时间序列分析（TIME SERIES ANALYSIS）

主讲：吴尚
复旦大学管理学院统计与数据科学系

ARCH(1)模型的预测

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \omega + \alpha r_t^2$$

$$\sigma_{t+h|t}^2 = E\left[r_{t+h}^2 \middle| r_t, r_{t-1}, \ldots\right]$$

$$= E\left[E\left[\sigma_{t+h|t+h-1}^2 \varepsilon_{t+h}^2 \middle| r_{t+h-1}, r_{t+h-2}, \ldots\right] \middle| r_t, r_{t-1}, \ldots\right]$$

$$= E\left[\sigma_{t+h|t+h-1}^2 E\left[\varepsilon_{t+h}^2 \middle| r_{t+h-1}, r_{t+h-2}, \ldots\right] \middle| r_t, r_{t-1}, \ldots\right]$$

$$= E\left[\sigma_{t+h|t+h-1}^2 \middle| r_t, r_{t-1}, \ldots\right] = E\left[\omega + \alpha r_{t+h-1}^2 \middle| r_t, r_{t-1}, \ldots\right]$$

$$= \omega + \alpha \sigma_{t+h-1|t}^2$$

ARCH模型的建模

步骤（1）：通过检验数据的序列相关性建立一个均值方程，如有必要，对收益率序列建立一个计量经济模型（如ARMA）来消除任何线形依赖；

步骤（2）：对均值方程的残差进行ARCH效应检验；

步骤（3）：如果具有ARCH效应，则建立波动率模型；

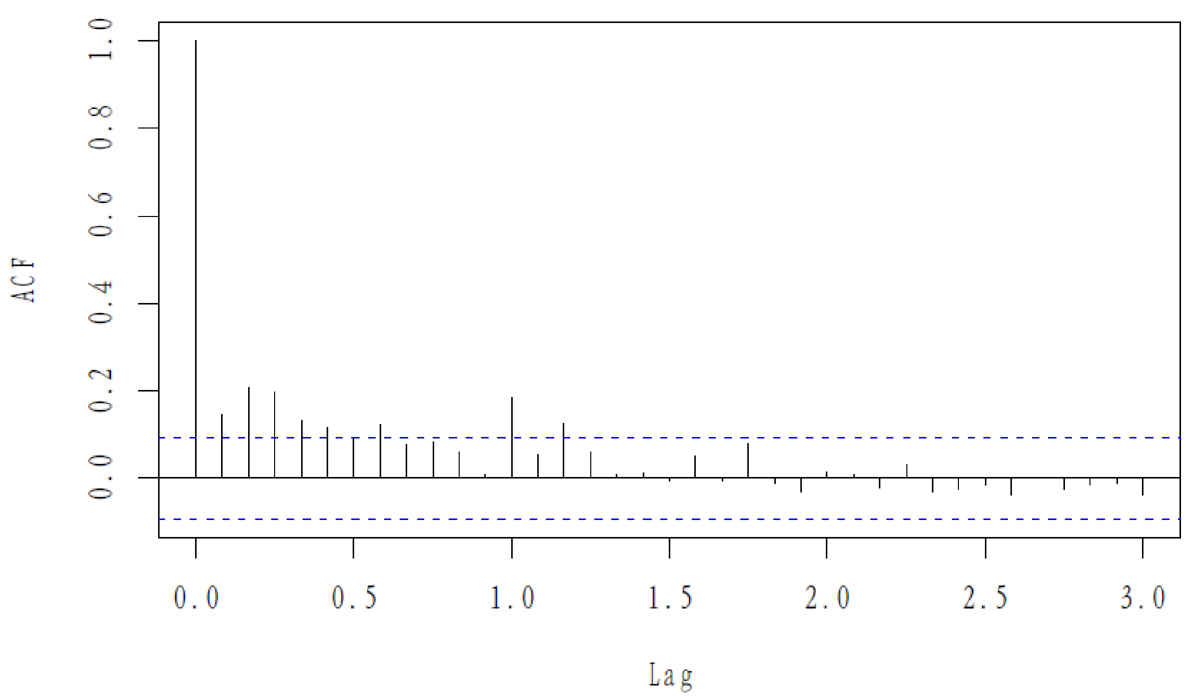
步骤（4）：检验拟合的模型，如有必要则进行改进。

例子

- 使用1973年到2009年Intel公司股票的月对数收益率数据。

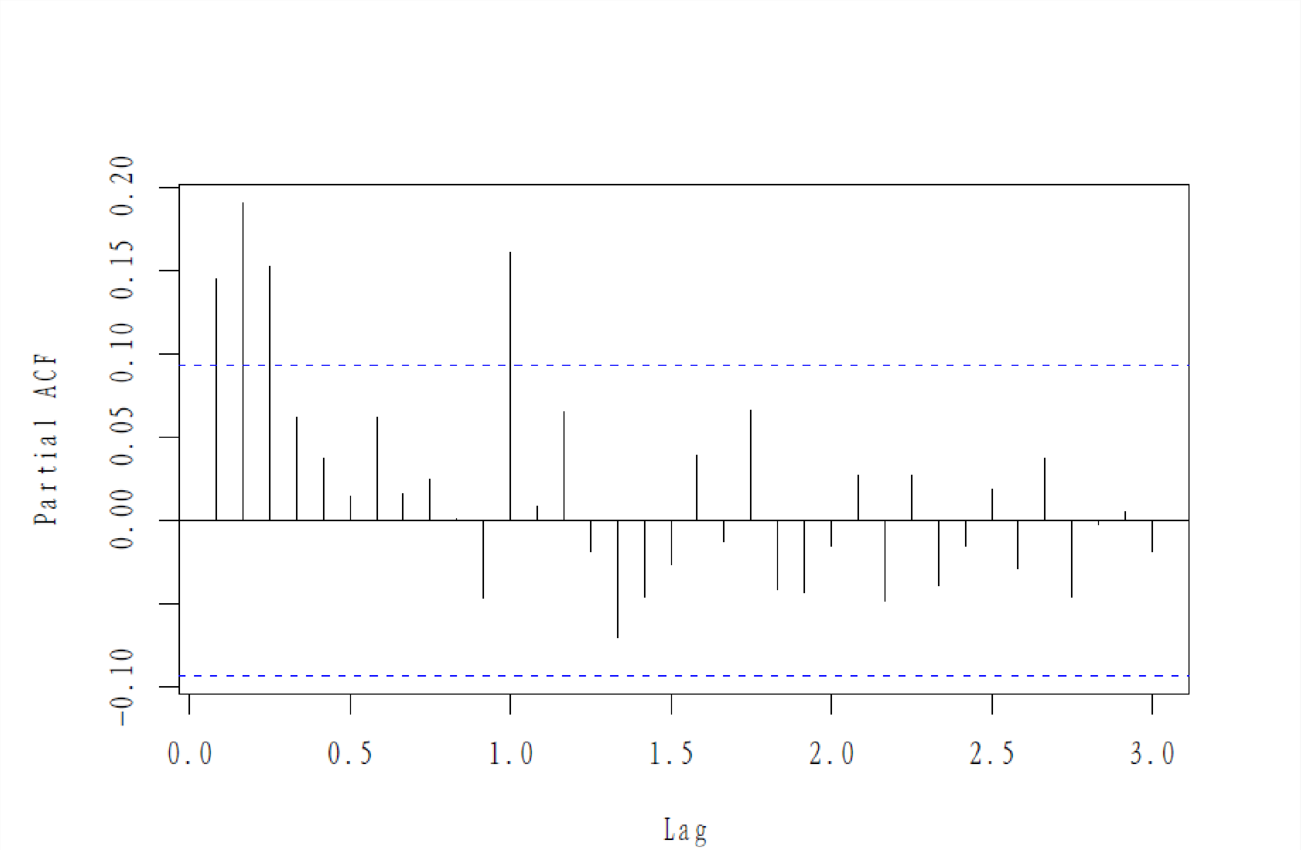
- 序列的均值模型是常数均值。考虑减去均值之后的残差的平方的序列相关性，进行ARCH效应检验证明有ARCH 效应。

