

ANALISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE ALGUNAS PRUEBAS DE NORMALIDAD BAJO DIFERENTES ESCENARIOS DE SIMULACIÓN

Edison A. Zuluaga Duque

Estudiante. Universidad del Valle, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Cali
edanzud@univalle.edu.co

John J. Millán Hernández

Estudiante. Universidad del Valle, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Cali
johnjami@univalle.edu.co

Jaime Mosquera Restrepo

Profesor Auxiliar. Universidad de Valle, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística Cali.
jaimores@pino.univalle.edu.co

Resumen

Diferentes pruebas de bondad de ajuste como la Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Shapiro-Wilk, Anderson-Darling, entre otras, a lo largo del tiempo se han presentando como alternativas para detectar normalidad en un conjunto de datos. El presente trabajo pretende brindar al lector un criterio de decisión adicional que permita sustentar su escogencia de una u otra prueba de bondad de ajuste, mediante la comparación frente a unos resultados empíricos, fruto de un ejercicio de simulación implementado en el software R 2.6.

Palabras clave: Pruebas de Bondad de Ajuste, Potencia de la prueba, Eficiencia de la Prueba, Criterio de Potencia Eficiencia.

Abstract

Different goodness of fit test like kolmogorov – Smirnov, Lilliefors, Shapiro – Wilk, Anderson- Darling, among others , throughout the time are appearing like alternatives to detect normality in a data set. The present work tries to offer to the reader a criterion of additional decision that allows to sustain its choose of one or the other goodness of fit test, by means of the comparison against empirical results, fruit of an exercise of simulation implemented in software R 2.6.

Keywords: Goodness of fit test, Power of a test, Efficiency of a test, Power- Efficiency Criterion

1. Introducción

En la práctica, es común encontrar que el supuesto básico de normalidad de las observaciones, se presentan como fundamento teórico en la aplicación de un gran número de técnicas estadísticas, entre las que se cuentan: i. Modelo de Regresión; Normalidad de los errores para que las estimaciones obtenidas sean validas. ii. Análisis de Varianza (ANOVA); donde tiene gran importancia el cumplimiento de dicho supuesto ya que sustenta las características distribucionales el estadístico de contraste F. iii. Test Hipótesis Paramétricos; Frente a este supuesto el Teorema del Limite Central brinda una alternativa para tamaños de muestra grande, pero solo en la comparación de promedios, sin embargo este teorema no es extensible a la comparación de varianzas. En resumen, este supuesto constituye el fundamento básico de las técnicas estadísticas clásicas.

La situación mencionada en el párrafo anterior hace pensar que la validación del supuesto de normalidad es una situación del día a día para las personas que realizan análisis estadístico, contando para ello con una batería de pruebas ampliamente implementada en diferentes software especializados, entre las cuales se cuentan:

- Kolmogorov – Smirnov
- Jarque Bera
- Shapiro – Wilk
- Shapiro y Francia
- Cramer Von Mises
- Lilliefors
- Anderson Darling

Básicamente estas pruebas de normalidad miden el ajuste entre la distribución que presentan los datos obtenidos a partir de la muestra y la distribución normal, a través de la comparación de los percentiles teóricos vs percentiles observados, en otros casos mediante la comparación de sus medidas de forma (asimetría y curtosis) o simplemente calculando desviaciones desde la distribución teórica. En fin, una variedad de enfoques para resolver el mismo problema. Por tanto una pregunta general que surge a los analistas puede ser:

¿Qué prueba es la más eficaz para detectar normalidad de acuerdo a las características que presenta la muestra?

Pregunta a la cual el presente trabajo intenta dar respuesta haciendo uso de herramientas de simulación, bajo las cuales se someterán los test anteriormente mencionados en diferentes escenarios, que simulan situaciones de distribuciones simétricas y asimétricas, comparando la potencia empírica de las pruebas, entendida como su capacidad de detectar una situación de no normalidad, y su eficiencia medida a través del consumo de unidades muestrales. Los Autores de este trabajo esperan que los resultados que se pueden encontrar sirvan como criterio de referencia para los analistas en su proceso de escogencia del test de ajuste adecuado.

