Analyse

Félix Yvonnet

5 octobre 2023

1 Analyse

1.1 Rappel de topologie

Un espace topologique est une paire $(X, \mathbb{U})$, où X est un ensemble et $\mathbb{U} \subset P(X)$ est l'ensemble des ouverts satisfait :

1. $\emptyset\ X \in \mathbb{U}$
2. $\forall \mathcal{U} \subset \mathbb{U}\ \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u \in \mathbb{U}$
3. $\forall u, v \in \mathbb{U}\ u \cap v \in \mathbb{U}$

Remarque. si $\mathcal{U} = \emptyset$ alors $\bigcap_{u \in \mathcal{U}} u = \emptyset$. En revanche l'intersection vide n'est pas définie

Remarque. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert. Les ensembles $\emptyset$ et X sont fermés. Les fermés sont stable par union finie et intersection quelconque

Définition 1. Soit $A \subset X$ où $(X, \mathbb{U})$ est un espace topologique. On définit l'intérieur $\overset{\circ}{A} := \bigcap_{\substack{\text{F fermé} \\ A \subset F}} F$

On note que $X \backslash \mathring{A} = \overline{X \backslash A}$ et $X \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \backslash A}}$

1.2 Comparaison de topologies :

Définition 2. Soit X un ensemble muni des topologies $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$. On dit que $\mathbb{U}$ est **plus fine** que $\mathbb{V}$ si $\mathbb{U} \supset \mathbb{V}$

Exemple. la topologie **finie** est définie par $\mathbb{U} = P(X)$, la topologique **grossière** par $\mathbb{U} = \{\emptyset, X\}$

Définition 3. Soit X ensemble et $\mathbb{U}_0 \subset \mathcal{P}(x)$. La topologie $\mathbb{U}$ engendrée par $\mathbb{U}_0$ est la plus grossière contenant $\mathbb{U}_0$.
$\mathbb{U} = \bigcap \{\mathbb{U}' \subset \mathcal{P}(X) | \mathbb{U}' \text{ topo et } \mathbb{U}' \supset \mathbb{U}_0\}$. C'est bien une topologie en tant qu'intersections de topologies.

Remarque. Les éléments de $\mathbb{U}$ sont X et les unions qcq d'intersections finies d'éléments de $\mathbb{U}_0$. $u \in \mathbb{U}_0 \Leftrightarrow u = X \vee u = \cup \cap u_{ij}$

Définition 4. Une base d'ouverts sur X est une partie $w_0 \subset \mathcal{P}(X)$ tq

— (couverture) $\displaystyle\bigcup_{u \in \mathbb{U}_0} u = X$

— (stabilité par intersections) $\forall u, v \in \mathbb{U}_0,\ \forall x \in u \cap v\ \exists w \in \mathbb{U}_0$
$x \in w$ et $w \subset u \cap v$

Proposition 1. La topo $\mathbb{U}$ engendrée est une base d'ouvert $\mathbb{U}_0$ est constituée des unions qcq d'éléments de $\mathbb{U}_0$

Preuve. On note que $X = \displaystyle\bigcup_{u \in \mathbb{U}_0} u$ est bien une union ...
Si $u, v \in \mathbb{U}_0$, on note $W_x \in \mathbb{U}_0$ tq $x \in W_x$ et $W_x \subset u \cap v$ pour tout $x \in u \cap v$.
Alors $u \cap v = \displaystyle\bigcup_{x \in u \cap v} W_x$, puis $\displaystyle\bigcup_{i \in I} \underbrace{\bigcap_{1 \leq j \leq J(i)} u_{ij}}_{\text{S'écrivent comme réunion de la base d'ouverts}}$ □

Exemple. (topologie de l'ordre) : Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné avec au moins 2 éléments. On définit une base d'ouverts par les intervalles :
$]-\infty, b[,]a, b[,]a, \infty[$ pour $a, b \in X$

Preuve. Si $a < b \in X$ alors $X =]-\infty, b[\cup]a, \infty[$.
De plus $]\alpha, \beta[\cap]\delta, \gamma[=]\min(\alpha, \delta), \max(\beta, \gamma)[$ □

Exemple. (topologie produit) : $(X_i, \mathbb{U}_i)_{i \in I}$ une famille d'espace topologiques, on définit la topologie produit par la base d'ouverts :
$\{\displaystyle\prod_{i \in I} u_i | \forall i \in I, u_i \in \mathbb{U}_i$ et $u_i = X_i$ sauf pour un nombre fini de $i \in I\}$

Exemple. Si $X_i = X, \forall i \in I$, alors $\displaystyle\prod_{i \in I} X = X^I$ est l'ensemble des fonctions de I dans X. La topo produit sur X^I correspond à la convergence simple.
$f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_n(i) \to f(i)$

1.3 Voisinages :

Définition 5 (voisinage). Soit $(X, \mathbb{U})$ un espace topologique et $x \in X$. Un voisinage V de x est une partie $V \subset X$ tq $\exists u \in \mathbb{U},\ x \in u \wedge u \subset V$. De manière équivalente V vois de $x \Leftrightarrow x \in \mathring{V}$.
On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de $x \in X$.

Définition 6 (Caractérisation de l'adhérence). $\forall A \subset X$, On définit l'adhérence $\overline{A} = \{x \in X | \forall v \in \mathcal{V}_x,\ A \cap v \neq \emptyset\}$, l'intérieur $\mathring{A} = \{x \in X | \exists v \in \mathcal{V}_x,\ v \subset A\}$

Définition 7. une partie $W_x \subset \mathcal{V}_x$ est une **base de voisinage** ssi $\forall v \in V_x\ \exists w \in W_x\ w \subset v$. Ie les éléments de W_x sont plus fins que $\mathcal{V}_x$.

Définition 8. une topologie $\mathbb{U}$ de X est :

1. A <u>base dénombrable de voisinages</u> ssi tout point $x \in X$ admet une base dénombrable W_x de voisinage.
2. A <u>base dénombrable</u> si elle est engendrée par une base d'ouverts dénombrable.

Remarque. si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, alors $W_x = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage.

Remarque. Si (X, d) est un espace métrique admettant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense, alors une base dénombrable d'ouverts est :
$\mathbb{U}_0 = \{B(x_n, r) \mid n \in \mathbb{N}\ r \in \mathbb{Q}\}$

Preuve. $\mathbb{U}_0$ recouvre bien X.
Soit $x \in B(x_n, r) \cap B(x_n, s) = BB$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q} > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset BB$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tq $x_k \in B(x, \varepsilon/2)$. Alors $x \in B(x_k, \varepsilon/2) \subset B(x, \varepsilon/2 + \varepsilon/2) = B(x, \varepsilon)$.

Par le même raisonnement, $\mathbb{U}$ contient les voisinages arbitrairement petits de tout point. C'est donc une base d'ouverts pour les topologies de X. □

Proposition 2. Soit $(X, \mathbb{U})$ à base dénombrable de voisinage. Alors $\forall A \subset X,\ \overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \to x\}$.

Preuve. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de voisinages de x, soit $x_n \in \underbrace{V_0 \cap \cdots \cap V_n}_{\substack{\text{une } \cap \text{ finie de vois de } x \\ \text{est un vois de } x}} \cap A$.

Alors $x_n \to x.(\Leftrightarrow \forall v \in V_x,\ \exists N, \forall n \geq N,\ x_n \in V)$ □

Proposition 3. Soit $(X, \mathbb{U})$ un espace topologique à base dénombrable de voisinage et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Alors toutes valeurs d'adhérence de (x_n) est la limite d'une sous suite.

On rappelle que $Adh((x_n)) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n | n \geq N\}}$.

Preuve. on note que $Adh(x_n) = \{x \in X | \forall v \in V_x,\ \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ est infini$\}$. La preuve suit comme précédemment en choisissant (V_n) base de voisinages $\searrow$ pour l'inclusion et $x_{\sigma(n)} \in V_x$ avec σ strict $\nearrow$. □

1.4 Séparation :

Définition 9. Un espace topologique est **séparé** ssi $\forall x, y \in X$,
$x \neq y \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{U},\ x \in u, y \in v, u \cap v = \emptyset$.
Si $(X, \mathbb{U})$ est séparé, alors toute suite a au plus une limite (Haussdorff, T_2).

Définition 10. Un espace $(X, \mathbb{U})$ satisfait l'axiome T_1 de Kolmogorov, ssi $\forall x \neq y \in X\ \exists u \in \mathbb{U},\ x \in u$ et $y \notin u$.

Exemple. (topologie T_1 mais pas T_2) :

1. $\mathbb{N}$ muni de topologie cofinie : les fermés sont les ensembles finis.
2. $\mathbb{C}^d$ muni de la topo de Zariski : les fermés ont les ensembles algébriques $F = \{x \in \mathbb{C}^* | P_1(x) = \cdots P_n(x) = 0\}\ n \geq 0;\ P_1, \cdots, P_n \in \mathbb{C}[X]$

Exemple. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers tous les points de $\mathbb{N}$ pour la topo cofinie. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$ et V un voisinage de k. Alors V contient tous les points sauf un nombre fini. Donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
De même, une suite de point qui n'est continue dans aucun ensemble algébrique propre converge vers tt point de $\mathbb{C}^d$ pour Zariski.

1.5 Continuité :

Définition 11. Soit $(X, \mathbb{U})$ un espace topologique. Une application $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ ssi $\forall W \in \mathcal{V}_{f(x)},\ f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$. (ie $\forall W \in \mathcal{V}_{f(x)},\ \exists V \in \mathcal{V}_x,\ f(V) \subset W$). f est continue $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in X$, f est continue en x.

