随机过程
Stochastic Processes

讲义2：条件期望、条件概率

目录

（课本第3章）

2.1 条件期望

2.2 条件概率

2.3 应用案例

2.1条件期望

2.1.1 离散情形(课本3.2)

- 先决条件：$p_Y(y) > 0$
- 条件 概率质量函数：$p_{X|Y}(x|y) = p(X = x|Y = y) = p(X = x, Y = y)/p_Y(y)$。
  - 条件 概率分布函数：$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \sum_{a \leq x} p_{X|Y}(a|y)$
  - 条件 期望：$E(X|Y = y) = \sum_x xP\{X = x|Y = y\} = \sum_x xp_{X|Y}(x|y)$
  - 如果X，Y独立？

2.1.1 离散情形(课本3.2)

- 例(例3.1): 假定X和Y的联合概率质量函数$p(x,y)$为

$$p(1,1)=0.5, \mathrm{p}(1,2)=0.1, \mathrm{p}(2,1)=0.1, \mathrm{p}(2,2)=0.3$$

计算在$Y=1$给定的条件下X的条件概率质量函数。

2.1.1 离散情形(课本3.2)

- 例(例3.3): X,Y是具有参数λ_1,λ_2的独立泊松随机变量，计算给定$X+Y=n$的条件下X的条件期望。

2.1.1 离散情形(课本3.2)

- 例(例3.3):

2.1.1 离散情形(课本3.2)

- 条件期望具有普通期望的一切性质,所有期望恒等式适用:
  - 例1: $E(h(X)|Y=y)=\sum_x h(x)P\{X=x|Y=y\}$
  - 例2: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i\,|Y=y)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i|Y=y)$

- 例(3.4):n个部件,部件i下雨天运转概率p_i,非雨天运转概率q_i,下雨概率为α。给定明天下雨,运转的部件数的条件期望?

2.1.2 连续情形(课本3.3)

- 先决条件：$f_Y(y) > 0$
- 定义条件概率密度函数：$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$。
  - 事件条件概率的理解形式？

2.1.2 连续情形(课本3.3)

- 先决条件：$f_Y(y) > 0$
- 定义条件概率密度函数：$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$。
  - 条件期望1：$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$
  - 条件期望2：$E(h(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X|Y}(x|y)dx$
  - 思考：若已知联合密度函数，怎么求条件密度呢？

2.1.2 连续情形(课本3.3)

- 例(例3.8): X_1, X_2是参数μ_1, μ_2的独立指数随机变量，计算给定$X_1 + X_2 = t$的条件下X_1的条件密度。

2.1.2 连续情形(课本3.3)

- 例(例3.8):

2.1.2 连续情形(课本3.3)

- 例(例3.8):

➢ $C = \begin{cases} 1/t, & 若\mu_1 = \mu_2 = \mu \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - e^{-(\mu_1 - \mu_2)t}}, & 若\mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

➢ $f_{X_1|X_1+X_2}(x|t) = \begin{cases} 1/t, & 若\mu_1 = \mu_2 = \mu \\ \frac{(\mu_1 - \mu_2)e^{-(\mu_1 - \mu_2)x}}{1 - e^{-(\mu_1 - \mu_2)t}}, & 若\mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

➢ $f_{X_1+X_2}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 e^{-\mu_2 t}}{C} = \begin{cases} \mu^2 t e^{-\mu t}, & 若\mu_1 = \mu_2 = \mu \\ \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})}{\mu_1 - \mu_2}, & 若\mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

- 要点：$E(X|Y)$是随机变量Y的函数，也是一个随机变量
  - 它在$Y = y$处的取值是$E[X|Y = y]$

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

- 要点：$E(X|Y)$是随机变量Y的函数，也是一个随机变量
  - 它在$\mathrm{Y}=\mathrm{y}$处的取值是$\mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{Y}=\mathrm{y}]$

- 重要的条件期望公式：$E[E(X|Y)]=E[X]$
  - Y离散：$E[X]=\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\}$
  - Y连续：$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)dy$