2. Metodología

Para la realización del análisis comparativo de las pruebas de normalidad se simularon datos a partir de diferentes funciones de distribuciones de probabilidades continuas con características simétricas y asimétricas. Adicionalmente, el tamaño de muestra empleado presentó variaciones hasta un límite de 300, generando 1000 repeticiones con cada tamaño de muestra, a las cuales les fueron aplicadas cada una de las pruebas en mención, finalmente se obtiene un grafico de potencia empírica curva característica de operación para cada prueba y un criterio de Potencia-Eficiencia.

De acuerdo a lo anterior, para cada realización $i=1,1,...1000$ de la muestra aleatoria de tamaño $k:1,2,...300$ se tiene una variable dicotómica que tomara el valor de 1 si la prueba rechaza la normalidad y 0 si no lo hace, tal como se define en (1). Con esta información se construye la estimación de la probabilidad de rechazo de $(\hat{\pi}_{kj})$ la j -ésima prueba en muestras de tamaño k , tal como lo muestra la ecuación (2). Permitiendo este conjunto de estimaciones construir el grafico de potencia empírica desde unos resultados empíricos.

$$a_{ikj} = \begin{cases} 1; & \text{si valor } P \leq \alpha \text{ (Rechaza)} \\ 0; & \text{si valor } P > \alpha \text{ (No rechaza)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{\pi}_{kj} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} a_{ikj} \quad (2)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 300; \quad j = 1, 2, 3, \dots, 7; \quad i = 1, 2, 3, \dots, 1000$$

Es común encontrar situaciones, en las que las herramientas descriptivas bosquejan resultados muy similares a los una distribución normal, a pesar de que en esencia el conjunto de datos provenga de una distribución un poco distinta, tal como se ilustra en la figura 1.

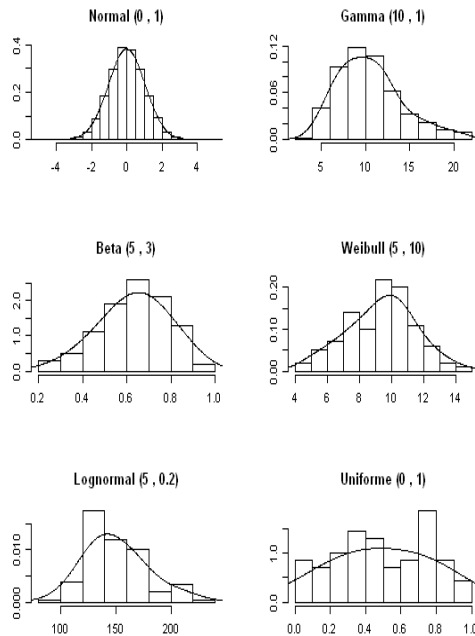


Figura 1. Representación distribuciones simétricas.

En este tipo de circunstancias se esperaría que la prueba de normalidad no fuera muy eficiente, pues la medida de incertidumbre que se genera es bastante alta, dada la similaridad de las distribuciones. De otro lado se encuentran los escenarios totalmente adversos, como lo son aquellos en los que el análisis descriptivo denota distribuciones asimétricas para el conjunto de datos, totalmente alejados de la normalidad. Tal como se ilustra en la figura 2. En esta segunda situación se esperaría que la medida de incertidumbre fuera un poco más baja y por ende las diferentes pruebas de bondad de ajuste tuvieran un mejor desempeño. Por esta razón en el presente trabajo se han involucrado estos dos

escenarios de simulación: i. Distribuciones Simétricas, ii. Distribuciones Asimétricas.

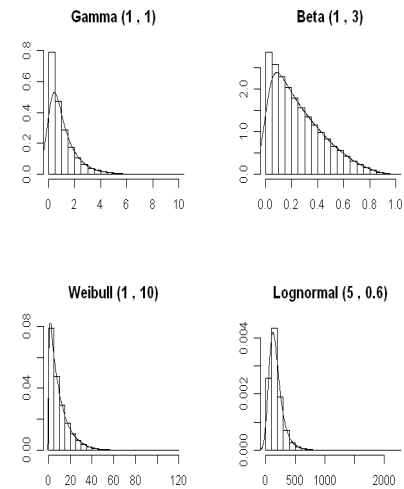


Figura 2. Representación distribuciones asimétricas.

Con el objetivo de determinar si el comportamiento de las pruebas cambia de un escenario a otro.

