随机过程
Stochastic Processes

讲义11：泊松过程-4

目录

（课本第5章部分4）

11.1非时齐泊松过程
（课本5.4.1）

11.1.1. 非时齐泊松过程定义

- **定义5.3**-非时齐泊松过程：计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为强度函数为$\lambda(t)(t \geq 0)$的非时齐泊松过程，若下列条件满足：

（1）$N(0) = 0$

（2）$\{N(t), t \geq 0\}$有独立增量

（3）$P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

（4）$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

- 非时齐性(非平稳性)：时间t的到达速率$\lambda(t)$是t的一个函数
  - 速率随时间t有变化

11. 1. 1. 非时齐泊松过程定义

- 由于下述定理**5.3**，非时齐泊松过程，均值函数$m(t)$定义为:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)dy$$

- $m(t)$确定泊松过程的区间内事件数泊松随机变量的均值
  - $\{N(t), t \geq 0\}$是均值为$m(t)$的泊松随机变量

- **定理5.3：** 若$\{N(t), t \geq 0\}$是强度函数为$\lambda(t)(t \geq 0)$的非时齐泊松过程，则$\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$是均值为$m(s+t) - m(s) = \int_s^{s+t} \lambda(y)dy$的泊松随机变量

11.1.1. 非时齐泊松过程定义

- **定理5.3**：$\{N(t+s)-N(s), t\geq 0\}$是均值为$m(s+t)-m(s)=\int_s^{s+t}\lambda(y)dy$的泊松随机变量

第一步：仿定理5.1，证明$N(t)$是均值为$m(t)$的泊松随机变量

- 令$g(t)=E\left[e^{-uN(t)}\right]$
- 所以$g(t+h)=E\left[e^{-uN(t+h)}\right]$

$$=E\left[e^{-u(N(t+h)-N(t))}e^{-uN(t)}\right]=g(t)E[e^{-uN_t(h)}]$$

  - 其中：$N_t(h)=N(t+h)-N(t)$

求$E[e^{-uN_t(h)}]$，利用:

- $P\{N_t(h)=0\}=1-\lambda(t)h+o(h);$
- $P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h);$
- $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

$E\left[e^{-uN_t(h)}\right]=(1-\lambda(t)h+e^{-u}\lambda(t)h+o(h))$

11.1.1. 非时齐泊松过程定义

得到：

- $g(t+h)=g(t)(1-\lambda(t)h+e^{-u}\lambda(t)h+o(h))$
- 所以 $g(t+h)-g(t)=g(t)\lambda(t)(e^{-u}-1)h+o(h)$
- 两边同时除以h并令$h\to 0$得到：

$$g'(t)=g(t)\lambda(t)(e^{-u}-1)$$

- 所以$\frac{g'(t)}{g(t)}=\lambda(t)(e^{-u}-1)$
- 两边0到t求积分，得出

$$\ln\big(g(t)\big)-\ln(g(0))=(e^{-u}-1)\int_0^t\lambda(t)dt+C$$

- 注意到$g(0)=1$ 且 $\int_0^t\lambda(t)dt=m(t)$，得到$C=0$
- 且，$g(t)=\exp\{m(t)(e^{-u}-1)\}$
- 所以$N(t)$的拉普拉斯变换$E\left[e^{-uN(t)}\right]=\exp\{m(t)(e^{-u}-1)\}$
- 后者等于均值为$m(t)$的泊松随机变量的拉普拉斯变换
- 所以$N(t)$是均值为$m(t)$的泊松随机变量

11.1.1. 非时齐泊松过程定义

第二步：确定$N(t+s)-N(s)$的随机变量

方法1：由构建拉普拉斯变换的结论+独立增量性

- $E\left[e^{-uN(s)}\right]=\exp\{m(s)(e^{-u}-1)\}$
- $E\left[e^{-uN(t+s)}\right]=\exp\{m(t+s)(e^{-u}-1)\}$
- 由$N(t+s)-N(s)+N(s)=N(t+s)$，可知

$$E\left[e^{-uN(t+s)}\right]=E\left[e^{-u(N(t+s)-N(s))}\right]E\left[e^{-uN(s)}\right]$$

