Analyse

Félix Yvonnet

27 novembre 2023

Table des matières

1 Dualité et topologie faible.

1.1 Espaces Hilbertiens, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. Soit $\mathcal{H}$ (ou $\mathscr{H}$ pour les rageux) un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ est sesquilinéaire si

- linéarité à droite : $\varphi(x, y + \lambda z) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x, z)$
- antilinéarité à gauche : $\varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \overline{\lambda}\varphi(y, z)$

On dit qu'elle est :

- symétrique si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$
- définie positive si $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un espace muni d'une forme sesquilinéaire symétrique définie positive est dit préhilbertien. On note $\langle x, y\rangle := \varphi(x, y)$, $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

Remarque. Si $\mathcal{H}$ est préhilbertien, alors pour tout $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\left(\langle x, y\rangle\right) + \|y\|^2$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(identité du parallélogramme)

Propriété 1 (inégalité de Cauchy Schwartz)**.** Soit $\mathcal{H}$ préhilbertien, alors $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. L'égalité est claire si x et y sont colinéaires. On suppose donc $\lambda x + \mu y \neq 0$ pour tout $\lambda, \mu \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et P strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc de discriminant strictement négatif. ie $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ donc ça marche. :) $\square$

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, $K \subset \mathcal{H}$ convexe fermé. Alors $P_K(x) := argmin_{y\in K}\|x-y\|$ existe et est unique pour tout $x \in \mathcal{H}$. De plus on a la caractérisation :

$$P = P_k(x) \Leftrightarrow \forall y \in K,\ Re(x)\langle x - p, y - p\rangle \leq 0$$

. Et la propriété$\forall x, y \in \mathcal{H},\ \|P_K(x) - P_k(y)\|^2 \leq Re\left(\langle x - y, P_K(x) - P_K(y)\rangle\right)$ ce qui implique que P_K est 1-Lipschitzienne.

Propriété 2 (Projection sur un sev fermé)**.** Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, $F \subset \mathcal{H}$, sev fermé. Alors on a la caractérisation

$$p = P_F(x) \Leftrightarrow p \in F \text{ et } \forall y \in F,\ \langle x - p, y\rangle = 0$$

. De plus, $P_F + P_{F^\perp} = Id$ où $F^\perp = \{y \in \mathcal{H} \mid \forall x \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}$.

Corollaire (Théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, alors $f : \begin{array}{l} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \\ x \longmapsto \langle x, .\rangle =: \varphi_x \end{array}$ est une bijection isométrique antilinéaire.

Preuve. On a $\varphi_x \in \mathcal{H}^*$ car $|\varphi_x(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. L'estimation précédente donne $\|\varphi_x\|_{\mathcal{H}^*} \leq \|x\|$, et en choisissant $y = x$ on obtient $\underbrace{|\varphi_x(x)|}_{\geq \|\varphi_x\|_{\mathcal{H}^*}\|x\|_{\mathcal{H}}} = \|x\|^2$. L'antilinéarité de $x \mapsto \varphi_x$ découle de la sesquilinéarité de f.
Montrons la surjectivité. Soit $\varphi \in \mathcal{H}^* \backslash \{0\}$, alors $F := \ker(\varphi)$ est un sev fermé. Soit $x \in \mathcal{H}$ tq $\varphi(x) = 1$, soit $p = P_f(x)$, $v = x - p$. Alors $\varphi(v) = \varphi(x - p) = 1$ et $\langle v, y\rangle = 0 \forall y \in F$.
De plus $\varphi(z - \varphi(z)v) = 0$ par linéarité donc $z - \varphi(z)v \in F = \ker(\varphi)$. Ainsi $\langle v, z - \varphi(z)v\rangle = 0$ et $\varphi(z)\|v\|^2 = \langle v, z\rangle$ donc $\varphi(z) = \dfrac{\langle v, z\rangle}{\|v\|^2}$. □

Remarque. La topologie faible et la topologie $*-$faible correspondent sur $\mathcal{H}$.

1.2 Théorème de Hahn Banach

Définition 2. Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit inductif si toute partie $F \subset E$ totalement ordonné admet un max dans E.

Lemme 1 (Zorn)**.** Tout ensemble non vide et inductif admet un élément maximal.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'ensembles non vide. $\mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Soit $E = \{f : A \to \mathcal{B} \mid A \subset \mathcal{A}, \forall a \in A,\ f(a) \in a\}$ l'ensemble des fonctions de choix partiel. $E \neq \emptyset$ car il contient $f : \emptyset \to \mathcal{B}$ l'application triviale.
Soit $f : A \to \mathcal{B}$, on dit que $f \leq f'$ si $A \subset A'$ et $f'_{|A} = f$. Si $F = (f_i)$ est totalement ordonnée, $f : A_i \to \mathcal{B}$, on pose $A_* = \bigcup_{i \in I} A_i$, $f_* : \begin{array}{l} A_* \longrightarrow \mathcal{B} \\ x \longmapsto f_i(x) \end{array}$ où $i \in I$ to $x \in A_i$. Soit $f : A \to \mathcal{B}$ un élément maximal de E. Si par l'absurde $A \neq \mathcal{A}$, soit $\alpha \in \mathcal{A} \backslash A$ et $\beta \in \alpha$. On pose $f' : \begin{array}{l} A \cup \{\alpha\} \longrightarrow \mathcal{B} \\ ,x \in A \longmapsto f(x) \\ \alpha \longmapsto \beta \end{array}$ qui prolonge strictement f et contredit la maximalité. □

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans cette partie.

Définition 3. Soit E un $\mathbb{R}-$ev, $\rho : E \to \mathbb{R}$. ρ est dite sous linéaire si

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

$$\rho(\lambda x) \leq \lambda \rho(x)$$

Exemple. Soit E un ev, $E \subset E$ sev, $\rho : F \to \mathbb{R}$ sous linéaire $\varphi_F : F \to \mathbb{R}$ linéaire et tq $\varphi_F \leq \rho$ sur F. Alors $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire tq $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\varphi \leq \rho$ sur E.

Preuve. Soit $E = \{\varphi : G \to \mathbb{R} \mid F \subset G, G \text{sev de} E, \varphi \text{linéaire et} \varphi \leq \rho \text{sur } G\}$. E non vide sur $\varphi_F \in E$, E est ordonné par la relation $(\leq)$. E est inductif $\varphi_i : G_i \to \mathbb{R}$. On pose $G_* = \bigcup_{i \in G_i}$ et $\varphi_* : \begin{array}{l} G_* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi_i(x) \end{array}$.
$\varphi_* \leq \rho$ sur G_*, $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ et pour tout $x, y \in G_*$, tout $i, j \in I$ tq $x \in G_i, y \in G_j$, comme (φ_i) totalement ordonné, on a $G_i \subset G_j$ ou l'inverse. Disons $G_i \supset C_j$. Alors $x, y \in G_i$, $\varphi_*(x+y) = \varphi_i(x+y) = \varphi_*(x) + \varphi_*(y)$. Soit $\varphi : G \to \mathbb{R}$ élément maximal de E, par le lemme de Zorn. Par l'absurde, $G \neq E$, soit $x \in E \backslash G$, on pose $\psi : \begin{array}{l} G \oplus \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{R} \\ y + \lambda x \longmapsto \varphi(y) + \lambda \alpha \end{array}$ où α est bien choisi. On veut $\psi(y+\lambda x) \leq \rho(y+\lambda x)$ ie $\varphi(y) + \lambda\alpha \leq \rho(y+\lambda x)$. Donc $\sup \varphi(z) - \rho(z-x) \leq \alpha \leq \inf \rho(y+x) - \varphi(y)$. Or $\forall y, z \in G_*$, $\varphi(z) - \rho(z-x) \leq \rho(y+x) - \varphi(y) \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(y) + \varphi(z)}_{=\varphi(y+z)} \leq \underbrace{\rho(y+z) + \rho(z-x)}_{\geq \rho(y+z)}$ ce qui est vrai donc on peut bien choisir α de sorte à respecter l'inégalité précédente. $\square$

Théorème 1 (Hahn Banach)**.** Soit E un $\mathbb{R}-$ev, soit $p : E \to \mathbb{R}$, sous additive $(p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x), \lambda > 0)$. Soit $F \subset E$ sev et $\varphi_F : F \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\varphi_F \leq p$ sur F.
Alors $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}$ linéaire, $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\varphi \leq p$ sur E.

Remarque. Soit $(X, \leq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, $x \in X$ est <u>maximal</u> si $\forall y \in X$, $\neg(y > x)$.
x est <u>le plus grand élément</u> si pour tout $y \in X$, $y \leq x$.

Corollaire (Prolongement de même norme d'une forme linéaire)**.** Soit E un evn, $F \subset E$ sev, $\varphi_F \in F^*$. Alors il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\|\varphi\|_{E^*} = \|\varphi_F\|_{F^*}$.

