随机过程
Stochastic Processes

讲义1：概率论引论、随机变量

目录

1.1课程简介

1.1.1 教师介绍

- 教师姓名：冯项楠
  - 复旦大学管理学院统计与数据科学系 教师
  - 香港中文大学统计学系 统计学 博士
  - 香港中文大学统计学系 风险管理科学 硕士
  - 香港中文大学统计学系&金融学系 计量金融学及风险管理科学 学士

- 研究兴趣：
  - 潜变量模型
  - 函数型和图像型数据分析
  - 统计学习与统计应用（行为、健康、时空数据研究）
  - 贝叶斯分析方法

1.1.1 教师介绍

- 办公室：管理学院思源楼311室
- 电话：2501-1114
- 邮箱：fengxiangnan@fudan.edu.cn
- 办公时间：周三下午或邮件预约

1.1.2 课程助教介绍

- 苗子
  - 南京大学匡亚明学院 统计学学士
  - 复旦大学管理学院统计与数据科学系 硕博连读

- 联系方式：
  - 邮箱：22210690188@m.fudan.edu.cn

- 很高兴认识大家~

1.1.2 答疑助教介绍

- 陈一龙
  - 随机过程课友
  - 复旦大学管理学院统计与数据科学系 本科生
  - 去向：芝加哥大学统计

- 联系方式:
  - 邮箱：18307110183@fudan.edu.cn

- 请回答2023~

1.1.3 课程安排

- 上课时间：周四下午 13:30-16:10 （16周课）
- 地点：3教3309 （H3309） ，包括所有上课、考试
- 课间休息（依下课铃）：14:15-14:25，15:10-15:25
- 如因故需临时改期，最迟于提前1天通知各位同学

- 期中考试：第九周(4月20日)前两节课考试，第三节课正常上课
- 期末考试：2023年6月15日（17周） 15:30 - 17:30
  - 如缺考，扣100分(记F)

1.1.4 成绩评估（满分100分，记等级）

- 课堂参与　5分
  - 每周课程签到　（缺一次扣1分，缺课≥5次扣100分）
  - 鼓励：小组讨论、课堂参与、课程贡献、课程反馈

- 个人作业　25分
  - 包括并不限于6次习题作业等

- 期中考试　22分　　（4月20日前两节课）
  - 可携带一张手写非打印单面实体A4纸，所写内容自行决定

- 期末考试　48分　　（6月15日15:30-17:30）
  - 可携带一张手写非打印双面实体A4纸，所写内容自行决定

1.1.4 学习小组分组

- 3-4人一组，随机分配，促进交流
- 选课结束后会确定名单，上传至elearning

要求：

- 在期中考试前，由每组组员一（组长），上传两张图片
  - 1. 小组成员线下合照（从左至右注明每位同学的名字）
  - 2. 建立微信群的截图（需要起一个群名，表示以后会就感兴趣或有疑问的课程问题进行讨论）

- 学习小组是为了给大家提供朋辈支持，有个相互讨论的渠道，所以，除了这两张照片，学习小组不做任何硬性要求！谢谢大家的参与和支持！

1.1.5 纪律要求

- 课堂纪律
  - 旷课很可怕
  - 请勿迟到早退
  - 请将电脑、手机调至静音，勿扰他人

- 作业纪律
  - 平时分极其重要：千万要交作业（超过2次不交扣100分）
  - 不抄袭、不作弊
  - 可以互相讨论学习，但是要理解后独立答题

- 考试纪律
  - 不抄袭、不作弊、独立答题！

1.1.6 最终成绩

- 学校关于成绩的规定
  - A档（A和A-）低于30%

- 班级人数(78人，待更新)：

等级	比例	累计人数	最终人数
A ~ A-	<= 30%	23.4	<= 24

- 预期本课竞争特别激烈，请慎重选择！

1.1.7 课程相关资料

- 课程资料下载:elearning
    - 网址： https://elearning.fudan.edu.cn/
    - 具体用法参考平台帮助文档
    - 会提前上传课程内容的学习和阅读材料
    - 请注意：资料仅供本课程学习使用，请勿网络传播

