复旦大学管理学院
SCHOOL OF MANAGEMENT
FUDAN UNIVERSITY

随机过程
Stochastic Processes

讲义7：马尔可夫链-4

目录

7.1马氏链的应用
(课本4.5.1 & 4.6)

7.1.0 公平赌博问题

- 回顾例**4.18**：一维的对称随机游动马氏链是常返的。
  - ➢ 常返性表明赌徒输掉赌资m元后，如果他有足够的本金一直赌下去，一定有机会捞回输掉的赌资。

- 进一步的问题是，它是正常返，还是零常返呢？
  - ➢ 利用补充定理，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{00}^{n} = 0 \leftrightarrow$ 零常返
  - ➢ 由例4.18，回忆$p_{00}^{n} \approx 1/\sqrt{\pi n}$, 可得到状态皆为零常返的

  - ➢ 但零常返性进一步警告这位赌徒，要捞回输掉的赌资，不仅需要足够的本金，平均还需要再赌无数多局！

7.1.1 一般赌徒问题

●赌徒破产问题（**4.5.1**节）：考察一个有吸收态的随机游动，即赌徒在每次赌博以概率p赢1元，以$q=1-p$输1元。假设各次赌博独立，且赌徒开始时有i元，问他财富在达到0前先达到N的概率。

●注意到：吸收状态为破产(财富为0)或者达到一个目标金额N.

●马氏链：将X_n记玩家在时间n财富，则$\{X_n, n\geq 0\}$有转移概率

$$P_{00}=P_{NN}=1, P_{i,i+1}=p=1-P_{i,i-1}, i=1,\ldots,N-1$$

理解1：确定马氏链各状态类别

➢ 马氏链状态分为三个类，即$\{0\}$、$\{1,2,\ldots,N-1\}$、$\{N\}$分别是常返、暂态、常返类　← 思考：为什么？

7.1.1 一般赌徒问题

理解2：每个暂态状态只被访问有限次。

- 所以有限时间后，赌徒会进入状态N或者0（破产）

7.1.1赌徒问题

- 赌徒问题关注的求解目标：

  $P_i(i=0,1,\dots,N)$：赌徒在开始时有i元条件下，他的财富最终到N元的概率，即财富到达0之前先到达N元的概率

求解：

- 首先注意到边缘条件：$P_0=?$ ，$P_N=?$
- 通过对初始第一次赌博的结果取条件，有

$$P_i=pP_{i+1}+qP_{i-1}, i=1,2,\dots,N-1$$

- 由于$p+q=1$，$pP_i+qP_i=pP_{i+1}+qP_{i-1}$

$$p(P_{i+1}-P_i)=q(P_i-P_{i-1})$$

  - 有$(P_{i+1}-P_i)=\frac{q}{p}(P_i-P_{i-1})=\left(\frac{q}{p}\right)^i(P_1-P_0)=\left(\frac{q}{p}\right)^i P_1$
  - 得到$P_i-P_1=(P_i-P_{i-1})+(P_{i-1}-P_{i-2})+\cdots=$

    $P_1[\left(\frac{q}{p}\right)+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}]$

7.1.1赌徒问题

得到：

- $$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} P_1, 若\frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1, 若\frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

由$P_N = 1$得到：

- $$P_1 = \begin{cases} \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}, 若\frac{q}{p} \neq 1 \\ 1/N, 若\frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

最终结果：

- $$P_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, 若\frac{q}{p} \neq 1 \\ i/N, 若\frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

7.1.1赌徒问题

进一步思考：

- $$\lim_{N\to\infty} P_i \to \begin{cases} 1-\left(\frac{q}{p}\right)^i, 若p>0.5 \\ 0, \quad\quad 若p\le 0.5 \end{cases}$$

  - 若$p>0.5$, 则存在一个正概率，赌徒的财富将无限增长

  - 若$p\le 0.5$, 则赌徒将以概率1在对阵一个无限富有的对手时破产

7.1.2 赌徒问题-例题

- **例4.28：** 假设杰伦和俊杰在杰伦奶茶店扔硬币，扔得离墙更近的人赢得一枚硬币。杰伦玩的更好，每次以概率0.6获胜。（a）若杰伦以5枚硬币开始，而俊杰以10枚硬币开始，问杰伦让俊杰输光的概率是多少？（b）若杰伦以10枚硬币开始，而俊杰以20枚开始呢？