3. Simulación y resultados

Haciendo uso del software estadístico R y sus librerías nortest y lawstat, se implementó un algoritmo que ejecuta la simulación diseñada. Inicialmente se generan muestras con 1000 repeticiones capturando el valor P para cada tamaño de muestra y cada prueba de normalidad estimando así el porcentaje de rechazo a la hipótesis nula de normalidad bajo los dos escenarios de simulación previamente definidos. A continuación se presentan los resultados.

3.1 Distribuciones simétricas

Al generar muestras a partir de la distribución Normal (Hipótesis nula verdadera) se puede observar claramente en la figura 3, que el porcentaje de rechazo de la hipótesis de normalidad se hace muy bajo, fluctuando alrededor del nivel de significancia preestablecido (0.05), lo cual representa la estimación de la probabilidad del error tipo I. Pues bien, este razonamiento toma mucho sentido, más cuando se observa que el único

error teórico en la gráfica es precisamente el que propone el investigador, rechazar la normalidad cuando las observaciones realmente provienen de una población con distribución normal.

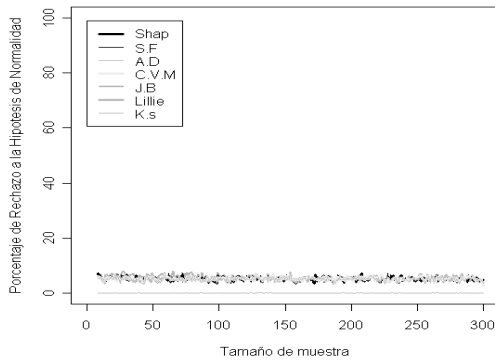


Figura 3. Distribución Normal ($\mu=0$, $\sigma=1$)

Para la distribución Uniforme (0,1) (figura 4) se puede ver claramente que la prueba de Shapiro Wilk es uniformemente más potente que las demás pruebas, seguido en orden por las pruebas Shapiro – Francia y Anderson Darling cuando se trabaja con un tamaño de muestra mayor a 73 unidades. Las pruebas más ineficientes bajo este escenario son las pruebas de Lilliefors, Jarque-Bera y Kolmogorov Smirnov, esta última no supera una potencia estimada del 42%. Como caso especial se resalta el notable incremento que se alcanza en la potencia de la prueba Jarque – Bera, cuando se pasa de un tamaño de muestra de 100 a 150 datos, pasando de un 5% a un 80% aproximadamente.

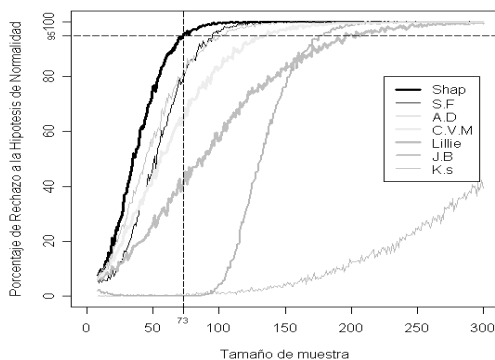


Figura 4. Distribución Uniforme ($a=0$, $b=1$)

La figura 5 representa la estimación de la potencia para datos generados a partir de una distribución gamma (10,1), se observa claramente la necesidad de tamaños de muestra relativamente

grandes (234) para que las pruebas rechacen la hipótesis de normalidad en al menos un 95%. Las pruebas que presentan mayor porcentaje de rechazo a la normalidad de los datos son la Shapiro-Wilk y la Shapiro-Francia las cuales rechazan la hipótesis nula prácticamente en igual fracción en los diferentes tamaños de muestra. Por otra parte, la Jarque Bera muestra mejores resultados que la Anderson Darling y Cramer Von Mises, esta a su vez es más potente que la prueba Lilliefors con un rechazo máximo del 78.9% a la normalidad de los datos.

De nuevo la prueba Kolmogorov-Smirnov es la menos potente, con un porcentaje de rechazo del 11.9% para tamaños de muestra mayores a 290 aproximadamente.