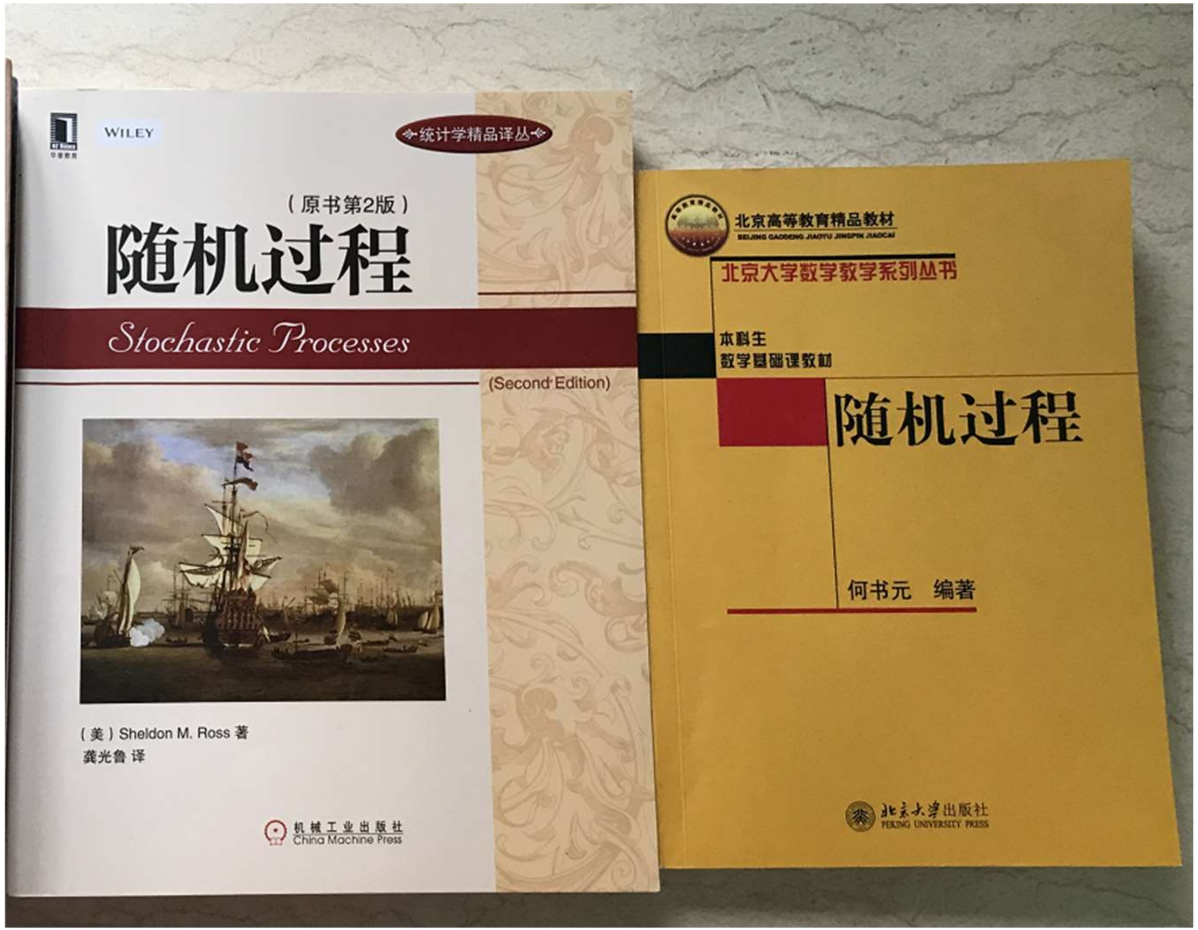
- 备用方法
    - 百度云盘
    - 链接密码：群通知

1.1.7 课程相关资料

- 教材(本课材料主要来源):
  - 罗斯(Sheldon M. Ross)，应用随机过程・概率模型导论（原书第11版），人民邮电出版社，2016.
  - 以概率模型的理解和应用为主!

1.1.7 课程相关资料

- 参考资料：
  - 罗斯(Sheldon M. Ross)，随机过程（原书第2版），机械工业出版社，2013.
  - 何书元，随机过程，北京大学出版社，2008.