求解：

赌徒问题识别：（a） $i = 5, N = 15, p = 0.6$

(b) $i = 10, N = 30, p = 0.6$

- $P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, 若 \dfrac{q}{p} \neq 1 \\ i/N, 若 \dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$
- $P_5 = 0.87$； $P_{10} \approx 0.98$

7.1.3 赌徒问题拓展-药品检验

- 药品检验：假设两种新药，药品i有治愈率P_i, $\mathrm{i}=1,2$,其含义为每个用药品i治疗的病人将以概率P_i被治愈。然而，治愈率未知。目标是：确定$P_1 > P_2$, 还是$P_2 > P_1$.
- 考察如下检验:成对病人相继地随机接受治疗1和2。每对的结果可观测到，在一种药治愈的累计人数超过另一种药治愈的累计人数 M人 时，检验停止。用数学公式表示：

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{若在第}j\text{对，用药品1的病人被治愈} \\ 0, \quad\quad \text{其他情形} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, \text{若在第}j\text{对，用药品2的病人被治愈} \\ 0, \quad\quad \text{其他情形} \end{cases}$$

- 检验于N对后停止：N是使得

$$(X_1 + \cdots + X_n) - (Y_1 + \cdots + Y_n) = (+/-)M$$

成立的首个n。

- 若上式结果为 $+M$, 则$P_1 > P_2$；若为$-M$,则$P_2 > P_1$.
  - ➢ 具体问题：$P(\text{得到判断错误}|P_1 > P_2)$

7.1.3 赌徒问题-药品检验

理解检验过程：

每一组有4种可能结果.

组	治1	治2			组内差	概率	治1总数	治2总数	总数差
1	✓	×	$X_1=1$	$Y_1=0$	1	$P_1(1-P_2)$	$1\ (X_1)$	$0\ (Y_1)$	1
2	✓	✓	$X_2=1$	$Y_2=1$	0	$P_1\cdot P_2$	$2\ (X_1+X_2)$	$1\ (Y_1+Y_2)$	1
3	×	✓	$X_3=0$	$Y_3=1$	-1	$(1-P_1)P_2$	$2\ (X_1+X_2+X_3)$	$2\ (Y_1+Y_2+Y_3)$	0
4	×	×	$X_4=0$	$Y_4=0$	0	$(1-P_1)(1-P_2)$	$2\ (X_1+X_2+X_3+X_4)$	$2\ (Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)$	0
5	×	✓	$X_5=0$	$Y_5=1$	-1		$2\ (X_1+\cdots+X_5)$	$3\ (Y_1+\cdots+Y_5)$	-1

绝对值超过 M 停.

7.1.3 赌徒问题-药品检验

理解问题：

- $P(\text{得到错误判断}|P_1 > P_2)$可视为一种1类错误
  - 假设（$P_1 > P_2$）是对的条件下，拒绝假设的概率

转化为赌徒问题：

- 直接构造赌徒问题：赌徒开始有0元（治愈数一样，都为0），想达到上述错误结果（即治疗2赢），需要治愈数差值到达M前，先到达$-M$
  - 这是以治疗1为视角的，治疗1为赌徒，赌徒输掉的概率
  - 试验（即一组）进行一次（赌徒赌一次），治愈数差值可能 +1，+0，−1，分别有各自概率q_1, q_0, q_{-1}

7.1.3 赌徒问题-药品检验

先求一次试验的结果概率：

- 一次试验共有四种可能结果：
  - 结果1：{1治愈，2未治愈}，　概率$P_1(1-P_2)$
  - 结果2：{1治愈，2治愈}，　概率P_1P_2
  - 结果3：{1未治愈，2治愈}，　概率 $(1-P_1)P_2$
  - 结果4：{1未治愈，2未治愈}，　概率$(1-P_1)(1-P_2)$

