Modelos de Rango Incompleto
Modelos de Clasificación Simple
Diseño Completamente Aleatorizado

Johan Steven Aparicio

Escuela de Estadística
Facultad de Ingeniería - Universidad del Valle
johan.aparicio@correounivalle.edu.co

Mayo, 2022

Tabla de Contenido

Ejercicios 2

Para el caso ilustrativo planteado inicialmente:

1. Especifique las matrices (o vectores) Y, matriz de diseño, β , $X'X$ y $X'Y$.
2. Es $\tau_1 - \tau_2$ estimable insesgadamente?
3. Es $\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3$ estimable insesgadamente?
4. Es $\mu + \tau_1$ estimable insesgadamente?
5. Es $\tau_1 + \tau_2$ estimable insesgadamente?

Teorema 2

$\lambda'\beta$ es estimable insesgadamente si y solo si existe un vector r tal que $r'X'X = \lambda'$ o $X'Xr = \lambda$.

Con dimensiones de r: $p \times 1$

Mediante este Teorema, se puede saber con base en $X'X$ si una función es estimable o no.

Se tienen p combinaciones lineales de las filas de la matriz del sistema:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de r' con $X'X$ se puede realizar haciendo la siguiente partición:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

$$r_1(S_{11}...S_{1p}) + \cdots + r_p(S_{p1}...S_{pp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Existe una estimación insesgada de una combinación lineal de parámetros, si el vector λ asociado a ella resulta como una combinación lineal de las filas de la matriz $X'X$ del SEN.

Cuando se procedía con la matriz X, si una función era estimable insesgadamente, entonces la estimación era a través de $b'Y$. Con base en este teorema entonces la estimación es $\lambda'\beta = r'X'Y$.

$$\lambda' = b'X \text{ y } \lambda' = r'X'X$$

Lo que implica que $b' = r'X'$, por lo tanto:

$$E[b'Y] =$$

Cuando se procedía con la matriz X, si una función era estimable insesgadamente, entonces la estimación era a través de $b'Y$. Con base en este teorema entonces la estimación es $\lambda'\beta = r'X'Y$.

$$\lambda' = b'X \text{ y } \lambda' = r'X'X$$

Lo que implica que $b' = r'X'$, por lo tanto:

$$E[b'Y] = E[r'X'Y] = r'X'E[Y] = r'X'X\beta = \lambda'\beta$$

Cuando se procedía con la matriz X, si una función era estimable insesgadamente, entonces la estimación era a través de $b'Y$. Con base en este teorema entonces la estimación es $\lambda'\beta = r'X'Y$.

$$\lambda' = b'X \text{ y } \lambda' = r'X'X$$

Lo que implica que $b' = r'X'$, por lo tanto:

$$E[b'Y] = E[r'X'Y] = r'X'E[Y] = r'X'X\beta = \lambda'\beta$$

Determinar si $\tau_1 - \tau_2$ es estimable insesgadamente.
Demostrar que $E[r'X'Y] = \lambda'\beta$

Teorema 3

El mejor estimador linealmente insesgado de $\lambda'\beta$ es $r'X'Y = b'Y$.

Supongamos que existe un b tal que $b' = [r'X' + a']$

Teorema 3

El mejor estimador linealmente insesgado de $\lambda'\beta$ es $r'X'Y = b'Y$.

Supongamos que existe un b tal que $b' = [r'X' + a']$

Encuentre el valor esperado y la varianza de $b'Y$
Demuestre que $V[b'Y]$ es mínima.

Según este teorema, el sistema $X'Xr = \lambda$ tiene infinitas soluciones, es decir, existen infinitos vectores r que son solución del sistema. Sin embargo, al hacer la multiplicación de r' con $X'Y$, para cualquiera de estos r, el resultado es siempre el mismo valor.

Teorema 4

Si $\lambda'\beta$ es estimable, entonces cualquier r tal que $X'Xr = \lambda$ da la misma estimación de $\lambda'\beta$

Sean r_1 y r_2 dos soluciones cualesquiera del sistema $X'Xr = \lambda$ asociadas al vector especifico dado λ.

Sea $\hat{\beta}$ cualquier solución del SEN; recuérdese que el SEN tiene infinitas soluciones $(X'X = X'Y)$.

Como $\lambda'\beta$ es estimable, entonces:

$$E[r_1'X'Y] = \lambda'\beta \text{ y } E[r_2'X'Y] = \lambda'\beta$$

Utilizando el SEN y reemplazando en las anteriores expresiones, se tiene:

$$E[r_1'X'Y] = E[r_2'X'Y] = \lambda'\beta$$

De allí que $E[\lambda'\hat{\beta}] = E[\lambda'\hat{\beta}] = \lambda'\beta$, ya que $r_1'X'X = r_2'X'X = \lambda'$.

Este teorema dá un método de aplicación práctico para hacer la estimación de una función estimable: Si $\lambda'\beta$ es estimable entonces obténgase cualquier solución $\hat{\beta}$ del SEN y con el vector fila λ' multipliquese por $\hat{\beta}$. Así se obtiene la solución única y mejor estimación de $\lambda'\beta$.

Teorema 5

Sean $\lambda_1'\beta$ y $\lambda_2'\beta$ funciones estimables. Sus estimaciones serán $\lambda_1'\hat{\beta}$ y $\lambda_2'\hat{\beta}$ siendo β cualquier solución del SEN.

Calcular $Cov(\lambda_1'\hat{\beta}, \lambda_2'\hat{\beta})$

Encontrar la covarianza entre las estimaciones:
$\tau_1 - \tau_2$ y $\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_3$

Dado que $r(X) = t$, entonces existen t funciones estimables linealmente independientes, es decir, los vectores asociados a estas funciones son linealmente independientes. Esto implica que con t vectores linealmente independientes se pueda crear una base que genera todos los vectores correspondientes a funciones estimables del experimento.

En nuestro caso ilustrativo, en particular, en t = 3, una base generadora puede ser:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde a las funciones estimables:

$$\tau_1 - \tau_2$$

$$\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_2$$

$$\mu + \tau_1$$

Al hacer combinaciones lineales entre las filas de B se obtienen todas las funciones estimables posibles del experimento. Por ejemplo:

$$\text{(fila 1) - (fila 2)} = \lambda_1' = [0, 0, -2, 2]$$

Obteniendo un contraste que correponde a $\lambda_4'\beta = 2\tau_3 - 2\tau_2$

Por Teorema 2, $r' = (0, 0, -1, 1/2)$

Por Teorema 3, $\lambda_4'\hat{\beta} = r'X'Y = -y_{2.} + y_{3.}/2$

donde, $E[-y_{2.} + y_{3.}/2] = 2(\tau_3 - \tau_2)$

Teorema 6

Hay exactamente t funciones estimables linealmente independientes; donde t es el rango de X.

Se debe demostrar que hay exactamente t vectores linealmente independientes para los cuales se cumple que $X'Xr = \lambda$.

Sean q vectores que satisfacen $X'Xr = \lambda$,

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q, (q > t)$$

Demostrarlo