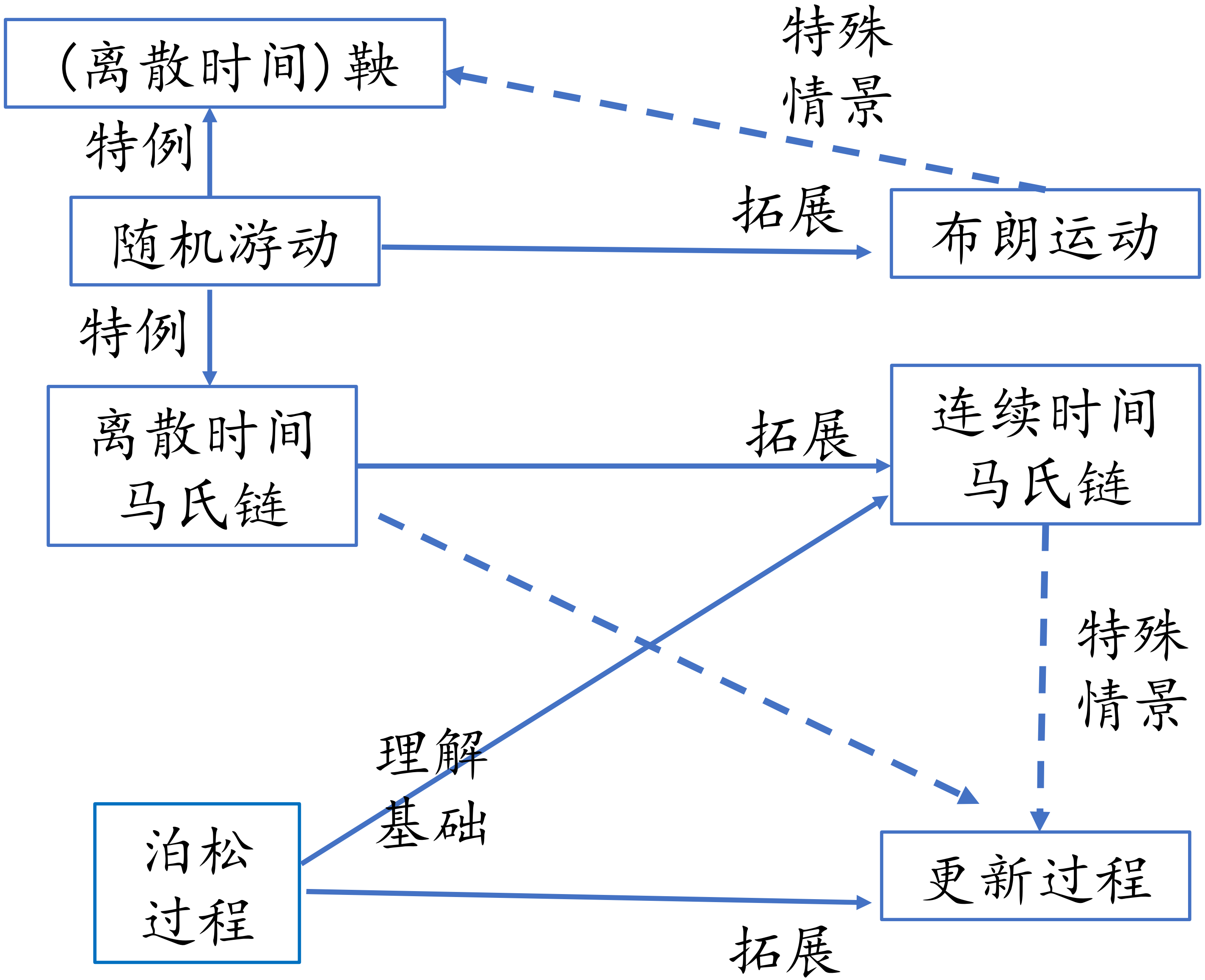
随机过程
Stochastic Processes

讲义12：连续时间马氏链-1

随机过程的关系图



(离散时间)鞅
特殊
情景
特例
随机游动
拓展
布朗运动
特例
离散时间
马氏链
拓展
连续时间
马氏链
特殊
情景
理解
基础
泊松
过程
更新过程
拓展

目录

（课本第6章部分1）

12.1 连续时间马氏链介绍

12.2 生灭过程

12.1连续时间马氏链介绍
（课本6.1–6.2）

12.1.0. 离散时间马氏链回顾

- 离散时间马氏链$\{X_n, n=0,1,\ldots\}$的构成：
  - 状态空间：离散值（有限个或可数个可能值，一般非负）
  - 指标集：离散时刻$n=0,1,\ldots$
  - 初始状态X_0和各时刻随机变量X_n分布：离散随机变量
  - 相依关系：

