[1] 1

TD ana

Félix Yvonnet

14 septembre 2023

Table des matières

Ex1 : Espaces de Arens-Fort

1. Soit $\mathbb{U} \in AF$. On a :
   - $\emptyset, \mathbb{N}^2 \in AF$ trivialement.
   - $\forall u, v \in AF,\ u \cap v \in AF$ (car on a au plus l'union des éléments qui n'étaient pas dans chaque colonne et si contient pas 0 c'est bon).
   - Soit $u_i \in AF^I$. Si tous ont 0 ok. Si un n'a pas 0 il a un nombre fini de colonnes libres et le reste a un nombre fini de vide. Par l'union ce nombre de vide ne peut que réduire donc on aura la même chose au final et on sera toujours dans AF ie $\cup u_i \in AF$.

   Ainsi on a bien une topo
2. Soit $x_n \to x \in AF$. Si $x \neq 0$ alors on prend pour ouvert $\{x\}$. Sinon, si elle n'est pas stationnaire, on peut en extraire une sous suite où tous les éléments sont $\neq (0,0)$. Alors :
   - Soit $x_n \in$ nb fini de colonnes alors $AF \backslash \{x_n\}$ vérifie 2)
   - (x_n) a nb infini de colonnes. On peut choisir au plus un x_n par colonne alors $x_{\varphi(n)}$ vérifie 2).

   Dans ces deux cas on ne peut pas avoir $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ car les ouverts définis ont des x_n qui sortent de cet ouvert pour une infinité de n donc (x_n) est stationnaire.
3. (x_n) suite exhaustive, $AF \backslash \{(0,0)\}$ vérifie la caractérisation séquentielle des fermés mais n'est pas fermé…

Ex4 : Une métrique rendant $\mathbb{R}$ non complet

u_n suite de cauchy ie $\lim\limits_{p,q\to\infty} d(u_p - u_q) = 0 = \lim\limits_{p,q\to\infty} |Arctan(u_p) - Arctan(u_q)|$. Donc par exemple si on prend $x_n = n$ on a $Arctan(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc $x_n$de Cauchy pour d mais pas convergent donc $\mathbb{R}$ pas complet pour ça.

Ex5 : Fonction distance et séparation fermée

1. (a) Soit $x \in E$, on a $d(x,y) - d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y) - d(x,z) \leq 1 \cdot d(y,z)$. Par symétrie on en déduit $d(x,y) - d(x,z) \leq 1d(y,z)$

Ex8 : Prolongement et applications uniformément continues

1. Soit ψ_1 et ψ_2 deux prolongements continue de φ sur E. D dense donc $\exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}} \to x \in E,\ \psi_1(x_n) = \psi_2(x_n)$ donc par continuité $\psi_1 = \psi_2$.
2. (a) φ uniformément continue $\Rightarrow$ de Cauchy $\Rightarrow$(F complet) $\varphi(x_n)$ converge. De plus si $(x_n), (y_n)$ deux suites tendant vers x alors $\varphi(x_n)$ et $\varphi(y_n)$ convergent vers l et l'. z_n tq $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = y_n$ donne $\varphi(z_n)$ converge donc l=l'.
   (b) ψ prolonge bien φ car $\varphi(x_n = x \in D) = \varphi(x) = \psi(x)$. De plus, pour $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tq $\forall x, y \in D,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow$ ça marche tkt fréro…

Ex9 : Complété d'un espace métrique

1. On a $i_x(y) = d(x,y) - d(a,y) \leq d(a,y) + d(a,x) - d(a,y) = d(a,x)$ puis par symétrie $i_x \in \mathcal{C}_b$. Considérons $i : x \mapsto i_x$. C'est une isométrie car $\|i_x - i_y\| = \sup \|i_x(z) - i_y(z)\| = \sup |d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y)$.
   $\hat{E} = \overline{i(E)}$ convient cat $i(E)$ bien dense dedans et c'est complet car fermé dans un espace complet (appelé plongement de Kuratowski)
2. iso $\Rightarrow$ inj donc $j_2 \circ j_1^{-1}$ est une bijection. Prolongement uniformément continue isométrie bijective :)

Ex10 : Un exemple de topo non métrisable

1. Une base de décomposition est $E \times E \cdots B(0, \varepsilon) \times E \cdots$.
   $f_n \to f$ means $\forall x \in E,\ f(x) \to f(x)$.
2. Tout ouvert contient une fonction simple (regarder les indicatrices) et si $\overline{D}$ pas un ouvert (ie tout l'ensemble) alors $E \backslash \overline{D}$ contient une fonction simple absurde !
3. Les limites de fonctions simples f $fn \to f$ et $A = \{fn(x) \neq 0\}$ en dehors de A $fn = 0$ donc $f = 0$ et les A sont dénombrables. Les limites s'annulent sur un espace non dénombrable donc ∞ n'est pas limite de f simples continues.
4. E pas métrisable car dense mais 3)

Ex7 : espaces localement convexe

$\Rightarrow E$ encapsule la topo τ $p_\Omega(x) := \inf\{y | x \in y\Omega\}$ a valeur dans $[0, \infty]$ avec Ω convexe, contient 0, symétrique et absorbant sur E topo la plus grossière pour laquelle toutes les semi normes continues pour τsont continues.

$\Leftarrow$ base de voisinage est donnée par les intersections finies de "semi boules". On a semi norme convexe $\Rightarrow$ semi boules convexes.