Preuve. Posons $p : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto C\|x\|_E \end{array}$ avec $C = \|\varphi_F\|_{F^*} = \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|_E = 1}} |\varphi_F|$.
La fonction p est sous additive, et $\varphi_F \leq p$ sur F. Par théorème de Hahn Banach, il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\varphi \leq p$ sur E. Alors $|\varphi(x)| = \max(\varphi(x), \varphi(-x)) \leq \max(p(x), p(-x)) = C\|x\|$. Ainsi $\|\varphi\|_{E^*} \leq$

$C = \|\varphi_F\|_{F^*}$ ce qui conclut car l'inégalité réciproque est évidente par $\varphi_{|F} = \varphi_F$. □

Corollaire (Critère de densité). Soit E un evn et $F \subset E$ un sev. Alors F est dense ssi la seule forme linéaire $\varphi \in E^*$ s'annulant sur F est $\varphi = 0$.

Preuve.

- $\Rightarrow$ Si F est dense et $\varphi \in E^*$ s'annule sur F alors φ s'annule sur E par continuité
- $\Leftarrow$ On suppose F non dense et on obtient $x_0 \in E \backslash F$. On pose $\tilde{F} := F \oplus \mathbb{R}x_0$ et $\varphi : \begin{array}{l} \tilde{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \underset{\in F}{u} + \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} x_0 \longmapsto \lambda \end{array}$ est continue car $\forall u, v \in F,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|u + \lambda x_0\| &\geq d(u + \lambda x_0, F) \\ &= d(\lambda x_0) \\ &= |\lambda| d(x_0, F). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } |\varphi(u + \lambda x_0)| &= |\lambda| \\ &\leq \frac{\|u + \lambda x_0\|}{\underbrace{d(x_0, F)}_{>0 \text{ car } x_0 \notin \tilde{F}}}. \end{aligned}$$

Par Hahn Banach, il existe $\psi \in E^*$ telle que $\|\psi\|_{E^*} = \|\varphi\|_{\tilde{F}^*}$ et $\psi_{|\tilde{F}} = \varphi$. On a bien $\psi = 0$ sur F et $\psi(x_0) \neq 0$.

□

Exemple. Soit E un evn. Si E^* est séparable alors E aussi.

Preuve. Soit (φ_n) une famille dense dans E^*, soit (x_n) une famille de E telle que $\|x_n\|_E = 1$ et $\varphi_n(x_n) \geq \dfrac{\|\varphi_n\|_{E^*}}{2}$.
Posons

$$\begin{aligned} F &= Vect\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n \mid (\lambda_n) \text{ a support presque nul}\} \\ &= \{\sum_{n=0}^{N} \lambda_n x_n \mid N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

F est séparable car $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^N$ est dénombrable. Montrons que F est dense.
Soit $\varphi \in E^*$ s'annulant sur F. On suppose que $\varphi \neq 0$ par l'absurde, et donc

on peut supposer $\|\varphi\|_{E^*} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\|\varphi_n - \varphi\|_{E^*} \leq \frac{1}{4}$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &\geq \varphi_n(x_n) - \overbrace{\|\varphi - \varphi_n\|_{E^*}}^{\text{car } \|x_n\|_E = 1} \\ &\geq \frac{\|\varphi_n\|}{2} - \|\varphi - \varphi_n\|_{E^*}. \\ &\geq \frac{\|\varphi\| - \|\varphi - \varphi_n\|}{2} - \|\varphi - \varphi_n\| \\ &= \frac{\|\varphi\|}{2} - \frac{3}{2}\|\varphi - \varphi_n\| \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{1}{4} \\ &> 0\end{aligned}$$

On a trouvé $x_n \in F$ sur lequel φ ne s'annule pas, contradiction ! Ainsi F est dense. □

Corollaire (Projection sur un sev de dim finie). Soit E un evn, F un sev de dim finie. Alors $\exists p \in \underbrace{L(E,F)}_{\text{linéaire continue}}$ projection sur F. On a $Im(p) = F$ et $p^2 = p$.

Remarque. Le théorème de Kadets-Snobar montre que l'on peut trouver p projection sur F tel que $\|p\|_{L(E)} \leq \sqrt{dim(F)}$.

Preuve. Soit $e_1, \cdots, e_n$ base de F. Soit $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ base duale de F^*. $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Soit $\psi_1, \cdots, \psi_n \in E^*$ telles que $\psi_{i|F} = \varphi_i$ pour tout i.

On pose $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)e_i$. On a $p \in L(E)$ et si $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in F$ alors

$$\begin{aligned}p(x) &= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \\ &= x.\end{aligned}$$

□

1.3 Réflexivité

Propriété 3 (éléments conjugué dual). Soit E evn et $x \in E$. Alors il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = \|\varphi\|_{E^*}\|x\|_E$ et $\|\varphi\|_{E^*} = \|x\|_E$.

Preuve. Posons $F = \mathbb{R}x$ et $\varphi_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda x \longmapsto \lambda \|x\|_E^2 \end{array}$. Par Hahn Banach, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\|\varphi\|_{E^*} = \|\varphi_F\|_{F^*} = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_E} = \|x\|_E$ pour $x \neq 0$. On note que φ convient... □

Remarque. Si E est un Hilbert, alors l'élément conjugué dual est $\varphi(.) = \langle x, . \rangle$.

Remarque. En général, pas d'unicité. Par exemple, $x = (1,0) \in \left(\mathbb{R}^2, \|.\|_1\right)$ admet les conjugués duaux : $\varphi = (1, \lambda) \in \left(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty\right), |\lambda| \leq 1$.

Corollaire (Isométries dans le bidual)**.** Soit E, evn. Posons $\Psi : E \to E^{**}$ définie par $\Psi(\underset{\in E}{x})(\underset{\in E^*}{\varphi}) := \varphi(x)$. C'est une injonction isométrique.

Preuve. Soit $x \in E$, $\varphi \in E^*$. Alors

$$\begin{aligned} |\Psi(x)(\varphi)| &= |\varphi(x)| \\ &\leq \|\varphi\|_{E^*} \|x\|_E. \end{aligned}$$

Donc $\Psi(x) \in E^{**}$ et $\|\Psi(x)\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E$.
De plus en choisissant pour φ un élément conjugué dual de x in a l'égalité et donc $\|\Psi(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E$. D'où l'isométrie, et donc l'injection. (Si $\Psi(x) = 0$ alors $\|x\| = \|\Psi(x)\| = 0$).
On dit que E est réflexif si $\Psi : E \to E^{**}$ est bijective. Dans ce cas, on peut identifier E et E^{**}. (Les topologies sont les mêmes. La topologie faible sur E et la topologie *-faible sur E^{**} sont les mêmes). En particulier, la boule unité fermée de E est faiblement compacte. □

Corollaire. La topologie faible sur un evn E est séparée.
Si $A \subset E$ est faiblement bornée ($\forall \varphi \in E^*$, $(\varphi(a))_{a \in A}$ est bornée), alors A est fortement bornée ($A \subset B(0,R)$ pour un certain $R \in \mathbb{R}^{+*}$).

Preuve. (Séparation) : soit $x_0 \in E$ sur lequel toutes les semi normes s'annulent. $\left(\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |\varphi(x)| \end{array}, \varphi \in E^*\right)$ On choisit $\varphi \in E^*$ un conjugué dual de x_0, alors $|\varphi(x_0)| = \|x_0\|_E$ donc $x = 0$. Le critère de séparation est satisfait.
Soit $A \subset E$ faiblement borné. Alors $\Psi(A) \subset E^{**}$ est * faiblement bornée. ($\forall \varphi \in E^*$, $(\Psi(x)(\varphi))_{x \in A}$ est bornée). Par le théorème de Banach Steinhaus, $\Psi(A)$ est borné. Par isométrie, A est borné.
(Remarque : E^* est toujours complet donc est un Banach)

□

Théorème 2 (James, critère de réflexivité)**.** Soit E un Banach, sont équivalents :

(i) E est réflexif

(ii) E^* est réflexif

(iii) $B'_E(0,1)$ est faiblement compacte

(iv) $\forall \varphi \in E^*,\ \exists x \in B'_E(0,1),\ \varphi(x) = \|\varphi\|_{E^*}$.

Preuve. On admet $(iv) \Rightarrow (i)$ qui est pénible et constitue le cœur du théorème.

- ($(i) \Rightarrow (iii)$) car $B'_E(0,1)$ est * faiblement compact (Banach Alaoglu) et car la topologie * faible sur $B'_E(0,1)$ coincide avec la topologie * faible sur $B'_{E^{**}}(0,1)$.
- ($(iii) \Rightarrow (iv)$) Car $B'_E(0,1)$ est faiblement compact, et φ est faiblement continues donc atteint ses bornes.
  Donc $\|\varphi\|_{E^*} = \max\{\varphi(x) \mid x \in B'_E(0,1)\}$ est atteint.
- ($(ii) \Rightarrow (i)$) Supposons $\Psi : E \to E^{**}$ non surjective. Comme $\Psi(E)$ est isométrique à E, il est fermé. Par le critère de densité, il existe $\varphi \in E^{***}\backslash\{0\}$, s'annulant sur $\Psi(E)$. Si par l'absurde $\varphi = \Psi_{E^*}(\varphi_0)$ avec $\varphi_0 \in E^*$, alors φ_0 s'annule sur E donc $\varphi_0 = 0$, donc $\varphi = 0$, contradiction. Ainsi φ n'est pas dans l'image de $\Psi_{E^*} : E^* \to E^{***}$ et E non réflexif.