1.1.7 课程相关资料

- 教材学习指南：
  - 认真学习课程笔记、例子、作业，80-90%
  - 对课程涉及的书籍章节，书籍内的大量例子，课后习题认真学习，10-20%
  - 大量做习题，大量尝试，是理解数理概念，形成概率模型直觉的关键！

1.1.7 课程相关资料

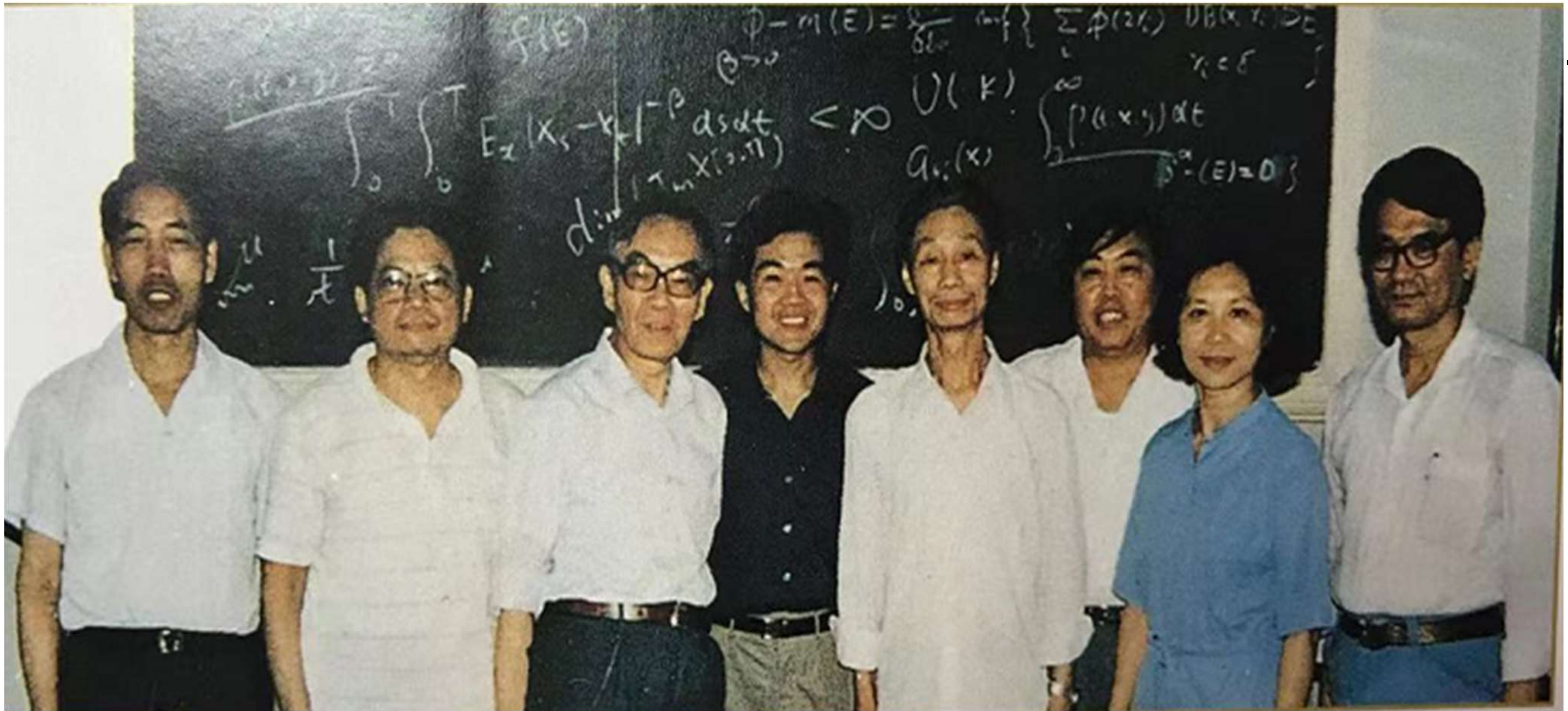
- R软件
  - 辅助进行模拟、计算和实际数据分析
  - 开源且免费
  - 自学可参考《R软件操作入门》

陈毅恒 / 梁沛霖 著

1.1.8 基础知识

- 预修数学分析B　　10学分或以上
- 线性代数　　　　　3学分或以上
- 概率论与数理统计　4学分或以上
- 基础知识很重要！

“只有平日多学习，多积累，才有可能产生高水平的创作”



