Séance 2

Maxence Rizo

10/11/2020

Les variables aléatoires

Une variable aléatoire (v.a) X est une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque évènement élémentaire ω, on associe un nombre x.

Les variables aléatoires, 2 I

Par exemple : Si l'on demande à 50 personnes si ils sont d'accord avec une politique lors d'un sondage, le résultat est une chaîne de 50 caractères dans un espace de taille 50^2. Il peut être plus simple de considérer le nombre de personnes ayant répondu oui, $X \in (0:50)$.
On remplace ainsi l'espace des évènements par une valeur numérique.

Les variables aléatoires, 3 I

Variables aléatoires discrètes et continues

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs. Sinon, elle est dite continue (exemples : hauteur d'un arbre, distance de freinage d'une voiture roulant à 100 km/h).

Notation: Une variable aléatoire est notée en majuscule, sa réalisation en minuscule.

Propriétés

Mathématiquement : une variable aléatoire, X, est une fonction $X(\Omega) : S \rightarrow X \subset R^k$
Si $k = 1$, X on parle de variable univariée, sinon, de multivariée.

Fonction de probabilité

On peut montrer que notre fonction de probabilité P, définie sur l'espace originel $S = s1, s2, ..., sn$, peut être utilisée pour X. avec (S, P), on peut définir une fonction de probabilité sur X. qui vaudra: $PX(X = x_i) = P(s_j \in S : X(s_j) = x_i)$.

Cette probabilité satisfait les axiomes de Kolmogorov.

Si X n'est pas dénombrable, on a :

$P_X : \forall$ ensemble $A \subset X$

$P_X(X \in A) = P(s \in S : X(s) \in A)$

Les variables uni-variées

Pour X une variable dérivée de (S, Ω, P). telle que :
$X() : S \to X \subset R, X = x \subset R : \exists s \in S.t.X(s) = x$
On obtient (X, Ω_x, P_X) avec Ω qui contient les valeurs possibles sur R et P_X.
La loi de probabilité associée respecte les Axiomes de Kolmogorov.
La plupart du temps, on laissera le subscript X de côté.
Exemple : Salaire, âge, genre ...

Les fonctions de X

X peut être caractérisé entièrement par deux types de fonctions, les fonctions de répartitions, et les fonction de masse. Ces fonctions permettent d'en calculer les moments de X.

On peut également les utiliser pour calculer les distributions de transformations de $X \to Y = g(X)$

La fonction de répartition

la fonction de répartition où cdf of X at x se définit ainsi :
$F_X(x) = P_X(X \leq x) = P_X(X \in (\infty, x])$ pour tout x
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_r%C3%A9partition`

Propriétés

En général, une Fonction $F()$ est une fonction de répartition si :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ when $x_1 \leq x_2$
- $\lim\limits_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon) = F(X)$

la troisième propriété nous impose une continuité à droite de la CDF.

La fonction de Masse ou de Densité

Les fonctions de masses (variables discrètes) ou de densité (variables continues) également appelées PDF se notent :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{a}^{b} p(x)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Elle représente la probabilité que x se trouvent entre A et B.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_masse_(probabilit%C3%A9s)

Propriétés

En notant $F_x(X)$ la CDF et $f_x(X)$ la pdf (pmf) on a :

- Quand X est continu, $PX(X = x) = 0$ pour tout X
- $\frac{\partial F_x(X)}{\partial x} = f_x(x)$ la PDF est la dérivée de la CDF, la masse représentant le taux de croissance de la répartition. à l'inverse on peut retrouver la CDF en intégrant la PDF
- $f(x) \leq 0$ pour tout x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ (pdf) ou $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ (pmf)