$\square$

Définition 4. Un evn E est uniformément convexe si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E,\ (\|x\| = \|y\| \text{ et } \|x - y\| > 0) \Rightarrow \dfrac{\|x+y\|}{2} \leq \delta$

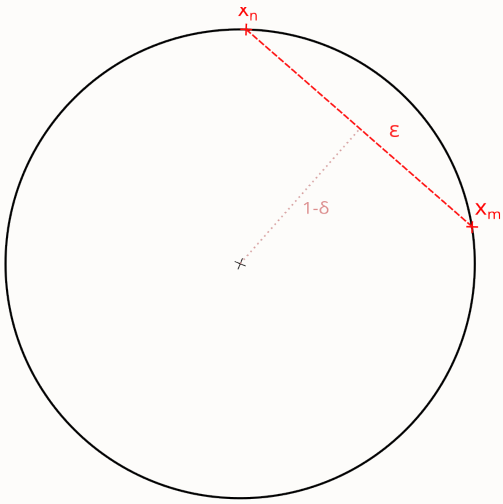
Exemple. Un Hilbert est uniformément convexe car
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$
donc $\dfrac{\|x+y\|^2}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \dfrac{1}{4}\|x-y\|^2$ d'où $\|\dfrac{x+y}{2}\| \leq \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon}{4}}$ si $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| = \varepsilon$.

Propriété 4. Soit E un Banach uniformément convexe, $\varphi \in E^*\backslash\{0\}$. Alors $\exists! x \in B'_E(0,1),\ \varphi(x) = \|\varphi\|_{E^*}$.
En particulier, E est réflexif (par le théorème de James).

Preuve. On peut supposer $\|\varphi\| = 1$. Soit $(x_n) \in B'_E(0,1)^{\mathbb{N}}$ telle que $\varphi(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \|\varphi\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)|$. On peut supposer $\|x_n\| = 1$ quitte à construire la suite normalisée qui satisfait la même égalité. Montrons qu'elle est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ correspondant dans l'uniforme continuité. Soit $N \in \mathbb{N}$

tel que $\forall n \geq N,\ \varphi(x_n) > 1-\delta$. Si $m, n \geq N$ alors

$$\begin{aligned} 1-\delta &< \frac{\varphi(x_m) - \varphi(x_n)}{2} \\ &= \varphi(\frac{x_m - x_n}{2}) \\ &\leq \underbrace{\|\varphi\|}_{=1} \|\frac{x_m - x_n}{2}\| \\ &\leq 1-\delta \text{ par uniforme convexité si } \|x_m - x_n\| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$



Impossible donc $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$, d'où le critère de Cauchy. Donc (x_n) est convergente vers x_* et $\varphi(x_*) = 1 = \|\varphi\|$ par continuité. D'où l'existence d'un maximiseur. L'unicité découle de l'uniforme convergente. □

Propriété 5 (Inégalité de Holder). Soit (X, μ) un espace mesuré, $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ avec $p, q \in [1, \infty], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (dit exposants conjugués). Alors $fg \in L^1(X)$ et $\int fg \leq \|f\|_p \|g\|_q$ avec égalité ssi $f = 0$ ou $g = 0$ ou

- (cas $1 < p < \infty$) $f = \lambda sign(g)|g|^{\frac{q}{p}}$ avec $\lambda > 0$.
- (cas $p = 1$) $g = \lambda sign(f)$ avec $\lambda > 0$ presque partout où $|f| > 0$ et $|g| \leq \lambda$ là où $f = 0$.

Preuve. On suppose $1 < p < \infty$, le cas $p \in \{1, \infty\}$ étant trivial (on majore

p par sa norme et intègre f). On a l'inégalité de Young : $\forall a, b \in]0, \infty[$,

$$\begin{aligned}ab &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)\right)\\ &\leq \frac{1}{p}\exp\left(\ln(a^p)\right) + \frac{1}{q}\exp\left(\ln(b^q)\right)\\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.\end{aligned}$$

On a toujours cette inégalité si $a, b \in [0, \infty[$.
Par homogénéité, quitte à considérer $\frac{f}{\|f\|_p}$ et $\frac{g}{\|g\|_q}$, on peut supposer $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Le résultat est évidemment trivial pour $f = 0$ ou $g = 0$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_X |fg| &\leq \int_X \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\\ &= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q\\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité de Holder.

Pour le cas d'égalité, par la stricte convexité de l'exponentielle dans l'inégalité de Young, on a égalité ssi $\ln(a^p) = \ln(b^q)$, ie $a^p = b^q$, ie $a = b^{\frac{q}{p}}$. On remarque la nécessité d'avoir $a, b > 0$. On a donc égalité dans Holder ssi $\frac{f}{\|f\|_p} = \left(\frac{g}{\|g\|_q}\right)^{\frac{q}{p}}$ et f et g sont de même signe presque partout d'où le résultat. □

Propriété 6 (Inégalité de Clarkson). Soit (X, μ) un espace mesuré et $f, g \in L^p$ avec $1 < p < \infty$. Alors :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p + \|\frac{f-g}{2}\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

Si $p \in \{1, 2\}$ alors :

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p + \|\frac{f-g}{2}\|_p^p \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{p}{q}}$$

Preuve. On prouvera seulement la première inégalité.
Soit $a, b \in [0, \infty[$, $s \geq 1$. Alors $a^s + b^s \leq (a+b)^s$. En effet, on peut supposer $a + b = 1$, quitte à normaliser par $(a + b)$. Notons que $a^s \leq a$ et $b^s \leq b$ car $a, b \leq 1$. Donc $a^s + b^s \leq a + b = 1 = (a + b)^s$.

On en déduit alors ponctuellement :

$$\begin{aligned}|\frac{f+g}{2}|^p+|\frac{f-g}{2}|^p &\overset{s=\frac{p}{2}\geq 1}{\leq} \left(|\frac{f+g}{2}|^2+|\frac{f-g}{2}|^2\right)^s \\ &= \left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}g^2\right)^s \\ &\leq \frac{1}{2}|f|^p+\frac{1}{2}|g|^p & \text{convexité de } x\mapsto |x|^p .\end{aligned}$$

Ainsi L^p est uniformément convexe, si $1<p<\infty$. Par exemple, si $p\geq 2$, $\|f\|_p=\|g\|_p=1$, $\|f-g\|=\varepsilon$, on a $\|\frac{f+g}{2}\|\leq\left(1-\frac{1}{2^p}\varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}}$. □

Théorème 3 (Dualité dans les espaces de Lebesgue)**.** Soit (X,μ) un espace mesuré, $1\leq p\leq\infty$ avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Pour tout $g\in L^q$,

posons $\varphi_g : \begin{array}{l} L^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ f\longmapsto \int_X fg \end{array}$.

Alors $g\in L^q\mapsto\varphi_g\in(L^p)^*$ est une injection isométrique, bijective si $p<\infty$.

Preuve. On a $\varphi_g : L^p\to\mathbb{R}$ est linéaire, par linéarité de l'intégrale, et $\|\varphi_g\|_{(L^p)^*}=\|g\|_{L^q}$ par l'inégalité de Holder et son cas d'égalité. D'où l'injection isométrique.

Surjectivité si $1<p<\infty$. Notons $E=(L^p)^*$, $F\subset E$ l'image de L^q ($F=\{\varphi_g \mid g\in L^q\}$). F est complet car L^q est complet donc F est fermé. Soit $\varphi\in E^*$ telle que $\varphi=0$ sur F. Montrons que $\varphi=0$ sur E (on aura alors F dense par le critère de densité ainsi $F=E$ car F est fermé et qui conclut.
Comme L^p est uniformément convexe par les inégalités de Clarkson, il est réflexif. Donc $\exists f\in L^p$, $\forall\psi\in(L^p)^*=E$, $\varphi(\psi)=\psi(f)$. Posons $g=sign(f)|f|^{\frac{p}{q}}$, correspondant au cas d'égalité dans Holder. Alors $g\in L^q=F$, $\|g\|_q^p=\|f\|_p^p$ et $\int fg=\|f\|_p\|g\|_q=\|f\|_p^{1+\frac{1}{q}}$, d'où $f=0$ puis $\varphi=0$. CQFD. □

Exemple. Exemple de non réflexivité : on peut montrer que $(l_0^\infty)^*=l'$, $(l')^*=l^\infty$, $(l^\infty)^*\neq l'$. Où $l_0^\infty=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_n\to 0\}$, $l'=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty\}$ et $l^\infty=\{(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty\}$.