- $E\left[e^{-u(N(t+s)-N(s))}\right]=E\left[e^{-uN(t+s)}\right]/E\left[e^{-uN(s)}\right]$
  - 得到的结果表达式，等于均值为$m(s+t)-m(s)=\int_s^{s+t}\lambda(y)dy$的泊松随机变量的拉普拉斯变换

11.1.1. 非时齐泊松过程定义

第二步：确定$N(t+s)-N(s)$的随机变量

方法2：在新的起始点重新计数

- 记$N_s(t)=N(s+t)-N(s)$
- 注意到计数过程$\{N_s(t),t\geq 0\}$是强度函数为$\lambda_s(t)=\lambda(s+t),t>0$的非时齐泊松过程
- 利用第一步得到的结论，得到$N_s(t)$是具有均值

$$\int_0^t \lambda_s(y)\,dy=\int_0^t \lambda(s+y)\,dy=\int_s^{s+t}\lambda(x)\,dx$$

的泊松随机变量

  - 这个思路很有意义，描述了非时齐泊松过程以时间s为起点，重新计数
  - 这里要特别注意强度函数的改变

11.1.2. 非时齐泊松过程的例子

- **例-5.24：** 杰伦奶茶店，上午8点开始营业，8到11点有一个稳定增长的顾客平均到达率，在8点以每小时5个顾客速率开始，到11点达到每小时20个顾客的最大值。从上午11点到下午1点（平均）到达率基本上保持常数，即每小时20个顾客。（平均）到达率从下午1点到下午5点关门稳定的下降，关门时速率降低至每个小时12个顾客。假定到达奶茶店的顾客数在不相交的时间段是独立的。

1. 如何就上述问题建立概率模型？
2. 周1上午8：30到9:30平均到达人数是多少？
3. 周1上午8：30到9:30没有顾客的概率是多少？

11.1.2. 非时齐泊松过程的例子

问题1：非时齐泊松过程

- 这是一个非常经典的，假定到达构成一个非时齐的泊松过程，其强度函数$\lambda(t)$由

$$\lambda(t)=\begin{cases}5+5t, & 0\le t\le 3\\ 20, & 3\le t\le 5\\ 20-2(t-5), & 5\le t\le 9\end{cases}$$

11.1.2. 非时齐泊松过程的例子

问题2&3：周1上午8：30到9:30时段发生事件数

- 厘清，周1上午8：30，对应$s = 0.5$
- 周1上午9：30,对应$t + s = 1.5$
- 核心随机变量$N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Pois}(\mathrm{m}(\mathrm{t}+\mathrm{s}) - \mathrm{m}(\mathrm{s}))$
  - $m(t) = \int_0^t \lambda(y)dy$
- 所以$\mathrm{m}(\mathrm{t}+\mathrm{s}) - \mathrm{m}(\mathrm{s}) = \int_{1/2}^{3/2}(5+5t)dt = 10$
- 即平均到达人数为10人
- 到达顾客量为0的概率为：

$$e^{-10} \approx 0.000045$$

11.1.3. 非时齐泊松过程的一个生成方式

核心问题：如何生成非时齐泊松过程？

- 方法：按时间变化的概率$p(t)$对平稳泊松过程抽样

> 具体的，若$\{N(t), t \geq 0\}$是一个速率为λ的泊松过程
> 假设对在时间t发生一个泊松事件以概率$p(t)$计数(即，抽样)，抽样事件独立，且这个抽样概率独立于早于t发生的泊松事件。
> 令$N_c(t)$记直到时间t为止被我们抽样的事件数
> 那么计数过程$\{N_c(t), t \geq 0\}$是一个强度为$\lambda(t) = \lambda p(t)$的非时齐的泊松过程

- 疑问：得到的过程是非时齐泊松过程吗？

11.1.3. 非时齐泊松过程的一个生成方式

证明：验证定义中四个条件！

1. $N_c(0)=0$
2. 在$(s,s+t)$中被抽样的事件个数，只依赖于这个泊松过程在$(s,s+t)$发生的事件个数，它独立于早于s的事件，也即独立于早于s的被抽样的事件。从而建立了独立增量性。

