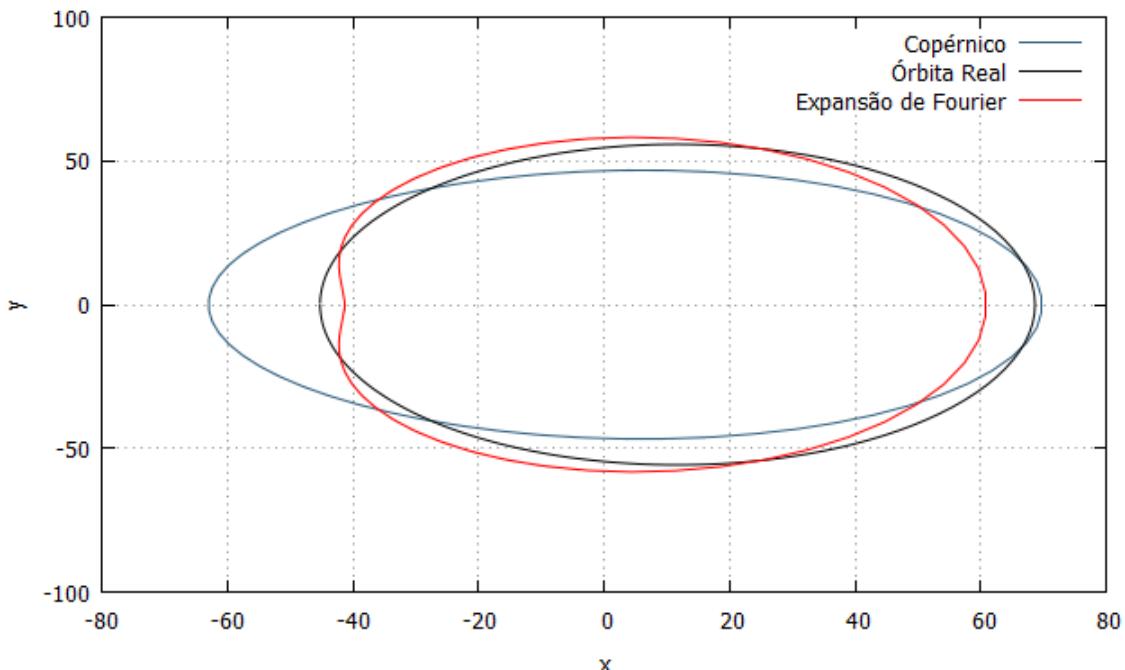


Figura 9: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com dois coeficientes (vermelho) para o planeta Mercúrio.

Vênus:

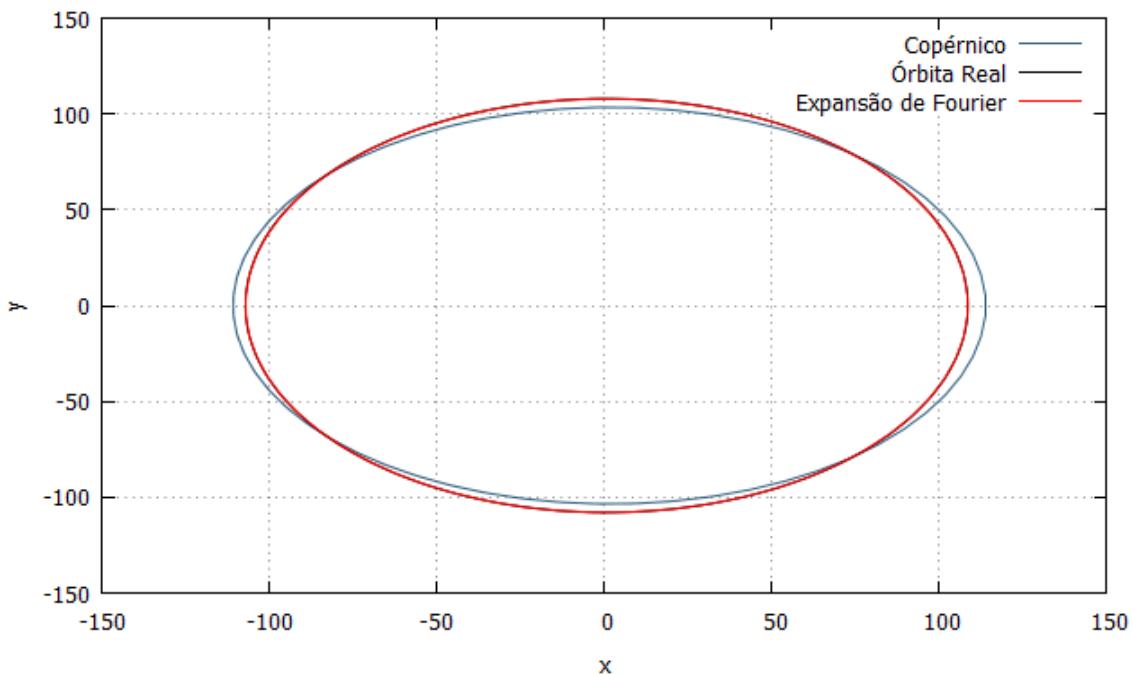


Figura 10: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com dois coeficientes (vermelho) para o planeta Vênus.

Marte:

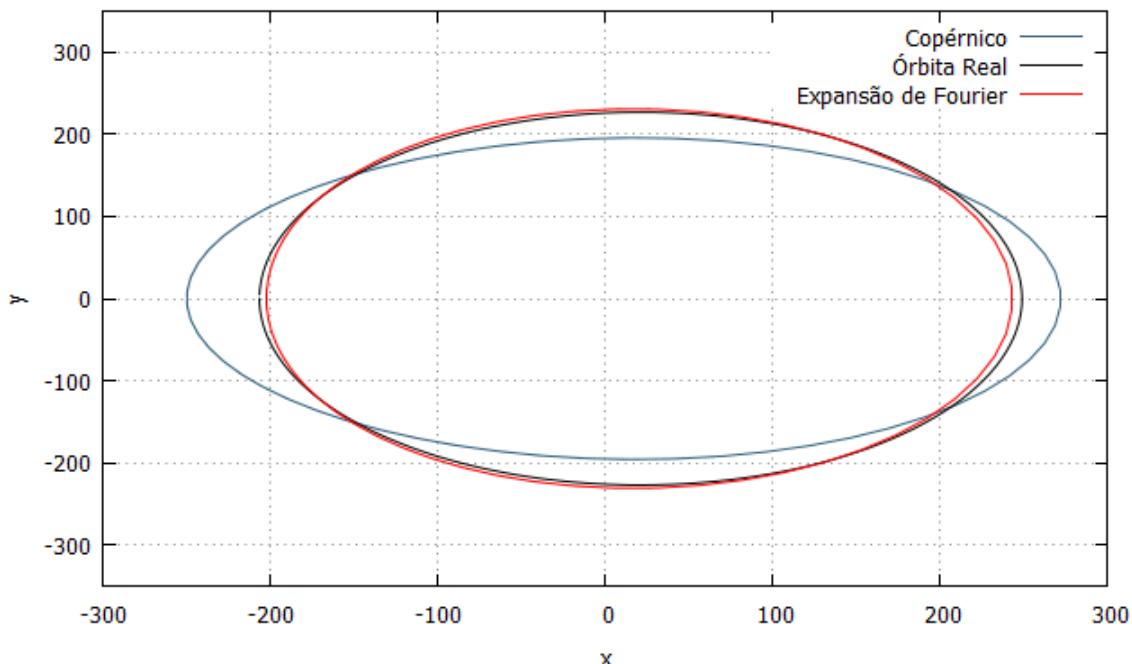


Figura 11: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com dois coeficientes (vermelho) para o planeta Marte.