12h50 : *"Est-ce que j'ai encore 5 minutes ?"*

Jean-Marie Mirebeau

1.4 Formes géométriques de Hahn Banach

Propriété 7 (Jauge d'un convexe)**.** Soit E un ev, $K \subset E$ un convexe contenant l'origine. On définit $P_K(x) = \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in K\}$ pour tout $x \neq 0$ et $P_K(0) = 0$. Alors $P_K : E \to [0, \infty]$ satisfait

$$P_K(x+y) \leq P_K(x) + P_K(y) \qquad \forall x, y \in E$$
$$P_K(\lambda x) = \lambda P_K(x) \qquad \forall x \in E,\ \forall \lambda > 0$$

SSo P_K est à valeurs finies, c'est une fonction sous additive. On a $\{P_K < 1\} \subset K \subset \{P_K \leq 1\}$.

12h53 *"Bon on commence la preuve"*

Jean-Marie Mirebeau

Preuve. Soit $x, y \in E$ tels que $P_K(x, y) < \infty$. Soit $s, t > 0$ telsq ie $\frac{x}{s} \in K$ et $\frac{y}{t} \in K$. Alors $\frac{x+y}{s+t} = \frac{x}{s}\frac{s}{s+t} + \frac{y}{t}\frac{t}{s+t} \in K$ par convexité. D'où $P_K(x+y) \leq P_K(x) + P_K(y)$.
Les autres propriétés sont claires. Si $P_K(x) < 1$, alors $\exists t < 1$, $\frac{x}{t} \in K$ donc $x = \frac{x}{t}t + 0 * (1-t) \in K$ d'où l'inclusion $\{P_K < 1\} \subset K$. □

Lemme 2. Soit E un evn. Si K est ouvert, convexe et contient 0, alors P_K est continue

Preuve. Soit $r > 0$ tq $B(0, r) \subset K$, on a $x\frac{r}{\|x\|} \in B(0, r)$ pour tout $x \neq 0$.
Donc $P_K(x) \leq \|x\|/2$.
D'où $P_K(x) - \|k\|/2 \leq P_K(x) - P_K(-k) \leq P_K(x+k) \leq P_K(x) + P_K(k) \leq P_K(x) + \|k\|/2$. Donc P_K est $\frac{1}{2}$-Lipschitzienne (car $-\frac{\|k\|}{2} \leq P_K(x+k) - P_K(x) \leq \frac{\|k\|}{2}$. □

Théorème 4 (Séparation d'un ouvert convexe en un point)**.** Soit E un evn, $K \subset E$ ouvert, convexe contenant 0. Soit $x \in E \backslash K$. Alors, $\exists \varphi \in E^*$ telle que $\varphi < 1$ sur K et $\varphi(x) = 1$.

12h57 : *"Ne vous inquiétez pas, on a bientôt fini là"*

Jean-Marie Mirebeau

Preuve. Posons $p = P_K$ est sous additive, $F = \mathbb{R}x$ et $\varphi_F : \begin{matrix} F \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda x \longmapsto \lambda \end{matrix}$. On a $p(x) \geq 1$ puisque $x \in K$. Pour $\lambda \geq 0$, $\varphi_F(\lambda x) = \lambda \leq \lambda p(x) = p(\lambda x)$. Puis pour $\lambda < 0$ on a $\varphi_F(\lambda x) = \lambda < 0 \leq p(\lambda x)$. Ainsi par théorème de Hahn Banach, il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{|F} = \varphi_F$ et $\varphi \leq p$ sur E. On a bien $\varphi(x) = 1$ et pour tout $y \in K$ on a $\varphi(y) \leq p(y) < 1$ car K est un ouvert. □

Théorème 5 (Séparation d'un convexe compact et convexe fermé)**.** Soit E un evn, $A \subset E$ un convexe fermé et $B \subset E$ un convexe compact tel que $A, B \neq \emptyset$ et $A \cap B = \emptyset$. Alors $\exists \varphi \in E^*, \ \sup_A \varphi < 1 < \inf_B \varphi$. Ie φ sépare A et B.

12h59 *"C'est terminé là"*

Jean-Marie Mirebeau

Preuve. Soit $r = \inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\}$. On a $r > 0$, en effet par l'absurde si $\|a_n - b_n\| \to 0$, par compacité $b_{\psi(n)} \to b_*$ comme $\|a_n - b_n\| \to 0$, on a $b_* \in \overline{A} = A$ contradiction avec $A \cap B = \emptyset$.
On pose $K = \{a - b - k \mid a \in A, b \in B, \|k\| < r\}$, c'est un convexe ouvert.
On a $0 \notin K$ sinon on aurait aussi $a - b - k = 0$ d'où $\|a - b\| \leq \|k\| < r$.
Soit $x_0 \in K$, alors $x_0 \in (K + x_0) = \{x_0 + k \mid k \in K\}$. Par le résultat précédent, $\exists \varphi \in E^*, \ \varphi(x_0) = 1$ et $\varphi < 1$ sur $K + x_0$. Donc $\forall a, b, k, \ 1 > \varphi(a - b - k + x_0)$. Soit $\varphi(a) < \varphi(b) + \varphi(k)$. On prend $k = -\frac{x_0}{\|x_0\|} x$ alors $\varphi(k) < 0$ d'où $\varphi(a) < \varphi(b) - \delta$ avec $\delta > 0$. □

13h02 : véritable fin du cours

Théorème 6 (Séparateur d'un convexe et d'un point)**.** Soit E un evn, $C \subset E$ convexe ouvert contenant 0 et $x \notin C$.
Alors $\exists \varphi \in E^*$, $\varphi(x) = 1, \ \varphi < 1$ sur C.

Théorème 7 (Séparateur d'un convexe fermé et compact)**.** Soit E un evn, $A, B \subset E$ convexes fermés, B compact,$A, B \neq \emptyset$ Also
$\exists \varphi \in E^*, \ \sup_A \varphi < \inf_B \varphi$. Si $0 \in A$, alors ops $\sup_A \varphi < 1 < \sup_B \varphi$.

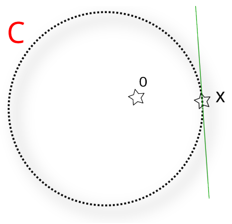


FIGURE 1 – Forme linéaire (vert) sépare x de C.

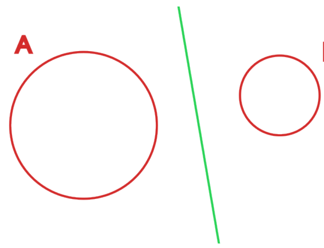


FIGURE 2 – Forme linéaire (vert) sépare A de B.

1.5 Dualité des ensembles convexes

Définition 5. Soit E evn, $C \subset E$ non vide. L'ensemble polaire de C est

$$C^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in C,\ \varphi(x) \leq 1\}.$$

Exemple. Si $C = B'_E(0,1)$, alors $C^\circ = B'_{E^*}(0,1)$.

Propriété 8 (Dualité polaire)**.** Soit E evn et $C \subset E$ non vide. Alors $C \subset \{x \in E, \mid \forall \varphi \in C^\circ,\ \varphi(x) \leq 1\} = \Psi^{-1}(C^\circ)$. Avec égalité ssi E est convexe fermé et contient 0. On a noté $\Psi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^* \\ x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{array}$ l'injection isométrique canonique.

Preuve. Notons $\tilde{C}$ l'ensemble $\Psi^{-1}(C^\circ)$.

Inclusion $C \subset \tilde{C}$: Si $x \in C$, alors $\varphi(x) \leq 1$ pour tout $\varphi \in C^\circ$. Donc $x \in \tilde{C}$.

Supposons $C = \tilde{C}$: Alors C est convexe, fermé et contient 0, car $\tilde{C} = \bigcap_{\varphi \in C^\circ} \{x \in E \mid \varphi(x) \leq 1\}$ est une intersection de convexes fermés et contenant 0.

Supposons C convexe fermé et contenant 0 : Soit $x_0 \in C$, par le théorème de Hahn Banach (géométrique B) il existe $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\sup_C \varphi < 1 < \varphi(x_0)$$

Alors $\varphi \in C^\circ$, et donc $x_0 \notin \tilde{C}$. On a montré $\tilde{C} \subset C$ donc $C = \tilde{C}$. $\square$

Corollaire. Soit E un evn, $C \subset E$ convexe. Alors

$$C \text{ fermé} \Leftrightarrow C \text{ faiblement fermé}.$$

Preuve. OPS $0 \in C$, quitte à translater.

$\underline{(\Rightarrow):}$ Si C est fermé, alors $\tilde{C} = C$ qui est une intersection de parties faiblement fermées $\{x \in E \mid \varphi(x) \leq 1\}$. Donc C est faiblement fermé.

$\underline{(\Leftarrow):}$ Réciproquement, si C est faiblement fermé, alors il est fermé pour la topologie faible. □

Corollaire. Soit E réflexif. Si $C \subset E$ est convexe, fermé et borné, alors il est faiblement compact.