- 试验结果对应的单次试验带来的新治愈数差值
  - $$\begin{cases} +1, & q_1 = P_1(1-P_2) \\ +0, & q_0 = P_1P_2 + (1-P_1)(1-P_2) \\ -1, & q_{-1} = P_2(1-P_1) \end{cases}$$

7.1.3 赌徒问题-药品检验

赌徒问题具体构建:

- q_1赢1个单位，q_0赢0单位，q_{-1}赢-1个单位，求的是开始有0元，在增加到M前减少到$-M$的概率。
- 以$R_i(i=-M,-(M-1),\dots,M)$记赌徒在开始时有i元且他的财富，在$-M$之前，先到M元的概率
  - 这是赌徒问题中最终胜利的概率
- 本题要求的是$1-R_0$
- 边界条件：$R_{-M}=0, R_M=1$
- 通过对初始第一次赌博的结果取条件(全概率公式)，有
  $R_i=q_1R_{i+1}+q_0R_i+q_{-1}R_{i-1}, i=-(M-1),\dots,M-1$
- 可得:
  $$R_i=\frac{q_1}{1-q_0}R_{i+1}+\frac{q_{-1}}{1-q_0}R_{i-1},, i=-(M-1),\dots,M-1$$

7.1.3 赌徒问题-药品检验

- 令：$p=\frac{q_1}{1-q_0}$, $q=\frac{q_{-1}}{1-q_0}$
- $R_i-R_{-(M-1)}=R_{-(M-1)}[\left(\frac{q}{p}\right)+\cdots+\left(\frac{q}{p}\right)^{i+(M-1)}]$
  - 注意到$R_{-(M-1)}$与经典赌徒问题的P_1角色一致

- 得到：$R_i=\begin{cases}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i+(M-1)+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}R_{-(M-1)}, 若\frac{q}{p}\neq 1\\(i+M-1+1)R_{-(M-1)}, 若\frac{q}{p}=1\end{cases}$,

由$R_M=1$可得：

- $R_{-(M-1)}=\begin{cases}\frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^{2M}}, 若\frac{q}{p}\neq 1\\1/2M, 若\frac{q}{p}=1\end{cases}$

7.1.3 赌徒问题-药品检验

所以：

- $R_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{i+(M-1)+1}}{1-(q/p)^{2M}}, 若\dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{i+M}{2M}, 若\dfrac{q}{p} = 1 \end{cases},$
- $R_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{M}}{1-(q/p)^{2M}}, 若\dfrac{q}{p} \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, 若\dfrac{q}{p} = 1 \end{cases}$
- $1 - R_0$可得

具体例子：

① $P_1 = 0.6$， $P_2 = 0.4$， $M = 5$时，不正确的概率0.017；

② 当$M = 10$, 减少为0.0003.

7.1.4 暂态停留的平均时间（4.6节）

问题驱动例子：

- 赌徒问题中，$\{1,2,\ldots N-1\}$是暂态的，那么在这些暂态停留的平均时间如何呢？

问题详细描述：

- 考察一个有限状态马氏链的暂态集$\boldsymbol{T}=\{1,2,\ldots,t\}$. 令

$$\boldsymbol{P_T}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{t1} & P_{t2} & \cdots & P_{tt} \end{bmatrix}$$

为转移矩阵的子矩阵；

  - ➢ 注意：某些行的和可能小于1

- 对于暂态i和j, 以

$$s_{ij}=E[\text{开始在状态}i\text{的马氏链访问状态}j\text{的时间(次数)}]$$
$$=E[\text{马氏链访问状态j的次数}|\mathrm{X_0=i}]$$

记从状态i开始的马氏链在状态j停留的平均时间，求s_{ij}？

7.1.4 暂态停留的平均时间

s_{ij}的表达式求解

- 要点1：先考虑出发位置，状态$i = j$吗？
  - 定义示性变量$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 若 i = j \\ 0, & 其他情形 \end{cases}$