Júpiter:

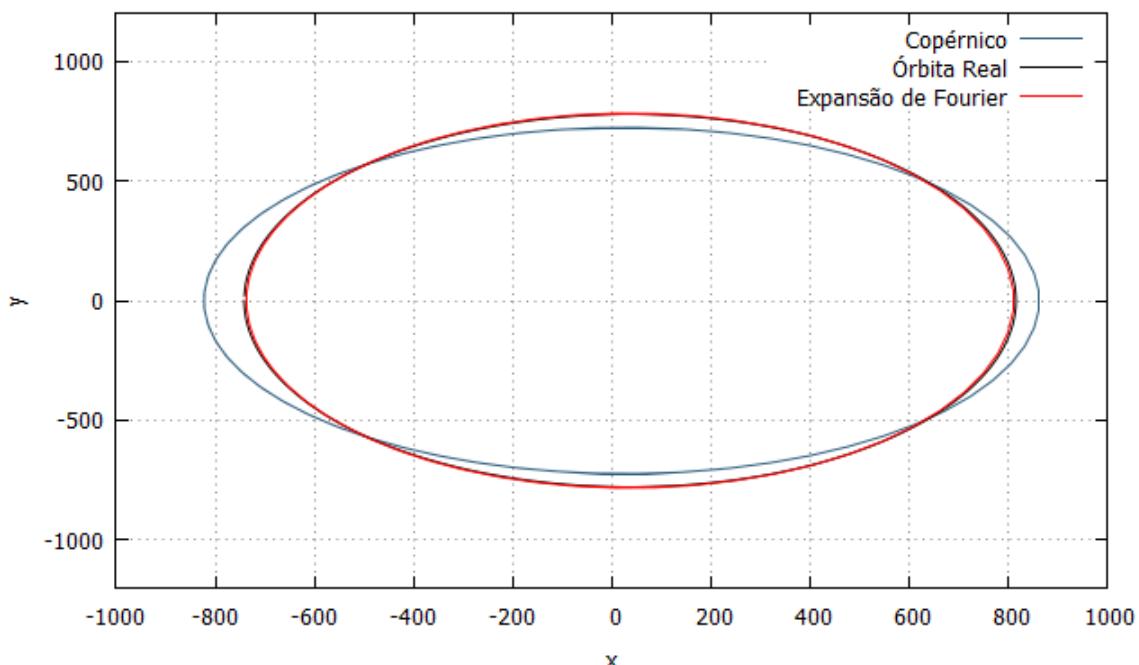


Figura 12: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com dois coeficientes (vermelho) para o planeta Júpiter.

Saturno:

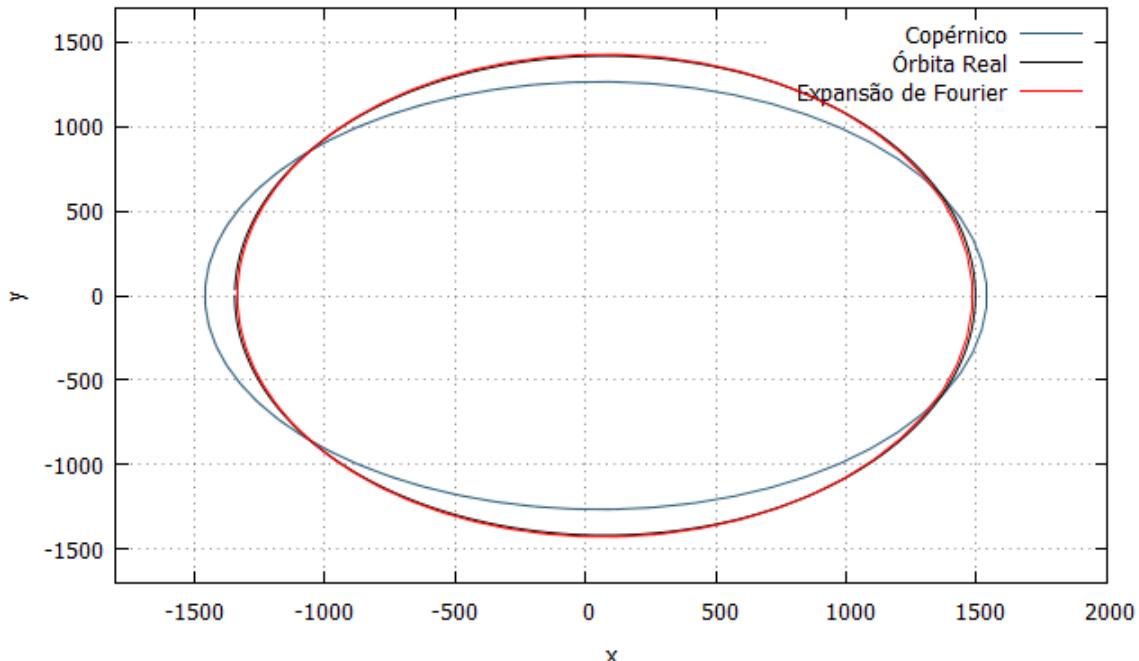


Figura 13: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com dois coeficientes (vermelho) para o planeta Saturno.

A seguir, apresentamos as mesmas simulações, porém o gráfico da expansão da série de Fourier (cor vermelha) representa uma simulação com três coeficientes para a equação da órbita real. Nossa objetivo é reforçar a ideia de que quanto maior o número de coeficientes utilizados, melhor é a aproximação da órbita.

Mercúrio:

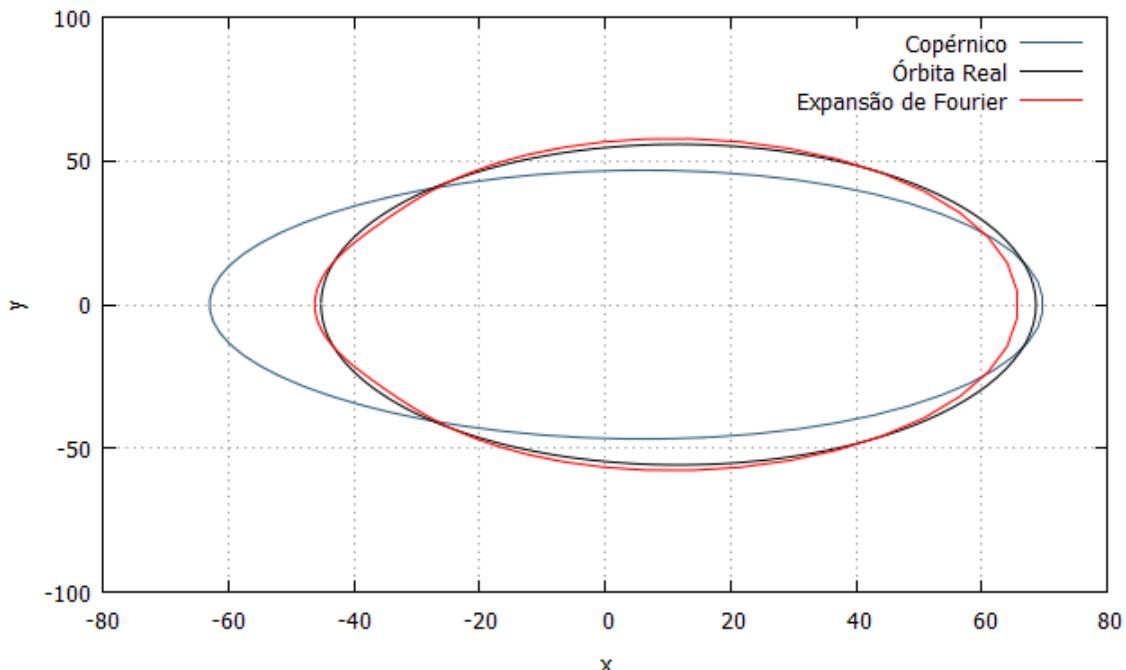


Figura 14: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com três coeficientes (vermelho) para o planeta Mercúrio.