Preuve. C est faiblement fermé par le corollaire précédent, et est inclus dans $B'_E(0, R)$ qui est faiblement compact par Banach Alaoglu. (La topologie faible sur E s'identifie à la topologie *-faible sur E^{**}). Or un fermé d'un compact est un compact dans toutes topologie car E est réflexif. □

Définition 6. Soit $(X, \mathbb{U})$ un espace topologique et $f : X \to]-\infty, \infty]$. Alors, on dit que f est semie continue inférieurement (sci) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \{x \in X,\ f(x) \leq t\} \text{ est fermé.}$$

Remarque.
- Si (f_i) sont sci, alors $\sup\limits_{i \in I} f_i$ est sci car $\{\sup\limits_i f_i \leq t\} = \bigcap\limits_{i \in I} \{f_i \leq t\}$.
- Si f et g sont sci, alors $f + g$ est aussi sci car $\{f + g \leq t\} = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \left[\{f \leq \alpha\} \cup \{g \leq \alpha\}\right]$.
- f est sci ssu son surgraphe est fermé : $\mathcal{G} := \{(x, t) \mid f(x) \leq t\} = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \left[(\{f \leq \alpha\} \times]-\infty, \alpha]) \cup (X \times [\alpha, \infty[)\right]$.

Propriété 9. Soit $f : E \to]-\infty, \infty]$ convexe et sci sur un espace E reflexif.

1. Supposons $\exists M \in \mathbb{R},\ \{f \leq M\}$ est borné non vide. Alors f admet un minimiseur.
2. Soit g faiblement continue sur $\{f \leq M\}$, et telle que $\{f + g \leq N\} \subset \{f \leq M\}$ où $N, M \in \mathbb{R}$ et ces ensembles sont bornés non vide. Alors $f + g$ a un minimiseur.

Preuve.

1. L'ensemble des minimiseurs $\bigcap\limits_{\inf f < M' \leq M} \{f \leq M'\}$ est une intersection décroissante de convexes, fermés, bornés et non vides donc une intersection décroissante de compact non vide pour la topologie *-faible, donc est non vide par les compact emboités.
2. Comme f est convexe et sci et g est faiblement continue, alors f et

g sont faiblement sci sur $\{f \leq M\}$. Or l'ensemble des mininimiseurs $\bigcap_{\inf(f+g)<N'\leq N} \{f+g \leq N'\}$ est donc une intersection décroissante de parties non vide faiblement fermées de $\{f \leq M\}$ qui est faiblement compact. Donc non vide.

$\square$

1.6 Dualité de Legendre Fenchel des fonctions convexes

Définition 7. Soit E evn et $f : E \to]-\infty, \infty]$. On définit la fonction conjugué de Legendre-Fenchel de f la fonction

$$f^* : \begin{cases} E^* \to [-\infty, +\infty] \\ \varphi \mapsto \sup_{x\in E} \underbrace{\langle \varphi, x\rangle}_{\substack{\text{Crochet de dualité sur } E^*\times E \\ =\varphi(x)}} - f(x) \end{cases}$$

Exemple. Soit $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_E^2$. On a :

$$\begin{aligned} f^*(\varphi) &= \sup\{\varphi(x) - \frac{1}{2}\|x\|_E^2 \mid x \in E\} \\ &= \sup\{t\varphi(x) - \frac{t^2}{2} \mid t \in \mathbb{R},\ x \in B'_E(0,1)\} \\ &= \sup\{\frac{1}{2}\varphi(x)^2 \mid x \in B'_E(0,1)\} \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi\|_{E^*}^2. \end{aligned}$$

Si $f : E \to]-\infty, \infty]$, on pose $Dom(f) := \{x \in E \mid f(x) < \infty\}$, on dit que f est propre si $Dom(f) \neq \emptyset$.

Lemme 3. Soit $f : E \to]-\infty, \infty]$ une fonction propre sur un evn.
Alors $f^* : E^* \to [-\infty, \infty]$ est convexe et sci.
De plus, f^* est propre si et seulement si f admet un minorant affine et continue. Plus précisément $f^*(\varphi) \leq -\alpha \Leftrightarrow f \geq \varphi + \alpha$.

Preuve. f^* est convexe et sci comme supremum de $\left[\begin{matrix} E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) - f(x) \end{matrix}\right]_{x\in Dom(x)}$, qui sont convexe et sci (car continues). Par ailleur,

$$\begin{aligned} f^*(\varphi) \leq -\alpha &\Leftrightarrow \forall c \in E,\ \langle \varphi, x\rangle - f(x) \leq -\alpha \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \geq \varphi(x) + \alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 4. Soit $f : E \to]-\infty, \infty]$, convexe et sci sur E evn. Soit $x_0 \in E$ et $t_0 < f(x_0)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi \in E^*,\ f \geq \alpha + \varphi$ et $\alpha + \varphi(x_0) > t_0$.

Preuve. Comme f est convexe sci, son sous graphe $C = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ est convexe et fermé. De plus $E \times \mathbb{R}$ est un evn et les formes linéaires continues sur $E \times \mathbb{R}$ s'écrivent $(x,t) \mapsto \varphi(x) - \lambda t$ où $\varphi \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par Hahn Banach, (géométrique B), il existe $\varphi \in E^*, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) - \lambda t + \delta \leq \varphi(x_0) - \lambda t_0$ pour tout $(x,t) \in C$ et $\delta > 0$.
Si $f(x_0) < \infty$, on choisit $x = x_0$ et $t = f(x_0)$ et on obtient $\varphi(x_0) - \lambda f(x_0) + \delta \leq \varphi(x_0) - \lambda t_0$. Donc $0 < \underbrace{\delta}_{>0} \leq \lambda \underbrace{(f(x_0) - t_0)}_{>0}$, donc $\lambda > 0$.
Ainsi $f(x) \geq \dfrac{\varphi(x - x_0)}{\lambda} + \dfrac{\delta}{\lambda} + t_0, \forall x \in E$. C'est le minorant affine souhaité.
Si $f(x_0) = \infty$, soit $x_1 \in Dom(f)$, (si $f = \infty$, partout, le résultat est trivial) on a $\varphi(x_1) - \lambda t + \delta \leq \varphi(x_0) - \lambda t_0$ pour tout $t \geq f(x_1)$ donc idem $\lambda \geq 0$.
Si $\lambda > 0$, on a un minorant affine comme précédemment. Sinon $\lambda = 0$, d'où $\varphi(x) + \delta \leq \varphi(x_0)$ pour tout $x \in Dom(f)$. Par ailleurs, il existe un minorant affine, par le résultat précédent appliqué en x, $f \geq \psi + \beta$, où $\psi \in E^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
Alors, $\forall \mu \in [0, \infty[,\ \forall x \in Dom(f),\ f(x) \geq \psi(x) + \beta + \mu\left[\varphi(x - x_0) + \delta\right]$.
Finalement, pour μ assez grand, $\psi(x_0) + \beta + \mu \left[\underbrace{\varphi(x_0 - x_0)}_{=0} + \underbrace{\delta}_{>0}\right] > t_0$ ce qui conclut. $\square$

"L'ensemble est bien droit au lieu d'être un sympathique truc penché"

Jean-Marie Mirebeau

Théorème 8 (Dualité de Legendre Fenchal). Soit $f : E \to]-\infty, \infty]$ une fonction propre sur un evn, admettant un minorant affine (c'est automatique si f est convexe, sci).
Alors f^{**} est convexe, sci propre et $f^{**}_{|E} \leq f$ avec égalité ssi f est convexe sci.

Preuve. On a vu que $f^* : E^* \to]-\infty, \infty]$ est convexe et sci donc elle admet un minorant affine. Donc $f^{**} : E^{**} \to]-\infty, \infty]$ est convexe, sci et propre. Soit $x \in E$, alors $f^*(\varphi) \geq \varphi(x) - f(x)$ pour tout $\varphi \in E^*$, donc $f^{**}(\underbrace{x}_{\text{Vu comme élément de } E^{**}}) = \sup_{\varphi \in E^*} \underbrace{\varphi(x) - f^*(x)}_{\leq f(x)} \leq f(x)$.
Supposons maintenant f convexe, sci et montrons $f^{**}_{|E} \geq f$. Soit $x_0 \in E$, soit $t_0 < f(x_0)$. Par le lemme précédent, $\exists \varphi \in E^*, \alpha \in \mathbb{R},\ f \geq \varphi + \alpha$ et $hi(x_0) + \alpha > t_0$. Donc $f^*(\varphi) \leq -\alpha$, donc $f^{**} \geq \varphi(x_0) - f^*(\varphi) \geq \varphi(x_0) + \alpha > t_0$. D'où $f^{**}(x_0) \geq f(x_0)$. $\square$

Lemme 5. Soit E un Banach et $f : E \to]-\infty, \infty]$ sci convexe.
Alors f est localement majorée sur $\overset{\circ}{Dom}(f)$ $[\forall x \in \overset{\circ}{Dom}(f),\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists M,\ f_{|B(x,\varepsilon)} \leq M]$.

