O Sistema S de Dedução Natural para a Lógica Proposicional Clássica

Vamos aqui introduzir um sistema de dedução natural (cf. a lição Demonstração Condicional e os Sistemas de Dedução Natural) para a Lógica Proposicional Clássica que designaremos por S. O sistema S tem apenas dois conectivos e três regras de inferência para facilitar mostrar, posteriormente, a correção e completude desse sistema, inclusive a correção e completude inferenciais (cf. a lição As Noções de Correção e Completude de um Sistema Formal). Como os sistemas de dedução natural são sistemas formais dedutivos que não possuem axiomas, apenas regras de inferência, então, para definir S, precisamos apenas definir: (1) o alfabeto de S, (2) as fórmulas de S, e (3) as regras de inferência de S.

(1) Alfabeto de S. O Alfabeto de S se constitui dos signos:

~, →, A, B, C, A',B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''', etc.

O sistema S possui então apenas dois conectivos: ~ e →. Apesar disso, a nossa linguagem formal aqui definida tem ainda o mesmo poder expressivo que a linguagem formal que utilizamos até agora (com os conectivos ~, ∧, ∨, → e ↔), pois, como vimos na lição Equivalência Lógica, ∨, ∧ e ↔ podem ser definidos em termos de ~ e → apenas (cf. definições mais abaixo).

Chamaremos os signos A, B, C, A',B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''', etc. de *letras sentenciais*; introduzimos as linhas após as letras para não limitar o número de letras sentenciais.

(2) Fórmulas de S. São as fórmulas constituídas apenas de letras sentenciais e dos conectivos ~ e →; mais exatamente, as fórmulas de S são definidas pelas seguintes *regras de formação*:

(a) Letras sentenciais são fórmulas;

(b) Se X é uma fórmula, então ~X é uma fórmula; e

(c) Se X e Y são fórmulas, então (X → Y) é uma fórmula.

Notemos que (a) estabelece uma base para nossa definição e que, a partir dela, podemos construir (infinitas) fórmulas usando as regras (b) e (c) (este tipo de definição é chamada de *definição por indução*). Assim, temos que, por exemplo, (~B → A'') é uma fórmula, pois: pela regra (a), B e A'' são fórmulas (já que B e A''são letras sentenciais); por (b), ~B é uma fórmula (já que B é uma fórmula); e, por (c), (~B → A'') é uma fórmula (já que ~B e A'' são fórmulas). Ou seja, a fórmula (~B → A'') tem então a seguinte *árvore de construção*;

```
(~B → A'')
    Λ
  ~B  A'''
  /
 B
```

Vamos aqui adotar as seguintes definições:

$$X \vee Y :=_{def.} \sim X \rightarrow Y$$

$$X \wedge Y :=_{def.} \sim(X \rightarrow \sim Y)$$

$$X \leftrightarrow Y :=_{def.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$$

(notar que $\wedge$ já está definido logo acima)

(3) Regras de Inferência de S.

Modus Ponens (MP)	Redução ao Absurdo (RA)	Demonstração Condicional (DC)
$\dfrac{X \rightarrow Y \quad X}{Y}$	$\dfrac{X \rightarrow Y \quad X \rightarrow \sim Y}{\sim X}$	$\dfrac{\begin{array}{|l} X \\ \vdots \\ Y \end{array}}{X \rightarrow Y}$

Dados os elementos constituintes de nosso sistema S, podemos agora definir dedução e demonstração em S.

Definição. Uma **<u>dedução no sistema S</u>** de uma fórmula Z a partir das premissas X_1, X_2, ..., X_n é uma sequência de fórmulas Y_1, Y_2, ..., Y_m tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula Y_i da sequência:

(2.a) ou é uma da premissa X_j;

(2.b) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC);

(2.c) ou é a repetição de uma fórmula anterior da sequência*;

(2.d) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA ou DC**.

Notação. Vamos indicar que existe uma dedução, no sistema S, da conclusão Z a partir das premissas X_1, X_2, ..., X_n por***:

$$X_1, X_2, ..., X_n \vdash Z$$

Exemplo. Mostrar que: (1) $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$; e (2) $Y \vdash X \rightarrow Y$.

