Diseño y Análisis de Experimentos
Diseño de Bloques Completamente al Azar

Johan Steven Aparicio

Escuela de Estadística
Facultad de Ingeniería - Universidad del Valle
johan.aparicio@correounivalle.edu.co

Junio, 2022

Tabla de Contenido

El principio básico del diseño de experimentos consiste en garantizar la homogeneidad de las Unidades Experimentales sometidas a diferentes tratamientos.

En algunas ocasiones no es posible garantizar que las unidades sean homogéneas, por tanto la aleatorización no puede hacerse de forma completa, sino restringida.

La inclusión de un factor bloque surge como la solución para eliminar el efecto que puede generar un factor perturbador identificado, así como también de limitaciones en la aleatorización de las unidades experimentales.

La idea general consiste en realizar una repetición completa del experimento en cada uno de los niveles del factor bloque y realizar la aleatorización de los tratamientos dentro del factor bloque.

Cada tratamiento se repite una vez dentro de cada nivel del bloque

El modelo de clasificación doble se utiliza para analizar experimentos con un solo factor de tratamientos y otro factor control.

Tratamiento	Bloque				
	1	**2**	**3**	**...**	***b***
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1b}
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2b}
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	...	Y_{3b}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	Y_{k1}	Y_{k2}	Y_{k3}	...	Y_{kb}

Un equipo de mejora investiga el efecto de cuatro métodos de ensamble A, B, C, D, sobre el tiempo de ensamble en minutos. En primera instancia, la estrategia experimental es aplicar cuatro veces los cuatro métodos de ensamble en orden completamente aleatorio.

Un equipo de mejora investiga el efecto de cuatro métodos de ensamble A, B, C, D, sobre el tiempo de ensamble en minutos. En primera instancia, la estrategia experimental es aplicar cuatro veces los cuatro métodos de ensamble en orden completamente aleatorio.

Por otro lado, se sospecha que los cuatro operadores que se utilizarían para realizar el ensamble puede afectar significativamente los tiempos de ensamble y, por ende, la comparación de los métodos, entonces se debe utilizar un DBCA para que la fuente de variación adicional, que representan los operadores, no sesgue las comparaciones.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, ..., t, \quad j = 1, ..., b$$

$$\text{Var(Total)} = \text{Var(Tratamiento)} + \text{Var(Bloque)} + \text{Var(Error)}$$

Cuales serán las matrices X, Y, β, $X'X$ y $X'Y$?

Matriz de Diseño

$$X = \left[\begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] = \left[X_{0(n*1)}\ X_{1(n*t)}\ X_{2(n*b)}\right]$$

$$\beta = \left[\begin{array}{c} \mu \\ \hline \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_t \\ \hline \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_b \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1b} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2b} \\ \vdots \\ Y_{t1} \\ \vdots \\ Y_{tb} \end{bmatrix} \qquad X'Y = \left[\begin{array}{c} Y_{..} \\ \hline Y_{1.} \\ \vdots \\ Y_{t.} \\ \hline Y_{,1} \\ \vdots \\ Y_{.b} \end{array}\right]$$

$$
X'X = \begin{bmatrix}
tb & b & b & \cdots & b & t & t & \cdots & t \\
 & b & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & b & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & b & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & & & & & t & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & t & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & t
\end{bmatrix}
$$

El SEN dado por $X'X\beta = X'Y$, en forma abreviada queda:

$$tb\mu + b\sum_{i=1}^{t}\tau_i + t\sum_{j=1}^{b}\alpha_j = Y_{..}$$

$$b\mu + b\tau_i + \sum_{j=1}^{b}\alpha_j = Y_{i.}$$

$$t\mu + \sum_{i=1}^{t}\tau_i + t\alpha_j = Y_{.j}$$

Para solucionar el SEN se utilizan 2 condiciones que corresponden a funciones no estimables y cuyos vectores asociados a ellas, según $X'X$, son linealmente independientes del resto.

De esta forma el nuevo sistema tiene una matriz de rango p (número de parámetros del vector β) con la cual se obtendrá una solución única del SEN.

1. $$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$$
2. $$\sum_{j=1}^{b} \alpha_j = 0$$

Al aplicar las dos condiciones al SEN, se tiene que:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..} \\ \bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{..} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{.b} - \bar{Y}_{..} \end{bmatrix}$$

La tabla ANOVA se obtiene desarrollando los siguientes cálculos:

$R(\beta) = \hat{\beta}' X' Y = ?$

$$R(\beta) = SC\mu + SC\tau + SC\alpha$$

$$SCTrat = R(\tau|\mu,\alpha) = R(\beta) - R(\mu) - R(\alpha) = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{tb}$$

$$SCBloque = R(\alpha|\mu,\tau) = R(\beta) - R(\mu) - R(\tau) = \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{tb}$$

$$SCTotal = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{tb}$$

$$SCError = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^2}{b} - \sum_{i=1}^{t} \frac{Y_{i.}^2}{b} + \frac{Y_{..}^2}{tb}$$

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

Fuente de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrado Medio	F_0
Tratamientos (τ)	$t-1$	$SC_{Tratamientos}$	$CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{t-1}$	$F_0 = \frac{CM_{Trat}}{CM_{Error}}$
Bloques (α)	$b-1$	$SC_{Bloques}$	$CM_{Bloque} = \frac{SC_{Bloque}}{b-1}$	
Error	$(t-1)(b-1)$	SC_{Error}	$CM_{Error} = \frac{SC_{Error}}{(t-1)(b-1)}$	
Total	$tb-1$	SC_{Total}		