随机过程
Stochastic Processes

讲义3：离散时间鞅

目录

（补充内容，《随机过程》第6章部分内容）

3.1鞅的介绍（6.1节）

3.1.1 随机过程定义(课本2.9)

- 随机过程：$\{Z(t), t \in T\}$是随机变量的集合。
  - 对每个$t \in T, Z(t)$是随机变量，t一般指时间
  - $Z(t)$为过程在时间t的状态(state)
  - 成分1: 状态空间(state space)
  - 成分2: 指标集
  - 成分3:相依关系
  - 例:3点-5点间超市接待顾客总数，第t天市场销售金额

- 离散时间过程：T为可数集
  - 例：$\{Z_n, n = 1, \ldots\}$是以非负整数为指标的离散时间随机过程

- 连续时间过程：T为实数区间
  - 例：$\{Z_t, t > 0\}$是以非负实数为指标的连续时间随机过程

3.1.2 离散时间鞅(Martingales)

- 随机过程中随机变量间的相依关系是核心。鞅性质就是描述公平游戏(fair game)一类相依关系。

- 定义: 若下列条件满足，则随机过程$\{Z_n; t=1,\ldots\}$是鞅。
  - 1. $E[|Z_n|]<\infty$； 2. $E[Z_{n+1}|Z_1,\ldots,Z_n]=Z_n$
  - 教材一般仅强调第2个条件！

3.1.2 离散时间鞅(Martingales)

- 鞅(过程)的性质：
  - 1.$E[Z_n] = E\big[E[Z_{n+1}|Z_1,\ldots,Z_n]\big] = E[Z_{n+1}]$

  - 2.$E[Z_n] = E[Z_k] = E[Z_1]$，$1 < k < n$

  - 3.$E[Z_m|Z_1,\ldots,Z_n] = Z_n, \mathrm{m} > \mathrm{n}$; ← 归纳法可证，作业

3.1.2 离散时间鞅(Martingales)

- 例1：有效市场的股票价格：Z_n指第n天某股票的收盘价格。
  - 部分学者相信，有效市场假设下$E[Z_{n+1}|Z_1,\ldots Z_n]=Z_n$

- 鞅在现代金融工程(金融数学)中有重要应用。

3.1.3 鞅的例子

- 例2：$X_1, \dots$为均值为0的独立随机变量,且$E[|X_i|] < \infty$；令$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$；$\{Z_n\}$是鞅
  - 可验证：$E[Z_{n+1}|Z_1, \dots Z_n] = Z_n$

- 例3：$X_1, \dots$为均值为1的独立随机变量；令$Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$；$\{Z_n\}$是鞅
  - 易验证：$E[Z_{n+1}|Z_1, \dots Z_n] = Z_n$

3.1.3 鞅的例子

- 例4：$E[|X|] < \infty, Z_n = E[X|Y_1, \ldots, Y_n]$; $\{Z_n\}$是鞅
  - 此类过程称为Doob 鞅，应用广泛
  - 注意到：$Z_n = E[X|Y_1, \ldots, Y_n] = g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$

3.1.3 鞅的例子

- 例4：$E[|X|] < \infty, Z_n = E[X|Y_1, \ldots, Y_n]$; $\{Z_n\}$是鞅
  - 要点： $E[Z_{n+1}|Z_n, \ldots, Y] = Z_n$?
  - 要点：条件条件期望公式$E[E[Z|X,Y]|X] = E[Z|X]$

3.1.3 鞅的例子

- 例5：$X_1, \ldots$为任意随机变量，可知随机变量$X_i - E[X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}]$均值为0. 令$Z_n = \sum_{i=1}^{n}\{X_i - E[X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}]\}$。若$E[|Z_n|] < \infty, \forall n$,则$\{Z_n\}$是均值为0的鞅
  - 推广例2

3.1.3 鞅的例子

- 例5： $X_1,\ldots$为任意随机变量，可知随机变量$X_i - E[X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}]$均值为0. 令$Z_n = \sum_{i=1}^{n}\{X_i - E[X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}]\}$。若$E[|Z_n|] < \infty, \forall n$,则$\{Z_n\}$是均值为0的鞅
  - 注意到：$Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1} - E[X_{n+1}|X_1,\ldots X_n]$
  - 要点：$E[Z_{n+1}|Z_n,\ldots Z_1,X_n,\ldots X_1] = E[Z_{n+1}|X_n,\ldots X_1]$

3.2 停时（6.2节）

3.2.1 停时

- 随机过程$\{Z_n, n \geq 1\}$的(随机时刻)停时N：N是可能无限的正整数随机变量，且事件$\{N = n\}$完全由随机变量$Z_1 \ldots Z_n$来决定.
  - 教材要求$P\{N < \infty\} = 1$
  - 停时的理解：停时完全由随机变量$Z_1 \ldots Z_n$来决定，即，当你知道$Z_1 \ldots Z_n$，即当下你已有的信息，即可判断是否停止