7.1.4 暂态停留的平均时间

s_{ij}的表达式求解

- 要点2：取条件于初始（第一步）转移，得到表达式：

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} s_{kj} P_{ik}$$
$$= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{t} s_{kj} P_{ik}$$

  - 第一行：

$$E[\text{马氏链访问状态j的次数}|\mathrm{X}_0 = \mathrm{i}]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{马氏链访问状态j的次数}|X_1 = k, \mathrm{X}_0 = \mathrm{i}] P_{ik}$$

  - 第二行：
    - 为何能剔除常返态出发的s_{kj}？

7.1.4 暂态停留的平均时间

s_{ij}表达式的矩阵形式：

$$s_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{t} s_{kj} P_{ik}$$

- 令$\boldsymbol{S}$记分量为$s_{ij}(i,j = 1, \dots, t)$的矩阵。即

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt} \end{bmatrix}$$

- 公式可表达为矩阵形式：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}$$

  - 其中I是t阶的单位矩阵。上面的方程可求解$\boldsymbol{S}$：

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{T}})^{-1}$$

    - 可系统求解，从任意暂态状态起始，在某暂态停留的平均时间

7.1.5 暂态停留的平均时间–例子

- 例4.30：考察$p = 0.4$ 和 $N = 7$的赌徒破产问题。开始有3个单位财产。求

（a）赌徒有5个单位财产的期望总时间

（b）赌徒有2个单位的期望总时间

- ➢ 注意到：

- ➢ $$P_T = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

- ➢ $$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.61 & 1.02 & 0.63 & 0.37 & 0.19 & 0.08 \\ 1.54 & 2.56 & 1.58 & 0.92 & 0.48 & 0.19 \\ 1.42 & 2.37 & 3.00 & 1.75 & 0.92 & 0.37 \\ 1.25 & 2.08 & 2.63 & 3.00 & 1.58 & 0.63 \\ 0.98 & 1.64 & 2.08 & 2.37 & 2.56 & 1.02 \\ 0.59 & 0.98 & 1.25 & 1.42 & 1.54 & 1.61 \end{bmatrix}$$

7.1.6 最终到达某暂态的概率

- 最终到达某暂态的概率：对于$i \in T, j \in T, f_{ij}$等于给定初始状态i，最终转移到状态j的概率，与s_{ij}的关系式如下：

$$f_{ij} = \frac{s_{ij} - \delta_{ij}}{s_{jj}}$$

推导：

- $s_{ij} = E[\text{在j的时间}|\text{开始在}i,\text{最终能转移到}j]f_{ij} + E[\text{在j的时间}|\text{开始在}i,\text{最终不能转移到}j]\left(1 - f_{ij}\right)$

$$= \left(\delta_{ij} + s_{jj}\right)f_{ij} + \delta_{ij}\left(1 - f_{ij}\right)$$

$$= \delta_{ij} + f_{ij}s_{jj}$$

- 所以：

$$f_{ij} = \frac{s_{ij} - \delta_{ij}}{s_{jj}}$$

7.1.6 最终到达某暂态的概率

- 例**4.31**：在例4.30中，赌徒最终能达到财富1单位的概率是多少？
  - 利用公式

$$f_{ij} = \frac{s_{ij} - \delta_{ij}}{s_{jj}}$$

  - 注意到：$s_{31} = 1.42$，$s_{11} = 1.61$，$\delta_{31} = 0$
  - 所以：$f_{31} = 0.8797$

  - 思考题：能否转化为赌徒问题呢？

7.2 讲义2&7-应用例子
(课本3.6.1 & 3.6.6 & 4)

7.2.1 列表模型(课本3.6.1)

- 考虑n个元素$e_1, \dots, e_n$,一个有序列表。在单位时间对其中某元素e_i有需求的概率P_i独立于过去的情形，有$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$。这个元素被需求后，它就移到了列表首位。
  - 例：若e_3被需求$\rightarrow e_3, e_1, e_2, e_4$
  - 应用:计算机查找，时间与位置成正比，此法效率较高。
- 目标:计算经过长时间运作，被需求元素的位置的期望。

7.2.1 列表模型(课本3.6.1)