Vênus:

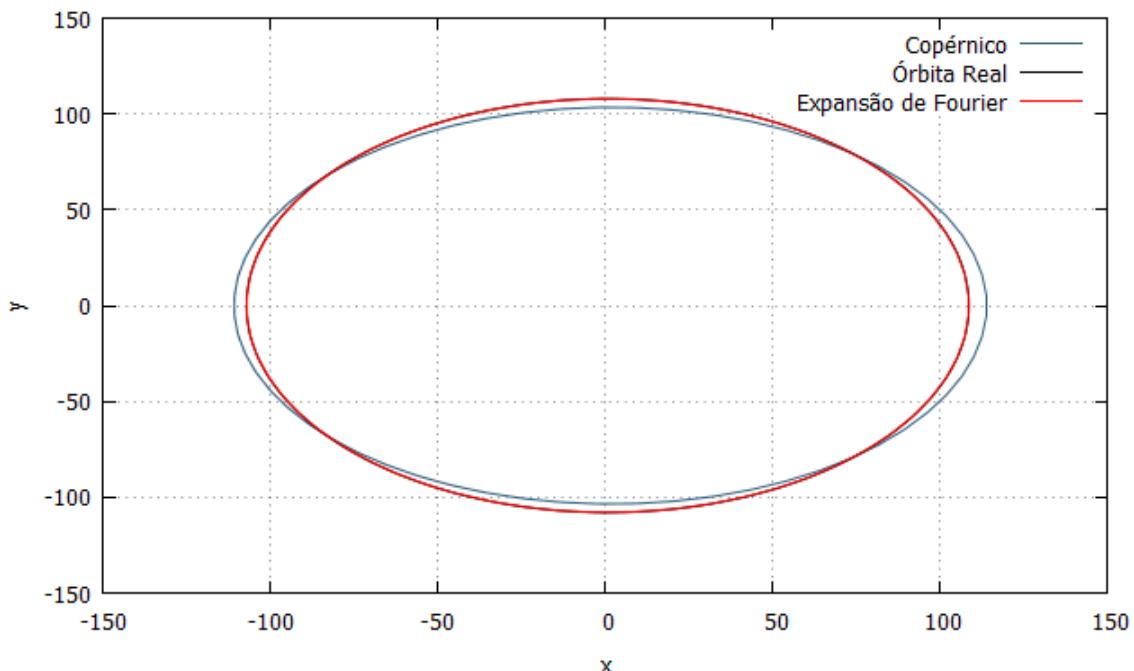


Figura 15: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com três coeficientes (vermelho) para o planeta Vênus.

Marte:

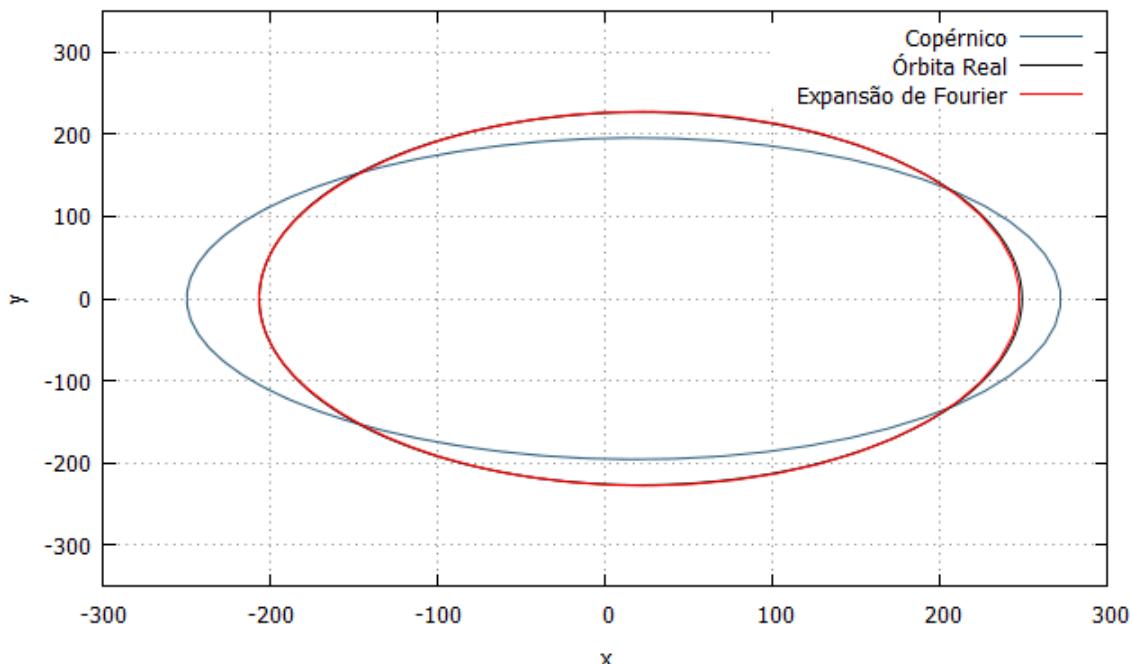


Figura 16: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com três coeficientes (vermelho) para o planeta Marte.

Júpiter:

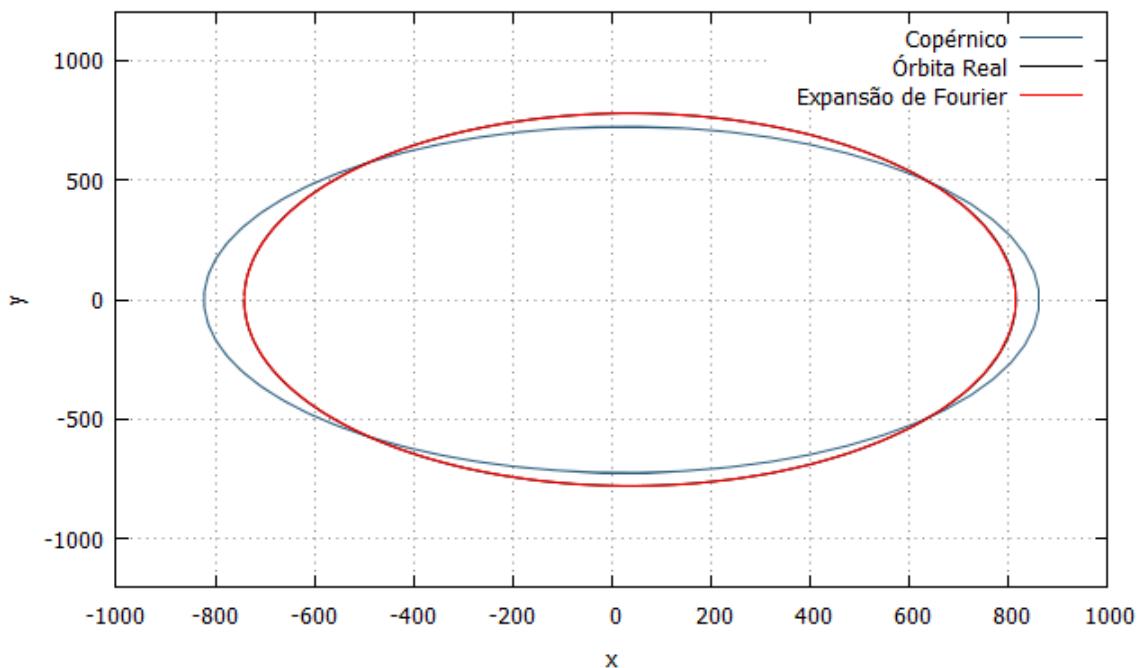


Figura 17: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com três coeficientes (vermelho) para o planeta Júpiter.