3.2.2 停时过程

- 停时过程：令N是随机过程$\{Z_n, n \geq 1\}$的停时，$\{\overline{Z_n}, n \geq 1\}$是停时过程，其中$\overline{Z_n} = \begin{cases} Z_n, 若 n \leq N \\ Z_N, 若 n > N \end{cases}$

- 命题6.2.1：若N是鞅$\{Z_n\}$的停时，则停时过程$\{\overline{Z_n}\}$也是鞅。

➢ 要点：$I_n = \begin{cases} 1, & 若 N \geq n \\ 0, & 若 N < n \end{cases}$，取决于什么随机变量？

➢ $\overline{Z_{n+1}} = \overline{Z_n} + I_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n)$

➢ $E[\overline{Z_{n+1}} | \overline{Z_1}, \ldots \overline{Z_n} \qquad\qquad]$

3.2.2 停时过程

- 命题6.2.1：若N是鞅$\{Z_n\}$的停时，则停时过程$\{\overline{Z_n}\}$也是鞅。

➢ 要点：$I_n = \begin{cases} 1, & 若 N \geq n \\ 0, & 若 N < n \end{cases}$，取决于什么随机变量？

➢ $\overline{Z_{n+1}} = \overline{Z_n} + I_{n+1}(Z_{n+1} - Z_n)$

➢ $E[\overline{Z_{n+1}} | \overline{Z_1}, \dots \overline{Z_n} \qquad\qquad]$

3.2.3 鞅停时定理

- 鞅停时定理6.2.2： N是鞅$\{Z_n\}$的停时，$\{\overline{Z_n}, n \geq 1\}$是停时过程，且$P\{N < \infty\} = 1$，若下列条件之一满足，则$E[\overline{Z_n}] \xrightarrow{n\to\infty} E[Z_N]$，且$E[Z_N] = E[Z_1]$

3.2.3 鞅停时定理

- 鞅停时定理6.2.2： N是鞅$\{Z_n\}$的停时, $\{\overline{Z_n}, n \geq 1\}$是停时过程, 且$P\{N < \infty\} = 1$，若下列条件之一满足，则$E[\overline{Z_n}] \xrightarrow{n\to\infty} E[Z_N]$, 且$E[Z_N] = E[Z_1]$
  - 1. $\overline{Z_n}$是一致有界的
    - 一致有界：存在常数M，对所有n都有$|\overline{Z_n}| \leq \mathrm{M}$
  - 2. N是有界的
    - 存在常数M，N≤M；P(N ≤M)=1
  - 3. E[N] $< \infty$,且存在$M < \infty$使得$E[|Z_{n+1} - Z_n||Z_1, \ldots, Z_n] < M$
    - $E[|Z_{n+1} - Z_n||Z_1, \ldots, Z_n]$ 有界

3.2.3 鞅停时定理的应用例子

●推导Wald方程：若$X_i(i \geq 1)$独立同分布，$E[|X|] < \infty, N$是一个对$X_1, X_2 \ldots$的停时，$P(N < \infty) = 1$, 且$E[N] < \infty$, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$$

- ➢ 构造$Z_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - EX)$, 验证鞅停时定理条件即可

3.3 下鞅、上鞅、鞅收敛定理（6.4节部分）

3.3.1 下鞅、上鞅

- 下鞅(submartingale)：即满足下列条件的随机过程$\{Z_n; n \geq 1\}$
  - 1. $E[|Z_n|] < \infty$；2. $E[Z_{n+1}|Z_1, \dots, Z_n] \geq Z_n$
  - 性质: $E[Z_n] \geq E[Z_k] \geq E[Z_1]$，$1 < k < n$
  - 性质（作业）：$E[Z_n|Z_1, \dots, Z_k] \geq Z_k$，$k < n$
  - 超公平游戏(superfair game)

- 上鞅(supermartingale)：满足下列条件的随机过程$\{Z_n; n \geq 1\}$
  - 1. $E[|Z_n|] < \infty$；2. $E[Z_{n+1}|Z_1, \dots, Z_n] \leq Z_n$
  - 性质: $E[Z_n] \leq E[Z_k] \leq E[Z_1]$，$1 < k < n$
  - 性质：$E[Z_n|Z_1, \dots, Z_k] \leq Z_k$，$k < n$
  - 不公平游戏(subfair game)

3.3.1 下鞅、上鞅

- 下鞅、上鞅的停时定理6.4.1.：若N是$\{Z_n; n \geq 1\}$的停时，且鞅停时定理的三个条件满足其一，则
  - 对下鞅来说：$E[Z_N] \geq E[Z_1]$
  - 对上鞅来说：$E[Z_N] \leq E[Z_1]$