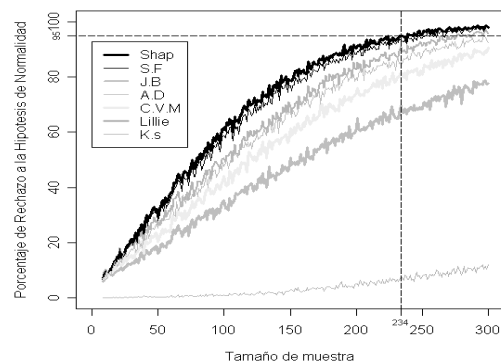


Figura 5. Distribución Gamma ($\alpha=10$, $\beta=1$)

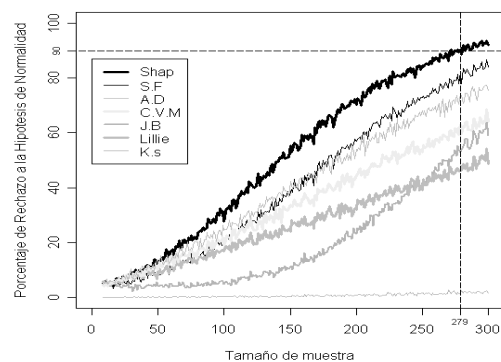


Figura 6. Distribución Beta ($\alpha=5$, $\beta=3$)

La figura 6, presenta porcentajes de rechazo cuando los datos provienen de una distribución Beta (5,3). Los resultados evidencian nuevamente que la prueba Shapiro-Wilk es la más potente, alcanzando un porcentaje de rechazo de la normalidad del 93.6% cuando el tamaño de

muestra es de 279. En el extremo contrario, de nuevo se observa la prueba de Kolmogorov como la menos potente, generando porcentajes de rechazo inferiores al 2%. De nuevo la prueba de Jarque Bera, similar al caso de la distribución uniforme (0,1), se presenta como la segunda prueba menos potente para tamaños de muestra pequeños (inferiores a 100) logrando un importante incremento en su potencia después de los 200 datos.

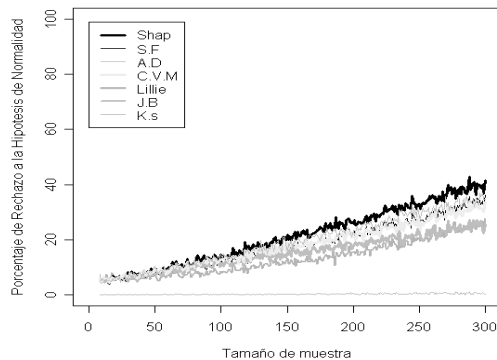


Figura 7. Distribución Weibull ($s=5$, $r=10$)

La distribución Weibull (5, 10) presenta una marcada similaridad con una distribución normal. El anterior comportamiento hace evidente que siendo la prueba Shapiro Wilk la más potente entre las analizadas (figura 7), esta solo rechaza máximo el 42.7% la hipótesis de normalidad, es decir, para la prueba de normalidad Shapiro Wilk los datos generados a partir de esta distribución en más de la mitad de los casos aún con grandes tamaños de muestra se acepta la normalidad de los datos sin provenir estos realmente de esta distribución. Por otra parte las pruebas Shapiro Francia y Cramer Von Mises presentan un rechazo a la hipótesis de normalidad muy similar, mientras la Kolmogorov acepta siempre la hipótesis de normalidad con un rechazo insignificante del 1.1%.

Para muestras generadas a partir de una distribución lognormal (5, 0.2) (figura 8), las pruebas más potentes son la Shapiro Wilk y la Shapiro Francia con porcentajes de rechazo muy similares a los de la prueba Jarque - Bera donde estas rechazan la hipótesis de normalidad en al menos un 95% de las simulaciones a partir de un tamaño de muestra de 280 aproximadamente.

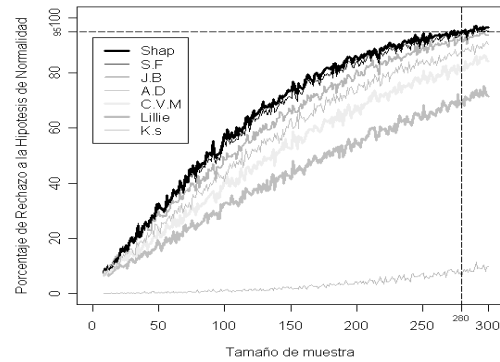


Figura 8. Distribución Lognormal ($\mu=5$, $\sigma=0.2$)

La prueba Kolmogorov presenta un rechazo máximo de 11.5% continuando así como la menos potente.