3. 令$N_c(t,t+h)=N_c(t+h)-N_c(t)$

$$P\{N_c(t,t+h)\geq 2\}\leq P\{N(t,t+h)\geq 2\}=o(h)$$

4. 为计算$P\{N_c(t,t+h)=1\}$, 取条件于$N(t,t+h)$

$$\begin{aligned}
&P\{N_c(t,t+h)=1\}\\
&=P\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)=1\}P\{N(t,t+h)=1\}+\\
&P\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)\geq 2\}P\{N(t,t+h)\geq 2\}\\
&=P\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)=1\}\lambda h+o(h)\\
&=p(t)\lambda h+o(h)
\end{aligned}$$

11.1.3. 非时齐泊松过程的一个生成方式

泊松过程的分流的推广3：生成非时齐泊松过程

●一般的：假设事件按速率λ的泊松过程发生，并且一个发生在时间s的事件，以概率$P_1(s)$抽样为类型1事件，而以概率$P_2(s)=1-P_1(s)$抽样为类型2事件，抽样是独立于时间s前过程发生的事件的。

●以$\{\mathrm{N_i}(t),t\geq 0\}$记直到时间$t$为止类型$i$事件的发生的个数，那么（由刚讲过的方法），$\{N_1(t),t\geq 0\}$和$\{N_2(t),t\geq 0\}$是分别具有强度函数$\lambda_i(t)=\lambda P_i(t)(i=1,2)$的相互独立的非时齐泊松过程。

- 依定理5.3：$N_1(t)$和$N_2(t)$是具有均值$E[N_i(t)]=\lambda\int_0^t P_i(s)ds\ (i=1,2)$的泊松随机变量
- 独立性可利用泊松过程的分流部分的命题5.3的理解II来理解，本课对证明不作要求

11.2复合泊松过程
(课本5.4.2)

11.2.1. 复合泊松过程定义

- **复合泊松过程**：随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$称为复合泊松过程，若它可表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0$$

➢ 其中$\{N(t), t \geq 0\}$是一个泊松过程，而$\{Y_i, i \geq 1\}$是独立于$\{N(t), t \geq 0\}$的一组$i.i.d.$随机变量

11.2.2. 复合泊松过程的例子

- 复合泊松过程的例子：

1. 包含泊松过程为特例：当$Y_i \equiv 1$，则$X(t) = N(t)$
2. 假设公共汽车按泊松过程到达一个体育赛事场地，并且假定在每辆公共汽车中的体育爱好者人数是$i.i.d.$的。令$X(t)$记直到时间t为止到达的体育爱好者的人数。那么$\{X(t), t \geq 0\}$是复合泊松过程，Y_i表示在第i辆公共汽车中体育爱好者的人数。
3. 假设顾客按照泊松过程结账离开超市。如果第i个顾客花费的金额$Y_i(i = 1,2, \ldots)$ 是独立同分的，令 $X(t)$ 表示在时间t之前花费的总金额时，$\{X(t), t \geq 0\}$是复合泊松过程。

➢ 复合泊松过程对现实世界的描述是更普适的！

11.2.3. 复合泊松过程中的随机变量$X(t)$

- $X(t)$ 是什么随机变量？

➢ $X(t)$是一个以λt为泊松参数的复合泊松随机变量

➢ 相应的均值和方差有：

$$E[X(t)] = E[N(t)]E[Y_1] = \lambda t E[Y_1]$$
$$Var[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2]$$

11.2.3. 复合泊松过程中的随机变量$X(t)$

- 例**5.26**：假设家庭以每周 $\lambda = 2$ 的泊松过程移民到一个地区。若每个家庭人数独立，并且分别以概率 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$ 取值1,2,3,4，那么在固定的5个星期中移民到这个地区的人数的期望值与方差是多少？

- 解：以Y_i指家庭人数
- $E[Y_i] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{6} = \frac{5}{2}$
- $E\left[Y_i^2\right] = \frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{3} + \frac{4^2}{6} = \frac{43}{6}$
- $E[X(5)] = 2 * 5 * \frac{5}{2} = 25 \quad Var[X(5)] = 2 * 5 * \frac{43}{6} = \frac{215}{3}$