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 引理6.4.2：若$\{Z_i; i \geq 1\}$是下鞅，N是停时，且$P\{N \leq n\} = 1$，则

$$E[Z_1] \leq E[Z_N] \leq E[Z_n]$$

- 证明部分1：$E[Z_N] \geq E[Z_1]$
- 要点：下鞅停时定理

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 引理6.4.2：若$\{Z_i; i \geq 1\}$是下鞅，N是停时，且$P\{N \leq n\} = 1$，则

$$E[Z_1] \leq E[Z_N] \leq E[Z_n]$$

➢ 证明部分2：$E[Z_n] \geq E[Z_N]$

➢ 核心：$E[Z_n|Z_1, \ldots Z_N, N = k] = E[Z_n|Z_1, \ldots, Z_k, N = k]$

$$= E[Z_n|Z_1, \ldots, Z_k]$$

$$\geq Z_k = Z_N$$

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 引理6.4.3：若$\{Z_n; n \geq 1\}$是鞅，f是凸(convex)函数，则$\{f(Z_n); n \geq 1\}$是下鞅
  - 要点：琴声不等式 (Jensen's inequality)的直接应用
  - $E[f(Z_{n+1})|Z_1, \ldots Z_n] \geq f(E[Z_{n+1}|Z_1, \ldots, Z_n]) = f(Z_n)$

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 定理6.4.4：若$\{Z_n;n\geq 1\}$是非负值的下鞅，$a>0$,则

$$P\{\max(Z_1,\ldots Z_n)>a\}\leq\frac{E[Z_n]}{a}$$

- 要点:构建停时N：即时刻n内，首个$Z_i>a$的时刻
  - $i\leq n$的情况下，令N为满足$Z_i>a$的最小i;
  - 若$\forall i\leq n, Z_i\leq a$,则令$N=n$.

- 注意到：$\max(Z_1,\ldots Z_n)>a \boxed{\leftrightarrow} Z_N>a$
  - $$\begin{aligned}P\{\max(Z_1,\ldots Z_n)>a\}&=P\{Z_N>a\}\\&\leq\frac{E[Z_N]}{a}\\&\leq\frac{E[Z_n]}{a}\end{aligned}$$

- 此定理称为下鞅的柯尔莫哥洛夫不等式，是马尔可夫不等式在鞅过程下的推广

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 定理6.4.4：若$\{Z_n; n \geq 1\}$是非负值的下鞅，$a > 0$,则

$$P\{\max(Z_1, \dots Z_n) > a\} \leq \frac{E[Z_n]}{a}$$

➢ 思考：如果$\{Z_n; n \geq 1\}$是非负值的鞅，不等式成立吗？如何证明？

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

●补充命题(柯尔莫哥洛夫不等式)：$X_1, \ldots$为均值为0的独立随机变量，令$S_k = X_1 + \cdots + X_k$。对任意$\mathrm{a} > 0$，有

$$P\{\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge a\} \le \frac{Var[S_n]}{a^2}$$

- 注意：上述证明对$\{S_k, k \ge 1\}$是均值为0的鞅即可，不需要是部分和的形式
- 作业！

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 推论6.4.5：令$\{Z_n; n \geq 1\}$为鞅，$a > 0$,则

I. $P\{\max(|Z_1|, \ldots |Z_n|) > a\} \leq \frac{E[|Z_n|]}{a}$

II. $P\{\max(|Z_1|, \ldots |Z_n|) > a\} \leq \frac{E[Z_n^2]}{a^2}$

➢ 证明I的要点：$f(x) = |x|$是凸函数，所以$\{|Z_n|; n \geq 1\}$为非负下鞅

3.3.2 鞅收敛定理的准备知识

- 推论6.4.5：令$\{Z_n; n \geq 1\}$为鞅，$a > 0$,则

I. $P\{\max(|Z_1|, \dots |Z_n|) > a\} \leq \frac{E[|Z_n|]}{a}$

II. $P\{\max(|Z_1|, \dots |Z_n|) > a\} \leq \frac{E[Z_n^2]}{a^2}$

➢ 证明II的要点：$P\{\max(|Z_1|, \dots |Z_n|) > a\} = P\{\max(|Z_1|^2, \dots |Z_n|^2) > a^2\}$

3.3.3 鞅收敛定理

- 定理6.4.6：令$\{Z_n; n \geq 1\}$为鞅，且存在$M < \infty$使得

$$E[|Z_n|] \leq M, \forall n$$

则以概率为1，$\lim_{n\to\infty} Z_n$存在且有限。

➢ 证明本课不做要求！

➢ 鞅收敛定理可用于证明强大数定理。

3.3.4 鞅收敛定理的推论和应用

- 推论6.4.7（鞅收敛定理应用）：若$\{Z_n; n \geq 1\}$是非负鞅，则以概率为1，$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$存在且有限。

3.3.4 鞅收敛定理的推论和应用

- 例(赌博结果，鞅收敛定理及推论的应用)：赌徒参加不允许赊钱的公平赌博，每局至少赢或者输1元，令Z_n是赌徒在n局后的资金。记

$$N=\min\{n: Z_n=Z_{n+1}\}$$

为直到赌徒被强迫退出为止已玩的赌局数(未赌第$n+1$局)。请问：赌局能不停持续吗？

- 要点：$\{Z_n; n\geq 1\}$是非负鞅，由推论6.4.7，$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$存在且有限.
- 说明赌局数必然有限。