$$1步转移概率 P_{ij}=P\{X_{s+1}=j|X_s=i\}$$

$$n步转移概率 P_{ij}=P\{X_{s+n}=j|X_s=i\}$$

    - 时齐性：转移概率不随起始时刻s变化而变化
    - 马氏性质：仅通过最近的观测，与历史观测产生相关性

- 转移概率的更确切表示：

$$P_{ij}(1)=P\{X_{s+1}=j|X_s=i\}$$

$$P_{ij}(n)=P\{X_{s+n}=j|X_s=i\}$$

  - n步转移概率：n个单位时间

12.1.1. 连续时间马氏链类比定义

- 定义1-连续时间马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$类比离散马氏链的定义：

➢ 指标集：$\{t \geq 0\}$的连续值

  ➢ 这是核心区别：将离散时间推广至连续时间

➢ 状态空间：离散值（有限个或可数个可能值，一般非负）

  ➢ 没区别：这是链的精髓，访问一个个离散的状态点

➢ 初始状态$X(0)$和各时刻随机变量$X(t)$：离散随机变量

  ➢ 重点：$X(t)$转入一个状态i，会在i停留一段时间

  ➢ 这个停留一段时间是连续时间马氏链的重要特征

➢ 相依关系，也即转移概率：

对所有$s, t \geq 0$，$0 \leq u < s$和非负整数$i, j, x(u)$均有

$$P\{X(s+t) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\}$$

$= P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}$ 马氏性质

$= P\{X(t) = j | X(0) = i\}$ 时齐性质

$= P_{ij}(t)$ 现在处在状态i的过程时间t后处在状态j的概率

12.1.1. 连续时间马氏链定义1

马氏性质：

- 马氏性质：仅仅通过最近的观测，与历史观测产生相关性
- ➢ 连续时间的马氏链是具有马氏性质的连续时间随机过程，即给定现在$X(s)$和过去$X(u), 0 \leq u < s$, 将来$X(t+s)$的条件分布只依赖现在$X(s)$，并且独立于过去。
- ➢ 知道马氏链在时间s处于状态i，可以理解为马氏链在时间s开始从状态i重启，与历史访问的状态无关

时齐性质：

$P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j|X(s) = i\} = P\{X(t) = j|X(0) = i\}$与起始时间点$s$无关，称马氏链具备平稳的或时齐的转移概率。

- ➢ 无特别说明，本课考虑的连续时间马氏链有平稳转移概率
- ➢ 离散时间马氏链，也是具有时齐的转移概率的马氏链

12.1.1. 连续时间马氏链定义1

$X(t)$的分布：

可由初始状态$X(0)$的分布和转移概率$P_{ij}(t)$确定

- $P\{X(t)=j\}=\sum_{i=0}^{\infty}P\{X(t)=j|X(0)=i\}P\{X(0)=i\}$
$=\sum_{i=0}^{\infty}P_{ij}(t)P\{X(0)=i\}$
  - 已知$P_{ij}(t)$的话，所有$X(t)$的分布均可确定
  - 但$P_{ij}(t)$一般极难定义
    - 一般很难从现实场景抽象出$P_{ij}(t)$

- 疑问：有没有一个更直观的方式定义连续时间马氏链？
  - 通过在状态i的停留时间来定义

12.1.2. 连续时间马氏链在状态i停留时间

- 重要特征：质点每次进入状态i，会在状态i停留一段时间
- 疑问：停留多久呢？

- 先考虑一个简单情形：

在时刻0，代表连续时间马氏链的质点在状态i，已知质点在随后10分钟停留在状态i，那么，10分钟之后的5分钟，质点仍停留在状态i的概率是多少？

$$P\{T_i > 15|T_i > 10\} = P\{T_i > 5\}$$

- ➢ T_i记在转移到一个不同状态以前，过程在状态i停留的时间

- ➢ $P\{T_i > 15|T_i > 10\}$：已知质点时刻10处于状态i，质点在状态i额外停留超过5分钟的概率
- ➢ $P\{T_i > 5\}$：质点在状态i停留超过5分钟的概率
- ➢ 依马氏性质：上两个概率相等，

12.1.2. 连续时间马氏链在状态i停留时间

- 同理可得：对$\forall s,t\geq 0$,

$$P\{T_i>s+t|T_i>s\}=P\{T_i>t\}$$

➢ 所以：这个随机时间是无记忆的，因而必须是指数分布

- 理解总结：

➢ $T_i>s$说明$X(s)=i$

➢ 马氏性质说明基于$X(s)=i$，之后的状态转移概率仅依赖于s时刻的状态，与时刻s之前的状态无关

➢ 那么条件于$X(s)=i$，$T_i>s+t$，相当于s时刻马氏链从状态i从新开始，并在状态i停留超过时间t

➢ 所以 $P\{T_i>s+t|T_i>s\}=P\{T_i>t\}$

➢ 所以，T_i这个随机变量具备无记忆性，必为指数分布

12.1.3. 停留时间定义连续时间马氏链

- 连续时间马氏链的定义2（主要用到的定义）：

转移概率部分可更换为：每次进入状态i时有

（1） 在转移到不同状态前，它在这个状态的停留时间是速率为v_i的指数随机变量（均值$1/v_i$）

（2）当过程离开状态i时，会转入一个其他状态j $(j \neq i)$，即，以某个概率P_{ij}进入下一个状态j，P_{ij}满足

$$P_{ii} = 0, \forall i; \quad \sum_j P_{ij} = 1, \forall i$$

➢ P_{ij}：状态间转移概率

（3）过程停留在状态i的时间和下一个访问的状态之间独立。

12.1.3. 停留时间定义连续时间马氏链

- 若下一个访问的状态依赖于在状态i停留的时间T_i，那么过程已经在状态i停留多久会影响转移到下一个状态的概率，与马氏性质矛盾

理解：（核心3元素：状态空间+指数速率+状态间转移概率）

- 对任意状态i，质点到达i后，在i会停留一段时间，且停留时间为独立同分布的指数随机变量
- 停留结束后，质点以概率P_{ij}转移到状态j
  - 说明连续时间马氏链，与离散马氏链基本一致，是从状态转移到状态，但必须是转移到其他状态，且进入下一个状态前，停留在每个状态的时间是按照指数分布的。
  - 所以连续时间马氏链，为离散时间马氏链的推广，主要是考虑了状态转移之间的间隔时间！
- 考虑在转入状态的停留时间，显著增加了离散时间马氏链的复杂度！也恰好使泊松过程成为了离散时间马氏链特例！

