Statistiques I, Master MEDAS, CNAM

Maxence Rizo

24/11/2020

L'Espérance

Définition:

L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E[X]$ est

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx & \text{Si } X \text{ est continu} \\ \sum_{x \in X} x f_X(x) = \sum_{x \in X} x P(X = x) & \end{cases}$$

Si l'intégrale ou la somme existe. Si $E[|x|] = \infty$ on dit que l'Espérance n'est pas définie

L'espérance d'une variable aléatoire n'est en fait que sa moyenne dont les valeurs auraient été pondérées par la probabilité de la distribution.

C'est une mesure de la tendance centrale d'une distribution (mais pas la seule !).

En pondérant en fonction de la probabilité de distribution ,l'objectif est de se rapprocher d'une valeur « type » tirée aléatoirement d'un échantillon.

Moments

Définition :

Pour chaque entier n, le n-*ième* moment de X (ou $F_X(x)$), μ'_n est :

$$\mu'_n = E[X^n]$$

le n-ième moment central de X, μ_n is

$$\mu_n = E[(X-\mu)^n]$$

où $\mu = \mu'_1 = E[X]$

Les moments sont des valeurs importantes pour caractériser une distribution.

Moments: Exemples

Si X is a r.v. with pdf $f_X(x)$:

- $E[X] = \int x\, f(x)\, dx = \mu_X$ (Espérance/moyenne)
- $E[X^n] = \int x^n f(x)\, dx$ (n-*ieme* moment)
- $E[(X-\mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n$ (*n-ième moment central*)
- $E[(X-\mu_X)^2] = E[X]^2 - \mu_X^2 = \sigma_X^2$ (variance)
- $E[(X-\mu_X)^3/\sigma_X^3] = S_X$ (skewness/asymétrie)
- $E[(X-\mu_X)^4/\sigma_X^4] = K_X$ (kurtosis)

The Mean

Le Premier moment est simple à comprendre, c'est une indication de position

Exemples

Sur une population de 10 objets.

i :12345678910

X_i :1121233121

La moyenne vaut

$$\sum \frac{X_i}{10} = 1\frac{5}{10} + 2\frac{3}{10} + 3\frac{2}{10} = \sum x\, fx(x) = 1.7.$$

Par exemple si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. alors,

$$\mu_X = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\infty x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

C'est une particularité pratique d'une loi exponentielle de paramètre *λ d'avoir une moyenne et une variance également égale à λ*

La moyenne : transformation

Considérons Y une V. a. qui est une transformation de X, $Y = g(X)$, en principes, on pourrait calculer la pdf de Y et refaire le calcul.

Cependant on peut s'épargner cette peine en utilisant tout simplement la pdf de X pour définir Y en effet :

$$E[Y] = \Sigma \quad g(x)f(x)$$

Ou

$$E[Y] = \int g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

La Variance

La variance est un paramètre qui mesure la dispersion de X autour de sa moyenne. Pour une r.v. X prenant pour valeur $x_1, \cdots, x_n$ selon les probabilités $f(x_1), \cdots, f(x_n)$, la variance :

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum (x_i - E[x])^2 f_x(x)$$

Cela représente la somme des distances au carré des points x_i, depuis la moyenne $E[X]$. Plus les points x_i s'éloignent de E[X] plus la variance sera élevée

Pour X continu, le raisonnement est le même.

$$\sigma^2 = E[(X - \mu X)^2] = \int (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

The Variance (Cont'd)

La variance est une mesure de dispersion autour de la moyenne.

On appelle écart type sa racine positive , mais la théorie s'est plus basée sur la variance car le calcul de carrés est bien plus aisé que le calcul de valeurs absolue, il faut donc parfois faire attention aux notations, les français ayant tendance à présenter les lois avec l'écart type et les anglo saxons avec la variance.

Si X a pour unité u, alors σ^2 has unit u^2.

Contrairement à la variance, l'écart type a la même unité que X (et $E[X]$) et peut servir de point de comparaison pour mesurer la dispersion de X autour de $E[X]$.