Définition 12. Soit $(X, \mathbb{U}), (Y, \mathbb{V})$ des espaces topologiques et $f : X \to Y$. Sont équivalents :

1. f continue
2. $\forall V \in \mathbb{V}\ f^{-1}(V) \in \mathbb{U}$ (l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert)
3. $\forall F$ fermé de Y, $f^{-1}(F)$ fermé de X. (recip fermé est fermé)

4. $\forall A \subset X,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (et donc égaux)

La composition de fonctions continues est continue, l'image par une fonction continue d'une suite convergente est convergente.

Exemple. Soit X un ensemble et $(f_i : X \to Y_i)$ une famille d'applications vers des espaces topologiques. On peut considérer la topologie la moins fine qui les rend continue. Elle est engendrée par les $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i \in \mathbb{U}_i\}$.

1.6 Espace métrique

Définition 13. (X, d) espace métrique où $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est application distance, ci elle satisfait :

1. (Séparation) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$ (et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$).
2. (Symétrie) $\forall A x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
3. (Inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Définition 14. $\forall x \in X,\ \forall r > 0$ on définit :

— $B(x, r) := \{y \in X | d(x, y) < r\}$

— $B'(x, r) := \{y \in X | d(x, y) \leq r\}$

Les topologies associées à un espace métrique est celle induite par la base d'ouverts $\{B(x, r) | x \in X, r > 0\}$.

Définition 15. .

— $(X, \mathbb{U})$ est **séparable** $\Leftrightarrow \exists A \subset X$ dénombrable $\overline{A} = X$.

— $(X, \mathbb{U})$ est **séparé** $\Leftrightarrow$ il satisfait l'axiome T_2.

On peut utiliser dans un espace métrique les caractérisations séquentielles de l'adhérence et sur les fonctions continues.

Définition 16. Un **module de continuité** est une application $\mathbb{R}^+ \to [0, \infty]$, telle que $w(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Soit (X, d_x) et (Y, d_y) des espaces métriques, une fonction $f : X \to Y$ est :

— **continue** en $x \in X$ ssi il existe w_x un module de continuité tq $\forall y \in X,\ d_y(f(x), f(y)) \leq w_x(d(x, y))$.

— **uniformément continue** ssi il existe w un module de continuité tq $\forall x, y \in X,\ d_y(f(x), f(y)) \leq w(d(x, y))$.

— **Lipschitzienne** ssi $\exists C\ [w = CId],\ \forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y)$.

— α-**Holderienne** $[0 < \alpha < 1]$ ssi $\exists C\ [w = Cr^2],\ \forall x, y \in X$, $d_y(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y)^2$.

Remarque. Si w est un module de continuité,

- $\tilde{w}(r) := \sup_{0\leq s\leq r} w(s)$ est ...croissant et $\tilde{w} \geq w$
- $\hat{w}(r); = \frac{1}{2}\int_0^{2r} \tilde{w}(s)ds$ est ...croissant et continue
- $\hat{w}(r) \geq \tilde{w}(r) \geq w(r)$.

1.7 Espaces vectoriels normalisés (evn)

Contexte : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 17. une evn est une paire $(E, \|.\|)$ où E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\|.\|$ est une norme sur E. La norme $\|.\|$ satisfait :
- (Séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$
- (Homogénéité) $\forall c \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- (Inequality triangulaire) $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On lui associe $d(x, y) = \|x - y\|$ pour former la topologie associée.

Propriété 1. Soit E, F des evn, une application linéaire $u : E \to F$ est continue ssi $\exists C,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ ie u linaire est continue ssi elle est lipschitzienne.

On note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaire et continues de E dans F.
C'est un evn pour la norme $|\!|\!|u|\!|\!|_{L(E,F)} := \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$.
En particulier $E^* = L(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues est aussi un evn.

Exemple. Soit (X, d) un espace métrique, alors $C_b(X, \mathbb{K})$ est un evn pour la norme $\|f\|_\infty := \sup \|f(x)\|$.
De même, pour $0 < \alpha < 1$ $C_b^\alpha(x)$ est un evn muni de la norme
$\|f\|_{C_b^\alpha} := \|f\|_\infty + \|f\|_{C^\alpha}$ où $\|f\|_{C^\alpha} := \sup \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)^\alpha}$.

Ces normes peuvent aussi s'appliquer aux fonctions Lipschitziennes.

Exemple. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $n \in \mathbb{N}$. $C_b^\alpha(\Omega)$[underscore b pour bornée] est un evn pour la norme ...
$C_b^n(\bar{\Omega})$ muni de la même norme est constitué des $f \in C_b^n(\Omega)$ tq $\partial_\alpha f$ s'étend continuellement à $\bar{\Omega}$. [Rem : on peut montrer qu'elles admettent une extension continue a un voisinage de x].

Si (X, μ) est un espace mesuré, on note $L^*(X, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable}\}/_\sim$ où $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-presque partout.

On définit $\|f\|_p := \left(\int \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in [1, \infty[$. On a les evn L^p muni de $\|.\|_p$.

Preuve. L'homogénéité, la séparation et la mutabilité sont clairs.
L'inégalité triangulaire est appelée inégalité de Minkowski :
Soit $p \in [1, \infty[$, $f, g \in L^p(X, \mathbb{K})$ OPS $\|f\|_p > 0, \|g\|_p > 0, \|f\|_p + \|g\|_p = 1$.
Posons $F = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ et $G = \dfrac{f}{\|g\|_p}$.
Alors $\|f(x) + g(x)\|_p = \|(1-\lambda)F(x) + \lambda G(x)\|$ pour $\lambda = \|g\|_p$. Le module est convexe et la fonction puissance est aussi convexe donc la composition l'est. Ainsi $\|f(x) + g(x)\| \leq (1-\lambda)\|F(x)\|_p + \lambda\|G(x)\|_p$. Donc tout va bien la suite en exercice :) $\square$

1.8 Espaces vectoriels topologiques localement convexes (evtlc)

Définition 18. Un evtlc est un $\mathbb{K}$-ev E muni d'une famille de semi normes $(\|.\|_i)_{i\in I}$. La topologie associée est définie par la base d'ouverts de la forme $\{y \in E \mid \forall i \in I_0, \|x - y\|_i < \varepsilon\}$ avec $x \in E$, $\varepsilon > 0$ et $I_0 \subset I$ fini.

Remarque. Une semi norme est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ positive et homogène, satisfaisant l'inégalité triangulaire (pas de séparation).

Remarque. .

- La topologie n'est pas automatiquement séparée. Il faut le montrer.
- Tout evn est un evtlc avec une famille $(\|.\|_i)$ réduite à l'élément $\|.\|$.

Proposition 4. une application linéaire $u : E \to F$, avec $(E, (\|.\|_i))$ et $(F, (\|.\|_j))$ est continue ssi $\forall j \in J, \exists I_0 \subset I \cdots, \exists C,\ \forall x \in E\ \|u(x)\|_j \leq C \sum_{i\in I_0} \|x\|_i$.

En particulier une forme linéaire $u : E \to \mathbb{K}$ est continue ssi $\exists I_0 \subset I$ fini, $\exists C,\ \forall x \in E\ \|u(x)\| \leq C \sum_{i\in I_0} \|x\|_i$.

Preuve. Supposons u continue. Soit $j \in J$, on a un voisinage de 0 $W := \{y \in E \mid \|y\|_j < 1\}$. On a $u(0) = 0$ par linéarité. Par continuité, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $u(V) \subset W$. V contient un élément de la base de voisinage donc $\exists \varepsilon > 0$, $\exists I_0 \subset I$ fini tel que $\{x \in E | \forall i \in I_0,\ \|x\|_i < \varepsilon\} \subset V$.
On a montré que : $\forall i \in I_0,\ \|x\|_i < \varepsilon \Rightarrow \|u(x)\|_j < 1$.
En particulier : $\sum_{i\in I_0} \|x\|_i < \varepsilon \Rightarrow \|u(x)\|_j < \varepsilon$.
Par homogénéité : $\|u(x)\|_j \leq \varepsilon m^{-1} \sum_{i\in I_0} \|x\|_i$.
Réciproque : On montre la continuité en 0 (donc en tout point par

linéarité).
On a $u(0) = 0$. Soit W un voisinage de 0 dans F. OPS $\exists J_0 \subset J$ fini $\varepsilon > 0, W = \{y \in F | \forall j \in J_0,\ \|y\|_j < \varepsilon\}$ pour tout $j \in J_0$ on dispose de C_j et $I_j \subset I$ finis tq $\|u(x)\|j \leq \cdots$
On pose $I_0 = \bigcup_{j \in J_0} I_j$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{\max C_j} \frac{\times_1}{\|I_0\|} > 0$ et $V = \{x \in E | \forall i \in I_0,\ \|x\|_o < \eta\}$ est un voisinage de 0 et $\forall x \in V,\ \forall j \in J_0,\ \|u(x)\|_j \leq C_j \sum_{j \in J_0} \|x\|_j < C_j \eta \|I_j\| \leq \varepsilon$ □

Propriété 2. Soit E un evtlc muni d'une famille dénombrable de semi normes $(\|.\|_n)$. Alors la topo de E est maitrisable pour la distance $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \min(2^{-n}, \|x-y\|_n)$.