12. 1. 4. 连续时间马氏链的例子

- 例6.2：泊松过程是连续时间马氏链的特例

➢ 核心点：将发生事件的个数看做是具体状态

➢ 条件1：对所有$i = 0,1,2 \ldots$,间隔时间恰好是下次发生事件与上次发生事件的间隔，符合指数分布，均值为$1/\lambda$, 也即$v_i = \frac{1}{\lambda}$，速率为λ

➢ 条件2：$P_{ii} = 0, \forall i;\quad P_{i\,i+1} = 1, \forall i$

➢ 条件3：间隔时间不影响访问的下一个状态，相互独立

12. 1. 4. 连续时间马氏链的例子

- 例6.1：擦鞋店有两把椅子，椅子1 清洗鞋子，椅子2 上光。两个椅子服务时间独立地以速率μ_1和μ_2指数分布。假设潜在顾客以速率λ的泊松过程到达，如发现店中有人，则毫不犹豫离开，且潜在顾客必须等到两个椅子皆空才进店。如何用连续时间马氏链，对店中情况进行建模？

➢ 状态空间确定：店中有0或1个顾客，顾客在椅子1或者2上
➢ 状态空间包含：0,1,2；
➢ 0代表店是空的；1指顾客在椅子1上；2指顾客在椅子2上

➢ 可知，条件1：$v_0 = \lambda, v_1 = \mu_1, v_2 = \mu_2,$
➢ 可知，条件2：$P_{01} = P_{12} = P_{20} = 1$

复旦大学管理学院
SCHOOL OF MANAGEMENT
FUDAN UNIVERSITY

12.2 生灭过程
(课本6.3)

12.2.1. 生灭过程的定义

- 生灭过程定义：生灭过程是一个连续时间随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$，且任意时间的状态为系统中人数。

