随机过程
Stochastic Processes

讲义13：连续时间马氏链-2

目录

(课本第6章部分2)

13.1一般转移概率$P_{ij}(t)$

（课本6.4部分）

13.1.1. 利用$P_{ij}(t)$ 导出 P_{ij}, v_i

问题：如何用$P_{ij}(h)$ 导出 P_{ij}, v_i？

- 引理6.2：

(a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-P_{ii}(h)}{h} = v_i$,

(b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P_{ij}(h)}{h} = v_i P_{ij} = q_{ij}$，其中$i \neq j$

13.1.1. 利用$P_{ij}(t)$ 导出 P_{ij}, v_i

（a）的证明

- 当$h \to 0$,在时间h内有2次或以上的转移的概率是$o(h)$
  - 发生转移的时间服从指数分布， v_i为指数分布的速率
  - v_i是过程处于状态i时，离开状态i的速率

- 于是，过程在时间0处于状态i而在时间h不在状态i的概率，$1-P_{ii}(h)$，等于在时间h内发生一次转移的概率，加上关于h的某个无穷小的量。即

$$1-P_{ii}(h)=v_i h+o(h).$$

  - 关于$v_i h+o(h)$的理解，回忆泊松过程的定义1
- 所以有：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h}=v_i$$

13.1.1. 利用$P_{ij}(t)$ 导出 P_{ij}, v_i

（b）的证明：

- 进一步注意到，过程在时间h内由状态i转到状态j的概率，$P_{ij}(h)$，等于在这段时间中发生一个转移的概率，乘以这个转移是到状态j的概率，并加上关于h的某无穷小的量
- 即

$$P_{ij}(h) = \big(v_i h + o(h)\big) P_{ij} = v_i P_{ij} h + o(h)$$

  - $v_i h$描述离开状态i的概率，P_{ij}是离开后转向j的概率
- 所以

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = v_i P_{ij}.$$

- 证明中出现的这两条式子，是非常重要的式子，可以直接使用！

13.1.2. 瞬时转移速率 $q_{ij}=v_iP_{ij}$

引理6.2的衍生结论：

可定义瞬时转移速率q_{ij}：

$$q_{ij}=v_iP_{ij}$$

- q_{ij}可以理解为：过程处于状态i时往状态j转移的速率
  - 由 $P_{ij}(h)=v_iP_{ij}h+o(h)$ 可知
- q_{ij}可以看做v_i的一个子速率
  - v_i 是离开状态i的速率
  - P_{ij}是从状态i离开至状态j的概率

由q_{ij}可得到v_i,P_{ij}：

- $v_i=v_i\sum_j P_{ij}=\sum_j v_iP_{ij}=\sum_j q_{ij}$ 往各个状态转的速率和
- 以及，$P_{ij}=\dfrac{q_{ij}}{v_i}=\dfrac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$ 往各个状态转的速率占比

13.1.3. 连续时间马氏链的CK方程

- 引理6.3，CK方程：对一切$s \ge 0, t \ge 0$

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$$

推导：

➢ $P_{ij}(t+s) = P\{X(t+s) = j | X(0) = i\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j, X(t) = k | X(0) = i\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j | X(t) = k, X(0) = i\} P\{X(t) = k | X(0) = i\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s) = j | X(t) = k\} P\{X(t) = k | X(0) = i\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$

- $s = 0$时？ 仅$j = k$时，$P_{kj}(0) = 1$，否则$P_{kj}(0) = 0$
- $t = 0$时？ 只有$i = k$时，$P_{ik}(0) = 1$，否则 $P_{ik}(0) = 0$
  - ➢ 经常是我们的定解条件

13.1.4. $P_{ij}(t)$满足的微分方程

- **定理6.1-柯尔莫哥洛夫向后方程**：对一切状态i,j和时间$t \geq 0$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

推导

- 由引理6.3 可知

$$P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t)$$
$$= \sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t)$$

- 从而

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\sum_{k\neq i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t) - \left[\frac{1-P_{ii}(h)}{h}\right]P_{ij}(t)\right\}$$

