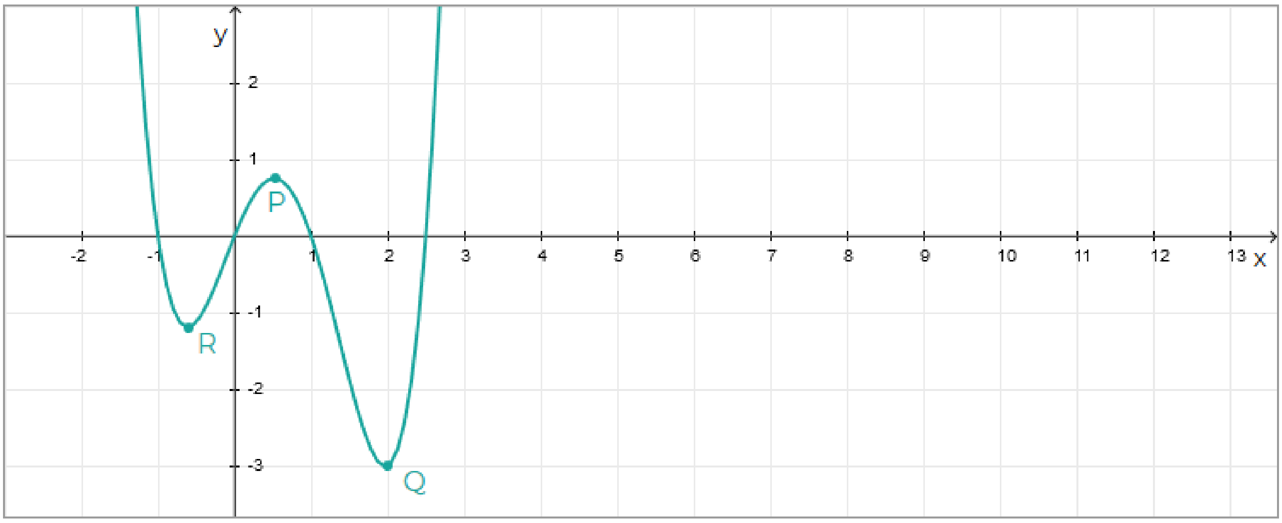
Ganzrationale Funktionen - Test

Aufgabe 1

Im Koordinatensystem ist eine nicht gestreckte, ganzrationale Funktion 4. Gerades dargestellt. /5P

a) Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion.

b) Um welche Art von Extremum handelt es sich bei P, Q und R?



Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen der Funktionen: /8P

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

b) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$

c) $h(x) = -x^3 + 12x^2 - 23x - 36$

d) $k(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

Aufgabe 3

Bestimme die Symmetrie der Funktionen: /4P

a) $f(x) = x^6 - 2x^2 + 1$

b) $g(x) = x^5 - x^2 + x$

c) $h(x) = x^7 + 3x^3 - 4x$

d) $k(x) = x^6 + 3x^4 + e^x$

Gesamtpunktzahl: /17P

Ganzrationale Funktionen - Lösungen

Aufgabe 1

Im Koordinatensystem ist eine nicht gestreckte, ganzrationale Funktion 4. Gerades dargestellt. /5P

a) Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion.