Preuve. On suppose $\overset{\circ}{Dom}(f)$ On a $Dom(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \leq n\}$ donc par Banach Steinhaus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\{f \leq n_0\}$ est d'intérieur non vide. Donc $\exists x_0 \in E, r_0 > 0$ $f_{|B(x_0,r_0)} \leq n_0$. On peut, quitte à transposer, $0 \in \overset{\circ}{Dom}(f)$.
Soit $\delta > 0$ tq $-\delta x_0 \in Dom(f)$. Alors $f(h) = \left(\left[x_0 + h\frac{1+\delta}{\delta}\right]\frac{\delta}{1+\delta} + (-\delta x_0)\frac{1}{1+\delta}\right) \leq \frac{\delta}{1+\delta} f(x_0 + h\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)) + \frac{1}{1+\delta} f(-\delta x_0) \leq \frac{\delta x_0}{1+\delta} + \frac{f(-\delta x_0)}{1+\delta}$ si $|h|\frac{1+\delta}{\delta} \leq r_0$. Donc f est majorée sur $B(0, r_0\frac{\delta}{1+\delta})$ comme annoncé. $\square$

Lemme 6. Soit E un evn, $f : E \to]-\infty, \infty]$ convexe, $x \in E$ et $r > 0$. Si $f(y) \leq f(x) + M$ pour tout $y \in B(x, r)$ alors $|f(x) - f(y)| \leq M\frac{|y-x|}{r}$ pour tout $y \in B(x, r)$.
En particulier, f est $\frac{2M}{r}$-Lipschitzienne sur $B(x, \frac{r}{3})$.

Preuve. Preuve par dessin.

Preuve point particulier : soit $y \in B(x, \frac{r}{3})$, alors $f(y) \geq f(x) - \frac{M}{3}$ par le premier point. Donc $f \leq \underbrace{f(y) + \frac{4}{3}M}_{\leq f(x)+M}$ sur $B(y, \frac{2r}{3}) \subset B(x, r)$. Donc $|f(z) - f(y)| \leq \frac{\frac{4}{3}r}{\frac{2}{3}r} = \frac{2r}{3}$ pour tout $z \in B(y, \frac{2r}{3}) \supset B(x, \frac{r}{3})$. $\square$

Théorème 9 (Sous gradient d'une fonction convexe)**.** Soit E un Banach, $f : E \to]-\infty, \infty]$ convexe sci et $x \in \overset{\circ}{Dim}(f)$. Alors le sous gradient de f en x est non vide,

$$\partial f(x) = \{\varphi \in E^* \mid \forall y \in E,\ f(y) \geq f(x) + \varphi(y - x)\}.$$

Preuve. Posons $D = \overset{\circ}{Dom}(f)$. Comme $f_{|D}$ est continue, l'ensemble $C = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) < t\}$ est ouvert. Soit $x_0 \in D$, par Hahn Banach (géométrique A), il existe $\varphi \in E^*, \lambda \in \mathbb{R}$ appliqués à C ouvert convexe et $(x_0, f(x_0))$ (quitte à translater, OPS $0 \in C$).
$\varphi(x) - \lambda t < \varphi(x_0) - \lambda f(x_0)$ pour tout $x \in D, t > f(x)$. En choisissant $x = x_0$ et $t = f(x_0) + 1$, on obtient $\varphi(x0) - \lambda(f(x_0) + 1) < \varphi(x_0) - \lambda f(x_0)$. Donc $\lambda > 0$. Ainsi $\forall x \in D, t > f(x),\ t > \varphi(x - x_0) + f(x_0)$. D'où $f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0)$ pour tout $x \in D$. Puis $f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0)$ pour tout $x \in E$ car D est ouvert donc un voisinage de x_0. [Soit $x \in E$,

$f((1-t)x_0+tx) \leq (1-t)f(x0)+tf(x)$. D'où $f(x) \geq \varphi(x-x_0)+f(x_0)$
] □

Lemme 7. Soit E evn et $f : E \to]-\infty,\infty]$ convexe. Posons $g(x) = \liminf_{y\to x} f(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} f(y) \in [-\infty,\infty]$ et son enveloppe sci $[\{g \leq \lambda\} = \overline{\{f \leq \lambda\}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}]$.
On a l'alternative :

- $g > -\infty$ sur E, alors $g^* = f^*$
- $\exists x \in E,\ g(x) = -\infty$ alors $g = -\infty$ sur $\overline{Dom(f)}$ et $g = \infty$ ailleurs.

Preuve. Exercice... □

Théorème 10 (Dualité de Legendre Fenchel)**.** Soit E, F des Banach, $f : E \to]-\infty,\infty]$ et $g : F \to]-\infty,\infty]$ convexes. Soit $A \in L(E,F)$, on suppose $[A(Dom(f))] \cap \left[\overset{\circ}{Dom}(f)\right] \neq \emptyset$.
Alors $\sup_{y\in F^*} -f^*(-A^Ty) - g^*(y) = \inf_{x\in E} f(x) + g(Ax)$

Preuve. Notons α la partie gauche et β la partie droite de l'égalité. Posons $c(x,y) = \langle y, Ax\rangle + f(x) - g^*(y)$. Alors

$$\begin{aligned}\inf_{x\in E} c(x,y) &= \inf_{x\in E} \left\langle A^Ty, x\right\rangle + f(x) - g^*(y) \\ &= -f^*(-A^Ty) - g^*(y).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sup_{y\in F^*} \langle y, Ax\rangle + f(x) - g^*(y) &= g^{**}(\underbrace{Ax}_{\text{vu comme élément de } E^{**}}) + f(x) \\ &= g(Ax) + f(x).\end{aligned}$$

Donc $\beta = \inf_{x\in E} \sup_{y\in F^*} c(x,y)$, $\alpha = \sup_{y\in F^*} \inf_{x\in E} c(x,y)$. Donc $\alpha \leq \beta$. On veut montrer que $\alpha = \beta$, c'est à dire qu'il n'y a pas de "saut de dualité".
OPS $\beta \neq -\infty$ sinon rien à prouver. On a $\beta \neq \infty$ car $A(Dom(f)) \cap \overset{\circ}{Dom}(f) \neq \emptyset$.
Définissons $\mathcal{F} :\to]-\infty,\infty]$ telle que $\mathcal{F}(u) = \inf_{x\in E} f(x) + g(Ax+u)$.

> *"Là, la preuve devient un peu bizarre..."*
>
> Jean-Marie Mirebeau

On a $\mathcal{F}(0) = \beta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ convexe. On peut montrer que $\mathcal{F}(0) = \liminf_{u\to 0} \mathcal{F}(u)$. □

2 Espaces de Sobolev

2.1 Convolution dans les espaces L^p.

Propriété 10 (Inégalité de Jonsen). Soit (X,μ) un espace probabilisé, $f : \gamma \to \mathbb{R}^d$ intégrable et $g :]-\infty,\infty]$ convexe sci. Alors :

$$g\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_X g(f(x))d\mu(x).$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^d$ tq $g(x) \geq \alpha + \langle \varphi, f(x)\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\begin{aligned}\int g(f(x))d\mu(x) &\geq \int \alpha + \langle \varphi, f(x)\rangle\, dx \\ &= \alpha + \left\langle \varphi, \int f(x)dx \right\rangle\end{aligned}$$

OPS g propre donc $g = g^{**}$ est le suprémum d'une famille de minorants affine $g(x) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^d} \langle y, x\rangle - g^*(y)$.

Donc $\displaystyle\int_X g(f(x))d\mu(x) \geq g\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right)$. □

Corollaire. Soit (X,μ) un espace mesuré avec $0 < \mu(X) < \infty$. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in L^q(X)$. Alors :

$$\mu(X)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p \leq \mu(X)^{-\frac{1}{q}}\|f\|_q.$$

Preuve. OPS $q < \infty$. On a $\displaystyle\left[\int_X |f(x)|^p \underbrace{\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}}_{\text{Noyau de proba}}\right]^{\frac{p}{q}} \leq \int (|f(x)|^p)^{\frac{q}{p}} \frac{d\mu(x)}{\mu(x)}$

puis Jensen avec $s \in R \to |s|^{\frac{q}{p}}$ qui est convexe. □

Remarque. On pouvait aussi utiliser Hölder. $\displaystyle\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \||f|^p\|_\alpha \|\mathbb{1}\|_\beta$ où $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$. On choisit $\alpha = \dfrac{q}{p}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int |f|^p d\mu &\leq \left(\int (|f|^p)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int \mathbb{1}^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\int |f|^p\right)^{\frac{q}{p}} \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $L^p(X,\mu) \underbrace{\supset}_{\text{injection continue}} L^q(X,\mu)$, si $0 < \mu(X) < \infty$ et $p \leq q$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et (K_n) une suite exhaustive de compact, i.e. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ et $K_n \subset_C \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Alors $L^p_{loc}(\Omega)$ est un Fréchet pour la famille de semi normes $(|f|_n)$ où $|f|_n = \|f\|_{L^p(K_n)}$.

