

Exponentialfunktionen - Test

Aufgabe 1

Eine Bakterienkultur verdreifacht sich alle zwei Wochen. /10P

- Beschreibe das Wachstum mit einer expliziten Formel in Wochen und in Tagen.
- Eine zweite Bakterienkultur war vor drei Wochen halb so groß wie heute. Welche Kultur wächst schneller?
- Zu Beginn einer Aufzeichnung sind 500 Bakterien der ersten Art vorhanden. Nach 10 Tagen werden weitere 2000 Bakterien hinzugegeben. Finde zwei Funktionsgleichungen, mit denen man die Anzahl der Bakterien vor bzw. nach dem Hinzugeben der Bakterien berechnen kann.
- Aus versehen sind Bakterien aus der zweiten Kultur in eine Schale mit Bakterien aus der ersten Kultur gelangt. Es waren anfangs rund 1000 Bakterien der ersten Kultur vorhanden. Das Verhältnis zwischen ihnen ist 1 zu 2. Finde eine Funktionsgleichung, mit der man die Gesamtanzahl aller Bakterien nach x Wochen berechnen kann.

Aufgabe 2

Jede Stunde werden 20% eines Medikaments im Körper abgebaut. /6P

- Beschreibe den Vorgang mit einer rekursiven und einer expliziten Formel.
- Beschreibe den Graphen, zu der Funktion aus a).
- Ein Doktor verspricht, dass nach 8 Stunden nicht mehr als 10% des Wirkstoffes im Blut verbleiben. Überprüfe diese Aussage.

Aufgabe 3

Frank will sein Kapital in Höhe von 2000€ anlegen. Die Bank macht ihm zwei Angebote: /7P

1. 50€ Gebühren für die Transaktion und dafür jedes Jahr 1% Zinsen.

2. 150€ Gebühren für die Transaktion und dafür jeden Monat 0.2% Zinsen.

- Finde je eine Funktionsgleichung für die beiden Angebote
- Welches Angebot ist besser? (Nach 2 Jahren, nach 4 Jahren, nach 6 Jahren)
- Wie viel Gewinn würden seine 100€, die er mit dem ersten Angebot spart, mit diesem nach 2, 4, 6 Jahren machen?

Aufgabe 4

a) Finde zwei Funktionsgleichungen für die Funktion $f(x) = 2^x$, wenn man diese jeweils an der x - und der y -Achse spiegelt. /2P

Gesamtpunktzahl: /25P

Exponentialfunktion - Lösungen

Aufgabe 1

Eine Bakterienkultur verdreifacht sich alle zwei Wochen.

/10P

- a) Beschreibe das Wachstum mit einer expliziten Formel in Wochen und in Tagen.

In Wochen: $f(x) = f(0) \times 3^{x/2}$

In Tagen: $f(x) = f(0) \times 3^{x/14}$

- b) Eine zweite Bakterienkultur war vor drei Wochen halb so groß wie heute. Welche Kultur wächst schneller?

Funktionsgleichung für zweite Kultur: $f(x) = f(0) \times 2^{x/3}$

Es gilt:

$$3^{x/2} = \left(3^{1/2}\right)^x \approx 1,73^x > 1,26^x \approx \left(2^{1/3}\right)^x = 2^{x/3}$$

Damit wächst die erste Kultur schneller.

- c) Zu Beginn einer Aufzeichnung sind 500 Bakterien der ersten Art vorhanden. Nach 10 Tagen werden weitere 2000 Bakterien hinzugegeben. Finde zwei Funktionsgleichungen, mit denen man die Anzahl der Bakterien vor bzw. nach dem Hinzugeben der Bakterien berechnen kann.

Für $x < 10$: $f(x) = 500 \times 3^{x/14}$

Für $x \geq 10$: $f(x) = (500 \times 3^{10/14} + 2000) \times 3^{(x-10)/14}$

=> Der neue Wachstumsfaktor ist der Funktionswert der ersten Funktion nach 10 Tagen + 2000. Dieser wird wieder mit $3^{x/2}$ multipliziert. Allerdings sind ja schon 10 Tage vergangen, weswegen man x um 10 vermindern muss.