Preuve. Montrons que les bases de voisinage de l'origine $(B_j(0,\varepsilon)_{\varepsilon>0})$ et $\{x \in E | \forall i \in I_0,\ \|x\|_i < \eta\}, I_0$ fini $\varepsilon\eta > 0$ sont équivalentes.
Soit $\varepsilon > 0$ et N tq $2^{-N} < \varepsilon/3$. On considère $V = \{x \in E | \forall n < N,\ \|x\|_n < \frac{\varepsilon}{3N}\}$. Alors $\forall x \in V,\ d(x,0) < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{3N} + \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon/3 + 2^{-N} * 2 \leq \varepsilon$.
Réciproquement : $V = \{x \in E | \forall n \in I_0,\ \|x\|_n < \eta\}$. Alors $V \subset B(0,\varepsilon)$ où $\varepsilon = \min(2^{-N-1}, \eta)$ et finalement $\forall x \in B(x,0),\ \forall n \leq N,\ \|x\|_n < \varepsilon \leq \eta$. □

La topologie est engendrée par la base d'ouverts : $\{y \in E | \forall i \in I_0,\ |x-y|_i < \varepsilon\}$ où $x \in E, I_0 \subset I$ est fini et $\varepsilon > 0$. Si on fixe x, on obtient une base de voisinage de x.

Lemme 1. Un evtlc $(E, \|.\|_i)$ est séparé ssi $\forall x \in E,\ (\forall i \in I,\ |x|_i = 0) \Rightarrow x = 0$,
ssi $\forall x \in E \backslash \{0\},\ \exists i \in I,\ |x|_i > 0$.

Preuve.
— Si $\exists x \in E \backslash \{0\}, \forall i \in I,\ |x|_i = 0$ alors x appartient à une base de voisinage de 0. $\{y \in E | \forall i \in I_0,\ |y|_i < \varepsilon\}$ pour même conditions qu'avant donc l'espace n'est pas séparé.
— Si $\forall z \in E \backslash \{0\},\ |z|_i > 0$. Soit $x \neq y \in E$. Soit $i \in I$ tq $\underbrace{|x-y|_i}_{:=\varepsilon} > 0$.
Alors $\{z \in E \mid z - x|_i < \varepsilon/2\}$ et $\{z \in E \mid z - y|_i < \varepsilon/2\}$ sont des voisinages distincts de x et y donc l'espace est séparé.

On abrège evtlc séparé en evtlcs. □

Soit $(E, |.|_i))$ un evtlcs muni d'une famille dénombrable de semi normes.

— On dit qu'elle est étagée si $\forall x \in E,\ (|x|_i)$ est croissante. On peut supposer, quitte à considérer $(|.|'_i)$ où $|x|'_i := \max_{n \leq i} |x|_n$ qui définit la même topo.
— On a la base d'ouverts $B_N(x,\varepsilon) := \{y \in E | \forall n \leq N,\ |y-x|_n < \varepsilon\} = \{y \in E || y-x|'_N < \varepsilon\}$ où $x \in E, N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$.
— La topo est métrisable pour la distance $d(x,y) = \max_{n \in \mathbb{N}} \min(2^{-n}, |x-y|_n)$.

On note que $B_d(n,\eta) = \{y \in E | \forall n \in \mathbb{N}, \min(2^{-n}, |x-y|_n) < \eta\} = \{y \in E | \forall n \leq \lfloor \log_2 \eta |, \ |x-y|_n < \varepsilon\}$.
En effet $2^{-n} \geq \eta \Leftrightarrow -n \log_2 \geq \log_2 \eta$.

On note que $B_d(x, \min(2^{-N}, \varepsilon)) \subset B_N(x, \varepsilon)$.
$B_{\lfloor | \log_2 \eta | \rfloor}(x,\eta) \subset B_d(x,\eta)$

Exemple. Fonctions non bornées :Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et (Ω_i) une suite d'ouverts tq $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{\Omega_n} \underbrace{\subset_C}_{\text{partie compacte de}} \Omega$.

Remarque. On peut poser $\Omega_n := \{x \in B(0,n) | \forall y \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega, \ |x-y| > \frac{1}{n}\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d$ et $f : \Omega \to R$ assez régulière, on pose $|f|_{n,\alpha} := \sup\limits_{x \in \overline{\Omega_n}} |\partial_\alpha f(x)$ où $\partial_{\alpha_1, \cdots, \alpha_d} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{\alpha_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_d}^{\alpha_d}}$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, (C^k(\Omega), (|.|_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}^{|\alpha|\leq k}$.
Est séparé et métrisable car $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ est dénombrable.

Exemple. Classe $D(\Omega)$ des fonctions test : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $D(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) | \sup f \subset_C \Omega\}$

Pour tout $w\, eta \in C^0(\Omega, \mathbb{R}_+)$ on pose sur $f \in D(\Omega)$. $|f|_{w,\eta} := \sup\limits_{x\in\Omega, \alpha \leq \eta(x)} |w(x)||\partial^\alpha f(x)|$.

Alors $D(\Omega)$ est un ouvert et evtlc :) .

L'espace $D^*(\Omega)$ des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ est appelé espace des distributions.
$\forall \varphi \in D^*(\Omega), \exists w, \eta \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+), \forall f \in D(\Omega), |\underbrace{\varphi(f)}_{\text{parfois noté} <\varphi, f>_{D^* \times D}}| \leq \underbrace{|f|_{w,\eta}}_{\text{En principe, } C \max_{1\leq i \leq I} |f|_{w_i,\eta_i} \text{ mais on peut se ramener à une seule}}$

Une distribution φ est d'ordre fini $k \in \mathbb{N}$ si $\exists w \in C^0(\Omega, \mathbb{R}_+)$, $\forall f \in D(\Omega)$, $|\varphi(f)| \leq |f|_{w,k}$.

Exemple. Distribution d'ordre fini :

— Masse de Dirac $\varphi(f) = f(0)$ est d'ordre 0

— Si $g \in L_{loc}(\Omega)$, alors $\varphi(f) := \int_\Omega fg$ est une distribution.
Si $d = 1$, φ est d'ordre 1. En effet soit G une primitive de g s'annulant en 0 (si 0$\in$ Ω).
Alors $\int_{t_0}^{t_1} f(t)g(t)dt = [fG]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} f'(t)G(t)dt$. On choisit t_0, t_1 tq $supp(f) \subset [t_0, t_1]$.
Alors $|\varphi(f)| = \int_{t_0}^{t_1} |f'(t)||G(t)|dt$ On pose $\eta = 1$, $w(t) = z(t) \sup |G(s)|$ (à vérifier)

— $\varphi(f) = f'(0)$ distrib d'ordre 1

— $\varphi(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f^{(n)}(n)$ d'ordre ∞ avec $\eta = Id, w = Id$.

— Classe de Schwartz (compatible avec la transformée de Fourier et métrisable) : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d, f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $|f|_{n,\alpha} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{\frac{n}{2}} |\partial_\alpha f(x)|$. Toutes les dérivées décroissent plus vite que n'importe quelle paissance négative. evtlc métrisable séparable. . .

— Topo faible est * faible : soit E un evtlc * la topo faible sur E est définie par les semi normes $x \in E \mapsto |l(x)|$ où $l \in E^*$. C'est la topo la plus faible qui rend les formes linéaire continue. La séparation nécessite de construire des formes linéaires et découle du théorème de Hahn-Banach. Pas métrisable (exo) sauf en dim finie.

— topo * faible sur E^* est def par la famille de semi normes $l \in E^* \mapsto |l(x)|$ est séparé (en effet pour $l \in E^*$ sur lequel toutes ces semi normes s'annulent alors l est la fonction nulle ie $l = 0$.) et pas métrisable sauf si dim finie.

Proposition 5. Métrisabilité de la boule unité pour la topo * faible :
Soit E un evn séparable, soit(x_n) une suite dense dans $B'_E(0,1)$ et soit $B := B'_{E^*}(0,1)$. Alors la topologie * faible sur B est métrisable poir la distance $d(u,v) := \max_n \min(2^{-n}, |u(x_n - v(x_n)|)$

Remarque. On pourrait remplacer B par n'importe quelle partie bornée de E^*.

Preuve. Soit $u \in B$ et un voisinage de u pour la distance $d_{|B\times B}$ de la forme $B_d(u,\eta) = \{v \in B | \forall n \leq |\log_2 \eta|,\ |u(x_n) - v(x_n)| < \varepsilon\}$.
Réciproquement : soit $u \in B$ et soit un voisinage de u pour * faible de la forme $\{v \in B | \forall 0 \leq k \leq K,\ |u(y_k) - v(y_k| < \varepsilon\}$. OPS $\|y_k\| \leq 1$ quitte à cibsidérer y_k/α et $\varepsilon\alpha$. Soit $n_0, \cdots, n_K$ tels que $\|x_{n_k} - y_k\| \leq \varepsilon/2$ avec $\alpha = \max(1, \max_{0\leq k\leq K} \|y_k\|)$. Soit $N := \max(n_0, \cdots, n_K$ et $\eta = \min(2^{-N}, \varepsilon/2)$. Alors $B_d(u,\eta) \cap B \subset \{v \in B | \forall n \leq N,\ |v(x_n) - u(x_n)| < \varepsilon/3\} = V$. Soit $v \in V$ et $k \leq K$ alors $|v(y_k) - u(y_k)| \leq |v(y_k) - v(x_{n_k})| + |v(x_{n_k}) - u(x_{n_k})| + |u(x_{n_k}) - u(x_k)| \leq \|v\|_{E^*}\|y_k - x_{n_k}\| + |v(x_{n_k}) - u(x_{n_k})| + \|u\|_{E^*}\|y_k - x_{n_k}\| \leq 1 * \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + 1 * \varepsilon/3 < \varepsilon$ donc $V \subset V_0$ on a bien une base de voisinage fournie par la métrique. □

2 Complétude

2.1 Critère de Cauchy

Une suite (x_n) dans un espace métrique (X,d) est de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq N,\ d(x_p,x_q) \leq \varepsilon$. De manière équivalente : $d(x_p,x_q) \leq \varepsilon_{\min p,q}$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Une suite de Cauchy :

— est toujours bornée : $d(x_0, x_n) \leq \varepsilon_0$
— admet au plus une valeur d'adhérence
— si elle a une valet d'adhérence alors elle converge vers celle ci

Toutes suites convergente est de Cauchy.

