常系数线性差分方程

复旦大学管理学院　吴尚

2021 年 9 月 27 日

1　引子

首先以一个例子作为开始，考虑一个序列$\{Y_t\}$，有初始值Y_0，对于$t>0$，有递推式$Y_t=2Y_{t-1}$，则容易发现$Y_t=2^tY_0$. 接下来稍微复杂一点，假设给定Y_0,Y_1, 对于$t>1$有，

$$Y_t=3Y_{t-1}-2Y_{t-2} \tag{1}$$

初看似乎全无头绪，但如果我们将其改写为

$$Y_t-Y_{t-1}=2(Y_{t-1}-Y_{t-2})$$

或

$$Y_t-2Y_{t-1}=Y_{t-1}-2Y_{t-2}$$

分别递推下去，可得$Y_t-Y_{t-1}=2^{t-1}(Y_1-Y_0)$, $Y_t-2Y_{t-1}=Y_1-2Y_0$, 通过解方程，我们可以得到$Y_t=2Y_0-Y_1+2^t(Y_1-Y_0)$.

我们还有另一种解法，暂时忽略初始值的限定，若对于所有t都有$Y_t\equiv 1$, 则显然满足(1)；若$Y_t=2^t$，则$3Y_{t-1}-2Y_{t-2}=3\times 2^{t-1}-2\times 2^{t-2}=2^t=Y_t$, 同样满足(1)。而由于该递推式是线性的，不难验证，若$\{Y_t\}$和$\{Z_t\}$都是(1)的解，则$\{C_1Y_t+C_2Z_t\}$也是(1)的解。所以$Y_t=C_1+2^tC_2$满足(1)，考虑到初始值Y_0,Y_1，我们得到$Y_0=C_1+C_2,Y_1=C_1+2C_2$, 可解得，$C_1=2Y_0-Y_1,C_2=Y_1-Y_0$，代入可得$Y_t=2Y_0-Y_1+2^t(Y_1-Y_0)$，与前段所得相同。

2　延迟算子

首先了解一下什么是序列，一个序列$\{Y_t\}$可以看作是一个关于整数序号t的函数，比如定义$Y_t=2^tt^3$，则$Y_0=0$,$Y_{2t}=2^{2t}(2t)^3$.下面我们定义延迟算子。延迟算子B作用在序列的某一项上得到的结果就是该项的前一项，即

$$BY_t=Y_{t-1}$$

那么$BY_2=Y_1$,$BY_{2t}=Y_{2(t-1)}$(这里的序列应当看作整数序号t的函数，即取原序列的偶数项构成的新序列，故前一项是$Y_{2(t-1)}$，下同)，若$Y_t=2^tt^3$,则$BY_t=Y_{t-1}=2^{t-1}(t-1)^3$, $BY_{2t-1}=Y_{2(t-1)-1}=2^{2t-3}(2t-3)^3$. 如果我们作用两次延迟算子，得到的就是前两项，记作

$$B^2Y_t=B\circ BY_t=BY_{t-1}=Y_{t-2}$$

同理

$$B^n Y_t = B^{n-1} \circ BY_t = B^{n-1} Y_{t-1} = \cdots = Y_{t-n}$$

并且定义$B^0 Y_t = 1 \circ Y_t = Y_t$.

进一步的，我们可以将延迟算子进行线性组合，按照分配律来计算，如

$$(1 + 2B - B^2)Y_t = 1 \circ Y_t + 2BY_t - B^2 Y_t = Y_t + 2Y_{t-1} - Y_{t-2}$$

假设有两个序列Y_t, W_t,令$Z_t = Y_t + W_t$,则我们有

$$B(Y_t + W_t) = BZ_t = Z_{t-1} = Y_{t-1} + W_{t-1}$$

当然我们还有

$$B(Y_t W_t^2) = Y_{t-1} W_{t-1}^2$$

$$(1 - 2B^3)(Y_t W_t + Y_t) = Y_t W_t + Y_t - 2(Y_{t-3} W_{t-3} + Y_{t-3})$$

等等。

延迟算子具有分配律、结合律、交换律等，这里举例说明结合律:

$$(1+B-B^2)(1-B)Y_t = (1+B-B^2)(Y_t - Y_{t-1}) = Y_t + Y_{t-1} - Y_{t-2} - Y_{t-1} - Y_{t-2} + Y_{t-3} = Y_t - 2Y_{t-2} + Y_{t-3}$$

