TD6

Félix Yvonnet

19 octobre 2023

Ex1 : Sous espaces fermés de $\mathcal{C}([0,1])$ formés de fonctions régulières.

1. Soit $D : \begin{matrix} F \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{matrix}$. T est linéaire et $(f_n, Tf_n) \to (f, y) \in (F \times E)$. $f_n \to f$ unif et $f'_n \to y$ unif. On a alors $y = f' = Tf$ et $(f_n, Tf_n) \to (f, Tf)$. Donc le graphe de T est fermé par caractérisation séquentielle. On applique le thm du graphe fermé cat T linéaire, E de Banach et F aussi car fermé $\Rightarrow T$ est continue !
2. $\mathcal{A} = \{f \in F \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ les fonctions de $\mathcal{A}$ sont $C-$Lipschitziennes par la question précédente car elles vérifient $\|f'\|_\infty \leq C(AF)$ ponctuellement relativement compact. On peut appliquer Ascoli $\Rightarrow A$ est relativement compact dans E. A est fermé car c'est la boule unité fermée de F qui est fermé.
3. Par Riesz, F est de dimension finie.

Ex2 : Application du théorème de Stone-Weierstrass.

1. On applique Stone Weierstrass et ça marche
2. Les polynômes à d variables forment une algèbre unitaire. $y \neq z \Rightarrow X(y) \neq X(z)$ pour le poly $P = X$ sépare y et z. K compact de $\mathbb{R}^d$ donc par Stone Weierstrass les polynômes à d variables sont denses.
   $\exists (a_n) \in K$ dense donc $\theta_n : x \mapsto d(x, a_n)$ est continue. $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{R}$ sous algèbre engendrée par les θ_n et $\mathbb{1}$. De plus $\mathcal{A}$ sépare les points car $x, y \in K$ tq $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in \mathcal{A}$, alors pour $a_n \to x$, $\underset{\to 0}{d(x, a_n)} = \underset{\to d(x,y)}{d(y, a_n)} \Rightarrow x = y$

Ex3 : Autour de Stone Weierstrass.

On note $\mathcal{A}_n = \{f_{K_n} \mid f \in \mathcal{A}\}$. Par Stone Weierstrass, $\mathcal{A}_n$ est de,se da,s $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par densité de $\mathcal{A}_n$, $\exists f_n \in \mathcal{A}_n$ tq $\|f_{n|K_n} - f_{|K_n}\|_{\infty, K_n} \leq \frac{1}{n+1}$. Soit K compact alors $\exists N \in \mathbb{N}$ to $K \subset K_n$. $K \subset \bigcup_{n \geq 0} K_n \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathring{K}_n \subset \bigcup_{n \geq 0} \mathring{K}_n$. Donc $f_n \to f$ uniformément sur tout compact car $\|f_{n|K} - f_{|K}\| \leq \|f_{n|K_n} - f_{|K_n}\| \leq \frac{1}{n+1}$.

Ex4 : Annulation en un point.

1.