—王梓坤院士

1.1.9 课程背景

- 这是一门有传承的课
  - 10+年前我修读顾鸣高教授《随机过程》
  - 顾教授是复旦数学系77、78届校友
  - 顾教授修过苏步青和谷超豪先生的课

- 这是一门有难度的课
  - 需要深厚概率统计背景，理解不易
  - 讲义、作业和考试都是有难度的
  - 需要“知难而进、坚韧向前”的精神
- 这是一门有用处的课
  - 马尔可夫链在机器学习（人工智能）中应用广泛
  - 计数过程和鞅是生物统计(生存分析)的基础
  - 布朗运动是现代金融工程的核心基础

1.1.10 课程内容

- 概率论引论、随机变量（教材第1、2章；温故知新）
- 条件概率 （教材第3章）
- 离散时间鞅 （参考资料第1本第6章）
- 马尔可夫链 （教材第4章）
- 指数分布与泊松过程 （教材第5章）
- 连续时间马尔可夫链 （教材第6章）
- 更新理论及应用 （教材第7章）
- 布朗运动 （教材第10章）

➢课程内容可能依进度、假期情况进行调整

1.2 概率论基础概述

1.2.1 引言 （课本1.1）

- 概率模型：利用模型描述现实世界的现象，必须考虑随机性
  - ➢ 关注的量事先未知
  - ➢ 这种量的内在变化通过概率反映在模型中

- 本课学习目标：
  - ➢ 掌握如何建立概率模型
  - ➢ 掌握如何分析模型
  - ➢ 从概率过程(模型)的角度思考问题、辅助分析和决策

1.2.2 样本空间与事件 （课本1.2）

重要概念：

- 可能结果(outcome)
  - ➢例1：抛一/二次硬币/骰子
  - ➢例2：汽车寿命

- 样本空间(S):一个试验的所有可能结果的集合

1.2.2 样本空间与事件 （课本1.2）

- 事件(E)：样本空间S的任意子集，若结果在E中，则事件E发生
  - ➢两个事件的并：$E \cup F$
  - ➢两个事件的交：$E \cap F$ 或 EF
  - ➢互不相容：$EF = \emptyset$ $\leftarrow$ 不可能事件
  - ➢对立事件：E^c, S中不属于E 的所有结果构成的子集
  - ➢两个以上事件的交和并：$\cup_{n=1}^{\infty} E_n, \cap_{n=1}^{\infty} E_n$

1.2.3 定义在事件上的概率（课本1.3）

- 样本空间S的每一个事件E的概率 $P(E)$ 定义为：

1） $0 \le P(E) \le 1$;

2） $P(S) = 1$;

3）对任意互不相容事件序列$E_1 \dots$， $P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

➢思考下：均匀硬币和均匀色子的例子？

1.2.3 定义在事件上的概率（课本1.3）

- 容斥恒等式:

$$P(E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n) = \sum_i P(E_i) - \sum_{i<j} P\left(E_i E_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(E_i E_j E_k\right) - \sum_{i<j<k<l} P\left(E_i E_j E_k E_l\right) \ldots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \ldots E_n)$$

➢特殊形式：$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

1.2.4 条件概率（课本1.4）

- 条件概率：$P(E|F) = P(EF)/P(F), P(F) > 0$
  - 已知事件F已发生，则F代表的集合成为了新的样本空间

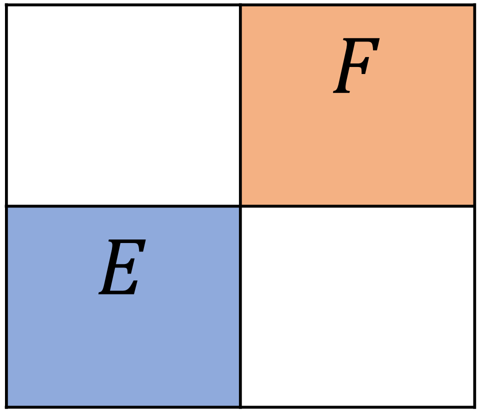
- 例（课本例1.5）：杰伦有两个孩子，已知其中一个孩子为女儿，那么另外一个孩子是男孩的概率是多少？

1.2.4 条件概率（课本1.4）

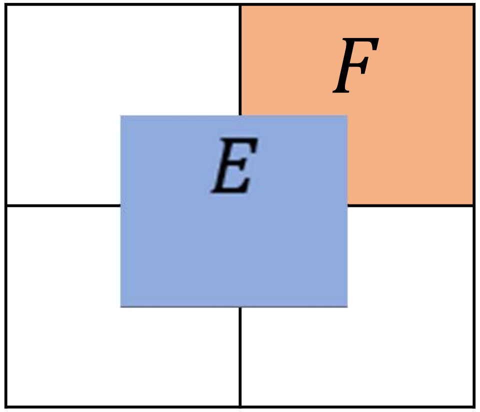
- 前例拓展：杰伦有三个孩子，已知其中两个孩子为一男一女，那么另外一个孩子是女孩的概率是多少？