求解：

- E[被需求元素的位置] $= \sum_{i=1}^{n} E[位置|选到e_i]P_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[e_i的位置|选到e_i]P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[e_i的位置]P_i$$

7.2.1 列表模型(课本3.6.1)

详细考虑e_i的位置：

- e_i的位置$= 1 + \sum_{j \neq i} I_j$
  - 若e_j在e_i前面，$I_j = 1$
  - 若e_j在e_i后面，$I_j = 0$

- $E[e_i\text{的位置}] = 1 + \sum_{j \neq i} E[I_j] = 1 + \sum_{j \neq i} P\{e_j\text{在}e_i\text{前}\}$
- $P\{e_j\text{在}e_i\text{前}\} = P\{\text{最近需求}e_j \mid \text{最近需求为}e_i\text{或}e_j\} = \frac{P_j}{P_i + P_j}$
  - 注意条件：长时间运作之后

最终求得：

- $E[\text{需求元素的位置}] = 1 + \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j \neq i} \frac{P_j}{P_i + P_j}$

7.2.2 列表模型的马氏链构建

- **第4章课后习题43**：每天有n个可能元素之一被需求，第i个元素被需求的概率为$P_i, i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} P_i$. 这些元素总是排成有序的列表，并规定如下，所选的元素被移至列表的最上面，而其他所有元素的相对位置都保持不变。定义在任意时间的状态为该时刻的列表排序，注意到模型有$n!$个可能的状态。

（1）论证所定义的模型为马氏链

（2）对于任意状态$(i_1, \dots, i_n)$，以$\pi(i_1, \dots, i_n)$记其极限概率。为了状态是$i_1, \dots, i_n$, 最后一个需求必须是i_1, 而最后一个非i_1的需求必须是i_2, 而最后一个非i_1且非i_2的需求必须是i_3, 等等。因此直观可表示为：

$$\pi(i_1, \dots, i_n) = P_{i_1} \frac{P_{i_2}}{1-P_{i_1}} \frac{P_{i_3}}{1-P_{i_1}-P_{i_2}} \cdots \frac{P_{i_{n-1}}}{1-P_{i_1}-\cdots-P_{i_{n-2}}}$$

我们可以在$n=3$的时候验证这个式子确实是极限概率。

7.2.2 列表模型的马氏链构建

实例验证：

- 3个可能元素，需要一个6个状态的马氏链

- $$P = \begin{array}{c} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & P_1 & P_2 & 0 & P_3 & 0 \\ P_1 & 0 & P_2 & 0 & 0 & P_3 \\ P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & P_3 \\ 0 & P_1 & 0 & P_2 & P_3 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 \end{bmatrix}$$

- 按照定理4.1 直接验证等式即可

7.2.3 不带左跳的随机徘徊(课本3.6.6)

- 设$X_i(i \geq 1) = -1,0,1 \ldots$为独立同分布随机变量。令$P_j = P\{X_i = j\}$,并假定$\sum_{j=-1}^{\infty} P_j = 1$.记

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

序列$\{S_n(n \geq 0)\}$为不带左跳的随机徘徊(即最多下降1)。

- $\{S_n(n \geq 0)\}$是马氏链吗?

- 应用:赌徒参加赌局,每局最多输1元,S_n为n局后总所得
  - 1元:可视为参与赌局要付出的钱
  - 一般有:$E[X_i] < 0$,即赌局不公平,假定$E[X_i] = -v$

7.2.3 不带左跳的随机徘徊(课本3.6.6)

- 感兴趣的一系列问题：
  - 问题1：长远看总所得为多少？（假定可以无限借钱）
  - 问题2：记开始时有0元，平均多少次赌局后，会输 k 元?
  - 问题3：问题2对应的赌局数的分布？
  - 问题4：长远看，总所得为$-k$的次数有多少？
  - 问题5：倒霉蛋赌徒，总所得S_n持续为负值的概率？
  - 问题6：后悔的赌徒，最后一次仅输k元的时刻？

7.2.3 不带左跳的随机徘徊(课本3.6.6)