Saturno:

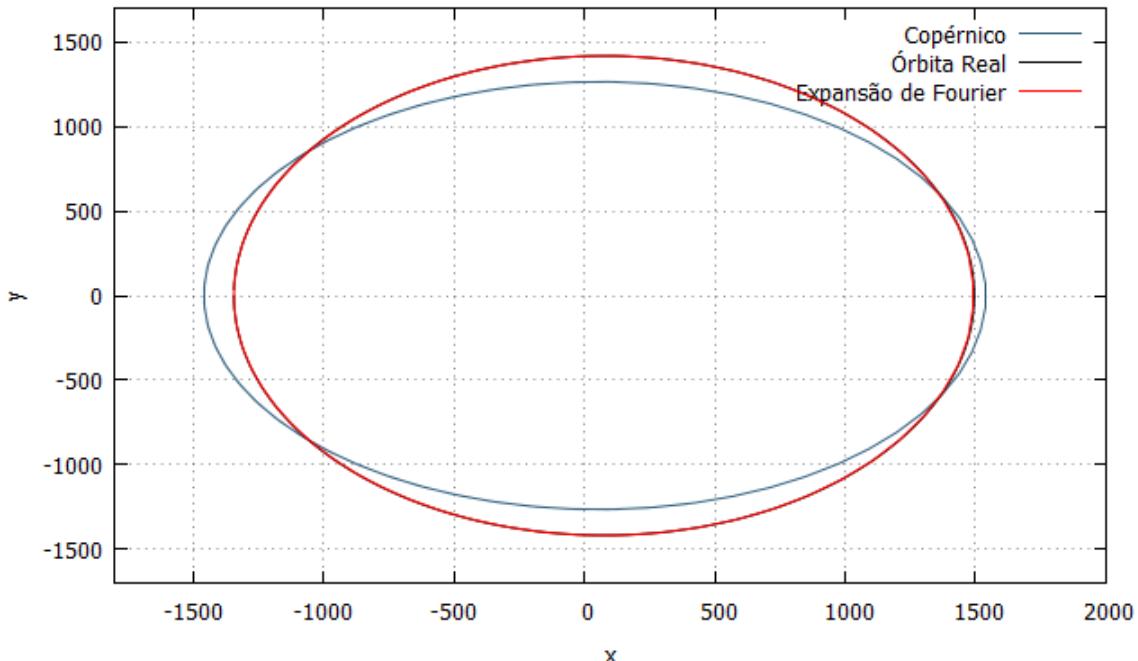


Figura 18: Simulação da órbita de Copérnico (azul), da órbita real (preto) e da expansão de Fourier com três coeficientes (vermelho) para o planeta Saturno.

Como citado, pretendemos comparar se os valores dos raios dos epiciclos propostos por Copérnico se aproximam dos valores dos raios calculados a partir da expansão da Série de Fourier para as órbitas dos planetas, obtidos a partir das equações 14 e 15. A seguir, apresentamos uma tabela com os valores dos raios. Nota-se que os valores dos raios de Copérnico na tabela 3 são diferentes daqueles da tabela 1, isso se deve porque durante a realização dos cálculos multiplicamos o valor de cada raio por um fator de 150/25, que representa o valor do deferente da Terra dividido em 25 partes. Mais detalhes podem ser encontrados no apêndice B.

		r_1	r_2	r_3
Mercúrio	Copérnico	56.4	10.1	3.4
	Expansão de Fourier	51.2	15.3	4.8
Vênus	Copérnico	108.0	4.5	1.5
	Expansão de Fourier	107.9	1.08	0.011
Marte	Copérnico	228.0	33.4	11.1
	Expansão de Fourier	223.1	30.9	4.53
Júpiter	Copérnico	782.5	60.6	20.2
	Expansão de Fourier	774.5	55.6	4.22
Saturno	Copérnico	1381.0	118.1	39.4
	Expansão de Fourier	1410.05	111.9	9.37

Tabela 3: Comparação dos raios dos epiciclos de Copérnico com os valores dos raios encontrados pela expansão da Série de Fourier das reais órbitas dos planetas.

8. ANÁLISE E DISCUSSÃO

Inicialmente, ao analisarmos as figuras 9,10,11,12 e 13 em relação aos gráficos da órbita real e da expansão da Série de Fourier para cada um dos planetas (gráficos de cores preta e vermelha respectivamente), notamos que a simulação da função que representa a expansão de Fourier, com apenas dois termos da série, é uma excelente aproximação para a função da órbita real dos planetas. A única exceção é o caso do planeta Mercúrio, no qual apenas dois termos da série não são suficientes para uma aproximação razoável da órbita, como observado na figura 9. Isso se deve ao fato de Mercúrio possuir uma órbita altamente excêntrica, com a distância ao Sol variando de 46 milhões no periélio à 70 milhões de quilômetros no afélio aproximadamente. Em relação aos outros planetas, as melhores aproximações são as de Vênus, Júpiter e Saturno nas quais os dois gráficos coincidem perfeitamente. Marte é o planeja cujos gráficos não se ajustam completamente, porém a expansão de Fourier ainda é uma aproximação satisfatória.

Em seguida, consideraremos as figuras 14 à 18 que representam a simulação da expansão de Fourier com três termos da série. Notamos que a diferença entre esses gráficos e as primeiras simulações de Vênus, Júpiter e Saturno (com dois termos da série) é muito sutil, uma vez que para esses planetas apenas dois termos da série já são suficientes para uma boa aproximação das suas órbitas reais. Observamos também que o gráfico da expansão da série de Fourier com três termos para a órbita de Mercúrio, comparado com o primeiro (dois termos) representa uma melhor aproximação da órbita real do planeta. Por fim, verificamos que o mesmo ocorre com o planeta Marte, de modo que como observado na figura 16, a simulação da expansão de Fourier coincide satisfatoriamente com o gráfico da sua órbita.

Ao compararmos os gráficos da simulação das órbitas elaborados a partir dos dados propostos por Copérnico (cor azul) com os das reais órbitas dos planetas (cor preta), nossos resultados indicaram que apesar de os gráficos não coincidirem, a melhor aproximação é a do planeta Vênus, enquanto as maiores discrepâncias ocorrem com os planetas Mercúrio e Marte, especialmente o primeiro. Júpiter e Saturno apresentam uma diferença entre as órbitas, porém não tão significativa quanto Mercúrio e Marte.