➢ 当系统中有n个人时，即过程所处状态为 n 时：

（1）新到达者以指数速率λ_n进入系统

➢ 即，发生系统加1人（生）事件，所需时间服从$Exp(\lambda_n)$

（2）人们以指数速率μ_n离开系统

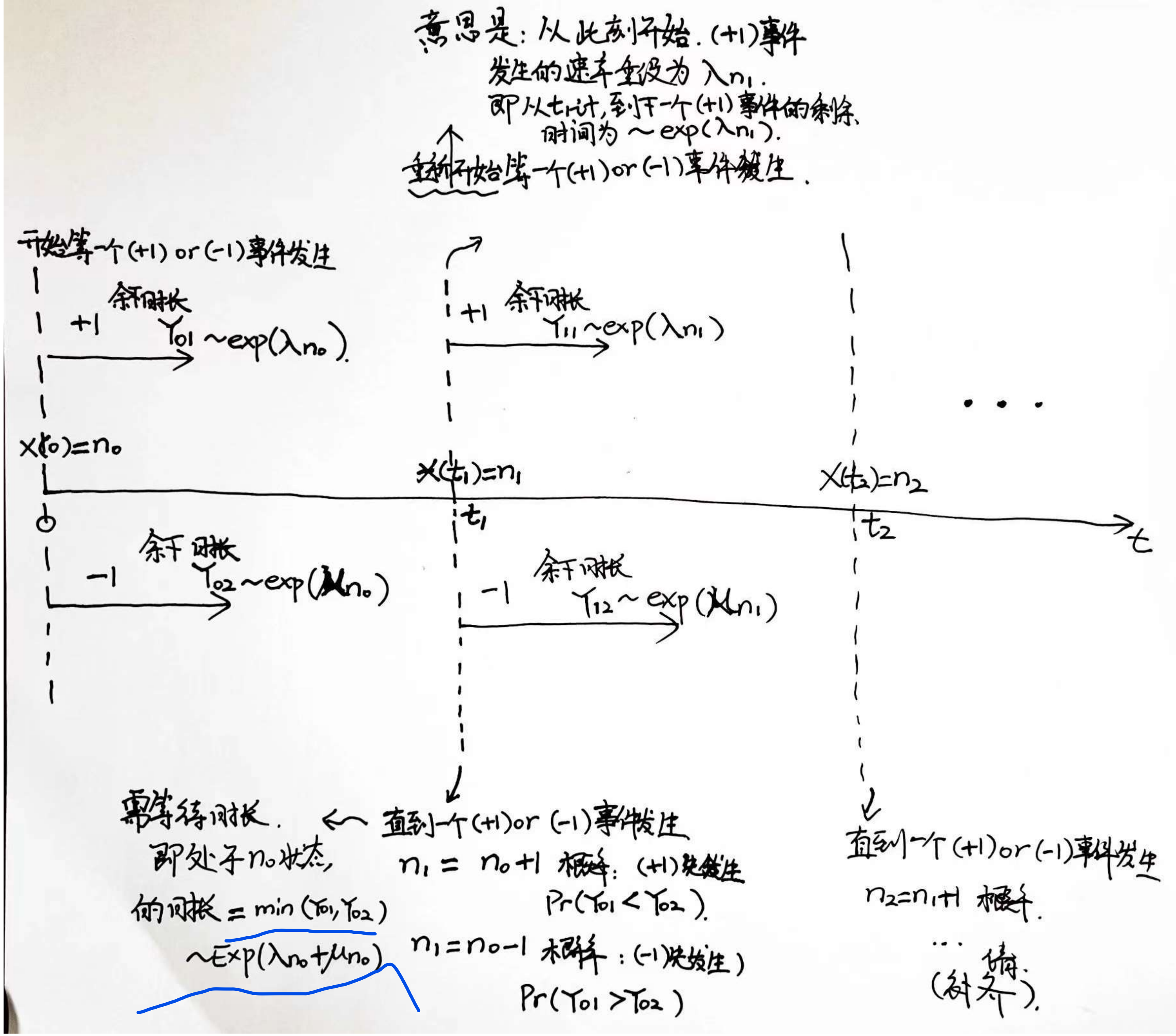
➢ 即，发生系统少1人（灭）事件，所需时间服从$Exp(\mu_n)$

（3）加1人事件，所需的时间(均值$1/\lambda_n$的指数分布)，与减1人事件，所需的时间(均值$1/\mu_n$的指数分布)，完全独立

➢ 生灭过程参数：参数$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$称为生灭过程的到达（生）和离开（灭）速率

➢ 注意：$\mu_0 = 0$

12.2.1. 生灭过程的定义



12.2.1. 生灭过程的定义

- 生灭过程是连续时间马氏链吗？

➢ 条件1：过程进入状态i后，会在状态i停留指数时间$Exp(v_i)$
  - ➢ $v_0 = \lambda_0$
  - ➢ $v_i = \lambda_i + \mu_i, i > 0$
    - ➢ $v_i = \lambda_i + \mu_i$，是由于直到一个出生或者一个灭亡发生的时间是速率为$\lambda_i + \mu_i$的指数分布。
    - ➢ 讲义8，结论3

➢ 条件2：过程发生转移，只能向状态$i-1$或$i+1$转
  - ➢ $P_{01} = 1$，$P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}, i > 0$，$P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, i > 0$
  - ➢ $P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$是生事件早于灭事件发生的概率
  - ➢ $P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$是灭事件早于生事件发生的概率

➢ 条件3：停留时间长短，与下一步转移到的概率无关
  - ➢ $P_{i,j}$与停留时间独立

12.2.1. 生灭过程的定义

- 生灭过程，是具有状态$\{0,1,\ldots\}$的连续时间马氏链，它从状态n只能转移到状态$n-1$或状态$n+1$.

- 这个过程适用于描述现实世界中的很多情形：
- 顾客到来和消费后离去
- 流行病的建模，得病的速率和消灭疾病的速率

12.2.2. 生灭过程的例子

- 例6.2-重访：泊松过程是生灭过程
  - 将发生事件的个数看做是具体状态

  - 注意到：$\mu_n = 0, \forall n \geq 1,$ $\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0$
  - 所以，生灭速率和转移概率关系：

$v_0 = \lambda,$ $v_i = \lambda, i > 0,$

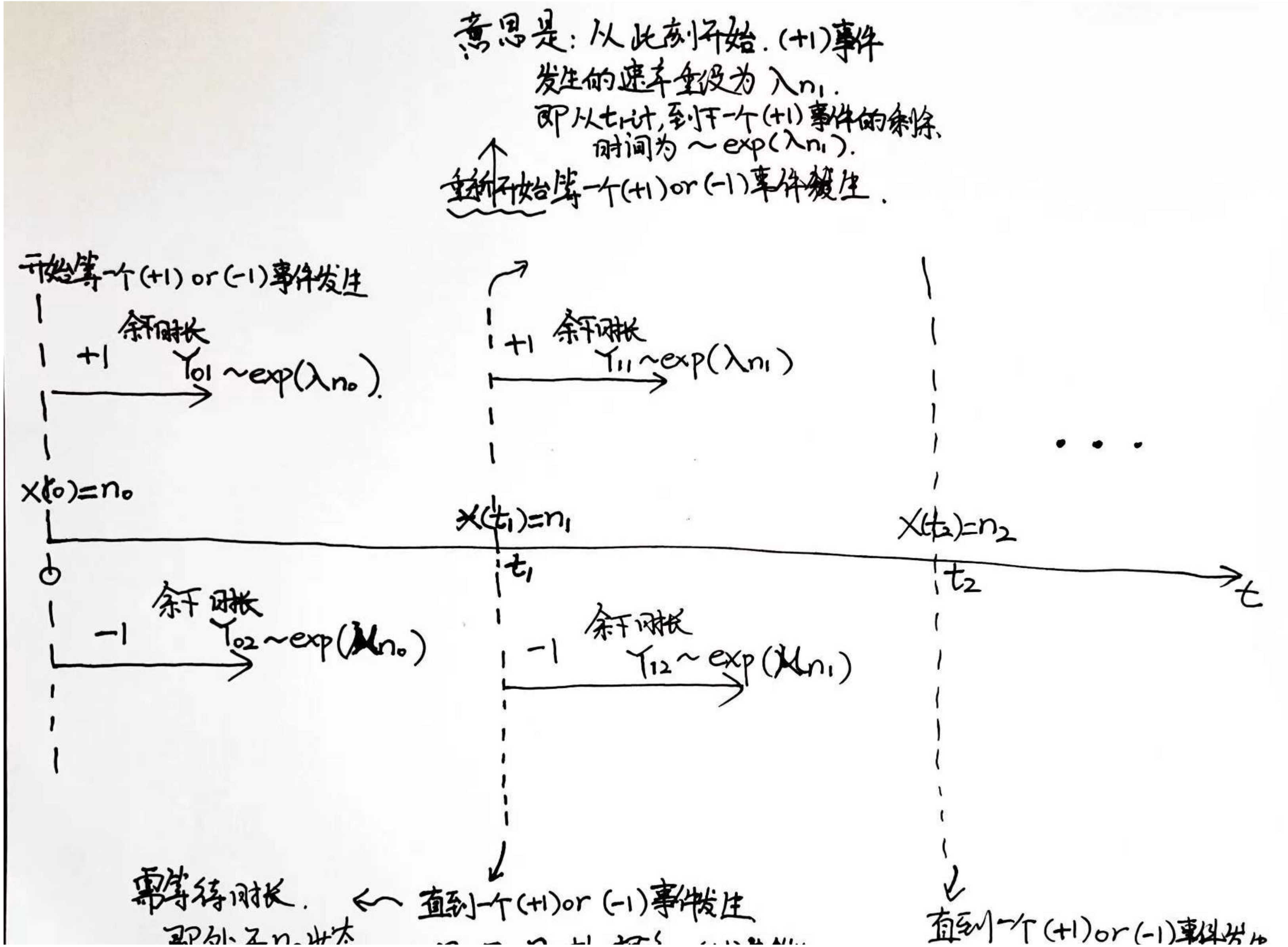
$P_{01} = 1,$ $P_{i,i+1} = 1, i > 0,$ $P_{i,i-1} = 0, i > 0$