另一种算法为首先计算前面两个延迟算子的乘积（当作以B为变量的多项式），然后再作用在Y_t上，

$$[(1 + B - B^2)(1 - B)]Y_t = (1 + B - B^2 - B(1 + B - B^2))Y_t = (1 - 2B^2 + B^3)Y_t = Y_t - 2Y_{t-2} + Y_{t-3}$$

可以看到，两种算法得到的结果是一样的。交换律指的是

$$(1 + B - B^2)(1 - B)Y_t = (1 - 2B^2 + B^3)Y_t = (1 - B)(1 + B - B^2)Y_t$$

3 常系数齐次线性差分方程

3.1 定义

本节介绍我们最关键的内容，常系数齐次线性差分方程。简单来说，p阶常系数齐次线性差分方程指的就是一个序列的递推公式

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p}$$

其中，$\phi_p \neq 0$, 这是因为，如果$\phi_p = 0$, 那么可以去掉最后一项，降低阶数。

我们可以用延迟算子来表示上面的递推公式，即

$$Y_t = \phi_1 BY_t + \phi_2 B^2 Y_t + \cdots + \phi_p B^p Y_t$$

$$Y_t = (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \cdots + \phi_p B^p)Y_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)Y_t = 0$$

记$\Phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p$,则$\Phi(B)$可以看作是以$B$为变量的$p$阶多项式，递推式可以进一步记为

$$\Phi(B)Y_t = 0$$

3.2 第一种情况（根互不相同）

首先考虑一个简单的例子，$(1-2B)Y_t = 0$，即$Y_t = 2Y_{t-1}$，则$Y_t = C2^t$是该方程的一个解（事实上$C = Y_0$）。同理对于任意常数φ(可以是复数)，$(1-\varphi B)Y_t = 0$的解为$Y_t = C\varphi^t$. 若$\Phi(B)$可以分解为$(1-\varphi B)$和另一个多项式$\Psi(B)$的乘积，则$Y_t = C\varphi^t$也是$\Phi(B)Y_t = 0$的解，这是因为

$$\Phi(B)Y_t = \Psi(B)(1-\varphi B)Y_t = \Psi(B)(1-\varphi B)C\varphi^t = \Psi(B)0 = 0$$

其中0指的是恒等于0的序列。以引子的序列为例，$Y_t = 3Y_{t-1} - 2Y_{t-2}$可以写作$(1-3B+2B^2)Y_t = 0$,即$(1-2B)(1-B)Y_t = 0$或$(1-B)(1-2B)Y_t = 0$,由上面的分析可得，$Y_t = 1^t = 1$或$Y_t = 2^t$都是该方程的解，则对于任意系数$C_1, C_2$（可以是复数），$Y_t = C_1 + C_2 2^t$都是该方程的解。更一般地，我们有

(I) 假设多项式$\Phi(x) = (1-\varphi_1 x)(1-\varphi_2 x)\cdots(1-\varphi_p x)$,且$\varphi_1, \ldots, \varphi_p$互不相同，则常系数齐次线性差分方程$\Phi(B)Y_t = 0$的所有解可以表示为

$$Y_t = C_1\varphi_1^t + C_2\varphi_2^t + \cdots + C_p\varphi_p^t \tag{2}$$

如果$\varphi_1, \ldots, \varphi_p$都是实数，那么序列$Y_t$可以看作是指数变化（指数增长或指数下降）的线性组合，如果其中有复数，那么可以进一步改写，假设$p = 2$，$\Phi(x) = (1-re^{i\theta}x)(1-re^{-i\theta}x)$（此段如不了解可先跳过），则

$$Y_t = C_1 r^t e^{it\theta} + C_2 r^t e^{-it\theta} = r^t(acos(t\theta) + bsin(t\theta))$$

如果Y_0, Y_1, ϕ_1, ϕ_2都是实数，则根据递推式$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2}$, 该序列中的数均为实数（注意$C_1, C_2$可能是复数），那么可以证明$a, b$均为实数，则

$$Y_t = Cr^t cos(t\theta + \beta)$$

可以理解为振幅指数变化的余弦波动。

例一：$\Phi(x) = 1 - 2x + 4x^2$，$Y_0 = 1$，$Y_1 = -2$，求$\Phi(B)Y_t = 0$的通解。

解：由于$\Phi(x) = (1-2e^{i\pi/3}x)(1-2e^{-i\pi/3}x)$, 且$Y_0, Y_1, \phi_1, \phi_2$均为实数，可得

$$Y_t = C2^t cos(t\pi/3 + \beta)$$

代入Y_0, Y_1解得，$C = 2, \beta = \pi/3$.