例子



Intel 股票数据中心化的残差平方的ACF

例子



Intel 股票建模中心化的残差平方的PACF

例子

考虑对原序列$\{Y_t\}$拟合均值+ARCH(3)模型：

$$Y_t = \mu + r_t$$
$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \alpha_3 r_{t-3}^2$$

```
mod1 <- garchFit( ~ 1 + garch(3,0),
data=c(ts.intel), trace=FALSE)
summary(mod1)
```

```
Coefficient(s):
      mu     omega    alpha1    alpha2    alpha3
0.012567  0.010421  0.232889  0.075069  0.051994
```

例子

alpha1	0.232889	0.111541	2.088	0.0368	*
alpha2	0.075069	0.047305	1.587	0.1125	
alpha3	0.051994	0.045139	1.152	0.2494	

由于只有α_1显著不为0，考虑拟合均值+ARCH(1)模型。

```
mod2 <- garchFit( ~ 1 + garch(1,0), data=c(ts.intel),
trace=FALSE)
summary(mod2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
mu	0.013130	0.005318	2.469	0.01355	*
omega	0.011046	0.001196	9.238	< 2e-16	***
alpha1	0.374976	0.112620	3.330	0.00087	***

GARCH模型

- 广义的ARCH模型（Generalized autoregressive conditionally heteroscedastic）是由Engle的学生Bollerslev（1986）和Taylor（1986）各自独立的发展起来的。GARCH模型允许条件方差依赖自身的前期，最简单为GARCH(1,1),

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t \,,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2$$

- 类似地，GARCH(p, q)

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j|t-j-1}^2$$

GARCH模型的优点

$$
\begin{aligned}
\sigma_{t|t-1}^2 &= \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2 \\
&= \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1(\omega + \alpha_1 r_{t-2}^2 + \beta_1(\omega + \alpha_1 r_{t-3}^2 \\
&\quad + \beta_1(\ldots \\
&= \frac{\omega}{1-\beta_1} + \alpha_1(r_{t-1}^2 + \beta_1 r_{t-2}^2 + \beta_1^2 r_{t-3}^2 + \ldots) \\
&\triangleq \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1}^2 + \gamma_2 r_{t-2}^2 + \ldots\ldots \\
&= ARCH(\infty)
\end{aligned}
$$

GARCH模型仅仅包含三个参数就可以表达ARCH存在的无穷多个参数的方程。

GARCH的性质

- 令$\eta_t = r_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2 = \sigma_{t|t-1}^2(\varepsilon_t^2 - 1)$，则$\{\eta_t\}$是不相关序列，发现$\{r_t^2\}$为ARMA(max(p, q), p)模型。

- 在GARCH模型中，无条件方差为

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)}(\alpha_i + \beta_i)},$$

$$\omega > 0, \sum_{i=1}^{\max(p,q)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$$

GARCH模型拟合步骤

- 均值模型拟合
- 残差自相关性检验
- 残差ARCH效应检验
- GARCH模型识别
- 参数估计
- 残差检验与模型优化

GARCH模型识别

- 根据残差平方（或绝对值）的EACF来定阶;
- 若ARCH(q)中q太大，比如q大于7时，则选择GARCH(p, q);
- 选择AIC或BIC评分最小的模型作为最优的GARCH模型;
- 对于金融时间序列，一般选择GARCH(1, 1)就够了。

GARCH(1,1)模型参数估计

- 令$\sigma_{1|0}^2 = \omega/(1-\alpha-\beta)$, 则

$$\sigma_{2|1}^2 = \omega + \alpha r_1^2 + \beta\sigma_{1|0}^2,$$

同理可以求出所有条件方差。

- 假设新息服从正态分布，则条件密度函数为

$$f(r_t|r_{t-1},\dots,r_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t|t-1}^2}}\exp\left[-\frac{r_t^2}{2\sigma_{t|t-1}^2}\right]$$