  - 细化了上节的例子

- 确切说：泊松过程是一个纯生过程
  - 一个对于一切n,都有μ_n =0的生灭过程称为纯生过程

12.2.2. 生灭过程的例子

- 例6.2-重访：泊松过程是生灭过程（看图辅助理解）



12. 2. 2. 纯生过程的一个例子

- 例6.3-尤尔过程：考虑一个总体，其中成员可产生新成员，但成员不会死亡
- 成员之间独立，以均值为$1/\lambda$的指数时间（速率λ）产生新成员。

➢ 那么时刻t总体大小为$X(t)$.那么$\{X(t), t \geq 0\}$是$\lambda_n = n\lambda$的纯生过程。

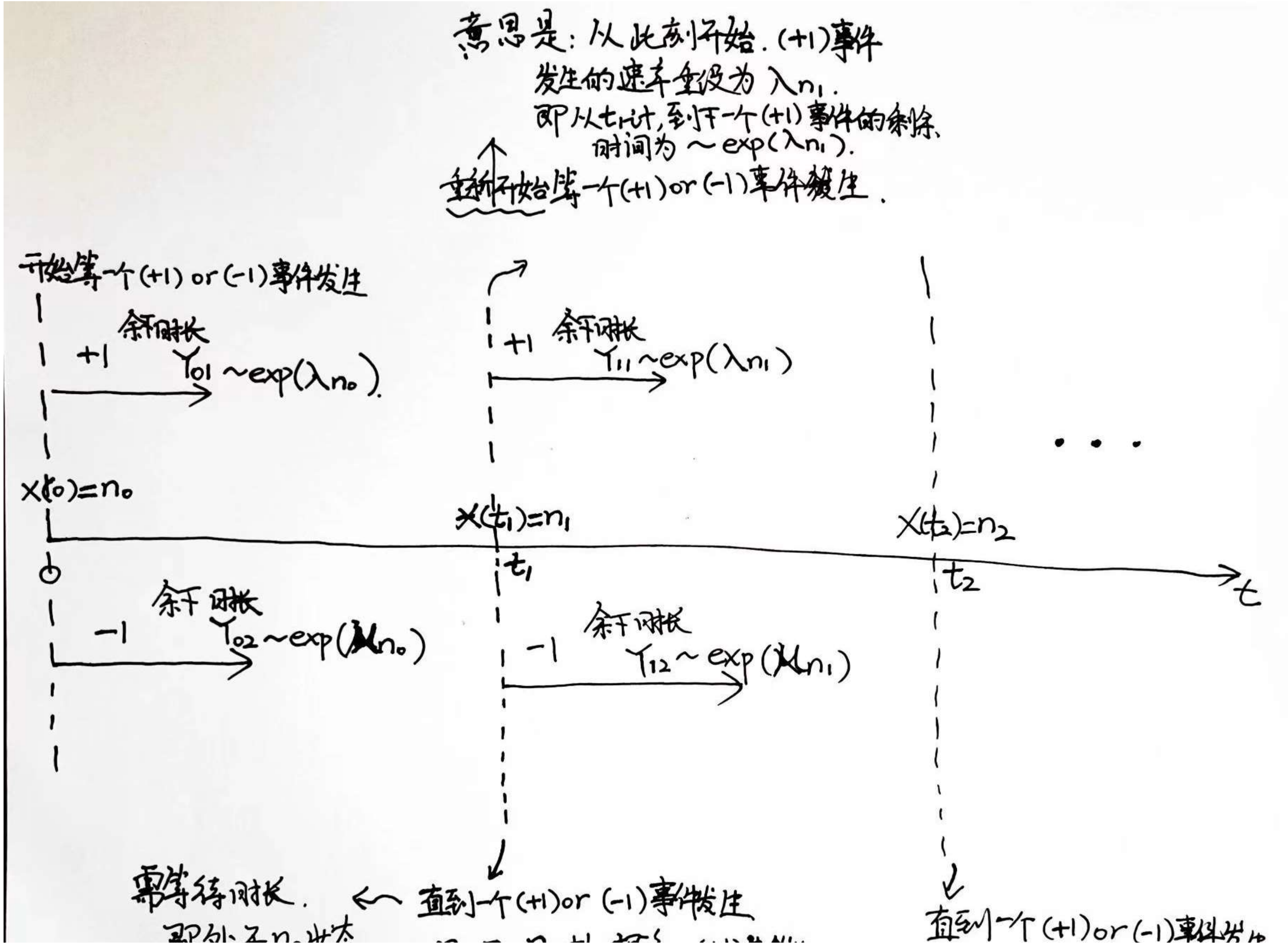
➢ 因为n个成员，每个都以指数速率生成新成员。那么总速率是$n\lambda$.