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

● 例(例3.10, 复合随机变量):工厂设备每周故障次数 N 期望为4. 假定每次事故受伤工人数X_i是均值为2的独立随机变量. 再假定X_i与N独立。求每周总受伤人数$\sum_{i=1}^{N} X_i$的期望。

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

- 例(例3.16, 快速排序算法):有n个不同值$\{x_1,\dots,x_n\}$的集合,需排序。一个有效算法是快速排序算法,其递推定义如下:

1. 当$n=1$, 不做比较;当$n=2$, 比较2值,置于合适次序
2. 当$n>2$,在n个值中随机挑选一个值x_i, 将余下$n-1$个值与x_i进行比较,分为两组$S_i,\bar{S}_i$, 其中S_i包括所有小于x_i的值,$\bar{S}_i$包括所有大于x_i的值。
3. 再利用上述两步对$S_i,\bar{S}_i$排序,最终排序为排序后$S_i,x_i,\bar{S}_i$。

   - 示例:$\{2,1\},4,\{10,5,8,7\}\to 1,2,4,\{10,5,8,7\}\to 1,2,4,5,7,\{10,8\}\to 1,2,4,5,7,8,10$

目标:计算排序n个不同值的比较次数的期望M_n ←算法效率

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

- 例(例3.16,快速排序算法):

目标：计算排序n个不同值的比较次数的期望M_n ←算法效率

2.1.3 通过取条件计算期望(课本3.4)

- 例(例3.16, 快速排序算法):

目标：计算排序n个不同值的比较次数的期望M_n ←算法效率

即 $\frac{M_{n+1}}{n+2}=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}+\frac{M_n}{n+1}=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(n+1-k)(n+2-k)}$

所以$M_{n+1}=2(n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(n+1-k)(n+2-k)}=2(n+2)\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)(i+2)}=2(n+2)\left(\sum_{i=1}^{n}[\frac{2}{(i+2)}-\frac{1}{(i+1)}]\right)\sim 2(n+2)\left[\int_3^{n+2}\frac{2}{x}dx-\int_2^{n+1}\frac{1}{x}dx\right]=2(n+2)\left[\ln(n+2)+\ln\frac{n+2}{n+1}+\ln 2-2\ln 3\right]\sim 2(n+2)\ln(n+2)$

2.1.4 通过取条件计算方差(课本3.4)

- $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$; 可通过取条件得到$E[X], E[X^2]$
- 条件方差公式(命题3.1):$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y])$
  - ➢ $Var(X|Y) = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$

- 例(例3.10续，复合随机变量方差):工厂设备每周故障次数N是随机变量.假定每次事故受伤工人数X_i是独立的随机变量.再假定X_i与N独立。求每周总受伤人数$\sum_{i=1}^{N} X_i$的方差。

2.2条件概率

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 以A记任一事件，定义示性随机变量X为当A发生时=1,A^c时=0
  - $E[X]=P(A)$
  - 离散：$E[X|Y=y]=\sum_x xP\{X=x|Y=y\}=P(A|Y=y)$
  - 连续：$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx=P(A|Y=y)$

- 由$E[X]=E[E(X|Y)]$, 可推出重要的全概率公式：
  - Y离散：$P(A)=\sum_y P[A|Y=y]P\{Y=y\}$
  - Y连续：$\mathrm{P}(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P[A|Y=y]f_Y(y)dy$

  - 离散情形的重要特例：

$$P(X=x)=\sum_y P[X=x|Y=y]P\{Y=y\}$$

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.21):X,Y为独立的连续随机变量。计算$P\{X<Y\}$。

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.23):假定杰伦奶茶店每天新顾客人数是均值为λ的泊松随机变量，且假定顾客间独立。其中新顾客会再次前来消费的概率为p,不再前来消费概率为$1-p$。求今天的新顾客中恰有n个会再来的消费者和m个不会再来的消费者的联合概率。

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.23)

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.23)

➢ **结论**：当均值为λ的每个泊松随机事件独立的以概率p或$1-p$分入第1/2类，则1/2类事件总数N_1, N_2为参数$\lambda p, \lambda(1-p)$的独立泊松随机变量