3.2 Distribuciones asimétricas

Es de gran interés contrastar la potencia de las diferentes pruebas consideradas en este análisis para distribuciones no simétricas, donde al contrario de las distribuciones simétricas se espera un mayor porcentaje de rechazo a la hipótesis de normalidad a tamaños de muestra relativamente pequeños.

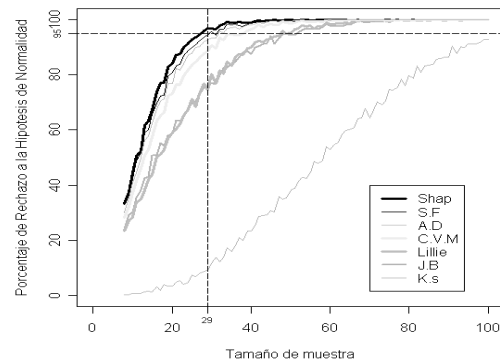


Figura 9. Distribución Gamma ($\alpha=1$, $\beta=1$)

En este caso, la distribución Gamma (1,1) ofrece un rechazo considerable (95%) por parte de las pruebas de normalidad Shapiro Wilk y Shapiro Francia a partir de tamaños de muestra alrededor de 29, tal como lo muestra la figura 9. La distribución Beta (1, 3) por el contrario exige tamaños de muestra alrededor de 50 para rechazar en al menos el 95% por parte de las pruebas Shapiro Wilk y Shapiro Francia seguidas muy de cerca por la Anderson Darling que alcanza dicho

porcentaje de rechazo a un tamaño de muestra de 59 aproximadamente (ver figura 10).

En los gráficos 9 y 10 se observa la poca potencia que presenta la prueba Kolmogorov para las dos distribuciones en especial, siendo un poco más potente en el caso de una distribución gamma que para la distribución beta.

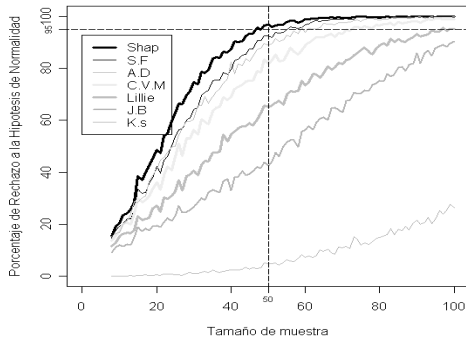


Figura 10. Distribución Beta ($\alpha=1$, $\beta=3$)

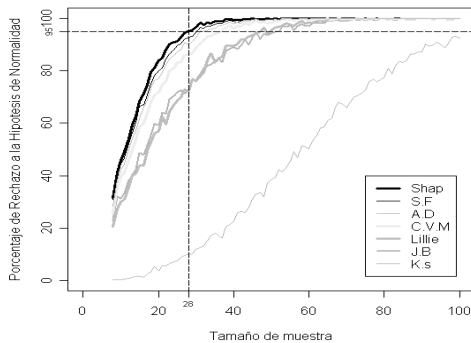


Figura 11. Distribución Weibull ($s=1$, $r=10$)

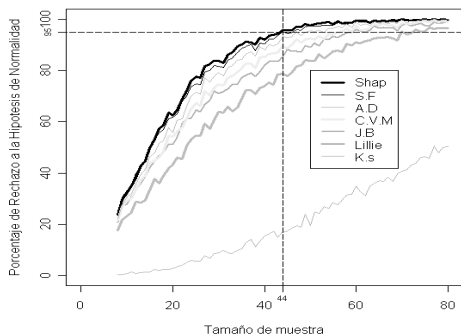


Figura 12. Distribución Lognormal ($\mu=5$, $\sigma=0.6$)

Para las distribuciones Weibull (1, 10) y Lognormal (5, 0.6) representadas en las figuras 11 y 12 respectivamente, las pruebas más potentes son la Shapiro Wilk, Shapiro Francia y Anderson Darling (ver tabla 4) e igualmente la

menos potente sigue siendo la prueba Kolmogorov.