12.2.2. 纯生过程的一个例子

- 例6.3-尤尔过程：
- 总体开始有i个个体，则可以看成各自独立的尤尔过程

12.2.2. 纯生过程的一个例子

- 例6.3-尤尔过程（看图辅助理解）：



12.2.3. 生灭过程例子

- 例6.4-移民的线性增长模型：一个生灭模型

$$\lambda_n = n\lambda + \theta, \qquad n \geq 0$$
$$\mu_n = n\mu, \qquad n \geq 1$$

- 这种过程自然地出现在生物繁殖和群体增长中。
- 总体中每个个体假设以速率λ出生。
- 总体的额外指数增加率θ是由外来移民导致的。
  - 所以总出生率为$n\lambda + \theta$
- 假定每个成员死亡，以指数速率 μ发生，所以$\mu_n = n\mu$

12.2.3. 生灭过程例子

问题：这个过程在时间t的期望总体$M(t)$是多少？

- 假设$X(0)=i$，以$X(t)$记在时刻t总体的大小。则：

$$M(t)=E[X(t)]$$

- 可通过推导及求解$M(t)$满足的微分方程来确定$M(t)$：

$$M(t+h)=E[X(t+h)]=E[E[X(t+h)|X(t)]]$$

12.2.3. 生灭过程例子

$E[X(t+h)|X(t)]$如何考虑：

- 极小段时间区间h 内，总体或增加1，或减少1，或不变
- 总体增加1：在$(t,t+h)$中有一个出生或者一个移民来到
- 总体减少1：如果这个区间有一个死亡
- 总体不变：两种事件都没出现

即，条件来讲：

- $$X(t+h)=\begin{cases} X(t)+1, & \text{概率 } [\theta+X(t)\lambda]h+o(h) \\ X(t)-1, & \text{概率 } X(t)\mu h+o(h) \\ X(t), & \text{概率 } 1-[\theta+X(t)\lambda+X(t)\mu]h+o(h) \end{cases}$$
  - 注意：一般生灭过程都可以采用这种$o(h)$定义！

12.2.3. 生灭过程例子

所以：

$$E[X(t+h)|X(t)] = X(t) + [\theta + X(t)\lambda - X(t)\mu]h + o(h)$$

- 取期望可得

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda-\mu)M(t)h + \theta h + o(h)$$

- 可得 $\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = (\lambda-\mu)M(t) + \theta + \frac{o(h)}{h}$
- 取极限，当$h \to 0$时，得微分方程：

$$M'(t) = (\lambda-\mu)M(t) + \theta$$

这是一种稍微复杂一些的ln函数的常微分方程求解：

- 令$h(t) = (\lambda-\mu)M(t) + \theta = M'(t)$
- 则 $h'(t) = (\lambda-\mu)M'(t)$
- 即 $\frac{h'(t)}{h(t)} = \lambda - \mu$
- 积分可得：$\ln[h(t)] = (\lambda-\mu)t + C$
- 所以，$h(t) = Ke^{(\lambda-\mu)t}$, K为常数
- 代回上式，$\theta + (\lambda-\mu)M(t) = Ke^{(\lambda-\mu)t}$

12.2.3. 生灭过程例子

用边界条件，确定常数K:

- 为了确定常数K的具体值，注意到，$M(0) = i$
- 所以$K = \theta + (\lambda - \mu)i$
- 所以$M(t) = \frac{\theta}{\lambda-\mu}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right] + ie^{(\lambda-\mu)t}$

若出生率等于死亡率：

- 有，$M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta = \theta$
- 对这个求积分，联合$M(0) = i$得到

$$M(t) = \theta t + i$$

- 此时总体体量，仅依赖移民随时间线性增加

12.2.3. 生灭过程例子

- 例6.5-排队系统：顾客按照速率λ的泊松过程到达一个单服务线的服务站，即相继到达之间的时间是均值为$1/\lambda$的独立指数随机变量。
- 每个顾客在到达时，如果服务线有空，则直接进入服务，如果没有空，那么顾客加入队列。
- 服务时间假定为均值$1/\mu$的独立指数随机变量。一个顾客接受完服务，就离开系统，继而，队列中的下一个顾客进入服务，接受服务。

