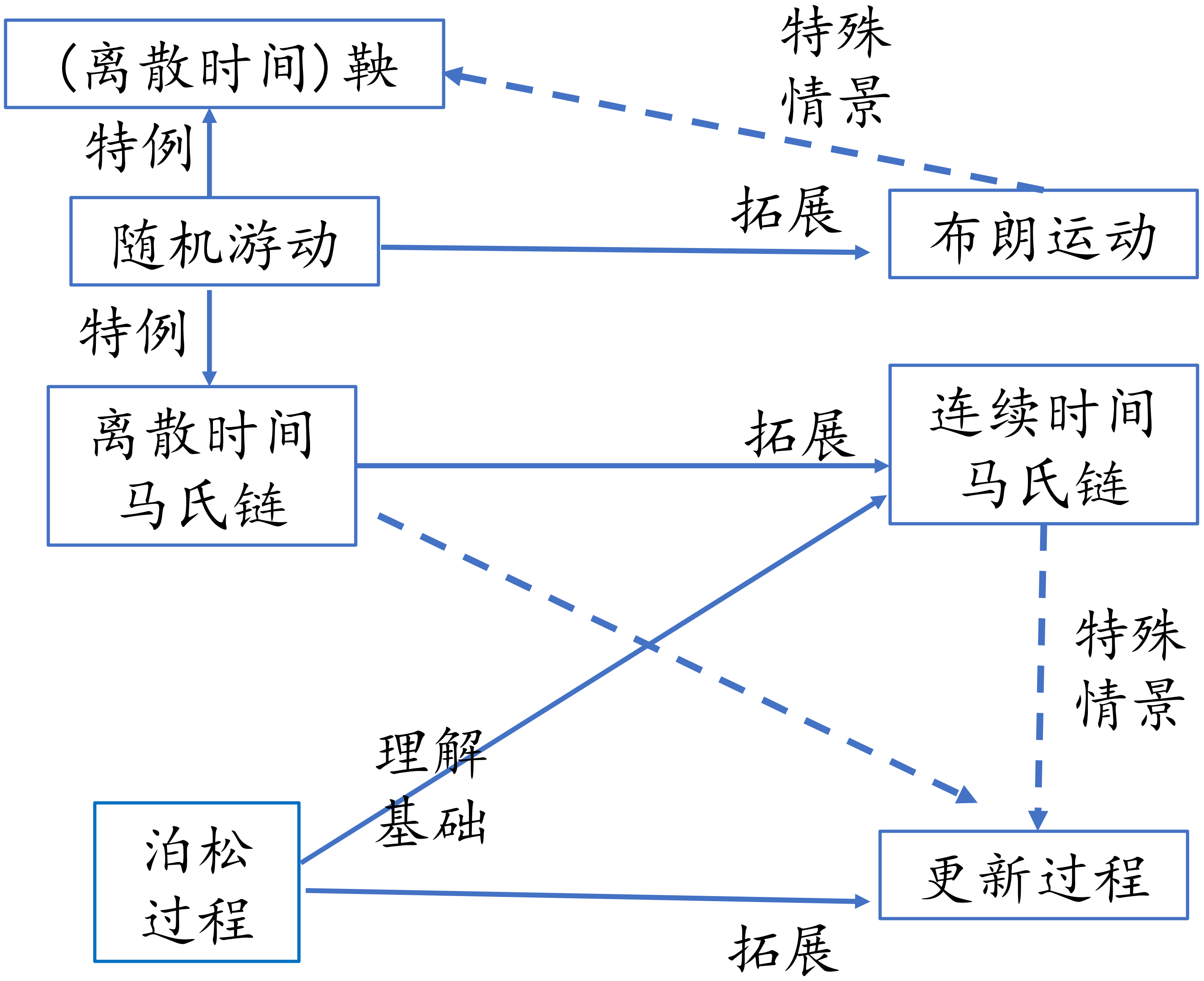
随机过程
Stochastic Processes

讲义14：更新过程-1

随机过程的关系图


(离散时间)鞅
特殊
情景
特例
随机游动
拓展
布朗运动
特例
离散时间
马氏链
拓展
连续时间
马氏链
特殊
情景
理解
基础
泊松
过程
更新过程
拓展

目 录

14.1更新过程介绍（课本7.1）

14.1.1. 更新过程定义

- 定义**7.1-**更新过程定义：令$\{N(t), t \geq 0\}$是一个计数过程
- $N(t)$是到时间t为止发生的事件数
- 以X_n记这个过程的第$n-1$和第n个事件之间的间隔时间$(n \geq 1)$
- 如果非负随机变量列$\{X_1, X_2, \ldots\}$是独立同分布的，那么计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为更新过程