$X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$

1. $X \rightarrow Y$ Premissa
2. $Y \rightarrow Z$ Premissa
3. | X Hipótese
5. | Y MP 1,3
6. | Z MP 2,5
7. $X \rightarrow Z$ DC 3-6

$Y \vdash X \rightarrow Y$

1. Y Premissa
2. | X Hipótese
3. | Y Repetição
4. $X \rightarrow Y$ CD 2-3

Notemos que $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$ é a regra do Silogismo Hipotético (SH). Assim, no sistema S, SH é uma regra derivada das regras primitivas MP, RA e DC. Agora que sabe-

*Só podemos repetir uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

**Só podemos aplicar essas regras a uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

***Em geral, usa-se o signo *S*, no sinal de dedução, i.e., $X_1, X_2, ..., X_n \vdash_S Z$, para indicar que se trata de uma dedução em S; entretanto, para simplificar, vamos aqui dispensar o uso do signo *S*.

mos que SH pode ser derivada, podemos usá-la como uma regra de nosso sistema: a ideia, ao usá-la, é que estamos subentendendo que poderíamos repetir essa dedução de SH.

Analogamente, **toda forma de dedução no sistema S pode ser vista como estabelecendo uma regra de inferência (derivada)**. Assim, $Y \vdash X \rightarrow Y$ estabelece também uma regra de inferência, chamada de **Prefixação** e abreviada por **Pf**; Pf diz que, de Y, podemos concluir $X \rightarrow Y$, ou seja, podemos colocar o prefixo "$X \rightarrow$" antes de Y (daí seu nome).

Vamos agora definir uma demonstração em S. Cabe observar (ausência do item 2.a acima na definição abaixo) que: uma demonstração é apenas uma dedução sem premissas.

Definição. Uma **demonstração no sistema S** de uma fórmula Z é uma sequência de fórmulas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ tal que:

(1) a última fórmula Y_m é Z; e

(2) cada fórmula da Y_i sequência:

(2.a) ou é uma hipótese (usada na aplicação da regra de inferência DC)

(2.b) ou é a repetição de uma fórmula anterior da sequência*;

(2.c) ou é o resultado da aplicação de umas das regras de inferência MP, RA ou DC**.

Definição. Um fórmula Z é um **teorema de S** se existe uma demonstração para Z.

Notação. Vamos indicar que existe uma demonstração da fórmula Z no sistema S, ou ainda, que Z é um teorema de S, por***:

$$\vdash Z$$

Exemplo. Mostre que: (1) $\vdash X \rightarrow X$ e (2) $\vdash {\sim}{\sim}X \rightarrow X$.

$\vdash X \rightarrow X$

1. | X Hipótese
2. | X Repetição 1
3. $X \rightarrow X$ DC 1-2

$\vdash {\sim}{\sim}X \rightarrow X$

1. | ${\sim}{\sim}X$ Hipótese
2. | ${\sim}X \rightarrow {\sim}{\sim}X$ Pf 1
3. | ${\sim}X \rightarrow {\sim}X$ PI
4. | X RA 2,3
5. ${\sim}{\sim}X \rightarrow X$ DC 1-4

Notemos que a fórmula $X \rightarrow X$ é chamada de **Princípio da Identidade** e abreviada por **PI** e que ${\sim}{\sim}X \rightarrow X$ é chamado de **Princípio da Dupla Negação**.

Notemos que, na demonstração de ${\sim}{\sim}X \rightarrow X$, usamos tanto a regra de Prefixação (na linha 2) quanto o Princípio da Identidade (na linha 3). Assim, podemos não só usar uma regra derivada nas novas demonstrações (como no caso de Pf), como também os teoremas, ou seja as fórmulas já demonstradas (como no caso de PI). Novamente, a ideia, de podermos usar um teorema (em uma dedução ou demonstração) e que no lugar dele poderíamos colocar toda a sua demonstração, assim, no lugar da fórmula 3 (PI), poderíamos colocar sua demonstração, feita acima.

---

*Só podemos repetir uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

**Só podemos aplicar essas regras a uma fórmula se ela não está sob uma hipótese já utilizada em uma regra DC.

***Também aqui, em geral, usa-se o signo *S*, no sinal de demostração, i.e., $\vdash_S Z$, para indicar que se trata de uma demonstração em S; e, também, para simplificar, vamos dispensar o uso do signo *S*.