Como citado, neste estudo pretendemos analisar se o modelo de Copérnico é razoavelmente eficaz a partir de uma comparação dos valores dos raios dos epiciclos propostos por ele, com aqueles calculados a partir da expansão da Série de Fourier para as reais órbitas dos planetas. Notamos que em relação ao raio do primeiro epiciclo todos os planetas apresentam valores com a mesma ordem de grandeza²¹ o que sugere que o modelo de Copérnico é razoavelmente eficiente para a representação das órbitas dos planetas. Vênus é o que possui a melhor aproximação sustentando o que citamos anteriormente de que este é o planeta em que o gráfico da órbita de Copérnico mais se aproxima com a sua órbita real. Verificamos que para o segundo e terceiro epiciclos as diferenças entre as medidas aumentam, porém ao observarmos os gráficos de cada planeta, notamos que o primeiro epiciclo é o mais significativo para a simulação das órbitas. Devido a sua órbita altamente excêntrica, Mercúrio possui uma maior diferença entre os valores dos raios, e assim um maior erro experimental, seguido por Marte que apresenta o segundo maior valor de excentricidade da órbita.

Na seção 6.2. mostramos que realizamos a simulação da órbita para os valores de Copérnico a partir das equações 6 e 7, nas quais os epiciclos de raios r_1 , r_2 e r_3 se movimentam com frequências angulares t , t e $2t$ respectivamente. Diante disso, propomos uma pequena modificação nas equações de Copérnico, em que os epiciclos giram com frequências t , $2t$ e $3t$ como demonstrado pelas equações

Equação 26

$$x(t) = r_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + r_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + r_3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}3t\right)$$

Equação 27

$$y(t) = r_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - r_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + r_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}3t\right)$$

Utilizando as equações 26 e 27 elaboramos novos gráficos para os valores propostos por Copérnico (cor verde) e os comparamos com a real órbita (cor preta) de cada um dos planetas estudados.

²¹ Os valores dos raios se aproximam da mesma potência de 10.

Mercúrio:

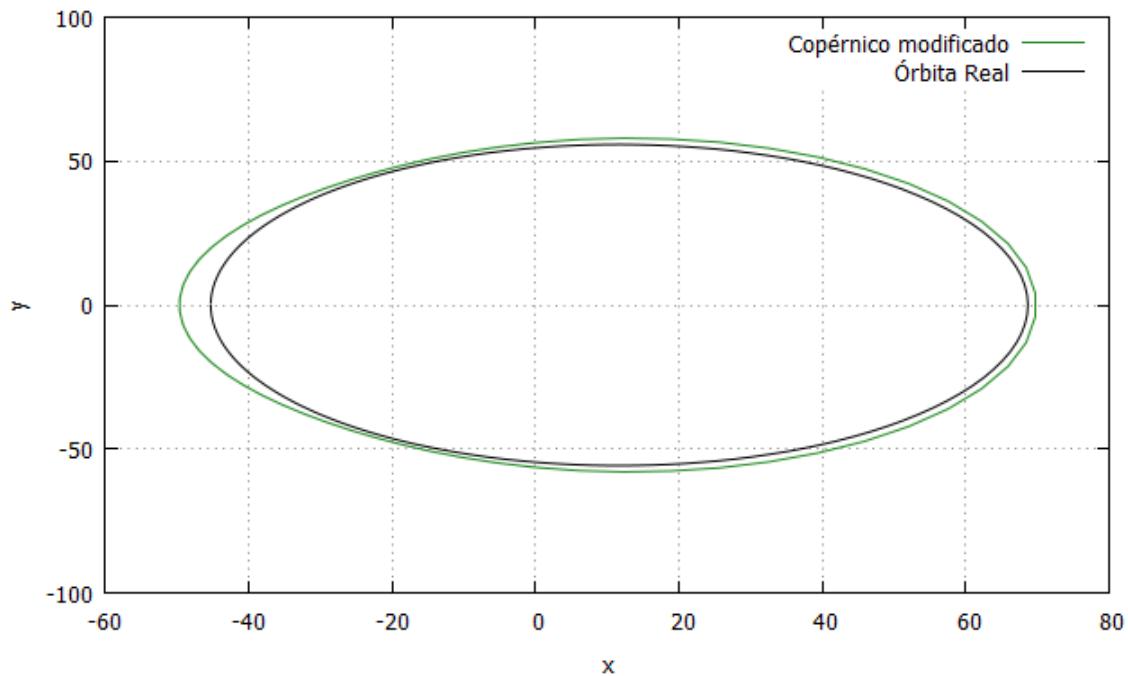


Figura 19: Simulação da órbita de Copérnico (verde) na qual os epiciclos se movimentam com frequências t , $2t$ e $3t$ e da órbita real (preto) do planeta Mercúrio.

Vênus:

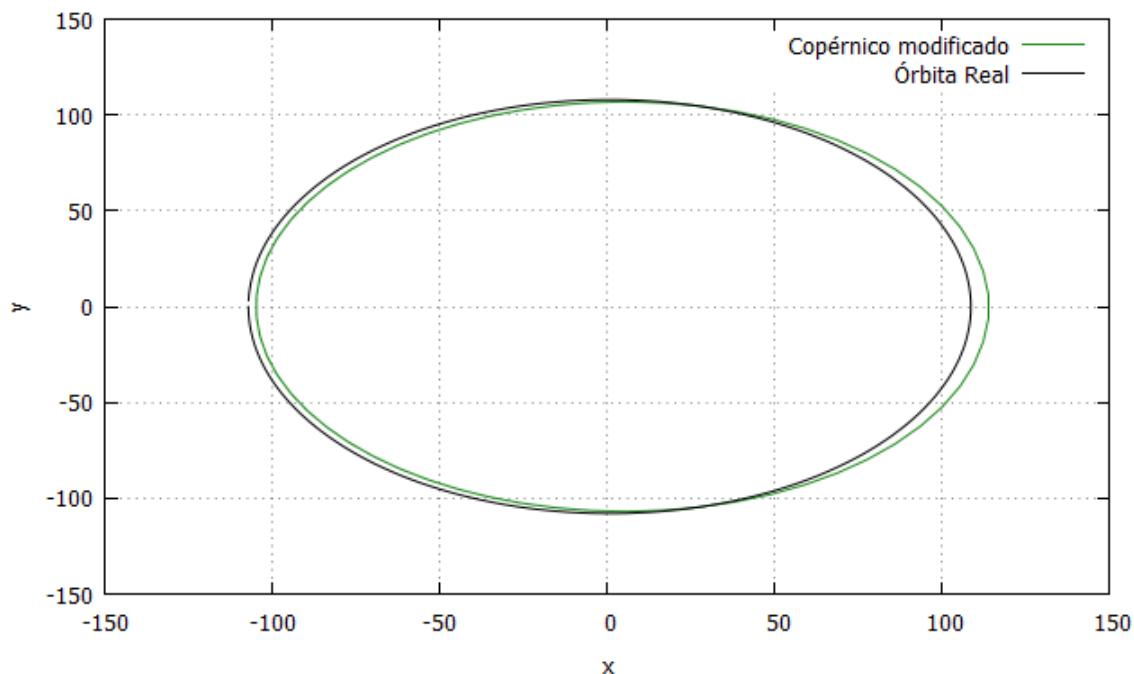


Figura 20: Simulação da órbita de Copérnico (verde) na qual os epiciclos se movimentam com frequências t , $2t$ e $3t$ e da órbita real (preto) do planeta Vênus.