1.2.5 独立事件（课本1.5）

- 事件独立：若$P(EF)=P(E)P(F)$
  - ➢等价条件：$P(E|F)=P(E)$；反之，即事件相依



E、F 独立吗？



1.2.5 独立事件（课本1.5）

- n个事件联合独立：若对这些事件的所有可能子集$\{E_1, \ldots E_r\}, r \leq n$有

$$P(E_1 \ldots E_r) = P(E_1) \ldots P(E_r)$$

  - 任意一些事情的发生不影响其他任何事件概率

1.2.5 独立事件（课本1.5）

- 例（例1.11）：有r个参赛人，其中参赛人i在开始时有n_i元钱，在每一阶段参赛人中两个被选中比赛，赢家从输家那里得到1元钱。任何参赛者，当他财富减少到0元时就退出。如此继续，直到某个参赛人得到所有$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$元钱为止，此参赛人为最终赢家。假定任意比赛结果独立，且两位参赛人等可能获胜，求参赛人i是胜利者的概率。

1.2.6 例子（课本1.6）

- 例：琳达33岁，喜欢锻炼身体，她有很多音乐CD，其中大部分是莫扎特和贝多芬的曲子，非常喜欢在开车的时候播放音乐CD。请判断下列说法最可能的是
  A. 琳达是喜欢古典音乐的健身教练
  B. 琳达是喜欢古典音乐的银行职员
  C. 琳达是银行高管
  D. 琳达是银行职员
  E. 琳达是喜欢古典音乐的出租车司机

1.2.6 例子（课本1.6）

- 例(1.14)：某款街边的HIV 试纸准确率95%，小C今年25岁，小C生活习惯良好，利用该种HIV试纸测出自己阳性，小C要丧失生活希望吗？（假设对健康人测出假阳性的概率1%）

1.2.6 贝叶斯公式（课本1.6）

- 贝叶斯公式：$P(F_j|E) = \frac{P(F_jE)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$
  - 其中$F_1, \ldots, F_n$互不相容，且$\cup_{i=1}^{n} F_i = S$
  - 注意：$E = \cup_{i=1}^{n} EF_i$
  - 特例：$E = E \cap S = E \cap (F \cup F^c) = EF \cup EF^c$
  - $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$

- 特殊形式：$P(D|E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D)+P(E|D^c)P(D^c)}$

1.2.6 例子（课本1.6）

- 例(1.14)：某款街边的HIV 试纸准确率95%，小C今年25岁，小C生活习惯良好，利用该种HIV试纸测出自己阳性，小C要丧失生活希望吗？（假设对健康人测出假阳性的概率1%）
- 贝叶斯公式：$P(D|E)=\frac{P(DE)}{P(E)}=\frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D)+P(E|D^c)P(D^c)}$

1.3 随机变量

1.3.1 随机变量 （课本2.1）

- 随机变量X：定义在样本空间上的有限实值函数
  - 随机变量的值决定于试验结果，所以取值有相应概率
  - 例：X为两个均匀骰子的点数和；X为汽车寿命时长
  - 表述随机变量取值的概率规律就是概率分布

1.3.1 随机变量 （课本2.1）

- 累计**分布函数$F(\cdot)$**：对任意有限实数b, $F(b) = P\{X \le b\}$
  - 性质1：$F(b)$是b的非减函数，
  - 性质2：$\lim_{b\to\infty} F(b) = F(\infty) = 1$
  - 性质3：$\lim_{b\to-\infty} F(b) = F(-\infty) = 0$
  - 注：$P(X < b) = \lim_{h\to 0^+} F(b-h)$

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

- 离散随机变量：随机变量可能取值为有限个或可数个

- 概率质量函数：$p(a) = P\{X = a\}$
  - 若X可能取值为$x_1 \dots$,有$p(x_i) > 0, \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$
  - $F(a) = \sum_{\forall x_i \le a} p(x_i) \Longrightarrow$ 呈阶梯状