- 假定可以将上式中的极限与求和交换次序(对所有连续时间马氏链均成立)，应用引理6.2：

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

13.1.5. 纯生过程的向后方程

- 例6.9：纯生过程，向后方程变成

$$P'_{ij}(t)=\lambda_i P_{i+1,j}(t)-\lambda_i P_{ij}(t)$$

过程：

➢ 注意到纯生过程中$v_i=\lambda_i$

➢ 纯生过程下一个转移，只能到达$i+1$状态，所以仅当$k=i+1$时，有$P_{ik}\neq 0$，此时：

$$P_{ik}=P_{i,i+1}=1$$

$$q_{ik}=q_{i,i+1}=\lambda_i P_{i,i+1}=\lambda_i$$

➢ 带入到定理6.1公式

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t)-v_i P_{ij}(t)$$

得到结果。

13.1.5. 生灭过程的向后方程

- 例6.10：一般生灭过程，向后方程变成

$$P'_{0j}(t) = \lambda_0 P_{1j}(t) - \lambda_0 P_{0j}(t) = \lambda_0 (P_{1j}(t) - P_{0j}(t)),$$

$$P'_{ij}(t) = (\lambda_i + \mu_i)\left[\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} P_{i+1,j}(t) + \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} P_{i-1,j}(t)\right] - (\lambda_i + \mu_i) P_{ij}(t), \mathrm{i}>0$$

过程：

- 注意到生灭过程中$v_0 = \lambda_0, v_i = \lambda_i + \mu_i, i \geq 1$
- 且当$i \geq 1$，生灭过程转移以后只能到达$i-1$或者$i+1$状态，所以仅当$k = i-1$或$i+1$时，有$P_{ik} \neq 0$，此时：

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, \quad P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$$

$$q_{i,i-1} = v_i P_{i,i-1} = \mu_i, \quad q_{i,i+1} = v_i P_{i,i+1} = \lambda_i$$

- 带入到定理6.1公式

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

得到结果。

13.1.5. 一个两状态马氏链的向后方程

- 例6.11-2状态马氏链：奶茶机失效前工作时间服从均值$1/\lambda$的指数分布，机器失效后，修复时间服从均值为$1/\mu$的指数分布.
- 问题：若时刻0机器在工作，则$t=10$时它在工作的概率是?

13.1.5. 一个两状态马氏链的向后方程

•例6.11-2状态马氏链：奶茶机失效前工作时间服从均值$1/\lambda$的指数分布，机器失效后，修复时间服从均值为$1/\mu$的指数分布.

•问题：若时刻0机器在工作，则$t = 10$时它在工作的概率是?

建模：

- 过程是生灭过程，状态为 0-工作 或 1-修理
- 问题转化为：$P_{00}(10)$
- 生灭过程参数：$\lambda_0 = \lambda, \mu_1 = \mu, \lambda_i = 0, i \neq 0, \mu_i = 0, i \neq 1;$
- 马氏链参数：

$$v_0 = \lambda, \quad v_1 = \mu$$
$$P_{01} = 1, P_{10} = 1$$

- 由例6.10，得到向后方程：

$$P_{00}'(t) = \lambda(P_{10}(t) - P_{00}(t)),$$
$$P_{10}'(t) = \mu(P_{00}(t) - P_{10}(t)).$$

13.1.5. 一个两状态马氏链的向后方程

求解向后方程：

$$P'_{00}(t) = \lambda(P_{10}(t) - P_{00}(t)),$$
$$P'_{10}(t) = \mu(P_{00}(t) - P_{10}(t)).$$

定解条件：

$$P_{00}(0) = 1, P_{10}(0) = 0.$$

- 由方程推得：$\mu P'_{00}(t) + \lambda P'_{10}(t) = 0$， 积分可得
$$\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = 常数C$$
- 得到： $C = \mu$
- 所以有：
$$P'_{00}(t) = \lambda\big(P_{10}(t) - P_{00}(t)\big) = \mu - (\mu + \lambda)P_{00}(t)$$