Des formules précédentes en sommant les intégrales on retrouve que :

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Calculs avec les Espérances

L'Espérance est linéaire :

Pour des constantes a, b, $E[a + bX] = a + bE[X]$.

Plus généralement , $E[ag_1(X) + bg_2(X) + c] = aE[g_1(X)] + bE[g_2(X)] + c$. On note que $E[g(X)] \neq g(E[X])$, En général.

Pour la variance cela donne :

$$V(a + bX) = b^2 V(X).$$

Standardisation

De nition

Normaliser une r.v. revient à poser : $Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$.

Ce qui standardise la moyenne à 0 et l'écart type à 1 ,

$$E[Z] = \frac{1}{\sigma_X}(E[X] - \mu_X) = 0, \qquad V(Z) = \frac{1}{\sigma^2} E[(X - \mu_X)]^2 = 1.$$

L'asymétrie

Définitio

L'asymétrie est le moment d'ordre 3:

$$s_X = E\left(\frac{(X - \mu_X)^3}{\sigma_X^3}\right).$$

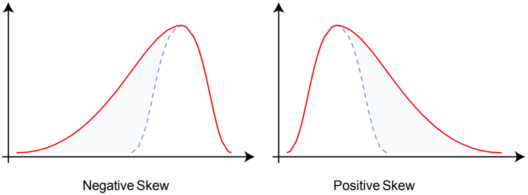
SI:

$s_X < 0$ Asymétrie à gauche,

$s_X = 0$ Symétrie,

$s_X > 0$ Asymétrie à droite.

Une asymétrie à gauche indique une queue de distribution plus longues vers la gauche, et donc une masse plus importante à droite.



La Kurtosis

Définition

La kurtosis représente
le moment d'ordre 4

$$k_X = E\left(\frac{(X - \mu_X)^4}{\sigma_X^4} \right)$$

Cela mesure la hauteur d'une distribution.

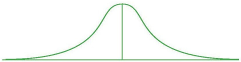
La loi normale a $k_X = 3$.

On peut parler d'excès de kurtosis : $k_X - 3$.

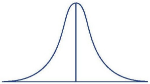
$k_X < 3$ Platykurtic, loi uniforme

$k_X = 3$ Mesokurtic, Loi normale

Leptokurtic. Loi de Laplace



Lower Kurtosis



Higher Kurtosis

La fonction génératrice [mgf]

Il s'agit d'une fonction qui a pour objet de générer les moments d'une distribution(mgf).

La fonction génératrice de moment de X $à$ t est

$$M_X(t) = E[e^{tX}],$$

Si l'Espérance existe en $-g < t < g$.

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx \quad ;$$

$$M_X(t) = \sum e^{tx} P(X = x)$$

La fonction génératrice [mgf](Cont'd)

On peut utiliser la MGF pour générer des moments .

Theorem

Si X a une mgf $M_X(t)$, alors

$$\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = E[X^n],$$

Donc le n-$ieme$ moment est égal à la n-ième derivée de $M_X(t)$ pour $t = 0$.
Ça justifie son nom.

Proof

En pratique, c'est beaucoup plus simple de calculer les moments que de l'utiliser.

Mais son utilité réside plus dans le fait de permettre de caractériser une distribution .

Quantiles

définition

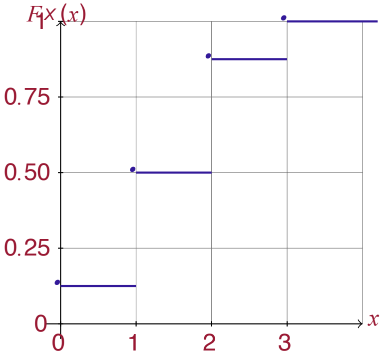
Pour $\tau \in (0, 1)$, le τ-*ième*-quantile de X est :