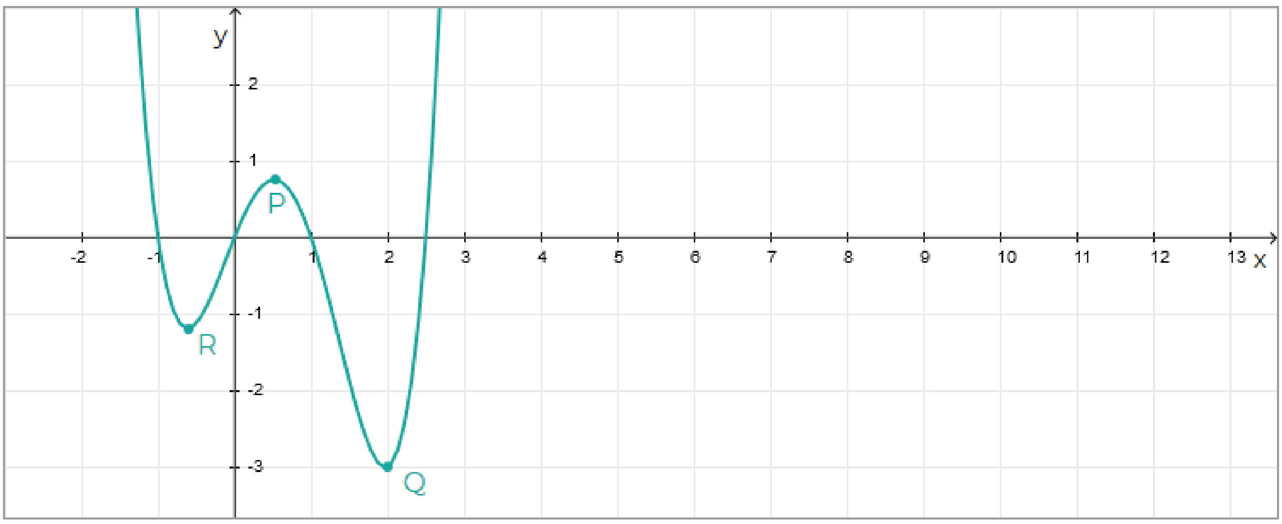
Die Nullstellen der Funktion sind x = -1, x = 0, x = 1 und x = 2,5.

Da die Funktion nicht gestreckt ist und alle Nullstellen der Funktion gegeben sind, kann man die Funktionsgleichung mithilfe von Linearfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+1)(x-1)(x-2,5) \\ &= x^4 - 2,5x^3 - x^2 + 2,5x \end{aligned}$$

b) Um welche Art von Extremum handelt es sich bei P, Q und R?

P ist ein lokales Maximum, Q ist ein globales Minimum und R ist ein lokales Minimum.



Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen der Funktionen: /8P

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$

Durch Ausprobieren ergibt sich x = 1 als Nullstelle. Klammert man (x – 1) aus, ergeben sich $x = \pm\sqrt{2}$ Nullstellen.

b) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &= 2x^3 - 4x^2 - 6x + 12 \\ &= x^3 - 2x^2 - 3x + 6 \\ &= (x-2)(x^2-3) \\ &= (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$L = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$$

c) $h(x) = -x^3 + 12x^2 - 23x - 36$

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &= -x^3 + 12x^2 - 23x - 36 \\ &= x^3 - 12x^2 + 23x + 36 \\ &= (x+1)(x^2 - 13x + 36) \end{aligned}$$

Berechnet man, für welcher x der Term $(x^2 - 13x + 36)$ gleich 0 ist, erhält man als weitere Nullstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 13x + 36 \\ x_{1/2} &= -\frac{-13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - 36} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$L = \{-1; 4; 9\}$$

d) $k(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

Sie $x^2 = u$:

$$\begin{aligned} k(x) = 0 &= -x^4 + 10x^2 - 9 \\ &= -u^2 + 10u - 9 \\ &= u^2 - 10u + 9 \end{aligned}$$

Stellt man nach u um:

$$\begin{aligned} u_{1/2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9} \\ &= 5 \pm 4 \end{aligned}$$

Setzt man jetzt wieder x^2 für u ein:

$$\begin{aligned} x^2 &= u \\ x &= \pm\sqrt{u} \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{u_1} = \pm 1 \\ x_{3/4} &= \pm\sqrt{u_2} = \pm 3 \end{aligned}$$

$$L = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Aufgabe 3

Bestimme die Symmetrie der Funktionen: /4P

a) $f(x) = x^6 - 2x^2 + 1$

Da alle Exponenten gerade sind, ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $g(x) = x^5 - x^2 + x$

Die Funktion ist nicht symmetrisch.

c) $h(x) = x^7 + 3x^3 - 4x$

Da alle Exponenten ungerade sind, ist die Funktion punktsymmetrisch zu Koordinatenursprung.

d) $k(x) = x^6 + 3x^4 + e^x$

Eine Funktion ist dann achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zu Koordinatenursprung, wenn es alle Summanden sind. Da e^x keine Symmetrie hat, hat es die Funktion auch nicht.

Gesamtpunktzahl: /17P