13.1.5. 一个两状态马氏链的向后方程

求解细节：

- 令$h(t)=P_{00}(t)-\frac{\mu}{\mu+\lambda}$
- 有$h'(t)=-(\mu+\lambda)h(t)$
- 从而$\frac{h'(t)}{h(t)}=-(\mu+\lambda)$
- 求积分 $\ln h(t)=-(\mu+\lambda)t+C$ 或 $h(t)=Ke^{-(\mu+\lambda)t}$
- 从而 $P_{00}(t)=Ke^{-(\mu+\lambda)t}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}$
- 由条件$P_{00}(0)=1$, 可得$K=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$
- 所以，转移概率一般形式：

$$P_{00}(t)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

$$P_{10}(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}-\frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

- 最终解：$P_{00}(10)=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)10}+\frac{\mu}{\mu+\lambda}$

13.1.6. 柯尔莫哥洛夫向前方程

- 定理6.2-向前方程：对多数连续时间马氏链，一切状态i,j和时间$t \geq 0$, 转移概率满足：

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - P_{ij}(t) v_j$$

推导

- 由引理6.3 可知

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - P_{ij}(t)$$
$$= \sum_{k \neq i} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - P_{ij}(t)\left[1 - P_{jj}(h)\right]$$

- 从而

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \{\sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \frac{P_{kj}(h)}{h} - P_{ij}(t)\left[\frac{1 - P_{jj}(h)}{h}\right]\}$$

- 假定可以将上式中的极限与求和交换次序（不一定适用于所有连续时间马氏链），应用引理6.2：

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

  - 大多连续时间马氏链适用：生灭模型，有限状态模型等

13.1.7. 纯生过程的向前方程

- **命题6.4**：纯生过程的向前方程：

$$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t),$$
$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t), j \geq i+1$$

定解条件：

$$P_{ii}(0) = 1,$$
$$P_{ij}(0) = 0,\ \ j \neq i$$

➢ 定解条件非常直观

求解微分方程可得（可有一般性递归解）

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}, \qquad i \geq 0$$

$$P_{ij}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_j s} P_{i,j-1}(s)\, ds, \qquad j \geq i+1$$

13.1.7. 纯生过程的向前方程

推导，步骤1: 得到向前方程

- 注意到，纯生过程中$v_j = \lambda_j$

转移到状态j的生灭过程上一个状态只能为$j-1$，所以仅当$k=j-1$时，有$P_{kj} \neq 0$，此时：

$$P_{kj} = P_{j-1,j} = 1$$

$$q_{kj} = q_{j-1,j} = \lambda_{j-1} P_{j-1,j} = \lambda_{j-1}$$

- 带入到定理6.2公式得到：

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t) \quad (*)$$

- 由于没有死亡，所以，对$j < i$，有$P_{ij}(t) = 0$

可得：

- 若$j \geq i+1$，代入公式（*）：

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t)$$

- 若$j = i$, 代入公式（*）：

$$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t),$$

13.1.7. 纯生过程的向前方程

推导，步骤2: 求解向前方程

步骤2.1 解$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t)$

- 直接有ln 函数形式　且$P_{ii}(0) = 1$
- 得到：$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$，$i \geq 0$

步骤2.2 解$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t)$

- 注意到$e^{\lambda_j t}\left[P'_{ij}(t) + \lambda_j P_{ij}(t)\right] = e^{\lambda_j t}\lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t)$
- 也即，$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda_j t} P_{ij}(t)\right] = e^{\lambda_j t}\lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t)$, 积分，配合 $P_{ij}(0) = 0$，即可得到

13.1.7. 生灭过程的向前方程

- 例6.12：一般生灭过程的向前方程

$$P'_{i0}(t) = \sum_{k\neq 0} q_{k0} P_{ik}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t)$$

过程：

- 注意到生灭过程中$v_0 = \lambda_0, v_j = \lambda_j + \mu_j$，$j \geq 1$
- 转移到状态j的生灭过程上一个状态只能为$j-1$或$j+1$，所以仅当$k = j-1$或$j+1$时，有$P_{kj} \neq 0$，此时：

$$P_{j+1,j} = \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1}+\mu_{j+1}}, P_{j-1,j} = \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1}+\mu_{j-1}}$$

$$q_{j-1,j} = v_{j-1} P_{j-1,j} = \lambda_{j-1}, \quad q_{j+1,j} = v_{j+1} P_{j+1,j} = \mu_{j+1}$$

