Analyse

Félix Yvonnet

5 octobre 2023

1 Compacité

1.1 Caractérisation topologique

Définition 1 (Axiome de Borel-Lebesgue)**.** Un espace topologique $(X, \mathbb{U})$ est dit compact si il est séparé et pour tout $\mathcal{U} \subset \mathbb{U}$ ensemble d'ouverts tel que $\bigcup \mathcal{U} = X$, il existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ fini tel que $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$. (De toute couverture de X par des ouverts, on peut extraire une sous couverture finie).

Remarque.

$$\bigcup \mathcal{U} = \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{U},\ x \in A\}$$
$$= \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A$$

Remarque. On pouvait considérer les familles d'ouverts. Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouvert alors $\exists I_0 \subset I,\ I_0$ fini et tq $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$.

Remarque (Intersection de fermés)**.** Soit $(X, \mathbb{U})$ compact. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de X tq $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors $\exists I_0 \subset I,\ I_0$ fini et $\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset$.
En particulier, si (F_n) est une suite de fermés emboités non vides alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Lemme 1. Soit $(X, \mathbb{U})$ espace topologique séparé et $F \subset X$ complet. Alors F est fermé.

Preuve. Par contraposée, on suppose F non fermé et on va montrer qu'il n'est pas compact.

Comme F non fermé, il existe $x \in \overline{F} \backslash F$. Soit $y \in F$, V_y et W_y des ouverts disjoints tq $x \in V_y$ et $y \in W_y$. On a $F = \bigcup_{y \in F} W_y$. Si par l'absurde il existe $F_0 \subset F$ fini tel que $F = \bigcup_{y \in F_0} W_y$, alors l'ensemble $V_* = \bigcap_{y \in F_0} V_y$ est un ouvert (comme intersection **finie** d'ouverts) qui continent x et n'intersecte aucun W_y pour $y \in F_0$.
On a donc trouvé V ouvert tq $x \in V$ et $V \cap F = \emptyset$. Cela contredit l'hypothèse que $x \in \overline{F} \backslash F$ (tout ouvert contenant x doit rencontrer F). □

Corollaire. Soit $(X, \mathbb{U})$ compact et $F \subset X$. F fermé $\Leftrightarrow$ F compact.

Preuve. $\Leftarrow$ Voir la preuve précédente (note que compact $\Rightarrow$ séparé).

$\Rightarrow$ Soit $(U_i)_{i \in I}$ une couverture de F par des ouverts. Alors $X = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cup \left(\underbrace{X \backslash F}_{\text{ouvert}} \right)$. Donc $\exists I_0 \subset I$, I_0 fini et $X = \left(\bigcup_{i \in I_0} U_i \right) \cup (X \backslash F)$. Donc $F \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$.

□

Lemme 2. Soit $(X, \mathbb{U}), (Y \mathbb{V})$ des espaces topologiques séparés. Alors $\forall K \subset_C X$, $f(K)$ est un complet.

Preuve. Soit (U_i) tq $f(K) \subset U_{i \in I} U_i$. Alors $K \subset \bigcup_{i \in} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouvert car } f \text{ continue}}$. Donc $K \subset \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(U_i)$ avec I_0 fini. Donc $f(K) \subset \bigcup_{i \in I_0} f(U_i)$, donc K est compact (K est séparé car Y l'est). □

Corollaire. Soit $(X, \mathbb{U}), (Y \mathbb{V})$ des compacts et $f : X \to Y$ continue bijective. Alors f^{-1} est continue.

Preuve. Soit $F \subset X$ fermé. Alors F est compact, donc $f(F)$ et compact puis $f(F)$ est fermé. Ainsi $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ est fermé. Ainsi l'image réciproque d'un fermé par f^{-1} est un fermé donc f^{-1} est continue. □

Définition 2 (Espace localement compact)**.** $(X, \mathbb{U})$ un espace topologique séparé est dit localement compact ssi

1. tout point admet un voisinage compact
2. tout point admet une base de voisinages compact

(Ces conditions sont équivalentes)

Preuve. .