Marte:

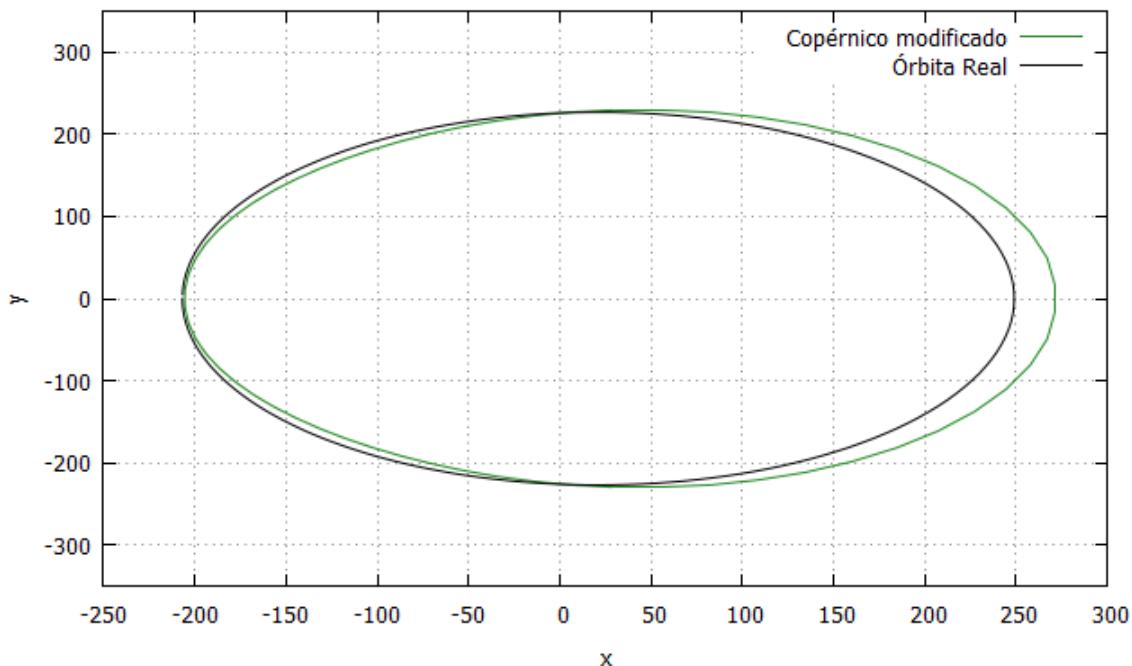


Figura 21: Simulação da órbita de Copérnico (verde) na qual os epiciclos se movimentam com frequências t , $2t$ e $3t$ e da órbita real (preto) do planeta Marte.

Júpiter:

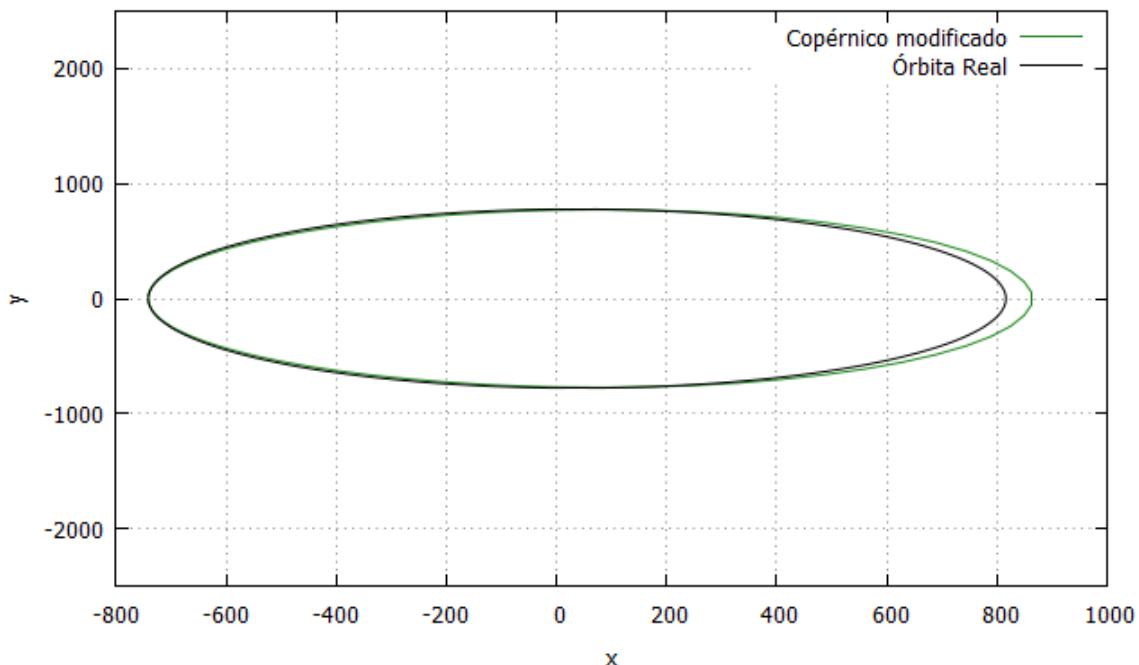


Figura 22: Simulação da órbita de Copérnico (verde) na qual os epiciclos se movimentam com frequências t , $2t$ e $3t$ e da órbita real (preto) do planeta Júpiter.

Saturno:

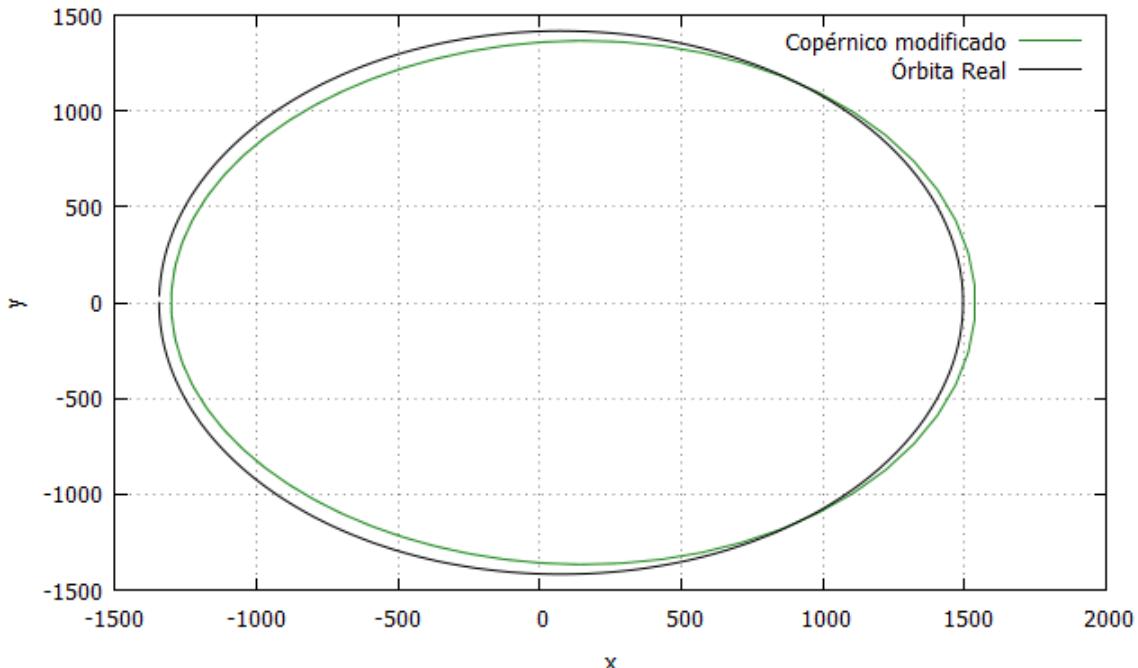


Figura 23: Simulação da órbita de Copérnico (verde) na qual os epiciclos se movimentam com frequências t , $2t$ e $3t$ e da órbita real (preto) do planeta Saturno.