3.3 Potencia-Eficiencia de las pruebas de normalidad

Hasta ahora se han comparado las diferentes pruebas de normalidad a partir del porcentaje de rechazo a la hipótesis nula (potencia de la prueba) a diferentes tamaños de muestra y a diferentes distribuciones de las variables aleatorias. Sin embargo, en la comparación de pruebas estadísticas resulta de gran interés conocer además su eficiencia. Entendiéndose como la prueba más eficiente aquella que presente un alto porcentaje de rechazo a la hipótesis nula haciendo uso de la menor cantidad de información muestral.

En las diferentes pruebas estadísticas se presentan casos como los analizados en este estudio, en el que una prueba de normalidad es más potente pero no necesariamente es la más eficiente, como es el caso de la prueba Jarque Bera (ver figuras 4 y 6) que presenta una mayor potencia que la prueba Lilliefors pero a partir de un tamaño de muestra de 250 aproximadamente, mientras que para tamaños de muestra relativamente pequeños (100 aproximadamente) resulta ser la prueba menos potente. Por ello se introduce el criterio de *Potencia-Eficiencia*, expresión del incremento en el tamaño de muestra necesario que requiere la prueba B para ser tan potente como la prueba A, donde la prueba A es la más potente entre las pruebas analizadas (Siegel, 1972). La Potencia-Eficiencia de la prueba B con respecto a la prueba A esta definida por (3)

$$PE(B) = \frac{n_A}{n_B} \cdot 100\% \quad (3)$$

Como ya se observó en las figuras 4 a 8 (distribuciones simétricas) y en las figuras 9 a 12 (distribuciones asimétricas), la prueba más potente y eficiente es la Shapiro Wilk, por lo cual las demás pruebas incluidas en este estudio se comparan con respecto a esta prueba.

Para muestras generadas a partir de una distribución Uniforme (figura 4) se puede ver que la Shapiro rechaza en al menos el 95% la

hipótesis de normalidad a un tamaño de muestra de 73 aproximadamente, dicho tamaño de muestra n_A representa el en la PE para las demás pruebas en esta distribución. Para las distribuciones simétricas Gamma, Beta, Weibull y Lognormal se ubican los tamaños de muestra en el cual el porcentaje de rechazo se hace asintótico en el 95%, 90%, 40% y 95% respectivamente contra la prueba Shapiro Wilk. Para las distribuciones asimétricas los porcentajes de rechazo se hacen asintóticos en el 95%.

Aunque en las figuras que se presentan en el apartado 3.1 se puede ver la potencia de las diferentes pruebas para tamaños de muestra hasta 300, para el cálculo de la Potencia-Eficiencia (tabla 1) se requiere simular adicionalmente mayores tamaños de muestra que igualen la potencia de algunas pruebas a la potencia de la Shapiro Wilk, es decir, que se requieren de tamaños de muestra mayores de 300 para hacer dicho cálculo. Esto lleva a observar además que pruebas como la Jarque Bera presentan una potencia muy alta a tamaños de muestra muy grandes ($n = 500$). Análogamente se procede para las distribuciones asimétricas.

Tabla 1. Potencia-Eficiencia distribuciones simétricas de las pruebas de normalidad contra la Shapiro Wilk.

Uniforme (0,1)		Gamma (10,1)		Beta (5,3)	
Prueba	PE %	Prueba	PE %	Prueba	PE %
S.F	76,84	S.F	94,73	S.F	84,54
AD	66,36	J.B	84,78	A.D	69,75
C.V.M	56,15	AD	70,90	J.B	66,42
J.B	39,45	C.V.M	61,57	C.V.M	55,8
Lillie	37,46	Lillie	47,75	Lillie	40,43
K.S	13,27	K.S	19,5	K.S	13,95

Weibull (5,10)		Lognormal (5,0.2)	
Prueba	PE %	Prueba	PE %
S.F	88,23	S.F	86,66
A.D	84,71	J.B	78,78
C.V.M	81,08	A.D	74,28
J.B	71,42	C.V.M	65,44
Lillie	60,1	Lillie	45,61
K.S	13,36	K.S	25,14

En la tabla 2 se representan los diferentes valores que toma el criterio de Potencia-Eficiencia para las distribuciones analizadas en cada prueba de normalidad. Dicho criterio se expresa en términos de proporción de tamaño muestral alcanzado por la prueba con respecto a la prueba más potente, por lo que el inverso de dicho criterio ($1/PE(B)$) denotara el factor de incremento necesario en el tamaño muestral de la prueba B, para que esta iguale la potencia de la prueba más potente A.