12.2.3. 生灭过程例子

生灭过程建模：

- 将$X(t)$记在时刻t系统中的顾客数，则$\{X(t), t \geq 0\}$可以看做一个生灭过程，且：

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$
$$\mu_n = \mu, \qquad n \geq 1$$

状态转移速率v_i和状态转移概率P_{ij}：

- $v_0 = \lambda,$ $\qquad v_i = \lambda + \mu, i > 0,$
- $P_{01} = 1,$
- $P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, i > 0,$ $\qquad P_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, i > 0$

12.2.4. 生灭过程：状态i到状态j时间

问题：生灭过程从状态i到达状态$j(j > i)$平均需要多久？

- 考虑出生率$\{\lambda_n\}$和死亡率$\{\mu_n\}$的一般的生灭过程，其中$\mu_0 = 0$

子问题：以$T_{i,i+1}$记开始在状态i的过程进入状态$i+1$所需时间

$$T_{ij} = T_{i,i+1} + T_{i+1,i+2} + \cdots + T_{j-1,j}$$

12.2.4. 生灭过程：状态i到状态j时间

求解：$E\left[T_{i,i+1}\right], i \geq 0$

- 可以从$i = 0$递推出$E\left[T_{i,i+1}\right], i \geq 0$
- 首先：由于$T_{0,1}$是速率为λ_0的指数随机变量，所以有

$$E[T_0] = \frac{1}{\lambda_0}$$

- 对$i > 0$：取条件于处于状态i的过程，首次发生状态转移是到达$i-1$还是$i+1$，即

$$I_{i,i+1} = \begin{cases} 1, \text{从状态}i\text{起始，首次发生状态转移是到}i+1 \\ 0, \text{从状态}i\text{起始，首次发生状态转移是到}i-1 \end{cases}$$

- $P\{I_{i,i+1} = 1\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$， $P\{I_{i,i+1} = 0\} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$

12.2.4. 生灭过程：状态i到状态j时间

- 注意到发生第一次转移的平均时间是$\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}$

所以，$E\left[T_{i,i+1}\middle|I_{i,i+1}=1\right]=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}$，

  - 因为如果第一次的转移是到$n+1$的话，即是生事件，则不需要额外的附加时间

$E\left[T_{i,i+1}\middle|I_{i,i+1}=0\right]=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+E\left[T_{i-1,i}\right]+E\left[T_{i,i+1}\right]$，

  - 若第一次转移是到$n-1$，即是灭事件，则需要额外的从$i-1$到i的时间，和额外的i到$i+1$的时间。

- 所以，由条件期望公式

$$E\left[T_{i,i+1}\right]=E\left[E\left[T_{i,i+1}\middle|I_{i,i+1}\right]\right]=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left(E\left[T_{i-1,i}\right]+E\left[T_{i,i+1}\right]\right)$$

- 所以有相应的递推式：

$$E\left[T_{i,i+1}\right]=\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\mu_i}{\lambda_i}E\left[T_{i-1,i}\right],\ i\geq 1$$

- 基于$E[T_{0,1}]$，可求所有期望间隔时间

12.2.4. 生灭过程：状态i到状态j时间

- 从状态i到状态j $(j > i)$的平均时间：

$$E[T_{ij}] = E[T_{i,i+1}] + E[T_{i+1,i+2}] + \cdots + E[T_{j-1,j}]$$

  - 只要知道具体的λ_i和μ_i，可计算相应的期望间隔时间。

12.2.4. 生灭过程：状态i到状态j时间

- **例6.7**：尝试 $\lambda_i \equiv \lambda$，$\mu_i \equiv \mu$ 的生灭过程的计算

求 E[从状态k到状态j的时间]，$k < j$

求，$E[T_{kj}]$

- $E\left[T_{kj}\right] = \sum_{i=k}^{j-1} E[T_{i,i+1}]$
- $E\left[T_{i,i+1}\right] = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} E\left[T_{i-1,i}\right]$
- $E\left[T_{0,1}\right] = \frac{1}{\lambda}$
- $E\left[T_{i,i+1}\right] = \frac{1}{\lambda}[1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i]$
- 当$\lambda \neq \mu$，$E\left[T_{i,i+1}\right] = \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i+1}}{\lambda-\mu}$
- 当$\lambda = \mu$，$E\left[T_{i,i+1}\right] = \frac{i+1}{\lambda}$

12.3 转移概率函数$P_{ij}(t)$（课本6.4）

12.3.1. 纯生过程的转移概率

问题：计算具体转移概率$P_{ij}(t)$

- 不一定有显示表达

- 命题6.1：对于当$i \neq j$时$\lambda_i \neq \lambda_j$的纯生过程有显示表达

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k, r=i}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k, r=i}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}, i < j$$

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$$

12.3.1. 纯生过程的转移概率

- **命题6.1**：对于当$i \neq j$时$\lambda_i \neq \lambda_j$的纯生过程有显示表达

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=i}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k, r=i}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k} - \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k, r=i}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}, i < j$$

$$P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$$

推导：

- X_k是转移到状态$k+1$ $(\mathrm{k} \geq 1)$前过程在状态k逗留时间。

- 考虑的转移概率，当下过程处于状态i，时间t后处于状态j

第一步：$P_{ii}(t) = P\{X(t) = i | X(0) = i\}$

- 等价于，在状态i的逗留时间超过t

$$P_{ii}(t) = P\{X(t) = i | X(0) = i\} = P\{X_i > t\} = e^{-\lambda_i t}$$

12.3.1. 纯生过程的转移概率

第二步：$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j|X(0) = i\}$

- 注意到：

$$P\{X(t) = j|X(0) = i\}$$
$$= P\{X(t) < j + 1|X(0) = i\} - P\{X(t) < j|X(0) = i\}$$