11.2.4. 一类特殊复合泊松过程的表达式

- 当Y_i的可能值的集合是有限或可数时，复合泊松过程具有下列表达式：

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = \sum_j \alpha_j N_j(t)$$

11.2.4. 一类特殊复合泊松过程的表达式

- 当Y_i的可能值的集合是有限或可数时，复合泊松过程具有下列表达式：

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i=\sum_j \alpha_j N_j(t)$$

➢ 其中，α_j是随机变量Y_i的可能取值：

$$P\{Y_i=\alpha_j\}=p_j, \qquad \sum_j p_j=1$$

➢ 如果事件i产生在加项中的数值Y_i取值为$\alpha_j, j\geq 1$, 我们称事件i是一个类型j事件，即对应

$$Y_i=\alpha_j$$

➢ 以$N_j(t)$记在时间t之前类型j事件的个数, 即，在时间t之前α_j被加到累积和$X(t)$上共$N_j(t)$次，即

$$X(t)=\sum_j \alpha_j N_j(t)$$

11.2.4. 一类特殊复合泊松过程的表达式

泊松过程的分流推广：复合泊松过程蕴含的分流

- $\{N_j(t)\}$ 是相互独立的泊松过程，且各自速率为λp_j
  - 由命题5.3，泊松过程的分流易得
  - 对所有的随机变量$N_j(t)$均有其服从泊松分布，参数为$\lambda p_j t$

- 应用1：$E[N_j(t)] = Var[N_j(t)] = \lambda p_j t$
- 应用2：推导$X(t)$的均值和方差

$$E[X(t)] = E\left[\sum_j \alpha_j N_j(t)\right] = \sum_j \alpha_j E\left[N_j(t)\right] = \sum_j \alpha_j \lambda p_j t = \lambda t E[Y_1]$$

$$Var[X(t)] = Var\left[\sum_j \alpha_j N_j(t)\right] = \sum_j \alpha_j^2 Var[N_j(t)] = \sum_j \alpha_j^2 \lambda p_j t = \lambda t E[Y_1^2]$$

11.2.4. 复合泊松过程的表达式的应用

- 应用3：可得结论，当t很大时，$X(t)$的分布趋于正态分布 $N\left(E\big(X(t)\big), Var\big(X(t)\big)\right)$

- 泊松随机变量的均值很大时，它的分布趋于正态

- 所以，当t增加时，随机变量$N_j(t)$趋于正态随机变量。
- 因为$N_j(t)$间独立，且独立正态随机变量的和也是正态的
- 由此得到，当t增加时，$X(t)$的分布也近似正态分布

11.2.4. 复合泊松过程的表达式的应用

- 例**5.28**：在例5.26中，求接下来的50个星期中至少有240人移民到该地区的近似概率。

➢ 解：由于$\lambda = 2, E[Y_i] = 2.5, E\left[Y_i^2\right] = 43/6$, 所以

$$E[X(50)] = 250, \qquad Var[X(50)] = 4300/6$$

➢ 近似概率为：

$$P\{X(50) \geq 240\} = P\{X(50) \geq 239.5\} = 1 - \Phi(-0.3922) = \Phi(0.3922) = 0.6525$$

11.2.5. 独立复合泊松过程的加和

复合泊松过程的汇合：

●若$\{X_1(t), t \geq 0\}$和$\{X_2(t), t \geq 0\}$ 是分别具有泊松参数λ_1和λ_2与（即Y_{1i}和Y_{2i}的分布）分布F_1和F_2的相互独立的复合泊松过程，那么$\{X_1(t) + X_2(t), t \geq 0\}$也是复合泊松随机过程。

11.2.5. 独立复合泊松过程的加和

复合泊松过程的汇合：

- 这个复合泊松随机过程，以速率$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程发生，每个事件独立以概率$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$来自第一个复合泊松过程，以概率$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$来自第二个复合泊松过程。

- 因此，新复合过程是一个泊松参数为$\lambda_1+\lambda_2$且分布函数F由

$$F(x)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}F_1(x)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}F_2(x)$$

给定的复合泊松过程。

  - 这里注意到新的随机变量是Y_{Ti}，而T随机选为1,2，且选1的概率为$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，选2的概率为$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$
  - 利用全概率公式，条件于T的取值，可推导上述分布函数