Tabla 2. Potencia-Eficiencia distribuciones asimétricas de las pruebas de normalidad contra la Shapiro Wilk.

Gamma (1,1)		Beta (1,3)	
Prueba	PE %	Prueba	PE %
S.F	96,66	S.F	90,9
A.D	87,87	A.D	76,92
C.V.M	72,5	C.V.M	66,66
Lillie	60,41	Lillie	49,87
JB	53,7	JB	45,45
K.S	26,36	K.S	21,37

Weibull (1,10)		Lognormal (5,0.6)	
Prueba	PE %	Prueba	PE %
S.F	83,87	S.F	95,65
A.D	78,78	A.D	88
C.V.M	70,27	C.V.M	80
Lillie	54,16	JB	70,96
JB	52,01	Lillie	61,11
K.S	23,63	K.S	25,14

4. Conclusiones

Indudablemente este análisis permitió determinar bajo un nivel de significancia del 5% las diferencias en cuanto a la eficiencia y potencia que presentan las diferentes pruebas de detección de normalidad de acuerdo a los diferentes escenarios de simulación sometidos a prueba, principalmente entre distribuciones continuas simétricas y asimétricas.

Es de resaltar que en todas las ocasiones la prueba Shapiro Wilk se destaca como la más potente, aún a tamaños de muestra muy pequeños, es más, en el peor de los casos presenta una potencia de la prueba igual ó mayor a las

demás pruebas superándolas a medida que aumenta el tamaño de muestra.

Caso contrario ocurre con la prueba de Kolmogorov Smirnov, la cual claramente se presenta como la prueba menos potente dentro del conjunto de pruebas evaluadas.

La prueba de Jarque Bera muestra una potencia inferior a las demás pruebas excepto de la Kolmogorov pero solo hasta cierto tamaño de muestra, como es el caso de la distribución Beta (figura 6) donde la prueba Jarque Bera presenta una potencia de la prueba inferior para tamaños de muestra menores de 250 pero a medida en que aumenta el tamaño de muestra la prueba se hace más potente superando inclusive la Lilliefors y alcanzando la Cramer Von Mises.

Es claro que esto sucede con datos que presentan características porcentuales, es decir, para muestras generadas desde distribuciones cuyo rango de variación se encuentra entre 0 y 1. Lo anterior permite inferir que la prueba Jarque Bera para datos medidos en proporciones, fracciones o porcentajes no es muy buena si el tamaño de muestra es pequeño, requiriendo tamaños de muestra mayores o iguales a 150 para el caso de la uniforme (0,1) y de 250 para el caso de la distribución beta.

Contrastando las distribuciones simétricas y asimétricas con respecto a la efectividad de una

prueba y respecto a la prueba más potente se tiene lo siguiente: en la distribución simétrica de la gamma se requiere un tamaño de muestra de 234 para que el rechazo a la hipótesis nula se comporte asintótica en al menos el 95%. Mientras que para la distribución asimétrica de la gamma se necesita un tamaño de muestra de 29 para cumplir dicho comportamiento, evidenciando la gran influencia que tiene la forma de la distribución sobre el cumplimiento de la hipótesis de normalidad. De igual forma este comportamiento se repite para las demás distribuciones, es decir, el tamaño de muestra requerido para el comportamiento asintótico en la potencia es mucho más pequeño para las distribuciones asimétricas que para las distribuciones simétricas. Además, las diferencias entre pruebas en cuanto al tamaño de muestra para las distribuciones asimétricas es menor que para las distribuciones simétricas lo cual se ve reflejado en los valores que toma el criterio de Potencia-Eficiencia para los que las distribuciones asimétricas toman valores más altos.

Las tablas 3 y 4, ilustran las tres pruebas más potentes a diferentes tamaños de muestra, 10, 30, 50, 100, 200 y 300 para el caso de distribuciones simétricas y, 10, 30, 50 y 100 para el caso de distribuciones asimétricas, cada una con su respectiva potencia empírica.

Tabla 3. Potencia empírica de las tres pruebas más potentes en distribuciones simétricas.