- d) Aus versehen sind Bakterien aus der zweiten Kultur in eine Schale mit Bakterien aus der ersten Kultur gelangt. Es waren anfangs rund 3000 Bakterien der ersten Kultur vorhanden. Das Verhältnis zwischen ihnen ist 1 zu 2. Finde eine Funktionsgleichung, mit der man die Gesamtanzahl aller Bakterien nach x Wochen berechnen kann.

Das Verhältnis der Bakterien ist 1 zu 2, also 1000 Bakterien zu 2000 Bakterien. Für die erste Kultur kann man die Gesamtanzahl der Bakterien wie folgt angeben:

$$f(x) = 1000 \times 3^{x/2}$$

Für die zweite Kultur gilt:

$$g(x) = 2000 \times 2^{x/3}$$

Um die Gesamtbakterienanzahl zu berechnen, muss man einfach nur die Gleichungen addieren:

$$n(x) = f(x) + g(x) = 1000 \times 3^{x/2} + 2000 \times 2^{x/3}$$

Aufgabe 2

Jede Stunde werden 20% eines Medikaments im Körper abgebaut.

/6P

- a) Beschreibe den Vorgang mit einer rekursiven und einer expliziten Formel.

Rekursiv: $f(x) = f(x-1) \times 0.8$

Explizit: $f(x) = f(0) \times 0.8^x$

- b) Beschreibe den Graphen, zu der Funktion aus a).

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}_0^+$

Wertebereich: $y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1 = 100\%$ oder $y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq f(0)$

Symmetrie: keine

Monotonie: streng monoton fallend

Asymptoten: x-Achse

Nullstellen: keine

- c) Ein Doktor verspricht, dass nach 8 Stunden nicht mehr als 10% des Wirkstoffes im Blut verbleiben. Überprüfe diese Aussage.

Berechnet man den Funktionswert für $x = 8$, erhält man:

$$f(8) = 100\% \times 0,8^8 \approx 16,8\% > 10\%$$

Da der Wert größer als 10% ist, liegt der Doktor falsch.

Aufgabe 3

Frank will sein Kapital in Höhe von 2000€ anlegen. Die Bank macht ihm zwei Angebote:

/7P

- 50€ Gebühren für die Transaktion und dafür jedes Jahr 1% Zinsen.
- 150€ Gebühren für die Transaktion und dafür jeden Monat 0.2% Zinsen.

- a) Finde je eine Funktionsgleichung für die beiden Angebote

1. Angebot: $f(x) = 1950\text{€} \times (1 + 1\%)^x$

2. Angebot: $g(x) = 1850\text{€} \times (1 + 0.2\%)^{12x}$

- b) Welches Angebot ist besser? (Nach 2 Jahren, nach 4 Jahren, nach 6 Jahren)

Jahr	f(x)	g(x)
2	19,89€	1940,80€
4	2029,10€	1987,90€
6	2069,90€	2136,20€

Damit ist das erste Angebot nach 2 Jahren besser, nach 4 und 6 Jahren lohnt sich allerdings das zweite mehr.

- c) Wie viel Gewinn würden seine 100€, die er mit dem ersten Angebot spart, mit diesem nach 2, 4, 6 Jahren machen?

Um den Gewinn durch die 100€ auszurechnen, muss man diese einfach statt den 1950€ in die Funktionsgleichung einsetzen. Da es allerdings um den Gewinn geht und nicht um die Gesamtsumme, muss man vom Ergebnis immer 100€ wieder abziehen:

Jahr	f(x)	Gewinn = f(x) - 100€
2	102,01€	2,01€
4	104,06€	4,06€
6	106,15€	6,15€

Antwort: Franks 100€ würden nach 2 Jahren 2,01€, nach 4 Jahren 4,06 und nach 6 Jahren 6,15€ an Gewinn machen.

Aufgabe 4

Finde zwei Funktionsgleichungen für die Funktion $f(x) = 2^x$, wenn man diese jeweils an der x- und der y-Achse spiegelt. /2P

Spiegelung an der x-Achse (mit dem Faktor -1 multiplizieren):

$$f_{s1}(x) = -2^x$$

Spiegelung an der y-Achse (x durch -x ersetzen):

$$f_{s2}(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$

Gesamtpunktzahl: /25P