- 带入到定理6.2公式

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - P_{ij}(t)\, v_j$$

得到结果。

13.2 极限概率
(课本6.5部分)

13.2.1. 连续时间马氏链的极限概率

连续时间马氏链的极限概率（也等于长程比例）

●连续时间马氏链在时刻t处在状态j的概率常常收敛到一个不依赖初始状态的极限值，记这个值为P_j，那么

$$P_j \equiv \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$$

其中我们假设极限存在且独立于初始状态i

➢ 若存在，则必有$\sum_j P_j = 1$

➢ 若存在，也称马氏链是遍历的，即时间充分长后，过程可以在任意时刻，以不同的正概率，到达不同的状态。

13.2.2. 极限概率存在的一个充分条件

存在性的一组充分条件：

- （a）马氏链的不可约性：马氏链的所有状态互通，即，对一切i, j, 从状态i出发有一个迟早进入状态j的正概率
- （b）马氏链的正常返性：从任意状态出发，回到这个状态的平均时间有限
  - 若两个条件成立，则极限概率存在，且满足向前方程

13.2.3. 极限概率的推导和求解

P_j的推导：

- 考虑向前方程：

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - v_jP_{ij}(t)$$

- 令$t\to\infty$, 假定可以交换极限和求和的次序，有

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - v_jP_{ij}(t)\right] = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k - v_jP_j$$

  - 存在性的充分条件保证上述等式成立，即$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t)$存在
- 若 $P'_{ij}(t)$收敛，即其极限存在，则它必须收敛到0
  - 已知$P_{ij}(t)$极限存在
  - 洛必达法则技巧：已知$P_{ij}(t)$极限存在，$P'_{ij}(t)$极限存在

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x(f(x)+f'(x))}{e^x} = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

- 所以，必有

$$\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k - v_jP_j = 0$$

13.2.3. 极限概率的推导和求解

P_j的求解公式：

$$v_jP_j = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k, \quad \forall j$$
$$\sum_j P_j = 1$$

- 得到的系列方程组，可求极限概率

- 注意：极限概率也是这个过程在状态j的时间的长程比例！

13.2.4. 系列方程组的“平衡”解释

要点：方程组描述了过程离开状态j和进入状态j的速率相等

$$v_j P_j = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_k$$

$v_j P_j$： 离开状态j的速率

- 当过程处在状态j时，它以速率v_j离开，而P_j是它处在状态j的时间的比例，于是推出

$$v_j P_j = \text{过程离开状态}j\text{的速率}$$

$\sum_{k\neq j} q_{kj} P_k$：进入状态j的速率

- 当过程处于状态k，它以速率q_{kj}进入j.
- 因此，P_k作为在状态k的时间的长程比例，即处于状态k的概率，可看到从状态k到j的转移发生的速率是$q_{kj}P_k$
- 考虑从所有其他状态到状态j的转移，有

$$\sum_{k\neq j} q_{kj} P_k = \text{过程进入状态}j\text{的速率}$$

- 所以方程组也被称为“平衡方程”

13.2.4. 系列方程组的“平衡”解释

平衡方程的一个直观理解：

- 注意到，在任意时间区间$(0,t)$中，转移到状态j的次数必须在相差1的范围内等于转移出状态j的次数。

- 因此，在长程中，转移到状态j发生的速率和转移出状态j发生的速率相等（长期来看，转出转入速率要相等）

13.2.5. 生灭过程的极限概率

重要结论：生灭过程的极限概率

- 极限概率的系列方程组

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k, \quad \forall j \quad 和 \sum_j P_j = 1$$

过程：

➢ 注意到生灭过程中$v_0 = \lambda_0, v_j = \lambda_j + \mu_j,\ j \geq 1$

➢ 转移到状态j的生灭过程上一个状态只能为$j-1$或$j+1$，所以仅当$k = j-1$或$j+1$时，有$P_{kj} \neq 0$，此时：

$$P_{j+1,j} = \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1}+\mu_{j+1}}, P_{j-1,j} = \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1}+\mu_{j-1}}$$

$$q_{j-1,j} = v_{j-1} P_{j-1,j} = \lambda_{j-1}, \quad q_{j+1,j} = v_{j+1} P_{j+1,j} = \mu_{j+1}$$

