Diseño y Análisis de Experimentos

Diseños Anidados

Johan Steven Aparicio

Escuela de Estadística
Facultad de Ingeniería - Universidad del Valle
johan.aparicio@correounivalle.edu.co

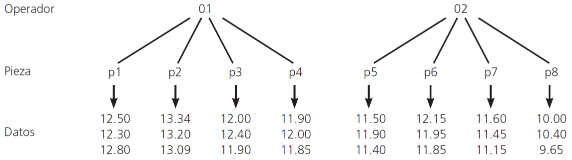
Julio, 2022

Tabla de Contenido

En los diseños factoriales estudiados anteriormente, cuando se tienen dos factores cruzados A y B, se corren en orden aleatorio todas las posibles combinaciones de niveles de los dos factores. Ahí los niveles de cada factor pueden combinar en cualquier momento con los niveles del otro factor, y en ese caso los niveles de un factor son exactamente los mismos que en cada nivel del otro factor.

Por otra parte cuando se dice que el factor B esta anidado en el factor A significa que los niveles del factor B no son los mismos en cada nivel del factor A.

A un arreglo de este tipo se le llama diseño anidado o jerárquico, con los niveles del factor B anidados a los niveles del factor A.



$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k}$$

$$i = 1, ..., a \quad j = 1, ..., b, \quad k = 1, ..., r$$

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k}$$

$$i = 1, ..., a \quad j = 1, ..., b, \quad k = 1, ..., r$$

Se tienen a niveles del factor A, b niveles del factor B anidados bajo cada nivel de A, y r réplicas.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k}$$

$$i = 1, ..., a \quad j = 1, ..., b, \quad k = 1, ..., r$$

Se tienen a niveles del factor A, b niveles del factor B anidados bajo cada nivel de A, y r réplicas.

Se tiene un diseño anidado balanceado, ya que hay el mismo número de niveles de B con cada nivel de A y el mismo número de réplicas.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k}$$

$$i = 1, ..., a \quad j = 1, ..., b, \quad k = 1, ..., r$$

Se tienen a niveles del factor A, b niveles del factor B anidados bajo cada nivel de A, y r réplicas.

Se tiene un diseño anidado balanceado, ya que hay el mismo número de niveles de B con cada nivel de A y el mismo número de réplicas.

Debido a que no todos los niveles del factor B aparecen dentro de todos los niveles del factor A, no puede haber interacción entre A y B.

Hipótesis

Las hipótesis a probar para el caso donde los niveles de A y B sean fijos, son:

$$H_0 : \tau_i = 0 \text{ vs } H_1 : \tau_i \neq 0$$

$$H_0 : \beta_{j(i)} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{j(i)} \neq 0$$

Hipótesis

Las hipótesis a probar para el caso donde los niveles de A y B sean fijos, son:

$$H_0 : \tau_i = 0 \text{ vs } H_1 : \tau_i \neq 0$$

$$H_0 : \beta_{j(i)} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{j(i)} \neq 0$$

Si A es un factor fijo y B es un factor aleatorio, las hipótesis a probar son:

$$H_0 : \tau_i = 0 \text{ vs } H_1 : \tau_i \neq 0$$

$$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_\beta^2 >= 0$$

Si A y B son factores aleatorios, las hipótesis a probar son:

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_\tau^2 >= 0$$

$$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma_\beta^2 >= 0$$

Las ecuaciones normales, dado por $X'X\beta = X'Y$, serán:

$$E[Y_{...}] = E\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k})\right]$$
$$= abr\mu + br\sum_{i=1}^{t}\tau_i + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\beta_{j(i)}$$

Las ecuaciones normales, dado por $X'X\beta = X'Y$, serán:

$$
\begin{aligned}
E[Y_{\ldots}] &= E\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k})\right] \\
&= abr\mu + br\sum_{i=1}^{t}\tau_i + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\beta_{j(i)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[Y_{i..}] &= E\left[\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k})\right] \\
&= br\mu + br\tau_i + r\sum_{j=1}^{b}\beta_{j(i)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[Y_{ij.}] &= E\left[\sum_{k=1}^{r}(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k})\right] \\
&= r\mu + r\tau_i + r\beta_{j(i)}
\end{aligned}
$$

Para solucionar el SEN se utilizan las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{t} \beta_{j(i)} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{Y_{\ldots}}{tbr} = \bar{Y}_{\ldots}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta}_{j(i)} \end{bmatrix};$$

Para solucionar el SEN se utilizan las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{t} \beta_{j(i)} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{Y_{...}}{tbr} = \bar{Y}_{...}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta}_{j(i)} \end{bmatrix}; \quad \hat{\tau}_i = \frac{Y_{i..}}{br} - \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$$

Para solucionar el SEN se utilizan las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{t} \beta_{j(i)} = 0$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\beta}_{j(i)} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{Y_{...}}{tbr} = \bar{Y}_{...} \\ \hat{\tau}_i &= \frac{Y_{i..}}{br} - \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} \\ \hat{\beta}_{j(i)} &= \frac{Y_{ij.}}{r} - \bar{Y}_{i..} \end{aligned}$$

La reducción de β estaría dada por:

$$R(\beta) = R(\mu, \tau, \beta_{(\tau)}) = \hat{\beta}' X' Y$$

Encontrar la anterior reducción para hallar las sumas de cuadrados correspondientes al ANOVA.

Tabla ANOVA

FV	G.L	SC
A	$a-1$	$\frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}$
B dentro de A	$a(b-1)$	$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2$
Error	$ab(r-1)$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^2 - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2$
Total	$abr-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}$