Définition 19. (X, d) est complet ssi toutes suites de Cauchy converge

Lemme 2. Soit (X, d) complet, ACX alors $(A, d_{|A\times A}$ est complet ssi A est borné

Remarque. — un evn complet est appelé un Banach.
— un evtlc complet pour la distance associée est appelé un Frichet.

Lemme 3. (Série dans un Banach) : Soit E evn, sont équivalents :
— E est complet
— toutes série (y_n) absolument convergente (ie $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$) est convergente.

Preuve. Supp E complet, soit (y_n) le terme général d'une série absolument convergente. $x_N := \sum_{n\leq N} y_n$, $\varepsilon_n := \sum_{n>N} \|y_n\|$. Alors $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ comme reste d'une série sommable, et $\forall p \leq q$, $\|x_p - x_q\| = \|\sum_{r=p+1}^{q} y_r\| \leq \sum_{r=p+1}^{q} \|y_r\| \leq \varepsilon_p$ donc les sommes partielles satisfont le critère de Cauchy donc convergent. **Réciproquement :** si (x_n) de Cauchy, $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon_{\min p,q}$ où $\varepsilon_N \to 0$. Soit (N_k) strict croissante tq $\varepsilon_{N_k} \leq 2^{-k}$. Posons $y_k := x_{N_{k+1}} - x_{N_k}$. La série des y_k est sommable donc converge par hypothèse donc $\sum_{k<K} y_k = x_{N_k} - x_{N_0}$ converge. Donc x_n est une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence donc converge. □

2.2 Exemple d'espaces fonctionnels complets

Exemple. (Fonctions bornées) : soit (X, d) espace métrique E de Banach. Alors $C_b^0(X, E)$ est complet pour norme ∞.

Preuve. Soit (f_n) de Cauchy. $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon_{\min p,q}$. Donc $(f_n(x))$ de Cauchy et admet une limite $f_\infty(x)$. De plus $\|f_p - f_\infty\| \leq \varepsilon_p$. Enfin f_∞est continue (resp bornée) comme limite d'une suite de fonction continues. □

Exemple. (Espaces L^p) : soit $\in [1,\infty]$, (X,d) espace mesuré, alors L^p est complet.

Preuve. $\exists$ classes d'équivalences modulo égalité pp. Soit (f_n) une série sommable. Posons $S_N(x) := \sum_{n\leq N} |f_n(x)|$ et S_∞ la limite (possiblement ∞). Alors $\left(\int_X S_N(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|S_N\|_p \leq \sum_{nn\leq N} \|f_n\|_p \leq C < \infty$. D'où $\int_X S_\infty(x)^p d\mu(x) = \lim \int_X S_N(x)^p d\mu(x) \leq C^p < \infty$. Par le th de convergence monotone (Boffo Levi) car $S_N(x) \searrow S_o o(x)$. Donc $S_\infty < \infty$ pour $\mu pp\ x$. On pose alors $g_\infty(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ qui est convergente $\mu pp\ x$. On pose aussi $g_N(x)$ la somme partielle. Alors $|g_\infty(x) - g_N(x)| \leq \sum_{n>N} |f_n(x)|$ donc $\|g_\infty - g_N\|_p \to 0$. $\square$

Exemple. (Fonctions bornées) : soit $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, alors $C_b^k(\Omega)$ est un Banach pour la norme $\|f\| := \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_\alpha f\|_\infty$.

Preuve. Soit (f_n) de Cauchy et $(f_n^\alpha) = \partial_\alpha f_n$. Alors c'est aussi de Cauchy dans $C_b^0(X)$ donc cv vers f^α. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| < k\ x \in \Omega,\ 1 \leq i \leq d$. Justifions que $\partial/\partial_{x_i} f^\alpha(x) = f^{\alpha+e_i}(x)$ avec e_i la base canonique. Soit $p > 0$ tq $[x, x+pe_i] \subset \Omega$, alors $f_n^\alpha(x+pe_i) - f_n^\alpha(x) = \int_0^p f_n^{\alpha+e_i}(x+te_i)dt$ car $\frac{\partial}{\partial_{x_i}} f_n^\alpha = f_n^{\alpha+e_i}$.

Par cv uniforme, on a pareil mais sans $f^\alpha(x+pe_i) - f^\alpha(x) = \int_0^p f^\alpha(x+te_i)dt$ continument dérivable / p.

Finalement $\|f_n - f^0\| = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial_\alpha f_n - \partial_\alpha f^0\| = \sum \|f_n^\alpha - f^\alpha\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\partial_\alpha f^0 = f^\alpha$. $\square$

Exemple. Soit Ω ouvert et $(\Omega_n \neq \emptyset)$ tq $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ et $\overline{\Omega} \subset_C \Omega_{n+1}$. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors $\left(C^k(\Omega), (|.|_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}^{|\alpha|\leq k}\right)$ est un Fréchet.

Preuve. (cas $k = \infty$). Soit (f_n) de Cauchy. Soit $k' \in \mathbb{N}$ arbitraire (on prendrait $k' \leq k$ dans le cas $k < \infty$). Alors $(f_{n|\Omega_n}$ est une suite de Cauchy de C_b. Or elle admet une limite $g_n'^k$sur Ω_n. $\square$

Exemple. $C_b^\infty(\Omega)$ muni de $(\|.\|_n)_n$ où $\|f\|_n := \max\limits_{|\alpha|\leq n} \|\partial_\alpha f\|_\infty$ est Fruchet.

Proposition 6. $\mathcal{D}_k(\Omega)$ où $k \subset_C \Omega$, compact et Ω ouvert. $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in \mathcal{D}(\Omega) | supp(f) \subset K\}$ est un espace fermé de l'ensemble initial. De plus la topologie induite sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$ par $(\mathcal{D}(\Omega), (|.|_{w,\eta})$ et $(C_b^\infty(\Omega), \cdots)$ est la même.

Preuve. Fermeture : Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ avec $f_n \in \mathcal{D}_\alpha(\Omega)$ pour la topo C_c^∞ alors en particulier $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ uniformément donc $supp(f) \subset K$.
Posons $supp(f) := \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}$.
Mêmes topologies suivantes : $\|f\|_n \leq |f_{w,\eta}|$ en prenant $w = 1, \eta = n$. $|f|_{w,\eta}| \leq C\|f\|_n, \forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, en prenant $C = \max\limits_{x\in K} w(x)$, on peut borner les semi normes d'une famille par une cte x un max d'un nombre fini de semi normes de l'autre donc les mêmes topos. $\square$

Proposition 7. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Sont équivalent :

- φ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ie $\exists w, \eta \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$, $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $|\varphi(f)| \leq |f|_{w,\eta}$
- φ est continue sur $D_K(\Omega)$ ie $\forall K \subset_C \Omega$, $\exists w_k, \eta_K \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$, $\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\varphi(f)| \leq w_K \|f\|_{\eta_K}$

De plus, φ est d'ordre fini $k \in \mathbb{N}$ ssi on peut choisir $\eta = k$, de manière équivalente, $\eta_K = k, \forall K \subset_C \Omega$.

Remarque. On dit que $\mathcal{D}(\Omega)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_K(\omega)$

Lemme 4. (Quelques fonctions C^∞)

1. La fonction $\psi_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x < 0, e^{-\frac{1}{x}} \text{ sinon} \end{array}$
2. La fonction $\psi_1 x \mapsto \displaystyle\int_0^x \psi_0(t)\psi_0(1-t)dt$ est C^∞, vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ vaut une constante sur $[1, \infty[$. $H := \dfrac{\psi_1}{\psi_1(1)}$ est une application de la fonction de Heaviside
3. La fonction $\psi_2 : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \psi_0(1 - \|x\|^2)$ est C^∞ positive, radiale, à support égal à $B'_{\mathbb{R}^d}(0, 1)$. Souvent utilisée comme noyau de convolution pour régulariser les filtres.
4. Soit $K \subset_C U$, K compact, $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Alors $\exists \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,, $\psi = 1$ sur Ket $supp(f) \subset U$

Preuve.
1. Classique
2. facile

3. facile
4. $\forall x \in K$, soit $r_x > 0$ tq $B(x, r_x) \subset U$. On extrait un sous recouvrement fini de $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{r_x}{3})$, noté $K \subset \bigcup_{1 \le i \le I} B(x_i, \frac{r_i}{3})$. Posons $\varphi(x) := \sum_{1 \le i \le I} \psi_2(\frac{x - x_i}{r_i/2})$. Alors $\psi_2(\frac{x - x_i}{r_i/2}) > 0$ sur $B(x_i, \frac{r_i}{3})$ et son support (supp) sur $B'(\cdots)$. Donc $\varphi > 0$ sur $\bigcup_{1 \le i \le I} B(x_i, \frac{r_i}{3}) \supset K$. $supp(\varphi) = \bigcup_{1 \le i \le I} B'(x_i, \frac{r_i}{3}) \subset_C U$.
   Par compacité, $\varepsilon := \min_{x \in K} \varphi(x)$ est strictement positif. On considère finalement $\psi := H \circ \varphi$. Où $H \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), H = 0$ sur $]-\infty, 0]$, $H = 1$ sur $[\varepsilon, \infty[$ satisfait $supp(\psi) \subset supp(\varphi) \subset_C U$ et $\psi^{-1}([\varepsilon, \infty[) \supset \varphi^{-1}([\varepsilon, \infty[$.

