Les variables aléatoires multivariées : transformations

Transformations: Cas univarié

Soit X, R.v. don't on connait la distribution et $g(\cdot) : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$
Une fonction, on définit une nouvelle variable $Y = g(X)$.

Quelle est la distribution de Y ?

Exemples

- EURO en USD
- Km en MILE
- Une échelle linéaire vers une échelle logarithmique
- Nombre d'enfants vers indicateur de présence d'

La CDF de Y est définie par : $F_Y(y) = P_Y(Y \leq y)$. donc

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y)$$

Si g admet une fonction inverse :

$$g^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}.$$

Alors ,

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_X(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Cas discret

Si X est discret avec pour PMF f_X, alors la CMF F_Y de Y = g(X) est facile à retrouver :

$$F_Y(y) = P_X(X \leq g^{-1}(y)) = \sum_{x \leq g^{-1}(y)} f_X(x).$$

et

$$f_Y(y) = P_X(X = g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x)$$

Exemple

Supposons que $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. et $Y = 2X - 1 = g(X)$,
$Y = \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5\}$,

$$X = g^{-1}(Y) = (Y + 1)/2,$$

et

$$f_Y(y) = P_X\left(\frac{1+y}{2}\right).$$

Cas discret

Exemple

pour $Y = X^2$, $\mathcal{Y} = \{0, 1, 4, 9\}$, and

$$f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x) = f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}), \quad y \in \{1, 4, 9\}$$

Cas continu.

Si X est continu et $g(\cdot)$ strictement croissante, alors g^{-1} est également croissante,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y) \\ &= P_X(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dériver en Y donne :

(règle: $F(x) = f(g(x))$ the $F^{j}(x) = f^{j}(g(x)) \times g^{j}(x)$)

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial F_X(g^{-1}(y))}{\partial y} = f_X(g^{-1}(y)) \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}.$$

Cas continu

Exemple

Soit $X = [0, \infty)$ et $Y = X^2$.

alors $g^{-1}(y)$ = y^1/2 (strictement croissante sur $Y = [0, \infty)$).

Autre exemple , avec $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, PDF $\lambda e^{-\lambda x}$ CDF = $1 - e^{-\lambda x}$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Cas continu

si $g(\cdot)$ est strictement décroissante alors g^{-1} est aussi une fonction décroissante,

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y) = P_x(X \geq g^{-1}(y))$$
$$= \int_{g^{-1}(y)}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 - F_X(g^{-1}(y)),$$

Là aussi on peut dériver en y :

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\,\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}.$$

En général,

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,\left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right|,$$

Lorsque la transformation est une bijection

La distribution Chi deux

Soit X, $f_X(x)$. Si on étend l'exemple précédent à R , $Y = X^2$ a pour densité :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right].$$

Si $X \sim N(0, 1)$. alors

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{y})^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(-\sqrt{y})^2/2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}, \end{aligned}$$

Soit $\chi^2(1)$.

La transformation de probabilité intégrale

Que ce passe t'il si l'on transforme une fonction par sa propre CDF ?

Théorème

Si X est continue avec pour CDF $F_X(x)$ et $Y = F_X(x)$, alors Y suit une loi de distribution uniforme sur l'intervalle

Si F_X est strictement croissante :

$$P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

$$Y \sim \mathrm{Uni}(0,1).$$

Donc :

Si la CDF a des régions plate, leur

La transformation de probabilité intégrale

Si l'on transforme une R.V. par sa CDF, le résultat est une distribution uniforme.

Cela s'applique à toute distribution sans exception et c'et très utile en pratique, notamment en algorithmique.

Cela veut dire que si l'on peut générer des nombres aléatoires uniformes, on pourra simuler n'importe quelle distribution juste en divisant par la CDF inverse, et donc pas besoin de générer des nombre selon une infinité de fonctions possibles.

Exemple

Si un chercheur voulait obtenir un échantillon aléatoire $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ suivant une loi Exponentielle mais ne dispose que d'un échantillon uniforme : $\{y_i\}_{i=1}^{n}$
La distribution exponentielle est :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

L'inverse est donc

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda},$$

D'où l'on déduit que

Est équivalent

$$\{x_i\}_{i=1}^{n} = \left\{-\frac{\ln(1-y_1)}{\lambda}\right\}_{i=1}^{n}$$

Transformation de la moyenne

Il existe des théorèmes pratiques qui permettent de transformer directement la moyenne sans devoir passer par la PDF de Y =g(x)

Mais directement à partir de X :

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$$

ou

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

Transformation bivariées discrètes

Soit $Y = (Y_1, Y_2)^j$ une transformation de $X = (X_1, X_2)^j$, i.e.,

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2), \qquad Y_2 = g_2(X_1, X_2).$$

alors

$$P(Y \in B) = P(X \in A), \qquad A = \{(x_1, x_2) : (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) \in B\}$$

Pour tout ensemble B of R^2. la distribution de Y est complètement déterminée par celle de X.

$$\begin{aligned}P(Y \in \mathcal{B}) &= \sum_{(y_1, y_2) \in \mathcal{B}} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} f_X(x_1, x_2)\end{aligned}$$

La difficulté tient à déterminer B, l'ensemble des valeurs possibles de Y .