问题1：长远看总所得为多少？

- 概统问题：当$n \to \infty, S_n \to ?$

- 由强大数定理,$\frac{S_n}{n} \to E[X_i] < 0$
- 所以$S_n \to -\infty.$
- 长远看，赌徒会输无限多

7.2.3 不带左跳的随机徘徊(课本3.6.6)

问题2：记开始时有0元，平均多少次赌局后，会输k元？

- 定义：对$k > 0$,以T_{-k}记从总财富为0开始，赌徒首次输k时已玩的局数，即

$$T_{-k} = \min\{n: S_n = -k\}。$$

- 统计学问题：$E[T_{-k}]$？顺便求$Var(T_{-k})$？

- 注意到：$T_0 = 0$
- 由问题1中：$n \to \infty, S_n \to -\infty.$
  - 可知 $T_{-k} < \infty.$

7.2.3 不带左跳的随机徘徊

- 要点：$T_{-1}, T_{-2}-T_{-1}, \ldots T_{-k}-T_{-(k-1)}$ $i.i.d.$
  - 探讨T_{-1}与$T_{-2}-T_{-1}$之间的独立性与同分布性即可，其他的独立同分布性，类似可得
  - 独立性：T_{-1} 由$X_1, X_2, \ldots X_{T_{-1}}$得到；$T_{-2}-T_{-1}$由$X_{T_{-1}+1}, X_{T_{-1}+2}, \ldots X_{T_{-1}+T_{-2}}$得到；由$X_i$之间独立性得到$T_{-1}$与$T_{-2}-T_{-1}$之间的独立性

  - 同分布性：注意到

$$T_{-1}=\min\{n>0, \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i=-1\}$$

$$T_{-2}-T_{-1}=\min\{n>0, \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i=-1\}$$

    - 注意$T_{-2}-T_{-1}$表示，我们再利用X_i们首次得到一个总和-1，所以可以表示为$\min\{n>0, \sum_{i=1}^{n} X_i=-1\}$
    - 注意为了方便理解，这里notation是有些混用的！

7.2.3 不带左跳的随机徘徊

- 由：$T_{-k}=T_{-1}+\sum_{j=2}^{k}(T_{-j}-T_{-(j-1)})$
- 并基于：$T_{-1},T_{-2}-T_{-1},\ldots T_{-k}-T_{-(k-1)}$ $i.i.d.$得到：

$$E[T_{-k}]=kE[T_{-1}],\ Var(T_{-k})=kVar(T_{-1})$$

求$E[T_{-1}]$即可：

- $E[T_{-1}|X_1]=E\left[1+T_{-(X_1+1)}\right]=1+(X_1+1)E[T_{-1}]$

- 条件期望公式：$E[T_{-1}]=\frac{1}{-E[X]}=\frac{1}{v}$
- 所以，$E[T_{-k}]=\frac{k}{v}$

7.2.3 不带左跳的随机徘徊

条件方差公式求$Var(T_{-1})$：

- $Var(T_{-1}) = E[Var(T_{-1}|X_1)] + Var[E[T_{-1}|X_1]]$
  - 其中$Var(T_{-1}|X_1) = Var\left(1 + T_{-(X_1+1)}\right) = (X_1 + 1)Var(T_{-1})$
  - $Var(T_{-k}) = \frac{k\sigma^2}{v^3}$

7.2.4 击中时间定理

问题3：问题2对应的赌局数的分布 T_{-k} 的分布？

- 命题3.3-击中时间定理：

$$P\{T_{-k}=n\}=\frac{k}{n}P\{S_n=-k\},\qquad n\geq 1$$

  - $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 分布已知，T_{-k}分布可得

证明(数学归纳法):

- 第一步：验证$n=1$时，$k=1,k>1$都成立
  - $P\{T_{-1}=1\}=P\{S_1=-1\}=P_{-1}$
  - $P\{T_{-k}=1\}=0=kP\{S_1=-k\}$

