Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Taller N.º 3 — Probabilidad conjunta

Nombre: Juan Felipe Rincón

Ejercicio 1

Se seleccionan al azar 2 estudiantes de un salón que contiene:

- 3 estudiantes de Sistemas,
- 2 de Electrónica, y
- 3 de Industrial.

Sean:

X = número de estudiantes de Sistemas seleccionados, Y = número de estudiantes de Electrónica sel

Se pide:

(a) Determinar la función de probabilidad conjunta $P(X, Y)$.

(b) Especificar el soporte $R = \{(x, y) \mid x + y \leq 2\}$.

Desarrollo

El total de formas posibles de escoger 2 estudiantes entre los 8 del grupo es:

$$\binom{8}{2} = 28$$

Para cada combinación de X y Y, la probabilidad conjunta es:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}, \quad x = 0, 1, 2;\ y = 0, 1, 2;\ x + y \leq 2$$

Tabla de probabilidades

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{3}{28}$	0	0

$$R = \{(x,y) \mid x = 0,1,2;\ y = 0,1,2;\ x+y \leq 2\}$$

—

Ejercicio 2

Se tiene la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se pide:

(a) Verificar que $f(x,y)$ es una función de probabilidad conjunta.

(b) Calcular $P\big((x,y) \in R\big)$ donde $R = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$.

(a) Verificación de función de probabilidad

$$\iint_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy = \frac{2}{5}\int_0^1 \int_0^1 (2x+3y)\,dx\,dy$$

Primero integramos respecto a x:

$$\frac{2}{5}\int_0^1 \left[x^2 + 3yx\right]_0^1 dy = \frac{2}{5}\int_0^1 (1+3y)\,dy$$

$$= \frac{2}{5}\left[y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x,y) \text{ es una función de probabilidad conjunta.}}$$

(b) Cálculo de $P((x,y) \in R)$

$$P((x,y) \in R) = \int_{x=0}^{1/2} \int_{y=1/4}^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy\,dx$$

Integramos respecto a y:

$$\frac{2}{5}\int_0^{1/2} \left[2xy + \frac{3}{2}y^2\right]_{1/4}^{1/2} dx$$

Evaluamos los límites:

$$\frac{2}{5}\int_{0}^{1/2}\left[2x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}\int_{0}^{1/2}\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{16}\right)dx=\frac{2}{5}\int_{0}^{1/2}\left(\frac{x}{2}+\frac{9}{32}\right)dx$$

$$=\frac{2}{5}\left[\frac{x^{2}}{4}+\frac{9x}{32}\right]_{0}^{1/2}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{16}+\frac{9}{64}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{64}=\frac{26}{320}=\frac{13}{160}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{P((x,y)\in R)=\frac{13}{160}\approx 0{,}0813}$$