Si $0 \leq p \leq q \leq \infty$, alors :

$$L^1(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Par contre $L^q(\Omega)$ et $L^p(\Omega)$ ne sont pas comparable *a priori* si $Leb(\Omega) = \infty$.

Propriété 11 (Convolution dans L^p)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors l'intégrale $(f * g)(x) := \int_{h\in\mathbb{R}^d} f(x-h)g(h)dh$ converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\|(f*g)\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$. [I.e. $* : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est bilinéaire continue].

Preuve. Supposons d'abord $f, g \geq 0$, $\int f = 1$ et $p < \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
[(f*g)(x)]^p &= \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(h)g(x-h)dh\right]^p && \text{Chgt de var } h \mapsto x-h \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-h)^p dh && \text{Jonsen pour } d\mu(h) = f(h)dh \text{ et } s \mapsto |s|^p .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int (f*g)(x)^p dx}_{\|f*g\|_p^p} &\leq \int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{h\in\mathbb{R}^d} f(h)g(x-h)^p dhdx \\
&= \int_{h\in\mathbb{R}^d} f(f) \underbrace{\int_{x\in\mathbb{R}^d} g(x-h)^p dxdh}_{\|g\|_p^p} && \text{Fubini}
\end{aligned}$$

Donc $\|f*g\|_p^p \leq \underbrace{\int f}_{=1} \|g\|_p^p$ comme annoncé.

Par linéarité sur f, le résultat si $\int f \neq 1$.

Si f, g ne sont pas positives, alors comme $|f| * |g| \in L^p(\mathbb{R}^d)$ par le raisonnement précédent, on a $\underbrace{\int |f(x-h)||g(h)|dh}_{(|f|*|g|)(x)} < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $h \mapsto f(x-h)g(h)$ est intégrable presque partout.

Finalement $\|f*g\|_p \leq \||f|*|g|\|_p \leq \||f|\|_1\||g|\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.
On a utilisé $|f|*|g|(x) \geq |f*g(x)|$. $\square$

Remarque. Si $p=\infty$, on a :

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &\leq \int f(h)\underbrace{|f(x-h)|}_{\leq\|g\|_\infty}dh\\ &\leq \|f\|_1\|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$.

La convolution $L^1\times L^p \to L^p$ est bilinéaire, continue et commutative si on restreint à $L^1\times L^1\to L^1$. De plus

$$\begin{aligned}supp(f*g) &\subset \overline{supp(f)+supp(g)}\\ &= \overline{\{x+y \mid x\in supp(f),\ y\in supp(g)\}}.\end{aligned}$$

Si $f,g\in L^1$ alors on a l'associativité (faites les calculs).
Enfin, si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = f*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right)$ pour tout $i\in [\![1;d]\!]$.

Propriété 12. Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $f\geq 0$, $\int f=1$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p<\infty$. Alors

$$\|f*g-g\|_p^p \leq \int f(h)\|\tau_h g-g\|_p^p dh,$$

où $\tau_h g(x)=g(x-h)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}|f*g(x)-g(x)| &= |\int f(h)\left[g(x-h)-g(x)\right]dh|\\ &\leq \int f(h)|g(x-h)-g(x)|^p dh \qquad \text{Jensen}\end{aligned}$$

Donc $\int |f*g-g|^p \leq \int f(h)\underbrace{\int |g(x-h)-g(x)|^p dx}_{\|\tau_h g-g\|_p^p}.$ $\square$

Remarque. Faux si $p=\infty$. Considérer les fonctions suivantes :

Remarque. Rappel : Soit (X,d,μ) un espace métrique mesuré où X est localement compact et μ est une mesure borélienne régulière (c.à.d. $\forall A\subset X$ mesurable, $\sup\{\mu(k)\mid k\subset A, k \text{ compact}\}=\mu(A)=\inf\{\mu(u)\mid u\supset A, U \text{ ouvert}\}$. Alors $C_c^0(X)$ est dense dans $L^p(X,\mu)$ pour tout $p<\infty$.

Preuve. On note $E = Vect\{\mathbb{1}_A \mid A \subset X,\ \text{mesurable}\}$ l'espace vectoriel des foncions étagées. On sait que $L^p(X,\mu)$ est le complété de E par $\|.\|_p$. Il suffit donc, étant donné $A \subset X$ mesurable et $\varepsilon > 0$, de construire $f \in C_c^0(X)$ telle que $\|f - \mathbb{1}_A\|_p < \varepsilon$. On se donne donc $K \subset A \subset U$ avec K compact et U ouvert tq $\mu(U \backslash A) < \varepsilon$ et $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$. Pour tout $x \in K$, soit $r_x > 0$ tq $B'(x, r_x)$ est compact (car X localement compact) et inclus dans U (car ouvert). Soit $U' = \bigcup_{1 \leq i \leq I} B(x_i, r_{x_i})$ une couverture finie de K. On note que $\overline{U'}$ est compact. On pose $f(x) = \dfrac{d(x, X\backslash U')}{d(x,K) + d(x, X\backslash U')}$.
On a $f_{|K} = 1, f_{|X\backslash U'} = 0$ et $supp(f) \subset \overline{U'}$ compact. D'où $\|f - \mathbb{1}_A\|_p^p \leq \mu(U'\backslash K) \leq \mu(U\backslash K) \leq 2\varepsilon$, ce qui conclut. □

Propriété 13. Soit $\rho \in L^1(B(0,1), \mathbb{R}^d), \rho \geq 0, \displaystyle\int \rho = 1$. Soit $p \in [1, \infty], \varepsilon > 0$. On pose $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^d}\rho(\dfrac{x}{d})$. On a $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$ et $supp(\rho_\varepsilon) \subset \varepsilon supp(\rho) \subset B'(0, \varepsilon)$.

- Pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, si $p < \infty$ $[f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)\{f \text{ continue}, f(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ si $p = \infty$ $]$ on a $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \leq w_p(\varepsilon := \sup_{|h| \leq \varepsilon} \|\tau_h f - \tau_h\|_p$. De plus $w_p(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.
- Pour tout $K \subset_C \mathbb{R}^d$ et $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si $p < \infty$ $[f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ si $p = \infty]$ on a $\|f * \rho_\varepsilon - \rho\|_{L^p(K)} \leq w_p^K(\varepsilon) := \sup_{|h| \leq \varepsilon} \|\tau_h f - f\|_p$ et $w_p^K(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve. Les inégalités découlent, si $p < \infty$, de

$$\begin{aligned}\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(A)}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(h) \|\tau_h f - f\|_{L^p(A)}^p dh \\ &\leq \underbrace{\int \rho_\varepsilon}_{=1} \sup_{h \in supp(\rho_\varepsilon)} \|\tau_h f - f\|.\end{aligned}$$

En choisissant $A == \mathbb{R}^d$ ou $A = K$. Les inégalités sont claires dans le cas $p = \infty$.
Justifions que $w_p(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ dans le cas $p < \infty$. (En fait non, flemme). □

Théorème 11 (Fréchet Kolmogorov)**.** Soit $p \in [1, \infty[, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$. On suppose :

- $\mathcal{F}$ est borné : $\sup\{\|f\|_p \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$.
- (Masse évanescente au bord) : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \subset_C \Omega,\ \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\backslash K)} < \varepsilon$.
- (Régularité sous transition) : $\forall K \subset_C \Omega,\ \exists w_K$ module de continuité,

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(K)} \leq w_K(|h|) \text{ pour tout } |h| \leq d(K, \mathbb{R}^d \backslash \Omega).$$

Alors $\mathcal{F}$ est une partie compact de $L^p(\Omega)$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ fixé comme dans la preuve. Soit $K = K(\varepsilon)$ tq $\forall f \in \mathcal{F},\ \|f\|_{L^p(\Omega\backslash K)} \leq \varepsilon$. Soit $y \in]0, d(K, \mathbb{R}^d\backslash\Omega[$, tel que $w_K(y) \leq \varepsilon$. Soit $\rho \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$, $\displaystyle\int \rho = 1$, $supp(\rho) \subset B(0, y)$. Posons $\mathcal{G} = \{f_{|K} * \rho \mid f \in \mathcal{F}\}$.

On note que $\forall f \in \mathcal{F},\ \underbrace{f_{|K}}_{\in L^p(K) \subset L^1(K) \subset L^1(\mathbb{R}^d)} * \overbrace{\rho}^{\in C^1} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ en prolongeant par 0.

De plus,

$$\begin{aligned}
\|f_{|K} * \rho\|_\infty &\leq \|f_{|K}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \overbrace{\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}^{\text{finie}=:M} \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} M \\
&\leq \underbrace{|K|^{1-\frac{1}{p}}}_{\text{fixé}} \underbrace{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}_{\text{borné sur } \mathcal{F}}. \\
\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{|K} * \rho\right)\|_\infty &= \|f_{|K} * \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)\|_\infty \\
&\leq \|f_{|K}\|_{L^1} \|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_\infty \\
&\leq |K|^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_p \|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_\infty.
\end{aligned}$$

On a posé abusivement $f_{|K}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Enfin $supp(f_{|K}) \subset K + B'(0, \varepsilon)$ compact.