7.2.4 击中时间定理

- 第二步：假设对所有$n > 1$，都有，对$k > 0$

$$P\{T_{-k} = n-1\} = \frac{k}{n-1} P\{S_{n-1} = -k\}$$

通过对X_1取条件验证：

$$P\{T_{-k} = n\} = \frac{k}{n} P\{S_n = -k\}$$

- $P\{T_{-k} = n\} = \sum_{j=-1}^{\infty} P\{T_{-k} = n | X_1 = j\} P\{X_1 = j\}$
  - 确定$P\{T_{-k} = n | X_1 = j\}$很重要

7.2.4 击中时间定理

要点： $P\{T_{-k}=n|X_1=j\}=P\{T_{-(k+j)}=n-1\}$

- $\{T_{-k}=n\}$ 事件代表总财富为0开始，在时刻n时首次得到总财富为$S_n=-k$
- $\{T_{-k}=n|X_1=j\}$ 代表从总财富为0开始，已知第1局游戏出现$X_1=j$，我们想在$(n-1)$个时刻后，首次得到总财富$S_n=-k$
- 即，我们希望时刻 $2,3,\dots,n$ 新得到的总财富为$S_n-X_1=-(k+j)$

即，等价于

- $\{T_{-(k+j)}=n-1\}$，即总财富以0元开始，$(n-1)$个时刻后，总财富首次达到$-(k+j)$
  - 因为X_i之间完全独立同分布

7.2.4 击中时间定理

代入可得：

- $P\{T_{-k}=n\}=\sum_{j=-1}^{\infty}P\{T_{-k}=n|X_1=j\}P\{X_1=j\}$
  $=\sum_{j=-1}^{\infty}P\{T_{-(k+j)}=n-1\}P\{X_1=j\}$
  $=\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{k+j}{n-1}P\{S_{n-1}=-(k+j)\}P\{X_1=j\}$
  - 利用数学归纳法对$n-1$情形的假设条件

7.2.4 击中时间定理

要点：$P\{S_{n-1}=-(k+j)\}=P\{S_n=-k|X_1=j\}$

- $P\{S_n=X_1+\sum_{i=2}^{n}X_i=-k|X_1=j\}=P\{S_{n-1}=-(k+j)\}$
- 再次注意:X_i独立同分布

代入可得：

- $P\{T_{-k}=n\}=\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{k+j}{n-1}P\{S_n=-k|X_1=j\}\ P\{X_1=j\}$

$$=\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{k+j}{n-1}P\{S_n=-k,\ X_1=j\}$$

$$=\mathrm{P}\{\mathrm{S_n}=-\mathrm{k}\}\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{k+j}{n-1}P\{X_1=j|S_n=-k\}$$

$$=\mathrm{P}\{\mathrm{S_n}=-\mathrm{k}\}\{\frac{\mathrm{k}}{n-1}+\sum_{j=-1}^{\infty}\frac{j}{n-1}P\{X_1=j|S_n=-k\}\}$$

$$=\mathrm{P}\{\mathrm{S_n}=-\mathrm{k}\}\{\frac{\mathrm{k}}{n-1}+\frac{1}{\mathrm{n}-1}\mathrm{E}[\mathrm{X}_1|\mathrm{S_n}=-\mathrm{k}]\}$$

7.2.4 击中时间定理

- 要点：$E[S_n | S_n = -k] = -k = nE[X_1|S_n = -k]$
  - $E[X_1|S_n = -k] = -\frac{k}{n}$
  - 再次注意:X_i独立同分布

代入得到最终结果：

- $P\{T_{-k} = n\} = \frac{k}{n}P\{S_n = -k\}$
  - 结论得证

7.2.5 初始时刻后随机徘徊总是负值的概率

问题4：$E[\text{赌徒财富为}-k\text{的总次数}]$?