$$q_\tau = \inf\{q : F_X(q) \geq \tau\}$$

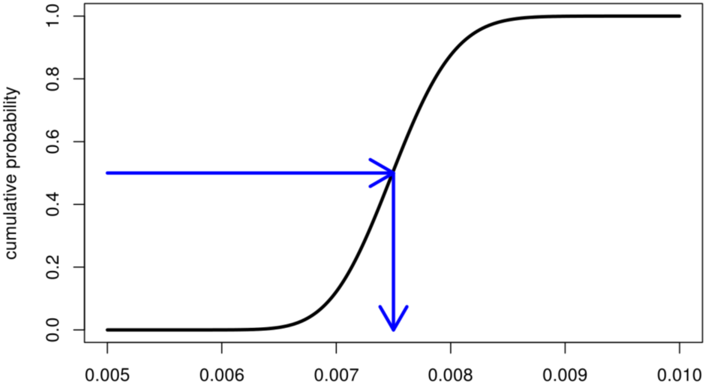
Comme F_X vaut 0 en tout point mais a une valeur sur les intervalles on utilise l'inf pour que

q_τ soit défini.

Si F_X est strictement croissante, $q_\tau = F_X^{-1}(\tau)$.



Quantiles: distribution continue



Pour une distribution strictement croissante et continue sur R, le plus petit x tel que $F_X(x) \geq \tau$ est l'unique x qui satisfait $F_X(x) = \tau$.

Comme dans le cas discret, il existe une fonction inverse de la CDF F^{-1} et on obtient : $F^{-1}(\tau) = x$

Quantiles (Cont'd)

Examples

Si $X \sim \mathrm{Uni}(0, 1)$, $F_X(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$, et $q_\tau = \tau$. La médiane de X

Est $q_{.5}$; c'est un autre paramètre de tendance centrale .

Pour $\tau = i/4$ ($i = 1, 2, 3$), nous obtenons les quartiles .

Pour $\tau = i/10$ (for $i = 1, \cdots, 9$), les deciles.
Pour $\tau = i/100$ (for $i = 1, \cdots, 99$), les percentiles.

L'écart interquartile $q_{.75} - q_{.25}$; est une autre mesure de dispersion.

Quantiles (cont'd)

La distribution de Cauchy

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Est un exemple intéressant d'utilité des quantiles : Cette fonction n'a en effet pas de moments.

Son intégrale n'est pas bornée, l'Espérance n'existe pas

Cependant la médiane est bien définie et vaut 0

Annexes de calcul

Soit X une r.v. suivant une loi exponentielle de paramètre lambda : λ.

Le calcul utilise l'intégration par partie :

$$(\int uv' = [uv] - \int u'v):$$

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-\lambda x} \qquad v(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

$$\lambda \int_0^\infty x\ e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = \lambda\Big(\Big[x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty\ \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\ \mathrm{d}x\Big)$$

$\Big[x\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^\infty = 0$ so

$$\int_0^\infty x\ \lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x = +\int_0^\infty\ e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$= \Big[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big]_0^\infty = 0 - \Big(-\frac{1}{\lambda}\Big) = \frac{1}{\lambda}$$

back

Pour l’écart type :

$$u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{-\lambda x} \qquad v(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$$

tt

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \lambda \Big(\Big[x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\, \mathrm{d}x \Big)$$

$\Big[x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big]_0^{\infty} = 0$ and $\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$

$$\int_0^{\infty} x\, \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = +2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$
$$= 2 \frac{1}{\lambda^2}$$

Remember that for an exponential law $F_x = 1 - e^{-\lambda x}$ and $f_x = \lambda e^{-\lambda x}$
Also $P_X(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) \mathrm{d}x$

La fonction génératrice de moments :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_X(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\inf}^{+\inf} e^{tx} f_X(x) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\inf}^{+\inf} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tx} \right) f_X(x) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\inf}^{+\inf} \left(x e^{tx} \right) f_X(x) \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{E}[X e^{tX}]
\end{aligned}$$

thus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_X(t) \Big|_{t=0} = \mathrm{E}[X e^{tX}] \Big|_{t=0} = \mathrm{E}[X]$$

In an analogous manner

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} M_X(t) \Big|_{t=0} = \mathrm{E}[X^n e^{tX}] \Big|_{t=0} = \mathrm{E}[X^n]$$