➢ 有

状态	离开速率=进入速率
0	$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$
$n, n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$

13.2.5. 生灭过程的极限概率

递推式推导略（具体过程可参考课本）：

- 求解之后得到递推式：$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}P_0$
- 由$\sum_j P_j = 1$，可得$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}}$
  - 这个式子也告诉了我们，极限概率存在的条件应为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1} < \infty$$

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

- 例6.13-机器修理模型：加工车间有M台机器和一个服务工。
- 每台机器失效前运行时间服从独立的均值为$1/\lambda$的指数分布
- 服务工修理一台机器时间$1/\mu$的指数分布

(a)不在使用的机器的平均台数

(b)每台机器使用的时间比例

连续时间马氏链建模

- 考虑马氏链状态n指n台机器不在使用，可考虑为生灭过程
  - 生：多一台不工作机器；灭：修好一台不工作机器
- 生灭过程参数：

$$\mu_n = \mu, n \geq 1$$

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda, & n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases}$$

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

- 参数代入前小结极限概率（长程时间比例）公式

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_2\mu_1}P_0, \quad P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_2\mu_1}}$$

可得:

- $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{M}[M\lambda(M-1)\lambda\ldots(M-n+1)\lambda/\mu^n]} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{M}\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$
- $P_n = \frac{\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1+\sum_{n=1}^{M}\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}, n = 0,1,\ldots,M$
  - P_n为过程处于状态n的概率，即n台机器不在使用的概率
  - 概率角度的理解，长程比例是处于该状态的概率！
- 不在使用的机器平均台数$\sum_{n=0}^{M} nP_n = \frac{\sum_{n=0}^{M} n\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1+\sum_{n=1}^{M}\frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

每台机器使用的（长程）时间比例建模过程:

- 考虑任选一台机器工作时间比例即可
- 长程来说，n台机器不在工作的概率，即$M-n$台机器在工作的概率
- 那么任一台机器属于这$M-n$台机器之一的概率，为$\frac{M-n}{M}$
- 综上，利用全概率公式:

$P\{$机器在工作$\}$
$= \sum_{n=0}^{M} P\{$机器在工作$|n$台不在工作$\}P_n$
$= \sum_{n=0}^{M} P\{$机器在工作$|M-n$台在工作$\}P_n$
$= \sum_{n=0}^{M} \frac{M-n}{M} P_n$ #（M-n台工作，某台机器属于其一的几率）
$= 1 - \sum_{n=0}^{M} \frac{n}{M} P_n$

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

- 例6.14-例6.5排队系统例续：在单队列排队系统中，$\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu$.

➢ 可利用公式直接得到：

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^n} = (\lambda/\mu)^n\,(1-\lambda/\mu), n \geq 0$$

➢ 极限概率存在的条件是λ必须小于μ

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

- 例6.15-例6.1擦鞋店例续：擦鞋店有两把椅子，椅子1 清洗鞋子，椅子2 上光。两个椅子服务时间独立地以速率μ_1和μ_2指数分布。假设潜在顾客以速率λ的泊松过程到达，且潜在顾客必须等到两个椅子皆空才进店。
  - 店是空的长程时间比例是多少?
- 状态空间：0代表店是空的；1指顾客在椅子1上；2指顾客在椅子2上；有$v_0=\lambda, v_1=\mu_1, v_2=\mu_2$，　$P_{01}=P_{12}=P_{20}=1$
  - 瞬时速率大家自行补齐
- 这不是一个生灭过程，需考虑极限概率的平衡方程：

状态	离开速率=进入速率
0	$\lambda_0 P_0=\mu_2 P_2$
1	$\mu_1 P_1=\lambda P_0$
2	$\mu_2 P_2=\mu_1 P_1$

13.2.6. 极限（长程）概率的应用

- 结合

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

- 解得：

$$P_0 = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$P_1 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1\mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$P_2 = \frac{\lambda\mu_1}{\mu_1\mu_2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2)}$$