Notamos que se em seu modelo Copérnico considerasse que o primeiro epiciclo se movimentasse com frequência t , o segundo com o dobro ($2t$) e o terceiro com o triplo da frequência fundamental ($3t$), a simulação das órbitas a partir dos valores dos raios dos epiciclos apresentados na tabela 3 se aproximariam mais da real órbita dos cinco planetas, como ilustrado nas figuras 19 à 23. Verificamos que os planetas Vênus, Júpiter e Saturno possuem as melhores representações, seguidos por Mercúrio e Marte que por possuírem órbitas mais excêntricas apresentam as maiores diferenças.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizamos a simulação das órbitas dos cinco planetas utilizando equações e dados observacionais que hoje são considerados autênticos para os estudos astronômicos. Da mesma forma simulamos as órbitas a partir dos dados de Copérnico que são o resultado apenas de observações e evidências empíricas, uma vez que ele não dispôs de nenhuma ferramenta tecnológica ou recurso matemático que validasse os seus modelos. Observamos que ainda sim os dados e o modelo de Copérnico são razoavelmente eficazes para a descrição das órbitas planetárias, visto que os gráficos são muito semelhantes entre si principalmente para o caso do planeta Vênus. Isso se deve ao fato dele possuir o mais baixo valor de excentricidade e estar relativamente próximo da Terra permitindo a obtenção de dados com um erro experimental menor. Os planetas Júpiter e Saturno também apresentam uma simulação copernicana satisfatória em relação às suas órbitas reais, enquanto Mercúrio e Marte possuem as maiores disparidades em razão de suas órbitas altamente excêntricas, que aumentam a probabilidade nos erros de medida.

Ao compararmos as reais órbitas com as respectivas expansões de Fourier, observamos que de fato o movimento dos planetas pode ser representado como uma soma infinita de senos e cossenos, dado que com apenas dois termos da série os gráficos já são uma excelente aproximação. De acordo com a literatura apresentada na seção 5, caso realizássemos a simulação com uma quantidade maior de termos da série, os gráficos coincidiriam perfeitamente.

Além disso, observamos que os valores dos raios dos epiciclos de Copérnico quando comparados com os raios da Série de Fourier das reais órbitas, possuem a mesma ordem de grandeza e erros experimentais muito pequenos. Diante da complexidade na obtenção de dados astronômicos e considerando que eles são resultado de um processo de tentativas e erros, julgamos que as diferenças entre os raios não são tão significativas.

Neste estudo, ponderamos sobre quais modificações Copérnico poderia ter realizado em seu modelo, de forma que seus dados se ajustassem melhor às observações. A primeira consiste em uma alteração na frequência angular dos epiciclos (equações 26 e 27) que como ilustrado nas figuras 19 à 23 a simulação de Copérnico é extremamente satisfatória para todos os planetas.

Como citado anteriormente, no processo de simulação das órbitas notamos que o planeta Vênus apresentou os melhores resultados, devido a sua baixa excentricidade, e os planetas Mercúrio e Marte as maiores discrepâncias, dada às suas órbitas altamente excêntricas. Concluímos então que se Copérnico retirasse o Sol do centro das órbitas e considerasse que os planetas possuem um movimento heliostático no lugar de heliocêntrico, ele provavelmente desenvolveria um modelo ainda mais preciso e conciso com os dados hoje disponíveis.

Por fim, somos levados a reconhecer a genialidade e sagacidade de Copérnico, um revolucionário que apesar de ter se deparado com a resistência a um pensamento inovador, descreveu de forma notável as reais órbitas dos planetas. Como perspectiva, podemos realizar um estudo semelhante utilizando os dados dos planetas apresentados por Ptolomeu no Almagesto, porém esta é uma tarefa mais difícil visto que o livro é de uma leitura complexa.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MARTINS, Roberto A. Introdução geral ao *Commentariolus* de Nicolau Copérnico. In: COPÉRNICO, N. **Commentariolus: Pequeno Comentário de Nicolau Copérnico sobre suas próprias hipóteses acerca dos movimentos celestes.** 2a. Ed. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2003.
- [2] DAMASIO, F. **O início da revolução científica: questões acerca de Copérnico e os epiciclos, Kepler e as órbitas elípticas.** Revista Brasileira de Ensino de Física. V. 33, n. 3. 2011.
- [3] FITZPATRICK, R. **A Modern Almagest.** 1a Ed. Austin, TX: Lulu, 2011.
- [4] MELO, J. R.; BRITO, P. E. **Construção de modelos astronômicos como forma de estudar as ideias de Ptolomeu e Copérnico acerca do movimento retrograde de Marte.** 13º ENAST, 2010. 
- [5] ROCHA, J. F. M. **Origens e evolução das ideias da física.** Salvador: EDUFBA, 2011.
- [6] PTOLEMY, N. **Almagest.** 1515.
- [7] KOESTLER, A. **The Sleepwalkers.** New York: The Macmillan Company, 1959.
- [8] LINTON, C. M. **From Eudoxus to Einstein: A history of mathematical astronomy.** New York: Cambridge University Press, 2004.
- [9] DANIELSON, D. R. **The book of the cosmos: imagining the universe from Heraclitus to Hawking.** Massachusetts: Cambridge Press, 2011.
- [10] PORTO, C. M.; PORTO, M. B. D. S. M. **A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna.** Revista Brasileira de Ensino de Física. V. 30, n. 4. 2008.
- [11] PORTO, C. M. **A física de Aristóteles: uma construção ingênua?** Revista Brasileira de Ensino de Física. V. 31, n. 4. 2009.
- [12] OLIVEIRA, K.; SARAIVA, M. F. **Astronomia e Astrofísica.** 3a. Ed. São Paulo: Editora livraria da física, 2014.
- [13] KUHN, T.; **A Revolução Copernicana.** Portugal: Edições 70, 2002.
- [14] PIFER, A.; AURANI, K. M. **A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas.** Revista Brasileira de Ensino de Física. V. 37, n. 1. 2015.
- [15] THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo.** 2a. Ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

[16] SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Addison Wesley: 1982.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Demonstração da equação 16:

Equação 16

$$r(\varepsilon, \theta) = \frac{r_m \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$$

Uma elipse é definida como uma figura na qual uma partícula se move de tal maneira que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante. Os pontos F_1 e F_2 são denominados focos da elipse.

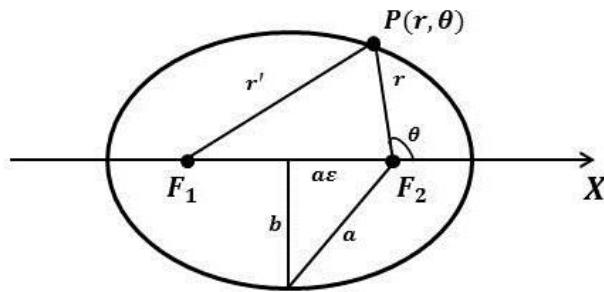


Figura 24: Representação da geometria da elipse. Fonte: Elaborada pela autora, porém inspirada por Symon, 1982, p. 156.