— $2 \Rightarrow 1$ est clair

— Supposons 1, soit $x \in X, K \subset X$ un voisinage compact de x et $V \subset X$ un voisinage ouvert de x.
Posons $\forall y \in K \backslash \{x\},\ V_y$ et W_y ouverts disjoint tq $x \in V_y$ et $y \in W_y$.
Alors $K \subset \left(\bigcup_{y \in K \backslash \{x\}} W_y \right) \cup V$. Par compacité $\exists K_0 \subset K \backslash \{x\},\ K \subset \left(\bigcup_{y \in K_0} W_y \right) \cup V$. Alors $K_* := K \backslash \left(\bigcup_{y \in K_0} W_y \right)$ est un fermé de K, donc un compact. De plus $K_* \subset V$ et $\underbrace{\bigcap_{y \in K_0} V_y}_{\text{ouvert contenant } x} \subset K_*$

□

Définition 3 (Compactifié d'Alexandroff)**.** Soit $(X, \mathbb{U})$ un espace localement compact séparé. On pose $\hat{X} := X \sqcup \{\infty\}$, où ∞ est un symbole supplémentaire arbitraire. $\hat{\mathbb{U}} := \mathbb{U} \cup \{\hat{X} \backslash K \mid K \subset_C X\}$. Alors $(\hat{X}, \hat{\mathbb{U}})$ est un espace topologique compact qui induit la topologie sur $\mathbb{U}$. (Idée : X un segment ouvert qu'on relie sur lui même pour former un cercle).

1.2 Compacts métriques

Définition 4. (X, d) est précompact $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists X_0 \subset X$ fini, $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, \varepsilon)$.

Théorème 1. Soit (X, d) un espace métrique. Sont équivalent :

1. X est un compact (au sens de l'axiome de Borel-Lebesgue)
2. Toute suite à valeur dans X admet une sous suite convergente (Axiome de Bolzano-Weiestrass)
3. X est précompact et complet.

Preuve. On note que X est métrique donc séparé.

$1 \Rightarrow 2$ Soit (x_n) une suite à valeur dans X. On note $F_n := \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}$. Alors $Adh((x_n)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est une intersection $\searrow$ de fermés non vides donc est non vide. Donc (x_n) edmet une valeur d'adhérence. Comme (X, d) est métrique, c'est la limite d'une suite extraite.

$2 \Rightarrow 3$ Preuve de la complétude. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous suite convergente. Comme elle est de Cauchy, elle converge.

Preuve de la précompacité. Soit $x_0 \in X$, on construit par récurrence tant que c'est possible, $x_n \in X \setminus \bigcup_{k<n} B(x_n, \varepsilon$. Si la construction s'arrête à l'indice N alors $X = \bigcup_{n<N} B(x_n, \varepsilon)$ comme souhaité. Sinon, on remarque que $\forall m < n,\ x_n \notin B(x_m, \varepsilon)$, donc $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Alors la suite (x_n) ne peut pas avoir de sous suite convergente (sinon $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \to 0$.) Contradiction avec la précompacité.

$3 \Rightarrow 1$ Soit (x_n) une suite de points de X et $A = \{x_n\}$. On construit pour $k \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{r \leq R(k)} B(y_r^k, 2^{-k}$ une couverture de X par $R(k)$ boules de diamètre 2^{-k} et $\sigma(k) \in [\![1, ; R(k)]\!]$ tq $A_k = A \cap B(y^0_{\sigma(0)}, 2^) \cap \cdots \cap B(y^k_{\sigma(k)}, 2^{-k})$ est infini. (Note : $\underbrace{A_{k+1}}_{\text{infini}} = A_{k-1} \cap \bigcup_{r \leq R(k)} B(y_r^k, 2^{-k} = \underbrace{\bigcup_{r \leq R(k)}}_{\text{réunion finie}} \underbrace{A_{k-1} \cap B(y_r^k, 2^{-k})}_{\substack{\text{l'un doit être infini} \\ \text{d'indice } r=\sigma(k)}}$.

Soit φ une extractrice tq $x_{\varphi(n)} \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall q \geq p \geq N$

$$\begin{aligned} d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) &\leq diam(A_N) \\ &\leq 2 \times 2^N. \end{aligned}$$

Donc $x_{\varphi(n)}$ converge par complétude.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ une couverture par des ouverts. On affirme qu'il existe $r > 0$ tq $\forall x \in X,\ \exists i \in I,\ B(x, r) \subset U_i$ (nombre de Lebesgue). Par l'absurde, soit (x_n) tq $B(x_n, 2^n) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. Par Bolzano-Weiestrass, $\exists \varphi + \nearrow,\ x_{\varphi(n)} \to x_* \in X$.
Soit $i \in I$ tq $x \in U_i$, et $r > 0$ tq $B(x, r) \subset U_i$. Alors en se rapprochant assez de x avec φ on entre dans la boule et donc dans U_i absurde !
Soit (U_i) une couverture d'ouverts et $r > 0$ le nombre de Lebesgue associé. Soit $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, r)$ avec X_0 fini, par précompacité. Pour tout $x \in X_0$, soit $i(x) \in I$ tq $B(x, r) \subset U_{i(x)}$. Alors $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, r) \subset \bigcup_{x X_0} U_{i(x)}$ réunion finie comme annoncé !

□