# TD2

Félix Yvonnet

21 septembre 2023

## Ex 1 : continuité de quelques distributions

1. On a $\int_X f d\mu = \int_X \frac{f}{g} g d\mu = \int_X |\frac{f}{g}| g d\mu \leq \int_X \|\frac{f}{g}\|_\infty g d\mu \leq \|\frac{f}{g}\|_\infty \int_X g d\mu$. CQFD.
2. On va choisir les bonnes fonctions afin d'appliquer le lemme d'avant. Soit $\alpha > 1$ et $(x_n)$ une suite positive. $X = \mathbb{N}$ et $\mu$ la mesure de comptage. $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{R}_+ \\ n & \mapsto x_n \end{cases}$
3. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \end{cases}$ mesurable.
   Intégrabilité de $(1 + \|x\|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > d$ sur $\mathbb{R}^d$.
   - Par Fubini : Montrer que $(1+|x|^2)^{-\alpha/2} \leq \prod_{n=1}^{d}(1+|x_i|^2)^{-\frac{d}{2d}}$. L'inégalité est équivalente à $\prod_{i=1}^{d}(1+|x_i|^2) \leq (1+|x|^2)^d$. Ce qui est vrai car $\forall i \in [\![1;d]\!],\ x_i^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$.
     On a alors $\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|^2)^{-\frac{\alpha}{2d}} d\lambda_1(x_1)\cdots d\lambda_d(x_d) \overset{Fub}{\leq} \prod_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}}(1+|x_i|^2)^{\frac{\alpha}{2d}} dx_i < \infty \sim |x_i|$ donc intégrable.
   - Par le passage en polaire : So $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable alors on a $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta\in S^{d-1}} f(r\theta)d\theta r^{d-1}dr$. Avec le $S$ la sphère unité. Alors $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}dx = \int_0^\infty\int_{S^{d-1}}\frac{r^{\alpha-1}}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}d\theta dr = \lambda(S^{d-1})\int_0^\infty\frac{r^{d-1}}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}$ intégrable
4. $\varphi$ linéaire clair (NB $\sum$ cv vers sup f compact $\to \sum$ finie). Soit $f \in D(\mathbb{R})$, $|\varphi(f)| \underset{\Delta}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}}|f^{(n)}(n)| \underset{Q_2)}{\leq} C_2 \sup_{n\in\mathbb{N}}(1+n)^2|f^{(n)}(n)| \leq C_2 \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{n\leq|x|(=\eta(x))}(1+|x|)^2|f^{(n)}(x)| = C_2|f|_{w,\eta}$.
5. $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt = [f(t\int_0^t g(x)dx]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f' \int_0^\infty g(x)dx$. Posons $g : t \mapsto \int_0^t g(x)dx$ on a :
   $\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)G(t)dt$ donc $|\varphi(f)| \leq \int_{\mathbb{R}}|f'(t)G(t)|dt$ puis par la question 3 $|\varphi(f)|C_\alpha \sup_{x\in\mathbb{R}}\underbrace{(1+|x|^2)^{\alpha/2}|G(x)|}_{w(x)}|f'(x)|$. $w$ est continue car $g \in L^1(\mathbb{R})$ et on prend $\eta = 1$.

## Ex2 : prolongement de Tietze, preuve constructive

1. $f$ est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists C,\ \forall x,y \in X,\ |f(x)-f(y)| \leq Cd(x,y)$.
   $\alpha \in ]0,1[, f$ est $\alpha - Holder \Leftrightarrow \exists C,\ \forall x,y \in X,\ |f(x)-f(y)| \leq \underbrace{Cd(x,y)^2}_{w(s)=cs^2}$.
   Tout d'abord remarquons que $w$ est concave (oui, dérivée seconde neg)
   Soir $s,t \in \mathbb{R}_+$ avec $s \geq t$. $w$ concave donc $w(s+t) \leq w'(s)(s+t-s)+w(s)$
   donc $w(s+t) \leq \underbrace{\alpha}_{<1} \underbrace{s^{\alpha-1}}_{\leq t^{\alpha-1}} t + s^\alpha \leq t^\alpha + s^\alpha$.
2. Justifier que $w$ est continue. On sait que croissant, ss aditif et tend vers 0 en $0^+$. Soit $s>0$ on veut mq $w(s+t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} w(s)$ mais $w(s) \leq w(s+t) \leq < (s) + w(t) \to w(s)+w(0) = w(s)$ et on fait de même pour $0^-$ avec $w(s)-w(t) \leq w(s-t) \leq w(s)$.
3. On sait que $|f(x)-f(y)| \leq w(d(x,y))$ donc soit $x \in A$, on a d'une part $F(x) \leq f(x)$ car on peut prendre $y = x$ et c'est bon et $F(x) \geq f(x)$ car $F(x) - f(x) = \inf_{y\in A} \underbrace{f(y) - f(x) + w(d(x,y))}_{\geq 0}$.
4. Spot $x_0, x_1 \in X$ $F(x_1) \leq \inf f(y) + w(d(x_1,x_0) + d(x_0,y)) \leq F(x_0) + w(d(x_1,x_0))$. Donc (par sym) $|F(x_1) - F(x_0)| \leq w(d(x_1,x_0))$.
5. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Alors $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \max(\alpha, \min(\beta, t))$ est 1-Lipschitzienne. Donc $|\varphi \circ F(x) - \varphi \circ F(y)| \leq |F(x) - F(y)| \leq w(d(x,y))$.
6. $\varphi \circ F$ convient avec $\alpha = \inf_A f, \beta = \sup_A f$ et les conventions usuelles si $\alpha = -\infty$ et / ou $\beta = +\infty$.
7. $\forall s \geq 0,\ w_f(s) := \sup_{d(x,y)\leq s} |f(x)-f(y)|$ croissant, borné et tend vers 0 en 0 car $f$ c0 sur un compact donc bornée et eps + croissance => tend vers 0.
8. jsp lis les notes de Corentin : "jsp lis les notes de Julien" et procède par récurrence sur les notes. Ce procédé termine car il y a un nombre fini d'élèves à l'ENS.
9.

## Ex4 : Preuve constructive du th de Banach-Steinhauss

1. Soit $T : E \to F$ et $x, \xi \in E$ alors $T(x+\xi) + T(x-\xi) = 2Tx$ donc $\|T(x+\xi) + T(x-\xi)\| = 2\|Tx\| \leq \|T(x+\xi)\| + \|T(x-\xi)\|$ and the rest...is History !