De acordo com a figura 24 temos que:

Equação 28

$$r' + r = 2a$$

Onde a é a metade do semi-eixo maior da elipse. Em relação às coordenadas polares com centro no foco F_2 e com o eixo x negativo passando pelo foco F_1 , e de acordo com a lei dos cossenos:

Equação 29

$$r'^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon \cdot \cos \theta$$

Onde $a\varepsilon$ é a distância do centro da elipse até o foco e ε é a excentricidade da elipse. Quando $\varepsilon = 0$, os focos da elipse coincidem e ela se torna uma circunferência. Se $\varepsilon = 1$, a elipse se torna uma parábola ou um segmento de reta. Ao substituirmos a equação 29 na

expressão 28, encontramos:

$$r(\varepsilon, \theta) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$$

No caso das órbitas planetárias a medida a representa a distância média do planeta ao Sol (r_m), assim a equação se torna:

$$r(\varepsilon, \theta) = \frac{r_m \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta}$$

APÊNDICE B: Programa em Maple para o caso do planeta Marte.

```
> restart;
> with(plots):
> parte:=150/25.;
```

MARTE (COPÉRNICO):

```
> rm1:=38.*parte;
> rm2:=(5+34/60.)*parte;
> rm3:=(1+51/60.)*parte;
> xm:=rm1*cos(t)+rm2*cos(t)+rm3*cos(2*t);
> ym:=rm1*sin(t)-rm2*sin(t)+rm3*sin(2*t);
> g1:=plot([xm,ym,t=0..2*Pi]):
> with (plots):
> display (g1);
> plot([xm,ym],t=0..2*Pi);
> plot(sqrt(xm**2+ym**2),t=0..2*Pi);
```

MARTE (ÓRBITA REAL):

```
> dm:=228;
> epm:=0.093;
> f2:=(epsilon,theta)->dm*(1-epsilon^2)/(1-epsilon*cos(theta));
> tempo:=(epsilon,theta)->int(1/(1+epsilon*cos(theta))^2,theta);
> plot(tempo(epm,theta),theta=-Pi..Pi,tempo=-3.2..3.2);
> t1:=limit(tempo(epm,phi),phi=-Pi,right);
> t2:=limit(tempo(epm,phi),phi=Pi,left);
> Nt:=200;
> dn:=2./Nt;
> dt:=(t2-t1)/Nt;
> tempoV:=[seq(limit(tempo(epm,phi),phi=Pi*(1+i*dn),right),i=0..Nt
```

```

-1) ]:
> nops(tempoV);
> dife:=[seq([i,tempoV[i]-tempoV[i-1]],i=2..Nt)]:
> plot(dife);
> tempos:=[seq(t1+i*dt,i=0..Nt-1)]:
> evalm(tempos):

>angulos2:=[seq(fsolve(tempo(epm,theta)=tempos[i]+0.001,theta=tempos[i]+0.0001),i=1..Nt)];
> convert(tempos,array):
> convert(angulos2,array):
> angulos:=array(1..Nt);
> Nt;

> for i from 1 to Nt do
>           if      (angulos2[i]<-3.14159)      then
angulos[i]:=angulos2[i]+2*3.14159;
>           else if(angulos2[i]>3.14159) then angulos[i]:=angulos2[i]-
2*3.14159;
>           else angulos[i]:=angulos2[i]; fi;
>       fi;
> od;

> angulos2[Nt];
> tempos[1];

> dado1:=[seq([tempos[i],angulos[i]],i=1..Nt)]:
> dado2:=[seq([tempos[i],angulos2[i]],i=1..Nt)]:
> plot([dado1,dado2],labels=[tempo,angulo]);

> xs:=array(1..Nt);ys:=array(1..Nt);rs:=array(1..Nt);
> for i from 1 to Nt do
>   rs[i]:=f2(epm,angulos[i]):
>   xs[i]:=rs[i]*cos(angulos[i]):
>   ys[i]:=rs[i]*sin(angulos[i]):
> od:
> dado3:=[seq([xs[i],ys[i]],i=1..Nt)]:

>writedata("c:/Users/Licia/Desktop/marte_real.dat",dado3,[float,float]);
> dado4:=[seq([rs[i],angulos[i]],i=1..Nt)]:
> g3:=plot(dado3,color=black):
> g4:=plot(dado4,coords=polar,color=green):
> g2:=plot(f2(epm,theta),theta=0..2*Pi,coords=polar,color=blue):
> display(g4,g3);
> display([g1,g2,g3]);

```

COMPARAÇÃO ENTRE AS ÓRBITAS:

```
> display(g1,g2,g3);
> T:=t2-t1;
> T/dt;Nt;
> N:=3;

> a[0]:=(xs[1]+sum(xs[j],j=2..Nt-1)+xs[Nt])/Nt;
> c[0]:=(ys[1]+sum(ys[k],k=2..Nt-1)+ys[Nt])/Nt;
> b[0]:=0.;d[0]:=0.;

> R[0]:=sqrt(((a[0]+d[0])/2)^2+((c[0]-b[0])/2)^2);
> alpha[0]:=arctan(c[0]-b[0],a[0]+d[0]);
> r[0]:=sqrt(((a[0]-d[0])/2)^2+((c[0]+b[0])/2)^2);
> beta[0]:=arctan(-c[0]-b[0],a[0]-d[0]);

> for n from 1 to N do
>
a[n]:=2*evalf(xs[1]*cos(2*Pi*n*tempos[1]/T)+sum(xs[j]*cos(2*Pi*n*tempos[j]/T),j=2..Nt-1)+xs[Nt]*cos(2*Pi*n*tempos[Nt]/T))/Nt;
>
b[n]:=2*evalf(xs[1]*sin(2*Pi*n*tempos[1]/T)+sum(xs[j]*sin(2*Pi*n*tempos[j]/T),j=2..Nt-1)+xs[Nt]*sin(2*Pi*n*tempos[Nt]/T))/Nt;
>
c[n]:=2*evalf(ys[1]*cos(2*Pi*n*tempos[1]/T)+sum(ys[j]*cos(2*Pi*n*tempos[j]/T),j=2..Nt-1)+ys[Nt]*cos(2*Pi*n*tempos[Nt]/T))/Nt;
>
d[n]:=2*evalf(ys[1]*sin(2*Pi*n*tempos[1]/T)+sum(ys[j]*sin(2*Pi*n*tempos[j]/T),j=2..Nt-1)+ys[Nt]*sin(2*Pi*n*tempos[Nt]/T))/Nt;
>
R[n]:=sqrt(((a[n]+d[n])/2)^2+((c[n]-b[n])/2)^2);
> alpha[n]:=arctan(c[n]-b[n],a[n]+d[n]);
> r[n]:=sqrt(((a[n]-d[n])/2)^2+((c[n]+b[n])/2)^2);
> beta[n]:=arctan(-c[n]-b[n],a[n]-d[n]);
> od;
> R[1];R[2];R[3];

> rm1;rm2;rm3;
> xxm:=a[0]+(R[1])*cos(t)+(R[2])*cos(2*t)+R[3]*cos(3*t);
> yym:=(R[1])*sin(t)+(R[2])*sin(2*t)+R[3]*sin(3*t);
> g5:=plot([xxm,yym,t=t1..t2],color=magenta):
> display(g3,g5);
> xmm:=rm1*cos(t)+rm2*cos(2*t)+rm3*cos(3*t);
> ymm:=rm1*sin(t)+rm2*sin(2*t)+rm3*sin(3*t);

> g6:=plot([xmm,ymm,t=t1..t2],color=cyan):
> display(g6,g1,g3,g5);
```