11.2.6. 附录（不考）：复合泊松过程的较难例子

- 例**5.27**-单服务员的泊松到达队列的忙期：考察一个单服务员的服务站，顾客按速率λ的泊松过程到达。如果在顾客到达时服务员空着就立刻接受服务，不然顾客就排队等待，假设顾客不接受服务不会离开队列。相继服务时间是$i.i.d.$的。

- 这样的系统将交替地处在闲时（系统中没有顾客，服务员闲着）与忙时（系统接待第一个顾客，服务员开始忙，忙的过程中，顾客以泊松过程到达，服务员持续服务，直到系统中无顾客，则忙时结束）。

11.2.6. 附录：复合泊松过程的较难例子

●忙时的定义(!)为：从无顾客的闲时末尾开始，系统进来一个顾客(初始顾客，系统无其他顾客！)，服务开始，并持续到系统没有顾客（即将初始顾客服务完，初始顾客接受服务中可能到来别的顾客，要把这些到来的顾客服务完，过程中又可能有人到来，把这些顾客还要服务完。。。直到系统无人需要接受服务，忙期结束）。

●因为泊松到达过程的无记忆性推出每个忙期的长度有相同的分布。以B记忙期的长度。求$E[B]$和$Var[B]$

11.2.6. 附录：复合泊松过程的较难例子

- 以S记忙期的首个顾客的服务时间，并以$N(S)$记这个时间中到达的人数。
- 最核心的解：我们可以将B表示为

$$B = S + \sum_{i=1}^{N(S)} B_i$$

其中$B_1, B_2, \ldots$是与忙期同分布的随机变量序列，且独立于S

  - 若$N(S) = 0$，则首个顾客完成服务时忙期结束，即

$$B | \{N(S) = 0\} = S$$

  - 若$N(S) = 1$, 则
    $B | \{N(S) = 1\} = S + B_1$ 这里是条件于$\{N(S) = 1\}$的
  - 这是因为，首个顾客服务时间中有一个到达者的话，那么，在时刻 S 将有一个顾客在系统中，她进入服务。
  - 并且，从时间 S 后的到达，仍旧是速率为λ的泊松过程
  - 我们将时刻 S 作为新的起点，可知，从S直到系统变空的附加时间这个随机变量与忙期同分布，记为B_1
  - 因为B_1与忙期的定义完全相同！（核心）

11.2.6. 附录：复合泊松过程的较难例子

- 现在考虑$N(S)=2$的情形，这时当服务员结束这次忙期的第一个顾客的服务时，有2个到达者在等待
- 注意到无论是哪个顾客先接受服务，并不影响剩余时间
- 我们假设到达者1在S时刻开始接受服务，并不考虑到达者2的存在 (忽略到达者2是构造B_1的核心！这样才能保证B_1与忙期定义完全相同)。那么从S时刻从新计算忙期，即B_1，因为与忙期定义完全相同！
- 即到达者1接受服务后，服务员服务到达者1接受服务期间到达的顾客，进而再服务这段时间来的顾客，。。。，直到忙期B_1(忽略到达者2的存在)结束。
- 到达者2开始接受服务的时间为$S+B_1$,从这个时刻从新计算忙期，即B_2，类似可知B_2与B同分布。
- 所以，$B|\{N(S)=2\}=S+B_1+B_2$
- 重复上述推导可得：$B=S+\sum_{i=1}^{N(S)}B_i$

11.2.6. 附录：复合泊松过程的较难例子

- 因此，条件于S可得：

$$E[B|S] = S + E[\sum_{i=1}^{N(S)} B_i\,|S]$$

- 而且

$$Var(B|S) = Var(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i\,|S)$$

- 对给定的S, $\sum_{i=1}^{N(S)} B_i$是复合泊松随机变量，于是

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(S)} B_i \,\middle|\, S\right] = \lambda S E[B], Var\left(\sum_{i=1}^{N(S)} B_i \,\middle|\, S\right) = \lambda S E[B^2]$$

$$E[B|S] = S + \lambda S E[B], \qquad Var(B|S) = \lambda S E[B^2]$$

11.2.6. 附录：复合泊松过程的较难例子

- 所以，$E\left[E[B|S]\right] = E[B] = E[S] + \lambda E[S]E[B]$
- 也即，$\lambda E[S] < 1$时，我们有

$$E[B] = \frac{E[S]}{1-\lambda E[S]}$$

- 这里，如果$\lambda E[S] \geq 1$呢？

- 此外，由条件方差公式

$$Var(B) = Var(E[B|S]) + E[Var(B|S)]$$
$$= (1 + \lambda E[B])^2 Var(S) + \lambda E[S]E[B^2]$$
$$= (1 + \lambda E[B])^2 Var(S) + \lambda E[S](Var(B) + E^2[B])$$

