Diseño y Análisis de Experimentos
Diseño en Cuadrado Latino

Johan Steven Aparicio

Escuela de Estadística
Facultad de Ingeniería - Universidad del Valle
johan.aparicio@correounivalle.edu.co

Julio, 2022

Tabla de Contenido

El Diseño en Cuadrado Latino se usa para eliminar el efecto de dos fuentes de variabilidad.

Suponiendo que se tiene el siguiente cuadrado:

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{bmatrix}$$

donde cada nivel del factor de tratamientos, denominado por letras latinas, aparece en cada columna y en cada fila sin repetirse.

Una de las ventajas del DCL es que al hacer el control local en dos direcciones, se tiene un mayor control en la variación, resultando el CME más pequeño que cuando se usa DCA o DBCA.

Una de las ventajas del DCL es que al hacer el control local en dos direcciones, se tiene un mayor control en la variación, resultando el CME más pequeño que cuando se usa DCA o DBCA.

Sin embargo, esta clase de experimento presenta algunas desventajas, como son:

- El número de tratamientos se limita al número de filas y al número de columnas.
- Si $t >= 10$ no es recomendable el uso de cuadrados latinos, ya que el número de unidades experimentales se incrementa notablemente a medida que t aumenta.

Un ingeniero industrial investiga el efecto de cuatro métodos de ensamble (A,B,C,D) sobre el tiempo de ensamble de un componente de televisores. Se seleccionan cuatro operarios para el estudio.

El ingeniero sabe que todos los métodos de ensamble producen fatiga, de tal modo que para el último ensamble el operario pude tener mayor fatiga que para el primero, independientemente del método, es decir, se desarrolla una tendencia en el tiempo de ensamble requerido.

Los datos del experimento se presentan en la siguiente tabla:

Orden de ensamble	Operario			
	1	2	3	4
1	C=10,4	D=14,1	A=7,6	B=8,9
2	B=7,8	C=18,9	D=11,1	A=8,4
3	A=5,8	B=10,1	C=11,3	D=9,4
4	D=10,3	A=10,2	B=12,2	C=14,1

Cada método de ensamble se replica una sola vez por operario junto con su respectivo ordenamiento y si existe efectos sistemáticos debido a diferencias entre los operarios o el ordenamiento, dichos efectos estarían presentes de igual manera en cada método de ensamble.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, ..., t, \quad j = 1, ..., t, \quad k = 1, ..., t$$

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, ..., t, \quad j = 1, ..., t, \quad k = 1, ..., t$$

donde y_{ijk} es el valor de la variable respuesta en la j-esima columna y k-esima fila para el i-esimo tratamiento, μ es la media global, τ_i es el efecto debido al i-esimo tratamiento, α_j es el efecto debido a la j-esima columna, γ_k es el efecto debido a la k-esima fila y e_{ijk} es el error aleatorio debido a factores no observados o no observables en el experimento.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, ..., t, \quad j = 1, ..., t, \quad k = 1, ..., t$$

donde y_{ijk} es el valor de la variable respuesta en la j-esima columna y k-esima fila para el i-esimo tratamiento, μ es la media global, τ_i es el efecto debido al i-esimo tratamiento, α_j es el efecto debido a la j-esima columna, γ_k es el efecto debido a la k-esima fila y e_{ijk} es el error aleatorio debido a factores no observados o no observables en el experimento.

$$\text{Var(Total)} = \text{Var(Trat)} + \text{Var(Col)} + \text{Var(Fila)} + \text{Var(Error)}$$

Cuales serán las matrices X, β, $X'X$ y $X'Y$?

El sistema de ecuaciones normales, definido de manera general, esta dado por:

$$t^2\mu + t\sum_{i=1}^{t}\tau_i + t\sum_{j=1}^{t}\alpha_j + t\sum_{k=1}^{t}\gamma_k = y_{...}$$

$$t\mu + t\tau_i + \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + \sum_{k=1}^{t}\gamma_k = y_{i..}$$

$$t\mu + \sum_{i=1}^{t}\tau_i + t\alpha_j + \sum_{k=1}^{t}\gamma_k = y_{.j.}$$

$$t\mu + \sum_{i=1}^{t}\tau_i + \sum_{j=1}^{t}\alpha_j + t\gamma_k = y_{..k}$$

Para solucionar el SEN se utilizan las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{t} \alpha_j = 0, \quad \sum_{k=1}^{t} \gamma_k = 0$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...} \\ \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...} \end{bmatrix}$$

La reducción de β estaría dada por:

$$R(\beta) = R(\mu, \tau, \alpha, \gamma) = \hat{\beta}' X' Y$$

Encontrar la anterior reducción para hallar las sumas de cuadrados correspondientes al ANOVA.
$R(\tau|\mu, \alpha, \gamma)$, $R(\alpha|\mu, \tau, \gamma)$, $R(\gamma|\mu, \tau, \alpha)$

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

F.V	G.L	SC	CM	F_0
Tratamientos	$t-1$	$\frac{1}{t}\sum_i Y_{i..}^2 - FC$ (1)	$\frac{SCTrat}{t-1}$	$\frac{CMTrat}{CMError}$
Columnas	$t-1$	$\frac{1}{t}\sum_j Y_{.j.}^2 - FC$ (2)	$\frac{SCCol}{t-1}$	
Filas	$t-1$	$\frac{1}{t}\sum_k Y_{..k}^2 - FC$ (3)	$\frac{SCFil}{t-1}$	
Error	$(t-1)(t-2)$	(4)-[(1)+(2)+(3)]	$\frac{SCError}{(t-1)(t-2)}$	
Total	t^2-1	$Y'Y - FC$ (4)		

con $FC = \frac{Y_{...}^2}{t^2}$