- 则对数似然函数为

$$L(\omega,\alpha,\beta|\boldsymbol{r}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\{\log\left(\sigma_{t|t-1}^2\right) + r_t^2/\sigma_{t|t-1}^2\}$$

GARCH模型诊断

- 根据估计得到的参数，递推计算得到$\hat{\sigma}^2_{t|t-1}$，则标准残差被定义为

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t / \hat{\sigma}_{t|t-1}$$

- 可用QQ图或SW、JB检验对新息正态性进行检验。
- 由于参数估计的影响，残差平方的LB统计量不再渐近服从卡方分布，故引入广义混合检验统计量：

$$n \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} \hat{\rho}_{i,1} \hat{\rho}_{j,1}$$

- gBox(m1,method='squared') (or 'absolute')

GARCH模型的评价

- GARCH模型类似于对条件方差构造ARMA模型，相比于ARCH模型，可以用更简洁的模型结构拟合波动率的长期影响。

- GARCH 模型的出现，为大量的金融序列提供了有效的分析方法，它是迄今为止最常用、最便捷的异方差序列拟合模型。但大量的使用经验显示，它也存在一些不足。

GARCH模型的不足

- 条件方差非负的要求，导致对于参数有严格的约束：

$$\beta(B)\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha(B)r_t^2$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega^* + \psi(B)r_t^2$$
$$\psi(B) = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)}, \omega^* = \omega/\beta(1)$$

可以证明当且仅当$\omega^* \geq 0$且所有$\psi_j \geq 0$时，条件方差非负。

例：$p = 1.$

- 为了保证模型平稳，要求

$$\omega > 0, \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

GARCH模型的不足

- 扰动项是真实值与预测值之差。如果扰动项为正，说明真实值比预测值大，对于投资者而言就是获得超预期收益。如果扰动项为负，说明真实值比预测值小，对于投资者而言就是出现了超预期的亏损。
- 大量的实践经验显示，投资人在面对收益和亏损时的反应不是对称的。出现收益时，通常反应比较慢；出现亏损时，通常反应比较快。忽视这种信息的不对称性，有时会影响预测的精度。
- GARCH模型对正负扰动的反应是对称的，这意味着无论上一期的投资是收益还是亏损，不影响投资人的下一期投资状况，这与实际情况不符。

门限模型 (TGARCH)

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t$$

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}(\alpha_i + \gamma_i d_{t-i})r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j|t-j-1}^2$$

$$d_t = I(r_t < 0)$$

- 从该模型可以看出，正的r_{t-i}对条件方差$\sigma_{t|t-1}^2$的贡献为$\alpha_i r_{t-i}^2$，负的r_{t-i}对条件方差$\sigma_{t|t-1}^2$的贡献为$(\alpha_i + \gamma_i)r_{t-i}^2$.
- 当$\gamma_i > 0$时，负收益对条件方差的影响更大。

指数GARCH模型 (EGARCH)

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t$$

$$\ln\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p}\beta_j \ln\sigma_{t-j|t-j-1}^2$$

$$g(\varepsilon) = \phi\varepsilon + \gamma(|\varepsilon| - E|\varepsilon|), \alpha_1 = 1$$

- EGARCH模型中条件方差采用了自然对数，意味着条件方差必定非负；
- 可以处理非对称效应，$\varepsilon > 0$时$g(\varepsilon) = (\phi + \gamma)\varepsilon - \gamma E|\varepsilon|$，反之$g(\varepsilon) = (\phi - \gamma)\varepsilon - \gamma E|\varepsilon|$，正收益和负收益对方差的影响是不一样的；
- 当$\alpha_i > 0, \phi < 0, \gamma > 0$时，股市受负冲击要比正冲击引起更大的波动，具有杠杆效应。

IGARCH模型

- Nelson于1990年提出IGARCH模型。
- 把GARCH(p,q)模型的参数约束条件改写为

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1$$

- 对IGARCH模型而言，模型不平稳，无条件方差不存在。
- IGARCH模型适合于描述具有单位根特征（随机游走）的条件异方差。从理论角度认为，IGARCH现象可能会是波动率常有的水平移动所引起的。