□

Lemme 5. Soit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \alpha \in \mathbb{N}^d$ alors $\partial_\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_\beta f \partial_{\alpha - \beta} g$ où $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{1 \le i \le d} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$

Preuve. Cas où $\alpha = (n, 0, \cdots, 0)$ alors $\frac{\partial^n}{\partial x_1.}(fg) = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f \frac{\partial^{n-k}}{\partial x_i^{n-k}} g$ par récurrence immédiate.
Passage de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, 0 \cdots, 0) = \alpha_*$ à $(\alpha_1, \cdots a_k, 0 \cdots, 0)$. Récurrence sur k.
$\partial_\alpha(fg) = \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}} = \sum_{\beta_* \le \alpha_*} \binom{\alpha_*}{\beta_*} \cdots$ Par HR et linéarité de la dérivation.
Puis on utilise $\binom{\alpha_0}{\beta_0}\binom{\alpha_k}{\beta_k} = \binom{\alpha}{\beta}$ et le résultat tombe. □

Preuve. (Critère de continuité des distributions) : Soit (Ω_n) tq $\overline{\Omega_n} \subset_C \Omega_{n+1}$, tous ouvert et formant une partition de Ω. Soit (γ_n) tq $\gamma_n \in C^\infty, \gamma_n = 1$ sur $[?, ?]$ et $supp(\gamma_n) \subset \Omega_n$. Supp (ii : $\mathcal{D}_K(\Omega) \cdots$). Soit w_n, η_n tq $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega),\ supp(f) \subset \overline{\Omega} \Rightarrow |\varphi(f)| \le w_n \|f\|_{\eta_n}$. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $f \overset{=}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\gamma_n - \gamma_{n+1} := \beta_n)$ avec $\gamma_{-1} = 0$. De plus cette somme a un nombre fini de termes non nuls. En effet, $\exists N,\ \forall n \ge N,\ supp(f) \subset \Omega_n$, par compacité de supp(f). Donc $\forall n \ge N + 1, f(\underbrace{\gamma_n - \gamma_{n-1}}_{\text{nul sur } \overline{\Omega_{n-1}}}) = 0$ Par linéarité, $|\varphi(f)| \le \sum_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(f_{\beta_n})| \le \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n \|f \beta_n\|_{\eta_n}$ (car $supp(\beta_n) \subset \Omega_{n+1} \backslash \Omega_{n-1}$) $\le \sum_{n \in \mathbb{N}} w_{n+1}$

$$\sup_{\alpha\leq\eta_{n+1},x\in\Omega_{n+1}\setminus\Omega_{n-1}} |\partial_\alpha(f\beta_n)(x)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\tilde{w_{n+1}}}_{\text{dépend des } \|\partial_{\alpha,\beta_n}\|} \sup\cdots(pas eule temps d'ecrire) \leq$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\alpha\leq\eta_{n+1},x\in\Omega_{+1}\setminus\Omega_{n-1}} \hat{w_{n+1}}|\partial_\alpha f(x)| \text{ avec } \hat{w_{+1}} := C_\alpha(1+n)^\alpha \tilde{w_{n+1}}$$

$\leq |f|_{w,\eta}$ où w,η vérifient $w(x)\geq w_n$ si $x\notin\Omega_{n-2},\eta(x)\geq\eta_n$ si de même.

Par ex $w(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} w_n(\underbrace{1-\gamma_{n-3}}_{\text{vaut 1 hors de } \Omega_{n-2}})$ □

Exemple. Soit (X,d) un espace métrique, w un module de continuité strictement positif hors de 0. Posons $\forall f\in C_b^\infty(X)$,
$|f|_w = \sup_{x,y\in X}\frac{|f(x)-f(y)|}{w(d(x,y))}, \|f\|_w := |f|_w + \|f\|_\infty$.
Alors $\{f\in C_b^0(X) | \|f\|_w<\infty\}$ est un Banach.
Cas particulier : fct Lipschitziennes bornées / Hölderienne bornées.

2.3 Prolongements :

Propriété 3. (Prolongement des fcts uniformément continues) : Soit X,Y des espaces métriques complets, $A\subset X$ une partie dense, $f:A\to Y$ uniformément continue. Alors f admet une unique extension continue $F: X\to Y$ (qui se trouve être uniformément continue).

Preuve. **Construction** : on def $f(x) := \lim f(x_n)$ où $x_n\in A$ et $x_n\to x$.
$(x_n)cv \Rightarrow (x_n)$ est de Cauchy $\Rightarrow f(xn)$ est de Cauchy $\Rightarrow f(x_n)cv$
Bonne définition : Si $x_n,y_n\to x,x$ alors $d(x_n,y_n)\to 0$ donc $d(f(x_n),f(y_n))\to 0$ par uniforme continuité de f. Finalement $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.
Continuité uniforme : supposons $x_n\to x, y_n\to y$ alors $d(\lim f(x_n),\lim f(y_n)) = \lim d(f(x_n),f(y_n)) \leq \lim w(d(x_n,y_n)) = w(d(x,y))$. On peut supposer w continue donc le résultat tombe.
Unicité : parmi les fct continues, découle de la construction. □

Remarque. (Extension de Tietze) : Si f uniformément continue sur $A\subset X$ qcq, on a toujours une extension à priori pas unique. OPS(on peut supposer) w croissant et sous additif. $F(x) := \inf_{y\in A} f(y)w(d(x,y))$

Remarque. En pratique X et Y sont souvent des Banach, f est une application linéaire continue de $A\subset X$ dense dans Y.

Propriété 4. (Complété d'un espace) : Soit (A,d) un espace métrique. Alors il existe (X,d) métrique, complet et une injection isométrique $i_A : A\to X$ tq $Im(i_A)$ est dense dans X. De plus X est unique à isométrie près.

Preuve. Existence : $X = \{\text{suites de Cauchy de } A\}/\sim$ où $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \to 0$.

Unicité : découle du résultat d'extension précédent :
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\tilde{i_A}"'] & X \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

Alors $\varphi : \begin{array}{l} Im(i_A) \longrightarrow Im(\tilde{i_A}) \\ x \longmapsto \tilde{i_A}(i_A^{-1}(x)) \end{array}$ est une isométrie sur une partie dense de X donc s'étend uniquement en une isométrie de $X \to \tilde{X}$ $\square$

2.4 Point fixes de Picard

Propriété 5. Soit (X, d) métrique complet, $f : X \to X$, K-lipschitzienne avec $K < 1$ (ie contractante). Alors f a un unique point fixe x_*. De plus $\forall x_0 \in X,\ d(x_0, x_*) \leq \dfrac{d(x_0, f(x_0))}{1-K}$.

Preuve. Unicité : Si x_* et $\tilde{x_*}$ sont des points fixes, $d(x_*, \tilde{x_*}) = d(f(x_*), f(\tilde{x_*})) \leq K \cdots < d(x_*, \tilde{x_*})$ donc $d(x_*, \tilde{x_*}) = 0$.
Extension et estimation : soit $x_0 \in K$ puis $x_{n+1} = f(x_n)$ alors $d(x_n, x_{n+1}) \leq Kd(x_{n-1}, x_n) \leq K^n d(x_0, x_1)$. Ainsi pour $p \leq q \cdots$ Donc (x_n) satisfait le critère de Cauchy donc cv vers une limite x_*. $d(x_N, x_*) \leq K^N \dfrac{d(x_0, x_1)}{1-K}$.
Ainsi $d(x_*, f(x_*)) = \lim d(x_n, x_{n+1})) = 0$. $\square$

Remarque. (Stabilité) : Si f est $K-$lipschitzienne avec $K < 1$, si $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ et si x_ε est un point fixe de g, alors $d(\underbrace{x_\varepsilon}_{\text{pt fixe de } g}, \underbrace{x_*}_{\text{pt fixe de } f}) \leq \dfrac{d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon))}{1-K} \leq \dfrac{\varepsilon}{1-K}$

Théorème 1. (Cauchy Lipschitz) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable ie $\forall T \geq 0$, $\forall K \subset_C \Omega$, $\exists C = C(T, K)$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall x, y \in K$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C\|x - y\|$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe $t_* > 0$ et $u : [0, t_*] \to \Omega$ tq $u(0) = x_0$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Remarque. Une propriété $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \{\text{Vrai, Faux}\}$ est satisfaite localement ssi tout point $x \in \Omega$ admet un voisinage $V \in \mathcal{V}_x$ tq $P(V)$ est vrai.
Si Ω est localement compact (vrai si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$), (tt pt admet une base de voisinage compact) et $(P(A) \wedge P(B)) \Rightarrow P(A \cup B)$, $(P(A) \wedge B \subset A)) \Rightarrow P(B)$ alors P est satisfaite localement ssi elle est satisfaite sur tout compact.