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

常见离散随机变量：

- 伯努利随机变量：一个试验，结果为成功/失败，令试验成功时$X=1$,失败时$X=0$,有$P\{X=0\}=1-P\{X=1\}=1-p$
  - p为试验结果为成功的概率

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

• 二项随机变量：n次独立伯努利试验，单次试验成功的概率p。X代表n次试验中成功的次数，X为具有参数(n,p)的二项随机变量。

- ➢ 概率质量函数：$p(i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$
- ➢ 由二项式定理，$\sum_{i=0}^{n}p(i)=(p+1-p)^n=1$

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

- 例（例2.8）假定飞机发动机失效概率$1-p$,且发动机间独立工作。假定飞机正常运行依赖于一半发动机正常运行。问p如何取值，4个发动机的飞机比2个发动机的飞机更可靠？

  - 概率质量函数:$p(i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

- 几何随机变量：独立多次伯努利试验，直到出现一个成功的结果。以X记出现首次成功结果所需的总试验次数，称X为具有参数p的几何随机变量。
  - 概率质量函数：$p(n)=P\{X=n\}=(1-p)^{n-1}p$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}=1$

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

- 例：假设顾客光顾杰伦奶茶店后，该顾客再次来这家店消费的概率记为恒定的$f < 1$.将X记为首次消费顾客未来到杰伦奶茶店消费的总次数。X是什么随机变量？

1.3.2 离散随机变量 （课本2.2）

- 泊松随机变量！： X取值为$0,1,\ldots,$且其概率质量函数如下：
  - $p(i)=P\{X=i\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, i=0,1,\ldots;$ 参数$\lambda>0$

- 例（24页）：二相随机变量 $\xrightarrow{n大，\ p小}$ 泊松随机变量
  - 令$\lambda=np$
  - $p(i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i}\frac{\lambda^i}{i!}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}\approx$
    $e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$
  - 注：$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\approx e^{-\lambda}, \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i}\approx 1, \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i\approx 1$

1.3.3 连续随机变量 （课本2.3）

- 连续随机变量：随机变量可能取值为连续多个

- 概率密度函数(pdf)：$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx, \forall B$
  - B为实数集合，$f(\cdot)$为定义在$(-\infty, \infty)$上的非负函数
  - $f(x)$是随机变量X的概率密度函数
  - 连续随机变量在某个特殊值时概率为零,但当ϵ很小，有

    $\int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} f(x)dx \approx \epsilon f(a)$

  - 累积分布函数：$F(a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

1.3.3常见连续随机变量 （课本2.3）

随机变量	pdf	参数条件
均匀	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}, & 若x\in(\alpha,\beta)\\ 0, & 其他情况\end{cases}$	$\alpha<\beta$
指数	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若x\geq 0\\ 0, & 若x<0\end{cases}$	$\lambda>0$
伽马	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 若x\geq 0\\ 0, & 若x<0\end{cases}$ 注：伽马函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ 对正整数$\alpha=n,\Gamma(n)=(\mathrm{n}-1)!$	$\lambda>0$ $\alpha>0$
正态	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$\sigma>0$

1.3.4 随机变量的期望 （课本2.4）

- 离散情况：$E(X)=\sum_{x:p(x)>0} xp(x)$
- 连续情况：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

随机变量	期望	随机变量	期望
伯努利	p	均匀	$(\alpha+\beta)/2$
二项	np	指数	$1/\lambda$
几何	$1/p$	伽马	α/λ
泊松	λ	正态	μ

1.3.4 随机变量的期望 （课本2.4）

- 课本命题2.1:对离散随机变量X,和任意实数函数$g(\cdot)$有

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x);$$

若X为连续，则$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$

- 课本推论2.2:对常数a, b,有$E[aX+b] = aE[X]+b$

1.3.4 随机变量的期望 （课本2.4）

命题的应用

- n阶矩：$E(X^n);n \geq 1$

- 随机变量方差：$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E(X^2) - (EX)^2$

1.3.5 联合分布的随机变量(课本2.5.1)

- 两个随机变量的联合累积概率分布函数:

$$F(a,b) = P\{X \le a, Y \le b\}, -\infty < a, b < \infty$$

- X, Y皆离散，则联合概率质量函数:$p(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$

- X, Y联合地连续:存在对所有实数定义的函数$f(x,y)$,对所有实数集合A, B满足：$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x,y)dxdy$
    - $f(x,y)$为联合概率密度函数