Ainsi $\mathcal{G}$ est constitué de fonctions :

- a support dans un compact fixé.
- bornée uniformément.
- Lipschitzienne uniformément.

Donc $\overline{\mathcal{G}}$ est compact pour $\|.\|_\infty$ par le théorème d'Ascoli. Donc il existe $f_1, \cdots, f_I \in \mathcal{F}$ tels que $\forall f \in \mathcal{F},\ \exists i \in [\![1; I]\!],\ \|f_{|K} * \rho - f_{i|K} * \rho\|_\infty < \varepsilon$.

Finalement, soit $f \in \mathcal{F}$, soit $i \in [\![1; I]\!]$ comme ci dessus, alors :

$$\begin{aligned}
\|f - f_i\|_{L^p} \leq{}& \underbrace{\|f - f_{|K}\|_p}_{\leq \varepsilon \text{ par ii}} + \underbrace{\|f_{|K} - f_{|K} * \rho\|_p}_{\leq w_K(\varepsilon) \leq \varepsilon \text{ par ii}} + \underbrace{\|f_{|K} * \rho - f_{i|K} * \rho\|_p}_{\leq \varepsilon \text{ par Ascoli et i}} + \underbrace{\|f_{i|K} * \rho - f_{i|K}\|_p}_{\leq w_K(\cdots) \leq \varepsilon \text{par ii}} + \underbrace{\|f_{i|K} - f_i}_{\leq \varepsilon \text{ par ii}} \\
&\leq w_K(\delta)
\end{aligned}$$

D'où $\overline{\mathcal{F}}$ est compact. (Note du traducteur : $\delta = \varepsilon = y =: \eta$) $\square$

Exemple. Soit $K \in L^2([0,1])$, posons $\mathcal{K}$: $\begin{array}{l} \mathcal{K} : L^2 \longrightarrow \mathcal{K} : L^2 \\ f, x \longmapsto \displaystyle\int_{y=0}^{1} K(x,y)f(y)dy \end{array}$.

Alors, $\mathcal{K}$ est un opérateur compact.

Preuve. Posons $I_\varepsilon = [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ et $I = [0,1]$. Alors :

i $(\mathcal{K}(f)(x))^2 \leq \int_0^1 K(x,y)^2 dy \int_0^1 f(y)^2 dy$ par Cauchy Schwartz. Donc $\|K(f)\|_2^2 \leq \|K\|_{L^2(I^2)}^2 \|f\|_2^2$.

ii $\displaystyle\int_{x \in I \setminus I_\varepsilon} \mathcal{K}(f)(x)^2 dx \leq \underbrace{\|K\|^2_{L^2((I\setminus I_\varepsilon)\times I)} \|f\|_2^2}_{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0}$

iii $|\mathcal{K}(f)(x) - \mathcal{K}(f(x+h)| \leq \displaystyle\int_0^1 (K(x,y) - K(x+h,y))^2 \, dy \int_0^1 f(y)^2 dy$.
Soit $\varepsilon > 0, |h| < \varepsilon$.

$$\int_{x\in I_\varepsilon} (\mathcal{K}(f)(x) - \mathcal{K}(f)(x+h))^2 \, dx \leq \int_{x\in I_\varepsilon} \int_{y=0}^{1} (K(x,y) - K(x+h,y))^2 \, dx dy \int f(y)^2 dy$$
$$= \underbrace{\|K - \tau_{(h,0)}K\|^2_{L^2(I_\varepsilon \times I)} \|f\|_2^2}_{\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0}.$$

[Densité des fonctions continues dans $L^2(I)$]. $\{\mathcal{K}(f) \mid f \in L^2, \|f\| \leq 1\}$ est précompact par Fréchet Kolmogorov.

□

2.2 Convolution de distributions et espaces de Sobolev

Définition 8 (Distribution associée à une fonction)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, $U_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$.
Alors $U_f \in D(\Omega)^*$ est une distribution d'ordre 0 et $f \in L^1_{loc} \to U_f$ est continue et injective.

Preuve. Soit $K \subset_C \Omega$ compact et $\varphi \in D_K(\Omega) = \{\psi \in D(\Omega) \mid supp(\psi) \subset K\}$. Alors $U_f(\varphi) \leq \underbrace{\|f\|_{L^1(K)}}_{\substack{\text{bornée car } f\in L^1_{loc} \\ \text{et } K \text{ compact}}} \underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty(K)}}_{\substack{\text{pas de dérivée} \\ \text{de } \varphi}}$.
La topologie sur $D(\Omega)^*$ est celle de la cv * faible.
Injectivité : Soit $K \subset \Omega$ compact et $\varepsilon > 0$ tq $K' := K + B't_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Soit $\rho \in D(\mathbb{R}^d), p \geq 0, \int p = 1$. Alors pout tout $\varphi \in D_K(\Omega)$, $\rho_\varepsilon * \varphi \in D_{K'}(\Omega)$

et

$$\begin{aligned} U_f(\rho_\varepsilon * \varphi) &= \int f(x) \left(\rho_\varepsilon * \varphi\right)(x)dx \\ &= \int \int f(x)\rho_\varepsilon(x-h)\varphi(h)dhdx \\ &= \int \left(f * \overline{\rho_\varepsilon}\right)(h)\varphi(h)dh \qquad \text{où } \overline{\rho_\varepsilon}(z) = \rho_\varepsilon(-z) \ . \end{aligned}$$

Si $U_f = 0$ en tant que distribution, alors $U_f(\rho_\varepsilon * \varphi) = 0$ peut importe le $\varphi \in D_K(\Omega)$. Donc $\displaystyle\int \left(f * \overline{\rho_\varepsilon}\right)(h)\varphi(h)dh = 0$ puis $f * \overline{\rho_\varepsilon}$ est nul sur K. Comme $f * \overline{\rho_\varepsilon} \to f$ dans L^1_{loc} on obtient que $f = 0$. CQFD. □

Définition 9 (Dérivation d'une distribution)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Si $T \in D(\Omega)^*$, on définit $\langle \partial_\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_\alpha \varphi \rangle$.
Cette définition est continue sur les distributions et prolonge la distribution des fonctions usuelle $\partial_\alpha U_f = U_{\partial_\alpha f}$ pour $f \in C^k(\Omega)$ et $|\alpha| \leq k$.

Définition 10. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. On pose $W^{s,p}(\Omega) := \{\underbrace{f \in L^p(\Omega)}_{L^p \subset L^1_{loc} \subset D(\Omega)^*} \mid \forall |\alpha| \leq s,\ \underbrace{\partial f \in L^p(\Omega)}_{\text{La dérivée en tant que distribution}}\}$ On suppose que la dérivée est est représentée par un choix de L^p qui est unique car précédent. (???)
Muni de la norme $\|f\|_W^p := \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$. $[\|f\|_{W^{s,\infty}} = \max \|\partial_\alpha f\|_\infty$.

Propriété 14. $W^{s,p}(\Omega)$ est un Banach pour tout s et p. Si $p = 2$, c'est un Hilbert.

Preuve. Soit $f_n \in W^{s,p}$, une suite de Cauchy. Alors $\partial_\alpha f$ est aussi une suite de Cauchy pour tout $|\alpha| \leq s$. On note f^α sa limite. Alors $f_n \to f^0$, $\partial_\alpha f_n \to f^\alpha$ dans L^p, donc aussi dans L^1_{loc} puis dans $D(\Omega)^*$. Or $\partial_\alpha f_n \to \partial_\alpha f^0$ dans $D(\Omega)^*$ par continuité de la dérivation. Donc $\partial_f^0 = f^\alpha$ dans $D(\Omega)^*$ donc dans les autres aussi. Ainsi $f^0 \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\|f_n - f^0\| \to 0$. □

Propriété 15 (Convolution d'une distribution)**.** Soit $T \in D(\mathbb{R}^d)^*$ et $\varphi, \psi \in D(\mathbb{R}^d)$. On définit $(T * \varphi)(\psi) := T(\overline{\varphi} * \psi)$ où $\overline{\varphi}(z) = \varphi(-z)$.
Alors $T * \varphi$ est une distribution et cette définition prolonge la convolution des fonctions : $\partial_\alpha(T * \varphi) = (\partial_\alpha T) * \varphi = T * (\partial_\alpha \varphi)$. De plus, $T * \varphi$ est représentée par la fonction C^∞ $x \in \mathbb{R}^d \mapsto T(\varphi(x - .))$

Propriété 16. Si $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in D(\mathbb{R}^d)$ tel que $\rho > 0$ et $\displaystyle\int \rho = 1$.

Alors $f * \rho_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ dans $W^{s,p}$.
On en déduit que $D(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. D'une part $\|\partial_\alpha (f * \rho_\varepsilon) - \partial_\alpha f\|_p = \|(\partial_\alpha) * \rho_\varepsilon - \partial_\alpha f\|_p \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. Posons $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $H = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $H = 1$ sur $[1, \infty[$. $\square$