Preuve. Preuve de l'existence dans CL : Soit $r_0 > 0$ tq $B'(x_0, r_0) \subset \Omega$. Soit $t0 > 0$ alors f est bornée par C^∞ sur $[0, t_*] \times B'(x_0, r_0)$ et f est C_{lip} lipschitzienne sur le même intervalle.
Définissions $t_1 > 0$ tq $C_\infty t_1 < r_0$ et $C_{lip} t_1 < 1$. Posons $X = C^0([0, t_1], B'(x_0, r_0))$ complet. $F : X \to X$ tq $F(u) = F_u : [0, t_1] \to B'(x_0, r_0)$ avec $F_u(t) = x_0 + \int_0^{t_1} C_\infty ds \leq t_1 C_\infty \leq r_0$.
Caractère contractant : $\forall u, v \in X,\ \|F_u(t) - F_v(t)\| \leq \int_0^{t_1} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \int_0^{t_1} C_{lip} \|u(s) - v(s)\| ds \leq C_{lip} t_1 \|u - v\|_\infty$. Donc les conditions du point fixe de Picard sont réunies. F admet un point fixe qui est par contraction C^1 et par dérivation est solution du pb de Cauchy :) □

Remarque. Le pt fixe de Picard implique aussi la stabilité par rapport aux conditions initiales. Cependant on le montre en général en utilisant le lemme de Gronwall, un peu plus précis

Lemme 6. Gronwall : Soit $f \in C^0([0, T], \mathbb{R}^+)$ et $A, B \geq 0$ tq $\forall t \in [0, T],\ f(t) \leq A \underbrace{\int_0^t f(s) ds}_{=:F(t)} + B$. Alors $f(t) \leq B e^{-At}$.

Preuve. On a $F'(t) = A f(t) \leq A F(t)$ donc $\left(F(t) e^{-At}\right)' = (F' - AF) e^{-At} \leq 0$. Donc $F(t) e^{-At}$ est décroissante en t. Donc $F(t) e^{-At} \leq F(0) = B$. Donc $f(t) \leq F(t) \leq B e^{-At}$ □

Propriété 6. (Stabilité dans CL) : Sous les hypothèses $f : R \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue, localement lipschitzienne selon la seconde variable. Soit $u, v \in C^1([0, T], K)$ solution de $u'(t) = f(t, u(t))$ où $K \subset_C \Omega$. Alors $\|u(t) - v(t)\| \leq e^{Ct} \|u(0) - v(0)\|$ avec $C = C(T, K)$ constante de Lipschitz.

Preuve. $\|u(t) - v(t)\| = \| \int_0^t (u'(s) - v'(s)) ds + (u(0) - v(0)\|$ car $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$. Donc $\leq \| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds\| + \underbrace{\|u(0) - v(0)\|}_{=:B}$ $\leq \overbrace{C}^{A} \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds + B$ le résultat s'obtient par Gronwall appliqué à $u - v$. □

Exemple. (EDO avec retard) : Il existe une unique solution $\nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$

de $\begin{cases} \nu(0) = 1 \\ \nu'(t) = \nu(t - t^2) \end{cases}$

Preuve. On cherche un point fixe de $F : X \to X$ définit comme avant. $|F_u(t)| \leq 1 + \int_0^{\frac{1}{2}} 4 = 3$ donc F bien def et F_u positive.
$|F_u(t) - F_v(t)| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |u(t-t^2) - v(t-t^2)|dt \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_\infty$ □

Exemple. Soit $k \in C^0([0,1]^2,]-1,1[)$ et $\varphi \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ alors il existe une unique sol de $u(t) = \underbrace{\int_0^1 \underbrace{k(s,t)}_{\leq K<1} \underbrace{\frac{u(s)}{1+u^2(s)}}_{r\mapsto\frac{r}{1+r^2} \text{ est lipschitzienne}} ds}_{F_u(t)}$. D'où $|F_u(t) - F_v(t)| \leq K\|u - v\|_\infty$ et F est contractante sur cette topologique.

2.5 Théorème de Baire

Lemme 7. (fermés emboités) : Soit (X, d) un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés de X tq $F_{n+1} \subset F_n$ et $diam(F_n) \to 0$. $diam(F_n) := \sup_{x,y\in F_n} d(x,y)$. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_*\}$ pour un certain $x_* \in X$.

Preuve. Soit $x_n \in F_n$ arbitraire. Alors $\forall N$, $\forall p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq diam(F_N)$. donc (x_n) est de Cauchy. Sa limite x_* appartient à chaque disque F_n par fermeture donc $x_* \in \cap F_n$. De plus si $y_* \in \cap F_n$ alors $\forall n$, $d(x_n, y_*) \leq diam(F_n) \to 0$ donc $x_* = y_*$. □

Théorème 2. Baire : Soit (X, d) mesuré et (U_n) une suite d'ouverts denses. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense.

Preuve. Soit $x_0 \in X, \varepsilon_0 > 0$ arbitraire. $B(x_0, \varepsilon_0)$, rencontre U_0 par densité en un point x_1. Soit ε_1 tq $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0/2$ et $B'(x_1, \varepsilon_1) \subset U_0 \cap B(x_0, \varepsilon_0)$ qui est ouvert.
On construit alors par récurrence $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n) \cap U_n$ vérifiant $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n/2$ et $B'(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset U_n \cap B(x_n, \varepsilon_n)$. Or $B'(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$ suite de fermés emboités de diamètre $\leq 2\varepsilon_n \to 0$.
Soit $x_* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B'(x_n, \varepsilon_n)$ par th des fermés emboités, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_* \in B'(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset U_n$. Donc on a bien la densité de $\cap U_n$. □

Exemple. Soit (q_k) une énumération de $\mathcal{O}$ posons $U_x := \cup]q_k - \frac{1}{nk^2}, q_k +$

$\frac{1}{nk^2}[$ Alors $Leb(U_n) \leq \sum_{k\geq 1} \frac{2}{nk^2} = \frac{\pi^2}{3n}$. Ainsi $\cap U_n$ est une intersection d'ouverts denses mais de mesure nulle.

Corollaire. Soit (γ, d) un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermé d'intérieur vide. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Terminologie de Baire

- Une intersection dénombrable d'ouverts est un G_δ
- Une union dénombrable de germés est un F_σ
- Un ensemble qui contient un G_δ dense est dit gras
- Un ensemble contenu dans un F_σ d'intérieur vide est dit maigre

Remarque. Soit (X, d) un espace métrique complet et sans points isolés. Alors tout ensemble A gras est indénombrable.

Preuve. Soit $x \in X$. Alors $\{x\}$ est fermé et d'intérieur vide. Donc $X\backslash\{x\}$ est un ouvert dense. Si par l'absurde A est dénombrable, alors $A \cap \left(\bigcap_{x\in A} X\backslash\{x\}\right)$ contient une intersection dénombrable d'ouvert denses donc est dense par Baire. Contradiction ! □

2.6 Applications de Baire aux opérateurs linéaires continus.

Théorème 3 (Banach-Starhauss). Soit E un Banach, F un evn et $A \subset L(E, F)$ un ensemble d'applications linaires continues. Si A est simplement borné (ie $\forall x \in E, \sup_{u\in A} \|u(x)\|_F < \infty$) alors A est uniformément borné (ie $\sup_{u\in A} |||u||| < \infty$, ie on peut choisir $C(x) := \sup_{u\in A} |||u||| \|x\|_E)$.

Preuve. (via Baire) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $E_k := \{x \in E \mid \forall u \in A, \ \|u(x)\|_F \leq k\}$. C'est un fermé, comme intersection de fermés. Par hypothèse, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = \underbrace{E}_{\text{intérieur non vide}}$, car $x \in E_k$ dès que $k \geq C(x)$. Donc par Baire, l'un au moins des E_k est d'intérieur non vide. Disons $B(x, r) \subset E_k$, pour un certain $x \in E, k \in \mathbb{N}$. ar symétrie, $B(-x, r) \subset E_k$. Par continuité, $B(0, r) \subset E$ (car $\|u(k)\| \leq \frac{\|u(x+k)\| + \|u(-x+k)\|}{2}$).On en déduit $\forall y \in B(0, x), \forall u \in A, \|u(y)\| \leq k$. Donc $\forall u \in A, |||u||| \leq \frac{k}{r}$. Comme annoncé. □

Corollaire. Soit E, F des Banach et $u_n \in L(E, F)$. On suppose $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$ pour tout $x \in E$. Alors u est linéaire continue. (ie Une limite simple de fonctions linéaire continues est linéaire continue.)

Preuve. La linéarité de u découle de la limite simple : $u(\lambda x+y) = \lim u_n(\lambda x+y) = \lim \lambda u_n(x) + u_n(y) = \lambda u(x) + u(y)$.
La suite (u_n) est simplement bornée, en effet $\forall x \in E,\ (u_n(x))$ est convergente donc bornée. Par Banach-Steinhaus $\|u_n\| \le C_*\|x\|$. Donc $\|u(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\|u_n(x)\|}_{\le\|u_n\|\|x\|} \le C_*\|x\|$ donc u est continue. □

Corollaire. Soit E un Banach et $A \subset E^*$ simplement borné (ie $\forall x \in E,\ |l(x)|_{l\in A}$ est borné) "faiblement borné". Alors A est uniformément borné (ie $(\|l\|_{E^*})$ est borné)

Preuve. Prendre $F = \mathbb{K}$ le corps de base ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et appliquer Banach-Steinhaus □

Remarque. Il y a une version duale de ce résultat mais les preuves nécessitent le th de Halm-Banach (? ?)