3.3 第二种情况（一般情况）

考虑方程$(1-2B)^2 Y_t = 0$,当然$Y_t = 2^t$是它的一个解，除此之外$Y_t = t2^t$也是它的一个解，这是因为

$$(1-2B)^2(t2^t) = (1-2B)[(1-2B)(t2^t)] = (1-2B)(t2^t - 2(t-1)2^{t-1}) = (1-2B)2^t = 0$$

更一般地，当$0 \le j < k$时，我们有

$$(1-\varphi B)^k(t^j\varphi^t) = 0 \tag{3}$$

我们可以用数学归纳法来证明，首先对于$k = 1, j = 0$，有$(1-\varphi B)\varphi^t = 0$；假设(3)对于$k-1$和$j < k-1$成立，则对于$0 < j < k$,我们有

$$(1-\varphi B)^k(t^j\varphi^t) = (1-\varphi B)^{k-1}[(1-\varphi B)(t^j\varphi^t)] = (1-\varphi B)^{k-1}[t^j\varphi^t - \varphi(t-1)^j\varphi^{t-1}] = (1-\varphi B)^{k-1}g(t)\varphi^t = 0$$

其中$g(t)=t^j-(t-1)^j=g_{j-1}t^{j-1}+g_{j-2}t^{j-2}+\cdots+g_0$是一个关于$t$的$j-1$阶多项式，由于$j-1<k-1$和归纳假设，上式得证。另外$j=0$时(3)当然成立。

由(3)，我们不难发现，

$$Y_t=(C_0+C_1t+\cdots+C_{k-1}t^{k-1})\varphi^t$$

是$(1-\varphi B)^kY_t=0$的解。更一般地，我们有

(II) 假设多项式$\Phi(x)=(1-\varphi_1x)^{k_1}(1-\varphi_2x)^{k_2}\cdots(1-\varphi_qx)^{k_q}$,且$\varphi_1,\ldots,\varphi_q$互不相同，则常系数齐次线性差分方程$\Phi(B)Y_t=0$的所有解可以表示为

$$Y_t=(C_{10}+C_{11}t+\cdots+C_{1,k_1-1}t^{k_1-1})\varphi_1^t+\cdots+(C_{q0}+C_{q1}t+\cdots+C_{q,k_q-1}t^{k_q-1})\varphi_q^t \quad (4)$$

在实际中，(I)(II)可以运用得更灵活，下面以两个含有季节因子的序列为例加以说明。

例二：已知$Y_0,Y_1,\ldots,Y_{12}$的值，且序列满足$(1-B^{12})(1-B)Y_t=0$，求解Y_t.

解：首先满足$(1-B^{12})Y_t=0$的序列（即$Y_t=Y_{t-12}$），其实就是所有以12为周期的序列。由于多项式$1-x^{12}=0$有12个互不相同的根（除了正负1，还有10个复数），记

$$1-x^{12}=(1-x)(1+x)(1-\varphi_3x)(1-\varphi_4x)\cdots(1-\varphi_{12}x)$$

则由(I)，可得$(1-B^{12})Y_t=0$的通解可表示为

$$Y_t=C_1+C_2(-1)^t+C_3\varphi_3^t+\cdots+C_{12}\varphi_{12}^t$$

其实Y_t表示的就是所有以12为周期的序列。由于

$$(1-x^{12})(1-x)=(1-x)^2(1+x)(1-\varphi_3x)(1-\varphi_4x)\cdots(1-\varphi_{12}x)$$

则由(II)，可得$(1-B^{12})(1-B)Y_t=0$的通解可表示为

$$Y_t=C_{10}+C_{11}t+C_2(-1)^t+C_3\varphi_3^t+\cdots+C_{12}\varphi_{12}^t$$

两相对比不难发现，增加$(1-B)$之后，相当于给原来的序列增加了一个线性趋势$C_{11}t$，所以$(1-B^{12})(1-B)Y_t=0$的通解可以拆分为$Y_t=W_t+Ct$，其中$W_t=W_{t-12}$为一个以12为周期的序列。由于$Y_0=W_0+0$,$Y_{12}=W_{12}+12C=W_0+12C$,所以$C=(Y_{12}-Y_0)/12$,$W_t=Y_t-Ct,t=0,1,\ldots,11$.则对于一般的$t$,假设$t=12k+r,0\le r<12$,有

$$Y_t=W_t+Ct=W_r+Ct=Y_r-Cr+Ct=Y_r+12Ck=Y_r+k(Y_{12}-Y_0)$$

其实，原方程$(1-B^{12})(1-B)Y_t=0$就是$Y_t-Y_{t-12}=Y_{t-1}-Y_{t-13}$，而$Y_{12},Y_{13},\ldots,Y_{23}$这12个数相当于$Y_0,\ldots,Y_{11}$这12个数平移$Y_{12}-Y_0$，以此类推。

例三：已知$Y_0,Y_1,\ldots,Y_{12}$的值，且序列满足$(1-0.5B^{12})(1-0.6B)Y_t=0$，求解$Y_t$.