- 所以，有

$$Var[B] = \frac{Var(S)(1+\lambda E[B])^2 + \lambda E[S]E^2[B]}{1-\lambda E[S]}$$

即（带入$E[B] = \frac{E[S]}{1-\lambda E[S]}$），$Var[B] = \frac{Var(S)+\lambda E^3[S]}{(1-\lambda E[S])^3}$

11.3 条件(混合)泊松过程
(课本5.4.3)

11.3.1. 条件泊松过程定义

- 条件泊松过程：计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为条件泊松过程，若存在一个正随机变量L，在$L=\lambda$的条件下，这个计数过程是速率为λ的泊松过程。

- $N(s, s+t]$分布如何？

➢ 假设L是具有密度函数g的连续随机变量，由条件概率公式：

$$P\{N(t+s)-N(s)=n\}$$
$$=\int_0^\infty P\{N(t+s)-N(s)=n|L=\lambda\}g(\lambda)d\lambda$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}g(\lambda)d\lambda$$

➢ 假设L是具有质量函数g的离散随机变量呢？

11.3.1. 条件泊松过程性质

- 条件泊松过程一般具有平稳增量。
- 但一般不具备独立增量，仅仅是条件于L独立！
- 所以，条件泊松过程，一般不是泊松过程！

11.3.2. 条件泊松过程$\boldsymbol{N(t)}$的均值和方差

- 核心：取条件于L。因为在条件L下，$N(t)$是均值为Lt的泊松过程，所以

$$E[N(t)|L] = Lt,\ \ Var[N(t)|L] = Lt$$

- 条件期望和条件方差公式：

$$E[N(t)] = tE[L]$$
$$Var[N(t)] = E[Lt] + Var[Lt] = tE[L] + t^2Var[L]$$

11.3.3. 条件于$N(t)$的L的分布

- 由于$N(t)$是依赖于L存在的，所以，从$N(t)$的值，可以推断L的信息。

➢ 条件于$N(t)=n$时，L的条件分布为

$$P\{L \le x|N(t)=n\} = P\{L \le x, N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}$$

$$= \frac{\int_0^\infty P\{L \le x, N(t)=n|L=\lambda\}g(\lambda)d\lambda}{P\{N(t)=n\}}$$

$$= \frac{\int_0^x P\{N(t)=n|L=\lambda\}g(\lambda)d\lambda}{P\{N(t)=n\}}$$

$$= \frac{\int_0^x e^{-\lambda}\ (\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda}$$

- 所以，L的条件分布或条件密度函数是

$$f_{L|N(t)}(\lambda|n) = \frac{e^{-\lambda}\ (\lambda)^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda)^n g(\lambda)d\lambda}, \ \lambda \ge 0$$

11.3.3. 条件于$N(t)$的L的分布

- 例5.30：以年为单位，保险公司认为每个参保人存在各自的事故率，事故率的分布为随机变量L，给定参保人具有事故率λ，假设其索赔次数按速率λ的泊松过程分布。
- 进一步假，一个新的参保人的事故率 L 是 (0,1) 上均匀分布。
- 问：给定一个参保人在前t年作了n次索赔条件下，从第n次索赔到这个参保人下一次索赔的时间的条件分布是什么？

➢ T是到下次索赔的时间，注意到这是个间隔时间

➢ 目标是：计算$P\{T > x|N(t) = n\}$

  ➢ 取条件于参保人的事故率 L 的取值，用条件全概率公式：

$$P\{T > x|N(t) = n\} = \int_0^\infty P\{T > x|L = \lambda, N(t) = n\} f_{L|N(t)}(\lambda|n) d\lambda$$

$$= \frac{\int_0^1 e^{-\lambda x} e^{-\lambda t} \lambda^n d\lambda}{\int_0^1 e^{-\lambda t} \lambda^n d\lambda}$$