Exemple. Il existe $f \in C^(\Pi, \mathbb{C})$ donc la série de Fourier diverge en 0. $\Pi := \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} = [0, 2\pi[$. On a $L_N(f) := \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{|n|\le N}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, alors $\exists f \in C^0$, $\exists\varphi$ exhaustive tq $|L_{\varphi(n)}(f)| \to \infty$.

Preuve. On a

$$L_N(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{\sum_{|n|\le N} e^{-int}}_{D_n(t)} dt$$

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e^{-iNt}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2N+1)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \end{aligned}$$

. On munit C^0 de $\|\|_\infty$ qui en fait un complet. Donc $\|D_n\| = \sup\limits_{\|f\|_\infty\le 1}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t)dt = \int_0^{2\pi} |D_n(t)|dt$ en appliquant le sugne de D_n.

$$\begin{aligned}
|||L_N||| &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{/|\sin\left(\frac{1}{2}(2N+1)t\right)}{|\sin\frac{t}{2}|}dt \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(2N+1)\frac{t}{2}|\frac{dt}{t} && \text{car } |\sin t| \leq |t| \\
&= 2\int_{0}^{2N+1)\frac{\pi}{2}} |\sin s|\frac{ds}{s} && \text{par symétrie}
\end{aligned}$$

. Diverge car $\int_0^\infty \frac{|\sin s|}{s}ds = \infty$. (découper l'intégrale selon $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[k\pi,(k+1)\pi[$.

Ainsi ($|||L_n|||$ est bien bornée. Donc par contraposée de Banach-Steinhaus $\exists f \in E = (C^0(\Pi,\mathbb{C}), \|.\|_\infty),\ \sup_{n\in\mathbb{N}}|L_n(f)| = \infty$. □

Théorème 4 (Banach-Seinhaus dans les Frochets)**.** Soit $(E,(|.|_n))$ et $(F,(|.|'_n))$ des Frochets et $A \subset L(E,F)$ une famille d'applications linéaires continues. Si A est simplement borné, ie $\forall x \in E,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \sup_{u\in A}|u(x)|_m < \infty$. Alors A est (un mot que je n'arrive pas à lire) ie $\exists w$, module de continuité $\forall x,y \in E,\ f_F(u(x),u(y)) \leq w(d_E(x,y))$.

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Posons $E_k := \{x \in E \mid \forall u \in A,\ |u(x)|'_m \leq k\}$. Alors E_k est fermé et comme avant on a l'union fait l'ensemble non vide. Par Baire il y a un E_k non d'intérieur vide. Par symétrie et continuité il continent un voisinage de 0. Donc $\exists N(m), r > 0,\ \{x \in E \mid \forall n \leq N(m),\ |x|_n < r\} \subset E_k$. On en déduit $|u(x)|'_m \leq \frac{k}{r}\max_{n\leq N(m)}|x|_m$. Noter que $\frac{k}{r}$ et $N(m)$ sont indépendant de $u \in A$. On en déduit l'équicontinuité (c'est peut être ça le mot que je n'arrivais pas à lire) en 0 puis en tout point par linéarité. Rappelons $d_F(x,y) = \max_{m\in\mathbb{N}}\min(2^{-m},|x-y|'_m)$ et $d_E(x,y) = \max_{m\in\mathbb{N}}\min(2^{-m},|x-y|_m)$. □

Théorème 5 (Application ouverte, Banach)**.** Soit E,F Banach et $u \in L(E,F)$ surjective. Alors u est ouverte, ie $\underbrace{u(O)\text{est un ouvert}}_{1}$ dans F pour tout ouvert O de E.

Ou, de manière équivalente :

2. $\exists C,\ \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = u(x)$ et $\|x\| \leq C\|y\|$
3. $\exists r > 0,\ B_F(0,r) \subset u(B_E(0,1))$.

Preuve1 $\Rightarrow$ 3 $u(B_E(0,1))$ est un ouvert car image d'un ouvert et continent 0 donc continent un voisinage de 0 dans F.

3 $\Rightarrow$ 1 Soit U ouvert de E et $x \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ tq $B_E(x,\varepsilon) \subset U$. Alors

$u(U) \supset u(B_E(x,\varepsilon)) = u(x) + \varepsilon u(B_E(0,1)) \supset u(x) + \varepsilon B_F(0,r) = B_F(u(x), \varepsilon r)$

$3 \Rightarrow 2$ Soit $y \in E\backslash\{0\}$, alors $\frac{y}{\|y\|}\frac{r}{2} \in B(0,r)$. Donc $\frac{y}{\|y\|}\frac{r}{2} = u(x_*)$ pour un $x_* \in B(0,1)$. Donc $y = u(\underbrace{\frac{2}{r}\|y\|x_*}_{x})$ et $\|x\| \leq \frac{2}{r}\|y\|$.

$2 \Rightarrow 3$ Soit $r = \frac{1}{C}$, si $y \in B(0,r)$, alors $\exists x \in B(0,1),\ y = u(x)$.

.

Preuve du point 2 à partir des hypothèses. Par surjectivité, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{u(B_E(0,n))} = F$. Par Baire, $\exists n,\ \overline{u(B_E(0,n))}$ est d'intérieur non vide. Par symétrie et continuité, $\exists r > 0,\ B_F(0,r) \subset \overline{u(B_E(0,n))}$. Donc $\forall y \in B_F(0,r),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in B_E(0,n),\ \|y - u(x)\| < \varepsilon$. Par homogénéité $\forall y \in F,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ \|y - u(x)\| < \varepsilon$ et $\|x\|_E \leq C\|y\|_F$ pour $C = \frac{2n}{r}$.

Soit $y_0 \in F\backslash\{0\}$ dont on veut construire un antécédent. On choisit $x_0 \in E$ tq $\|x_0\| \leq C\|y_0\|$ et $\|y_0 - u(x_0)\| \leq \frac{\|y_0\|}{2}$. On pose $y_1 = y_0 - u(x_0)$. OPS $y_1 \neq 0$ sinon on a bien un antécédent. Par récurrence on construit $(y_n), (x_n)$ tq $\|x_n\| \leq C\|y_n\|$ et $\|y_n - u(x_n)\| \leq \|y_n\|/2$. On a $y_{n+1} = y_n - u(x_n)$. Alors $\|y_n\| \leq 2^{-n}\|y_0\|$ par récurrence et $\|x_n\| \leq C_2^{-n}\|y_0\|$. Or $\sum_{n=0}^{N} x_n \to x_*$ par complétude de E. Par ailleur

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} - u(x_{n-1}) \\ &= y_{n-2} - u(x_{n-1} + x_{n-2}) \\ &\dots \\ &= y_0 - u(\sum_{k<n} x_k). \end{aligned}$$

Donc $\|y_0 - u(\sum_{k<n} x_k)\| = \|y_n\| \to 0$ et $\to \|y_0 - u(x_*)\|$. On en conclut $y_0 = u(x_*)$ et $x_* \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C_2^{-n}\|y_0\| \leq 2C\|y_0\|$. □

Corollaire (Isomorphisme de Banach)**.** Si E, F est de Banach et $u \in L(E,F)$ bijective, alors $u^{-1} \in L(F,E)$

Preuve. u^{-1} est linéaire comme inverse d'une application linéaire. Montrons qu'elle est continue. Si $U \subset E$ est ouvert alors $(u^{-1})^{-1}(U) = u(U)$ est ouvert par th de l'application ouverte, ce qui conclut (u est bijective donc surjective). □

Corollaire. Soit E un espace vectoriel muni de $\|.\|$ et $\|.\|'$ tq $(E, \|.\|)$ et

$(E, \|.\|')$ sont complets. Supposons $\exists C,\ \forall x \in E,\ \|x\|' \leq C\|x\|$. Alors $\exists c > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\|' \geq c\|x\|$ (équivalence des normes).

Preuve. L'application $Id : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|')$ est continue car $\|Id(x)\|' = \|x\|' \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$ et bijective. Par le corollaire isomorphisme de Banach, $Id^{-1} : (E, \|.\|') \to (E, \|.\|)$ est continue ie $\|Id^{-1}(x)\| = \|x\| \leq \tilde{C}\|x\|'$. On pose $c = \dfrac{1}{\tilde{C}}$. □

Théorème 6 (Graphe fermé). Soit E, F de Banach et $u : E \to F$ linéaire. Sont équivalent :

— u est continue

— $\mathcal{G}(u) := \{(x, u(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$ est fermé

Preuve. On rappel que $E\times F$ est un Banach pour la norme $\|(x, f)\|_{E\times F} := \|x\|_E + \|y\|_F$.

1 ⇒ 2 $\mathcal{G}(u) = \{(x, y) \in E \times F \mid y - u(x) = 0\}$. Or $\varphi : \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto y - u(x) \end{array}$ est continue donc $\mathcal{G}(u) = \varphi^{-1}(\{O_F\})$ est fermé.