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- **一般结论**：当均值为λ的每个泊松随机事件独立的以概率$p_1,\ldots,p_n$分入第$1,\ldots,n$类，则各类事件总数$N_1,\ldots,N_n$为参数$\lambda p_1,\ldots,\lambda p_n$的独立泊松随机变量

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.25,最佳奖问题):假设我们可以从一系列先后宣布的n个不同奖项中选一个。每个奖项宣布后必须立刻决定是否接受,若接受则后续奖项不可再选择,被拒绝的奖项也不可再选择。所以我们需根据现奖项和已宣布奖项来确定是否接受现奖项。我们的目标是最大化得到最佳奖的概率。假定奖项的顺序是随机的,即所有$n!$个次序等可能。怎么最大化得奖概率?

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.25, 最佳奖问题):

2.2.1 通过取条件计算概率(课本3.5)

- 例(例3.25, 最佳奖问题):

➢ $P_k(\text{最佳}) = \frac{k}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1} \approx \frac{k}{n}\int_{k}^{n-1}\frac{1}{x}dx = \frac{k}{n}\ln(\frac{n-1}{k}) \approx \frac{k}{n}\ln(\frac{n}{k})$

➢ 选k以最大化$g(k) = \frac{k}{n}\ln(\frac{n}{k})$

➢ 利用导数$g'(k) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{n}$ $\rightarrow$ $k = \frac{n}{e}$.

➢ 放弃前$\frac{n}{e}$个奖项，接受第一个比这些都好的奖。得到 g(n/e)=1/e≈ 0.36788.

2.2.2 条件条件期望和概率(课本3.5)

- 重要的条件条件期望公式：$E[X|Y] = E[E[X|Y,W]|Y]$
  - ➢ W离散：

  $\mathrm{E[X|Y = y]} = \sum_w E[X|W = w, Y = y]P\{W = w|Y = y\}$
  - ➢ W连续：

  $\mathrm{E[X|Y = y]} = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|W = w, Y = y]f_{W|Y}(w|y)\,dw$

- 基于上述公式，类似全概率公式的推导，得到条件全概率公式：
  - ➢ W离散：$\mathrm{P}(A|Y = y) = \sum_w P[A|W = w, Y = y]P\{W = w|Y = y\}$
  - ➢ W连续：$\mathrm{P}(A|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} P[A|W = w, Y = y]f_{W|Y}(w|y)dw$

2.2.2 条件条件期望和概率(课本3.5)

- 例(例3.33):汽车保险公司将参保户分为$i=1,\dots,k$种类型。假定类型i的参保人在相继的年份中的事故次数是均值为λ_i的独立泊松分布。一个新的参保户属于类型i的概率是p_i,$\sum_{i=1}^{k} p_i=1$.已知一个参保户在第一年有n次事故，问她在第二年平均事故数？她的第二年有m次事故的条件概率是多少？

2.2.2 条件条件期望和概率(课本3.5)

- 例(例3.33):

2.2.2 条件条件期望和概率(课本3.5)

- 例(例3.33):

2.3 应用案例

2.3.1 复合随机变量的恒等式(课本3.7)

- $X_1,\ldots$是独立同分布随机变量，N独立于X序列的非负整数值随机变量.记

$$S_0 = 0, S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

为复合随机变量。

令M与X序列独立，且使$P\{M=n\} = \frac{nP\{N=n\}}{E[N]}, n = 1,\ldots$

- 复合随机变量恒等式(课本命题3.4)。对任意函数h,有

$$E[S_N h(S_N)] = E[N]E[X_1 h(S_M)]$$

- 基于等式可以得到S_N的概率质量函数表达式
- 请自行阅读教材3.7节！

2.3.1 复合随机变量的恒等式(课本3.7)

- 推论3.5（得到S_N 的概率质量函数表达式）: 假设X_i是正整数值随机变量，令$a_j = P\{X_1 = j\}, j > 0$,有

$$P\{S_N = 0\} = P\{N = 0\};$$

$$P\{S_N = k\} = \frac{1}{k} E[N] \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j P\{S_{M-1} = k - j\}, k > 0$$