先把问题算式化：

- 令事件$S_n=-k$的示性随机变量为I_n：

$$I_n=\begin{cases}1, \text{若}S_n=-k\\ 0, \text{若}S_n\neq -k\end{cases}$$

- 注意到

$$\text{赌徒财富为}-k\text{的总次数}=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

- $E[\text{赌徒财富为}-k\text{次数}]=E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n]=\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n=-k\}$
  - 问题转化为求解$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n=-k\}$：

7.2.5 初始时刻后随机徘徊总是负值的概率

求解$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = -k\}$:

- 已得到的$E[T_{-k}]$ + 击中时间定理:

$$E[T_{-k}] = \frac{k}{v} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{T_{-k} = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} kP\{S_n = -k\}$$

- k提出来，可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = -k\} = \frac{1}{v} = \frac{1}{E[X]}$$

最终求得:

$$E[\text{赌徒财富为} - k\text{次数}] = \frac{1}{v}$$

7.2.5 初始时刻后随机徘徊总是负值的概率

问题5：倒霉蛋赌徒，总所得S_n持续为负值的概率？

- 统计问题：求α，α记初始时刻后随机徘徊总是负值的概率

$$\alpha = P\{对一切n \geq 1有S_n < 0\}$$

解决方法：重新考虑 赌徒财富为$-k$的总次数

- 首先注意，赌徒财富S_n必然会到一次$-k$，因为$S_n \to -\infty$
- 从S_n第一次击中$-k$这一时刻，开始考虑起
  - S_n不再击中$-k$的概率为α，因为要保证{对一切m ≥ 这一时刻+1，所有新的财富的和< 0}，与α中事件一样
  - S_n再击中$-k$的概率为$(1-\alpha)$
  - S_n会第二次击中$-k$ 与 S_n不会第二次击中$-k$ 可以视为一次伯努利试验，成功概率（不会击中）为 α
  - S_n会第三次击中$-k$ 与 S_n不会第三次击中$-k$ 可以视为一次伯努利试验 . 成功概率（不会击中）为 α

7.2.5 初始时刻后随机徘徊总是负值的概率

- 那这些伯努利试验是独立的吗？
  - 再次回忆，X_i间完全独立同分布
  - S_n会否第二次击中$-k$ 仅由 第一次击中$-k$ 之后的时刻 到 第二次击中$-k$的时刻的 X_i 决定
  - S_n会否第三次击中$-k$ 仅由 第二次击中$-k$ 之后的时刻 到 第三次击中$-k$的时刻的 X_i 决定
  - 所以保证了伯努利试验的独立性

- 所以，赌徒财富为$-k$的总次数可以理解为参数α的几何随机变量
  - 即直到成功发生，$\mathrm{S_n}$不击中$-k$ 这个伯努利成功事件
  - 注意：要加上S_n第一次击中$-k$这必然的一次
- 即：$E[\text{赌徒财富为} - k\text{的次数}] = \dfrac{1}{\alpha}$
- 所以，$\alpha = v$

7.2.6 最后一次击中$-\boldsymbol{k}$的时刻

问题6：后悔的赌徒，最后一次仅输k元的时刻L_{-k}？

想求：L_{-k}的期望，需要知道L_{-k}的分布

要点：

- $\{L_{-k}=n\}$是这样的事件$\{S_n=-k$ 且 $\{$对一切$m\geq$ n+1有新得到的财富的和 $<0\}\}$
  - $\{$对一切$m\geq$ n+1有新得到的财富的和 $<0\}$ 是刚刚学习的α概率中的事件
  - 并注意到$\{S_n=-k\}$与$\{$对一切$m\geq$ n+1有新得到的财富的和 $<0\}$ 独立
- 最后一次击中$-k$的时刻L_{-k}：

$$P\{L_{-k}=n\}=P\{S_n=-k\}\alpha=P\{S_n=-k\}v$$

7.2.6 最后一次击中$-\boldsymbol{k}$的时刻

最后时刻L_{-k}的期望是：

- $E[L_{-k}] = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{L_{-k} = n\}$

$= v\sum_{n=0}^{\infty} nP\{S_n = -k\}$ 上页公式

$= v\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{n}{k}P\{T_{-k} = n\}$ 击中时间定理

$= \frac{v}{k}\sum_{n=0}^{\infty} n^2P\{T_{-k} = n\}$

$= \frac{v}{k}E\left[T_{-k}^2\right]$

$= \frac{v}{k}\{E^2[T_{-k}] + Var[T_{-k}]\}$

$= \frac{k}{v} + \frac{\sigma^2}{v^2}$