- $P\{X(t) < j|X(0) = i\}$ 对应的是：从状态i开始的过程，直到时间t为止还没有进入状态j

- 令$j > i$，注意到：从状态i到状态j的所用时间为$\sum_{k=i}^{j-1} X_k$
- 即，$\{X(t) < j|X(0) = i\}$ 对应 $\sum_{k=i}^{j-1} X_k > t$

12.3.1. 纯生过程的转移概率

- 所以：

$$P\{X(t)<j+1|X(0)=i\}-P\{X(t)<j|X(0)=i\}$$
$$=P\left\{\sum_{k=i}^{j}X_k>t\right\}-P\left\{\sum_{k=i}^{j-1}X_k>t\right\}$$

$P\left\{\sum_{k=i}^{j}X_k>t\right\}$ 表达式？

- 注意到：$\sum_{k=i}^{j}X_k$ 为独立指数随机变量的卷积
  - $X_i,\dots,X_j$分别是速率$\lambda_i,\dots,\lambda_j$的独立指数随机变量
- 得到

$$P\left\{\sum_{k=i}^{j-1}X_k>t\right\}=\sum_{k=i}^{j-1}e^{-\lambda_k t}\prod_{r\neq k,r=i}^{j-1}\frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k}$$
$$P\left\{\sum_{k=i}^{j}X_k>t\right\}=\sum_{k=i}^{j}e^{-\lambda_k t}\prod_{r\neq k,r=i}^{j}\frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k}$$

- 结论得到

12.3.2. 尤尔过程的转移概率

- 例6.8-尤尔过程：纯生过程，每个个体都有独立出生率λ

$$\mu_n = 0, \qquad n \geq 1$$
$$\lambda_n = n\lambda, \qquad n \geq 1$$

➢ 推导：令$i = 1$，即从一个个体开始演变。

➢ 命题6.1给出：

$$P_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{j} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k,r=1}^{j} \frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k} - \sum_{k=1}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r\neq k,r=1}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r-\lambda_k}$$
$$= e^{-j\lambda t} \prod_{r=1}^{j-1} \frac{r}{r-j} + \sum_{k=1}^{j-1} e^{-k\lambda t} \left(\prod_{r\neq k,r=1}^{j} \frac{r}{r-k} - \prod_{r\neq k,r=1}^{j-1} \frac{r}{r-k}\right)$$
$$= e^{-j\lambda t}(-1)^{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} e^{-k\lambda t} \left(\frac{j}{j-k} - 1\right) \prod_{r\neq k,r=1}^{j-1} \frac{r}{r-k}$$

➢ 其中，$\left(\frac{j}{j-k} - 1\right) \prod_{r\neq k,r=1}^{j-1} \frac{r}{r-k} = \frac{k}{j-k} \prod_{r\neq k,r=1}^{j-1} \frac{r}{r-k} = \frac{(j-1)!}{(1-k)(2-k)\ldots(k-1-k)(j-k)!} = (-1)^{k-1}\binom{j-1}{k-1}$

➢ $P_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{j} \binom{j-1}{k-1} e^{-k\lambda t}(-1)^{k-1} = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} e^{-i\lambda t}(-1)^{i} = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \left(-e^{-\lambda t}\right)^{i} = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1}$

12.3.2. 尤尔过程的转移概率

$P_{1j}(t) = P\{X(t) = j|X(0) = 1\} = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1}$

- 所以从单个体开始，在时间t总体大小$X(t)$是期望为$e^{\lambda t}$的几何分布。
  - 即直到第一次成功，需要多少次伯努利试验，概率为$e^{-\lambda t}$
  - 但这个没办法随时间过程直观理解。只能到了某一个时刻t，可知道总体相当于做了这么多次伯努利试验。

- 如果总体开始有i个个体，则可以看成各自的独立尤尔过程。
- 所以时间t时，总体数量$X(t)$，为i个参数为$e^{-\lambda t}$的独立同分布的几何随机变量的和
  - 相当于，给定$X(0) = i$, $X(t)$的条件分布，是参数为i和$e^{-\lambda t}$的负二项分布。

12.3.2. 尤尔过程的转移概率

$P_{ij}(t)=P\{X(t)=j|X(0)=i\}$

- 如果总体开始有i个个体，则可以看成各自的独立尤尔过程。
- 所以时间t时，总体数量$X(t)$，为i个参数为$e^{-\lambda t}$的独立同分布的几何随机变量的和
  - 相当于，给定$X(0)=i$,在时间t的总体大小，$X(t)$，的条件分布，是参数为i和$e^{-\lambda t}$的负二项分布。
  - 负二项分布可解释为，抛掷一枚每次正面朝上的概率为$e^{-\lambda t}$的硬币，要收集到总共有i个正面时所必须抛掷的次数的分布。

- 所以：

$$P_{ij}(t)=\binom{j-1}{i-1}\left(e^{-\lambda t}\right)^{i}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-i}, j\geq i\geq 1$$

- $P_{ij}(t)$可以由命题6.1公式直接得到，但简化到上述形式是非常困难的！