解：由于$1-0.5x^{12}=0$和$1-0.6x=0$的根互不相同，所以Y_t可分解为W_t+Z_t，其中，$(1-0.5B^{12})W_t=0$,$(1-0.6B)Z_t=0$,由于$Y_0=W_0+Z_0$,$Y_{12}=W_{12}+Z_{12}=0.5W_0+0.6^{12}Z_0$,可以解得

$$Z_0=\frac{Y_{12}-0.5Y_0}{0.6^{12}-0.5}$$

且$W_t = Y_t - 0.6^t Z_0, t = 0, 1, \ldots, 11$. 对于一般的$t$,假设$t = 12k + r, 0 \le r < 12$,则

$$Y_t = W_t + Z_t = 0.5^k W_r + 0.6^t Z_0 = 0.5^k (Y_r - 0.6^r Z_0) + 0.6^t Z_0 = 0.5^k Y_r + 0.6^r (0.6^{12k} - 0.5^k) Z_0$$

代入$k = 1, r = 0, t = 12$,不难发现

$$0.5Y_0 + (0.6^{12} - 0.5)Z_0 = Y_{12}$$

4 常系数非齐次线性差分方程

所谓非齐次，指的就是求解$\Phi(B)Y_t = 1$. 只要我们找到该方程的任何一个解，就可以得到它的所有解。事实上，假设Z_t是该方程的一个解，则对于任意满足该方程的序列Y_t,令$W_t = Y_t - Z_t$,则

$$\Phi(B)W_t = \Phi(B)Y_t - \Phi(B)Z_t = 1 - 1 = 0$$

即W_t是齐次方程的解。所以非齐次方程的通解等于Z_t加上齐次方程的通解。

现在令$Y_t = C$,即序列恒等于常数C,则

$$\Phi(B)Y_t = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)C = \Phi(1)C$$

如果$\Phi(1) \ne 0$, 则令$C = 1/\Phi(1)$,可得$\Phi(B)Y_t = 1$. 可是如果1是$\Phi(x) = 0$的根，该怎么办呢？下面我们用数学归纳法证明：

$$(1 - B)^k t^k = k!$$

首先对于$k = 1$,显然成立。假设对于$k - 1$成立，则

$$\begin{aligned}
(1 - B)^k t^k &= (1 - B)^{k-1}[(1 - B)t^k] \\
&= (1 - B)^{k-1}[t^k - (t - 1)^k] \\
&= (1 - B)^{k-1}[kt^{k-1} + a_{k-2}t^{k-2} + \cdots + a_1 t + a_0] \\
&= (1 - B)^{k-1}[kt^{k-1}] + 0 \\
&= k \times (k - 1)! \\
&= k!
\end{aligned}$$

注意，这里对于低于$k - 1$阶的情况，用到了(3)($\varphi = 1$).

一般地，我们有如下结论

(III) 假设$\Phi(x) = (1 - x)^k \Psi(x)$,其中1不是$\Psi(x) = 0$的根，则常系数非齐次线性差分方程$\Phi(B)Y_t = 1$的一个解为

$$\frac{t^k}{k!\Psi(1)} \tag{5}$$

它的通解可由该解加上(4)得到。

例四：求$(1 - B)^2(1 - 2B)^2(1 + 3B)Y_t = 1$的通解。

解：由(III),我们得到$k = 2, \Psi(x) = (1 - 2x)^2(1 + 3x), \Psi(1) = (1 - 2)^2(1 + 3) = 4$,则该方程的一个解为$t^2/8$. 由(II)，通解为

$$Y_t = t^2/8 + (C_{10} + C_{11}t) + (C_{20} + C_{21}t)2^t + C_{30}(-3)^t$$

习题1：已知$Y_0, Y_1, \ldots, Y_{12}$的值，且序列满足$(1-0.7B^{12})(1-B)Y_t=0$，求解Y_t.

习题2：假设$W_t=Y_t-0.5Y_{t-1}$，且$W_t-W_{t-6}=3(1+W_{t-2}-W_{t-4})$，求$\{Y_t\}$的通解。