Distribuciones Simétricas	TAMAÑOS DE MUESTRA					
	10	30	50	100	200	300
Uniforme (0 , 1)	Shap (9,7%) CVM (8,4%) AD (8,2%)	Shap (38,3%) AD (28,1%) CVM (25,4%)	Shap (76,4%) AD (57%) SF(47,6%)	Shap (99,7%) SF(96,9%) AD (95%)	Shap (100%) AD (100%) SF (100%)	Shap (100%) AD (100%) SF (100%)
Gamma (10 , 1)	JB (10,2%) SF(9,7%) Shap (9%)	Shap (21,3%) SF(20,4%) JB (19,9%)	Shap (29,2%) SF(27,8%) JB (26,5%)	Shap (61,7%) SF(58,9%) JB (50,6%)	Shap (90,5%) SF(88,4%) JB (82,7%)	Shap (98%) SF(97,7%) JB (95,9%)
Beta (5 , 3)	AD (6,2%) Shap (6%) SF (5,9%)	Shap (9,1%) AD (7,4%) Lillie (6,4%)	AD (12,6%) Shap (11,9%) CVM (9,3%)	Shap (27,5) AD (24,5%) CVM (18,9)	Shap (70,2%) SF (57%) AD (54%)	Shap (92,2%) SF (84,2%) AD (75,5%)
Weibull (5 , 10)	AD (5,7%) JB (5,3%) Shap (5,2%)	Shap (7,1%) AD (7%) CVM (6,6%)	AD (10,2%) Shap (9,7%) CVM (9,5%)	Shap (14,7%) AD (14,5%) CVM (12,76%)	Shap (25,8%) AD (23,4%) CVM (21,8%)	Shap (41,5%) SF (36,2%) AD (34,6%)
Lognormal (5 , 0.2)	JB (9,3%) SF (9,1%) Shap (7,6%)	SF (19,8%) Shap (19,6%) JB (19,5%)	Shap (32,8%) SF (32,2%) JB (30%)	Shap (58%) SF (55,7%) JB (48,6%)	Shap (85,9%) SF (84%) JB (81,2%)	Shap (96,5%) SF (95,3%) JB (93,7%)

Tabla 4. Potencia empírica de las tres pruebas más potentes en distribuciones asimétricas.

Distribuciones Asimétricas	TAMAÑOS DE MUESTRA			
	10	30	50	100
Gamma (1 , 1)	Shap (44,3%) SF (42,5%) AD (40,9%)	Shap (97%) SF (95,7%) AD (93,5%)	Shap (100%) SF (99,9%) AD (99,5%)	Shap (100%) SF (100%) AD (100%)
Beta (1 , 3)	Shap (20,2%) SF (19,1%) CVM (17,1%)	Shap (74,7%) SF (64,2) AD(60,3%)	Shap (97%) SF (92,6%) AD (88,9)	Shap (100%) SF (100%) AD (100%)
Weibull (1,10)	Shap (45,7%) SF (44,5%) AD (42%)	Shap (96,6%) SF (94,7%) AD (92,6%)	Shap (100%) SF (100%) AD (100%)	Shap (100%) SF (100%) AD (100%)
Lognormal (5 , 0.6)	SF (33,2%) Shap (32,4%) AD (30,7%)	Shap (83,8%) SF (81,8%) AD (79,2%)	Shap (97,8%) SF (97,3%) AD (95,6%)	Shap (100%) SF (100%) AD (100%)

5. Referencias bibliográficas

1. Ross, Sheldon. M. (2000). Introduction to probability Models, Academic Press, U.S.A.
2. Behar, Gutiérrez R. (2003). Validación de Supuestos en el Modelo de Regresión, serie monografías Universidad del Valle.
3. Mendenhall, William, D. D. Wackerly y R. L. Scheaffer (1994). Estadística Matemática con Aplicaciones, 2a edición, Grupo editorial iberoamericano, USA.
4. Siegel, Sidney. (1972). Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta, 2a edición, Editorial Trillas, S.A, México.
5. Gibbons, Jean Dickinson (1971). Nonparametric Statistical Inference, McGraw-Hill.
6. Conover, William (1999). Practical Nonparametric Statistic, 3ra edición, Jhon Wiley & Sons, U.S.A.
7. Graybill, Franklin A., A. M. Mood y D. C. Boes (1974). Introduction to the theory of Statistics, McGraw-Hill, U.S.A.