Exemple

Exemple

$Si\ X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $X_2 \sim \text{Poisson}(\gamma)$ et sont indépendants.

On pose $Y_1 = X_1 + X_2$ and $Y_2 = X_2$.
Rappel,

$$P(X_1 = x_1) = \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!}, \qquad P(X_2 = x_2) = \frac{\gamma^{x_2} e^{-\gamma}}{x_2!}.$$

Parce qu'ils sont indépendants ,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \times \frac{\gamma^{x_2} e^{-\gamma}}{x_2!}.$$

La distribution jointe est donc :

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = P(X_1 = y_1 - y_2, X_2 = x_2) = \frac{\lambda^{(y_1 - y_2)} e^{-\lambda}}{(y_1 - y_2)!} \times \frac{\gamma^{y_2} e^{-\gamma}}{y_2!}$$

pour $y_1 \geq y_2$.

Exemple (2)

La distribution jointe est

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{\lambda^{(y_1-y_2)}e^{-\lambda}}{(y_1-y_2)!} \times \frac{\gamma^{y_2}e^{-\gamma}}{y_2!}$$

La distribution marginale en Y1 est :

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{y_2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(y_1-y_2)}e^{-\lambda}}{(y_1-y_2)!} \times \frac{\gamma^{y_2}e^{-\gamma}}{y_2!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\gamma)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{\infty} \frac{y_1!}{(y_1-y_2)!y_2!} \lambda^{(y_1-y_2)}\gamma^{y_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\gamma)}}{y_1!}(\lambda+\gamma)^{y_1} = \frac{(\lambda+\gamma)^{y_1}e^{-(\lambda+\gamma)}}{y_1!} \end{aligned}$$

La formule de Newton nous indique $(a + b)$^n = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^k b^{n-k}$.

Ce qui est effectivement la pmf d'une loi de poisson $\lambda + \gamma$.

Cas bivarié continu

On considère des transformation one to one pour lesquels il existe un seul x qui résout $y = g_k(x)$

On suppose aussi que (X_1, X_2) admet une solution

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2), \qquad Y_2 = g_2(X_1, X_2)$$

Pour obtenir

$$X_1 = h_1(Y_1, Y_2), \qquad X_2 = h_2(Y_1, Y_2).$$

On trouve :

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \, |\det(J)|$$

pour

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

Avec J la matrice de Jacob

Exemple

Soit $X_1 \sim N(0, 1)$ and $X_2 \sim N(0, 1)$ indépendants et la transformation:

$$Y_1 = X_1 + X_2, \qquad Y_2 = X_1 - X_2$$

La fonction inverse est :

$$X_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \qquad X_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2}$$

Donc $h_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \qquad h_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$

J=

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Exemple (suite)

Rappel : $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))\ |\det(J)|$

Avec $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)$, $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = & \phi\Big(\frac{y_1+y_2}{2}\Big)\phi\Big(\frac{y_1-y_2}{2}\Big)\frac{1}{2} \\
& = \frac{1}{4\pi}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{y_1+y_2}{2}\Big)^2\Big]\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{y_1-y_2}{2}\Big)^2\Big] \\
& = \frac{1}{4\pi}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{y_1+y_2}{2}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{y_1-y_2}{2}\Big)^2\Big] \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{y_1^2}{\sqrt{2}^2}\Big]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\frac{y_2^2}{\sqrt{2}^2}\Big] \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\Big(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\Big(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\Big)
\end{aligned}
$$

donc Y_1 t Y_2 sont également indépendants et $Y_1 \sim N\ (0, 2)$ and $Y_2 \sim N\ (0, 2)$.

Transformations multivariées normales: propriétés

On peut étendre ce qu'on a vu plus haut à k-variables $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$.

où,

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{N}\Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, k\sigma^2\Big).$$

Propriété importante : $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, \sigma^2/k)$ ous indique que la moyenne d'échantillons

suit une loi normale dont la variance décroit avec la taille de l'échantillon

De plus, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma_X)$ oi normale multivariée à K dimensions), les distributions jointes et mar… normales.

De plus, à l'inverse du cas général, si l'on a des lois normales avec une corrélation de 0 elles sont indépendantes