1.3.5 联合分布的随机变量(课本2.5.1)

- 课本命题2.1推广：$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)p(x,y)$；
  $$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

- 例：$g(X,Y) = X + Y$

1.3.5 独立随机变量(课本2.5.2)

- 随机变量X, Y是独立的：若$F(a,b)=F_X(a)F_Y(b), \forall a,b$

- X,Y皆离散，则条件可为:$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

- X,Y联合地连续，则条件可为:$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

- 课本命题2.3:若X,Y独立，对任意函数$g(\cdot),h(\cdot)$,有
$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$$

1.3.5 协方差与随机变量的和(课本2.5.3)

- $Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

  性质：

  - $Cov(X,X) = Var(X)$
  - $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
  - $Cov(cX,Y) = cCOv(X,Y)$
  - $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i,Y_j)$
  - $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i} Cov(X_i,X_j)$
  - 若X,Y独立，则$Cov(X,Y) = 0$

1.3.5 协方差与随机变量的和(课本2.5.3)

- 定义2.1&命题2.4:若$X_1,\ldots,X_n$独立同分布，其期望和方差分别为μ和σ^2，则随机变量$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i\,/n$称为样本均值，且有
  - $E[\bar{X}]=\mu$，$Var(\bar{X})=\sigma^2/n, Cov(\bar{X},X_i-\bar{X})=0$
  - 利用协方差的性质可以计算$Cov(\bar{X},X_i-\bar{X})$

1.3.5 协方差与随机变量的和(课本2.5.3)

- 卷积:当X,Y独立，F_{X+Y}称为F_X,F_Y的卷积。且有
  - 离散情形：$P_{X+Y}(a)=\sum_{y=-\infty}^{+\infty}P_X(a-y)P_Y(y)$
  - 连续情形：f,g分别是X,Y的概率密度函数，$F_{X+Y}(a)=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(a-y)g(y)dy$，$f_{X+Y}(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(a-y)g(y)dy$

1.3.5 随机变量的函数的联合概率分布（课本2.5.4）

- n个随机变量$X_1, \dots, X_n$的联合密度函数已知，想计算$Y_1, \dots, Y_n$的联合密度函数，其中
  - $Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_n), \dots, Y_n = g_n(X_1, \dots, X_n)$,
  - g_i有连续的偏导数，
  - 在所有的点$(x_1, \dots, x_n)$上雅克比行列式$J(x_1, \dots, x_n) \neq 0$
  - $y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$有唯一解$x_i = h_i(y_1, \dots, y_n)$

- 雅克比行列式：$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

- 联合密度函数：$f_{Y_1,\dots Y_n}(y_1, \dots y_n) = f_{X_1,\dots X_n}(x_1, \dots x_n)|J|^{-1}$

1.3.6 矩母函数(课本2.6)

- 随机变量X的矩母函数：$\phi(t)=E(e^{tX})=\begin{cases}\sum_x e^{tx}p(x)\\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx\end{cases}$

  - $E[X^n]=\phi^{(n)}(0),\phi^{(n)}(t)$是$\phi(t)$的$n$阶导数
  - 独立随机变量和的矩母函数是单个矩母函数的乘积
  - 矩母函数唯一确定了分布：课本**51**页常见矩母函数
  - 拉普拉斯变换：对$t\geq 0$, 且X非负, $g(t)=\phi(-t)\in[0,1]$

1.3.6 矩母函数(课本2.6)

- $X_1, \dots, X_n$的联合矩母函数：
  - $\phi(t_1, \dots, t_n) = E[e^{(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}]$
  - 联合矩母函数唯一确定了联合分布

1.3.7 重要极限定理(课本2.8)

- 马尔可夫不等式(命题2.6)：X为非负随机变量，则
  - $P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$，$\forall a > 0$

- 切比雪夫不等式(命题2.7)：X均值方差为μ, σ^2，则
  - $P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$，$\forall k > 0$；确定了一个概率上界

- 强大数定律(定理2.1)：$X_1, \ldots$独立同分布且均值为μ，则
  - 当$n \to \infty$，以概率为1有 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to \mu$

- 中心极限定理(定理2.2)：$X_1, \ldots$i.i.d.且均值方差为μ, σ^2.
  - 当$n \to \infty$，$X_1 + \cdots + X_n$分布$\to N(n\mu, n\sigma^2)$；即
  - $P\{\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq a\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$