2 ⇒ 1 $\mathcal{G}(u)$ est un sous espace vectoriel fermé de $E\times F$ donc c'est un Banach pour la norme $\|.\|_{E\times F}$. De plus l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{G}(u) \times F \longrightarrow E \\ (x, u(x)) \longmapsto x \end{array}$ est linéaire, continue et bijective. (on aurait aussi pu faire avec équivalence des normes) Par l'isomorphisme de Banach, φ^{-1} est continue. Donc $\|x\| + \|u(x)\| = \|\varphi^{-1}(x)\| \leq C\|x\|$. Finalement $\|u(x)\| \leq (C + 1)\|x\|$. □

3 Compacité

3.1 Caractérisation topologique

Définition 20 (Axiome de Borel-Lebesgue). Un espace topologique $(X, \mathbb{U})$ est dit compact si il est <u>séparé</u> et pour tout $\mathcal{U} \subset \mathbb{U}$ ensemble d'ouverts tel que $\bigcup \mathcal{U} = X$, il existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ fini tel que $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$. (De toute couverture de X par des ouverts, on peut extraire une sous couverture finie).

Remarque.

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{U} &= \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{U},\ x \in A\} \\ &= \bigcup_{A\in\mathcal{U}} A \end{aligned}$$

Remarque. On pouvait considérer les familles d'ouverts. Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouvert alors $\exists I_0 \subset I,\ I_0$ fini et tq $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$.

Remarque (Intersection de fermés). Soit $(X, \mathbb{U})$ compact. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de X tq $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors $\exists I_0 \subset I,\ I_0$ fini et $\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset$.
En particulier, si (F_n) est une suite de fermés emboités non vides alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Lemme 8. Soit $(X, \mathbb{U})$ espace topologique séparé et $F \subset X$ complet. Alors F est fermé.

Preuve. Par contraposée, on suppose F non fermé et on va montrer qu'il n'est pas compact.
Comme F non fermé, il existe $x \in \overline{F} \backslash F$. Soit $y \in F$, V_y et W_y des ouverts disjoints tq $x \in V_y$ et $y \in W_y$. On a $F = \bigcup_{y \in F} W_y$. Si par l'absurde il existe $F_0 \subset F$ fini tel que $F = \bigcup_{y \in F_0} W_y$, alors l'ensemble $V_* = \bigcap_{y \in F_0} V_y$ est un ouvert (comme intersection **finie** d'ouverts) qui continent x et n'intersecte aucun W_y pour $y \in F_0$.
On a donc trouvé V ouvert tq $x \in V$ et $V \cap F = \emptyset$. Cela contredit l'hypothèse que $x \in \overline{F} \backslash F$ (tout ouvert contenant x doit rencontrer F). $\square$

Corollaire. Soit $(X, \mathbb{U})$ compact et $F \subset X$. F fermé $\Leftrightarrow$ F compact.

Preuve. $\Leftarrow$ Voir la preuve précédente (note que compact $\Rightarrow$ séparé).

$\Rightarrow$ Soit $(U_i)_{i \in I}$ une couverture de F par des ouverts. Alors $X = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup \left(\underbrace{X \backslash F}_{\text{ouvert}}\right)$. Donc $\exists I_0 \subset I,\ I_0$ fini et $X = \left(\bigcup_{i \in I_0} U_i\right) \cup (X \backslash F)$. Donc $F \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$.

$\square$

Lemme 9. Soit $(X, \mathbb{U}), (Y \mathbb{V})$ des espaces topologiques séparés. Alors $\forall K \subset_C X,\ f(K)$ est un complet.

Preuve. Soit (U_i) tq $f(K) \subset U_{i \in I} U_i$. Alors $K \subset \bigcup_{i \in} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouvert car } f \text{ continue}}$. Donc $K \subset$

$\bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(U_i)$ avec I_0 fini. Donc $f(K) \subset \bigcup_{i\in I_0} f(U_i)$, donc K est compact (K est séparé car Y l'est). □

Corollaire. Soit $(X,\mathbb{U}), (Y\mathbb{V})$ des compacts et $f : X \to Y$ continue bijective. Alors f^{-1} est continue.

Preuve. Soit $F \subset X$ fermé. Alors F est compact, donc $f(F)$ et compact puis $f(F)$ est fermé. Ainsi $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ est fermé. Ainsi l'image réciproque d'un fermé par f^{-1} est un fermé donc f^{-1} est continue. □

Définition 21 (Espace localement compact)**.** $(X,\mathbb{U})$ un espace topologique séparé est dit localement compact ssi

1. tout point admet un voisinage compact
2. tout point admet une base de voisinages compact

(Ces conditions sont équivalentes)

Preuve. .

— $2 \Rightarrow 1$ est clair

— Supposons 1, soit $x \in X, K \subset X$ un voisinage compact de x et $V \subset X$ un voisinage ouvert de x.
Posons $\forall y \in K\backslash\{x\},\ V_y$ et W_y ouverts disjoint tq $x \in V_y$ et $y \in W_y$.
Alors $K \subset \left(\bigcup_{y\in K\backslash\{x\}} W_y\right) \cup V$. Par compacité $\exists K_0 \subset K\backslash\{x\},\ K \subset \left(\bigcup_{y\in K_0} W_y\right) \cup V$. Alors $K_* := K\backslash\left(\bigcup_{y\in K_0} W_y\right)$ est un fermé de K, donc un compact. De plus $K_* \subset V$ et $\underbrace{\bigcap_{y\in K_0} V_y}_{\text{ouvert contenant } x} \subset K_*$

□

Définition 22 (Compactifié d'Alexandroff)**.** Soit $(X,\mathbb{U})$ un espace localement compact séparé. On pose $\hat{X} := X \sqcup \{\infty\}$, où ∞ est un symbole supplémentaire arbitraire. $\hat{\mathbb{U}} := \mathbb{U} \cup \{\hat{X}\backslash K \mid K \subset_C X\}$. Alors $(\hat{X},\hat{\mathbb{U}})$ est un espace topologique compact qui induit la topologie sur $\mathbb{U}$. (Idée : X un segment ouvert qu'on relie sur lui même pour former un cercle).

3.2 Compacts métriques

Définition 23. (X,d) est précompact $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists X_0 \subset X$ fini, $X = \bigcup_{x\in X_0} B(x,\varepsilon)$.

Théorème 7. Soit (X, d) un espace métrique. Sont équivalent :

1. X est un compact (au sens de l'axiome de Borel-Lebesgue)
2. Toute suite à valeur dans X admet une sous suite convergente (Axiome de Bolzano-Weiestrass)
3. X est précompact et complet.

Preuve. On note que X est métrique donc séparé.

$1 \Rightarrow 2$ Soit (x_n) une suite à valeur dans X. On note $F_n := \overline{\{x_n \mid n \geq N\}}$. Alors $Adh((x_n)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est une intersection $\searrow$ de fermés non vides donc est non vide. Donc (x_n) edmet une valeur d'adhérence. Comme (X, d) est métrique, c'est la limite d'une suite extraite.

$2 \Rightarrow 3$ Preuve de la complétude. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous suite convergente. Comme elle est de Cauchy, elle converge.
Preuve de la précompacité. Soit $x_0 \in X$, on construit par récurrence tant que c'est possible, $x_n \in X \backslash \bigcup_{k<n} B(x_n, \varepsilon$. Si la construction s'arrête à l'indice N alors $X = \bigcup_{n<N} B(x_n, \varepsilon)$ comme souhaité. Sinon, on remarque que $\forall m < n$, $x_n \notin B(x_m, \varepsilon)$, donc $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Alors la suite (x_n) ne peut pas avoir de sous suite convergente (sinon $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \to 0$.) Contradiction avec la précompacité.

$3 \Rightarrow 1$ Soit (x_n) une suite de points de X et $A = \{x_n\}$. On construit pour $k \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{r\leq R(k)} B(y_r^k, 2^{-k}$ une couverture de X par $R(k)$ boules de diamètre 2^{-k} et $\sigma(k) \in [\![1, ; R(k)]\!]$ tq $A_k = A \cap B(y^0_{\sigma(0)}, 2^) \cap \cdots \cap B(y^k_{\sigma(k)}, 2^{-k})$ est infini. (Note : $\underbrace{A_{k+1}}_{\text{infini}} = A_{k-1} \cap \bigcup_{r\leq R(k)} B(y_r^k, 2^{-k} = \underbrace{\bigcup_{r\leq R(k)}}_{\text{réunion finie}} \underbrace{A_{k-1} \cap B(y_r^k, 2^{-k})}_{\substack{\text{l'un doit être infini} \\ \text{d'indice } r=\sigma(k)}}$.
Soit φ une extractrice tq $x_{\varphi(n)} \in A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall q \geq p \geq N$

$$\begin{aligned} d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) &\leq diam(A_N) \\ &\leq 2 \times 2^N. \end{aligned}$$

Donc $x_{\varphi(n)}$ converge par complétude.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ une couverture par des ouverts. On affirme qu'il existe $r > 0$ tq $\forall x \in X$, $\exists i \in I$, $B(x, r) \subset U_i$ (nombre de Lebesgue). Par l'absurde, soit (x_n) tq $B(x_n, 2^n) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. Par Bolzano-Weierstrass, $\exists \varphi + \nearrow$, $x_{\varphi(n)} \to x_* \in X$.
Soit $i \in I$ tq $x \in U_i$, et $r > 0$ tq $B(x, r) \subset U_i$. Alors en se rapprochant

assez de x avec φ on entre dans la boule et donc dans U_i absurde !
Soit (U_i) une couverture d'ouverts et $r > 0$ le nombre de Lebesgue associé. Soit $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, r)$ avec X_0 fini, par précompacité. Pour tout $x \in X_0$, soit $i(x) \in I$ tq $B(x, r) \subset U_{i(x)}$. Alors $X = \bigcup_{x \in X_0} B(x, r) \subset \bigcup_{x X_0} U_{i(x)}$ réunion finie comme annoncé !

$\square$