14.1.1. 更新过程定义

- 更新过程理解
- 计数过程，直到第一次事件发生的时间有某个分布F
- 事件1和2之间的时间独立于事件1发生的时间，且分布为F
- 一个事件发生时，我们说发生了更新
  - 更新与事件发生是等价的
  - 从更新发生时，重新计数，则过程在概率意义下重启
    - 注意1：更新过程在更新时（事件发生时）重启，即更新时重新考虑更新过程，与原始更新过程完全同分布，且后续更新与历史更新是独立的
    - 注意2：但是，更新过程不具备一般性的无记忆性！

- X_i既可以是连续随机变量，也可以是离散随机变量！

14.1.1. 更新过程例子

更新过程：一个计数过程，其两次相继事件之间的时间是独立同分布的随机变量

- 泊松过程是更新过程吗？

- 马氏链是更新过程吗？

14.1.1. 更新过程的例子

●例：我们有无穷多灯泡，它们的寿命是独立同分布的。再假设在某个时间开始，我们开始使用一个灯泡，当这个灯泡失效时，立刻换上新灯泡。

●在这些条件下，用$N(t)$表示直到时刻t为止失效的（更新的）灯泡个数。则$\{N(t), t \geq 0\}$是一个更新过程

- 这里的间隔时间就是灯泡的寿命时间，独立同分布
- 事件就是灯泡失效/变坏，等价于灯泡更新

14.1.2. 用间隔时间X_n描述更新过程

更新间隔时间X_n的特征

- 到达间隔时间X_n不恒等于0，相应的均值也大于0
  - $X_n \sim i.i.d.\ F$ 分布函数，要求
    $$F(0) = P\{X_n = 0\} < 1$$
    即，间隔时间不能恒等于0
  - 间隔时间的期望（即平均间隔时间）
    $$\mu = E[X_n], n \geq 1$$
    也大于0，即，$\mu > 0$
    - 因为，已知X_n非负，且X_n不恒等于0

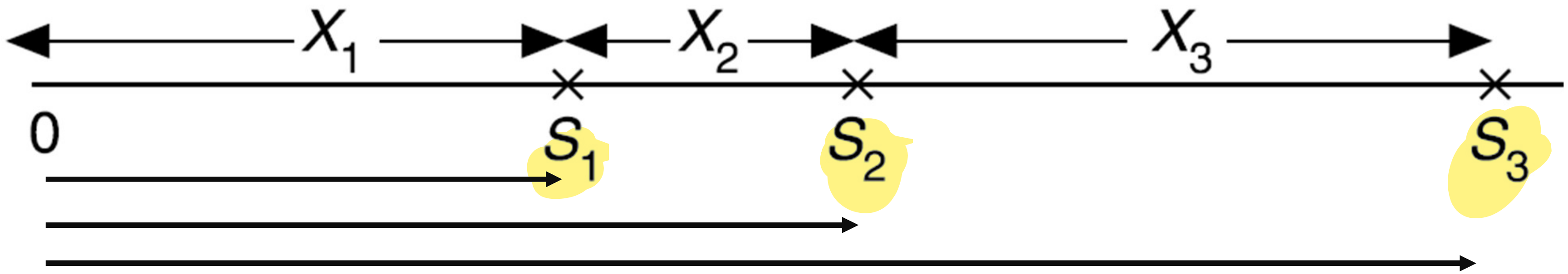
14.1.2. 用间隔时间X_n描述更新过程

更新时间S_n与更新间隔时间X_n的关系

- 更新时间S_n是第n次更新发生的时间
- 考虑一个到达间隔时间为$X_1, X_2, \ldots$的一个更新过程，令

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, n \geq 1$$

即$S_1 = X_1$是第1次更新的时间；$S_2 = X_1 + X_2$是第二次更新的时间，等；S_n是第n次更新的时间。



- 以泊松过程为例：

➢ S_n是泊松过程的等待时间

➢ X_n是泊松过程的到达间隔时间

14.1.3. $N(t)$的初步结论1

问题：有限时间内，能发生无穷多次更新吗？

- 数学语言：当$t < \infty$，能有$N(t) = \infty$吗？
  - No

推导思路：

- 第一步：确立$N(t)$与S_n的关系
  - 非常重要

- 第二步：利用强大数定律

14.1.3. $N(t)$的初步结论1

$N(t)$与S_n的关系1:

- $N(t)$是到时间t发生的更新事件数
- S_n 是更新n发生的时间

- 首先注意到:

$$\{N(t) \geq n\} \quad \leftrightarrow \quad \{S_n \leq t\}$$

- 时刻t之前的更新数$\geq n$，当且仅当第n次更新发生在时刻t，或时刻t之前

14.1.3. $N(t)$的初步结论1

$N(t)$与S_n的关系2：

$$N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$$

- 注意：$N(t)$是到时间t发生的事件数

- 可知：

$$\{N(t) = n\} \quad \leftrightarrow \quad \{S_n \leq t \text{ 且 } S_{n+1} > t\}$$

  - 时间t之前恰好发生n次更新，需要$S_n \leq t$ 且 $S_{n+1} > t$
  - $S_n \leq t$说明，t之前至少已经发生了n次更新
  - 结合$S_{n+1} > t$，说明到t时尚未发生第$n+1$次更新
  - $S_n \leq t$ 且 $S_{n+1} > t$ 等价于 $\max\{n: S_n \leq t\} = n$

- 同时也构建了：

$$\text{必有，} S_{N(t)} \leq t \text{ 且 } S_{N(t)+1} > t$$

14.1.3. $N(t)$的初步结论1

$N(t)$与S_n的关系3：

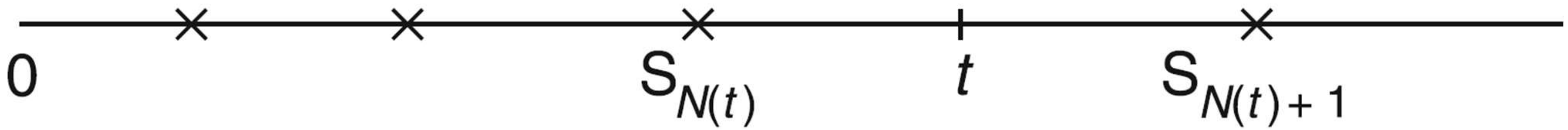
- 极其重要的结论：

$$必有，S_{N(t)} \le t \text{ 且 } S_{N(t)+1} > t$$

➢ $S_{N(t)}$表示的是早于或等于t的最后的更新事件发生的时间（可参考课本7.3节的描述）

➢ $S_{N(t)+1}$表示的是发生在t之后的第一个更新的更新时间

➢ 图形理解：



➢ 例子理解：若$N(t) = 3$,说明在t时刻之前，有3次更新发生，所以$S_{N(t)} = S_3 \le t$，且$S_{N(t)+1} = S_4 > t$

➢ 否则有矛盾，若$S_4 \le t$，必有$N(t) \ge 4$

14.1.3. $N(t)$的初步结论1

强大数律应用：

- 由于$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，利用强大数率得到，以概率1有：

$$当n\to\infty时，\quad \frac{S_n}{n}\to\mu$$

  - 由于$\mu>0$, 说明当$n\to\infty$时，$S_n\to\infty$
  - 因此，对有限值t，当$n\to\infty$，必有$S_n>\mathrm{t}$

推得矛盾：

- 若，当$t<\infty$，$N(t)=\infty$
  - 则有，$S_{N(t)}\to\infty$，即必有 $S_{N(t)}>t$
- 但已知，必有，$S_{N(t)}\le t$
  - 推得矛盾
- 因此，必有：

$$当t<\infty，N(t)<\infty$$

14.1.3. $N(t)$的初步结论2

问题：无限时间，会发生无穷多次更新吗？

- 数学语言：当$t \to \infty$，$N(t) = \infty$吗？

- 结论是，当$t \to \infty$, 以概率1，下式成立：

$$N(\infty) \equiv \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$$

推导过程

- 要点：只有在到达间隔X_n之一是无穷的时候，$N(\infty)$有限
  即：
  - $P\{N(\infty) < \infty\} = P\{X_n = \infty$，对于某个$n\}$
  - $= P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = \infty\}\}$
  - $\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = \infty\}$ $=0$
- 所以，更新过程默认假设，间隔时间等于无穷的概率为0

14.2 $N(t)$的分布 (课本7.2)

14. 2. 1. $N(t)$的分布的表达形式-1

利用S_n的分布函数表示$N(t)$的分布

- $N(t)$与S_n的进一步关系：

$$N(t) \geq n \ \leftrightarrow \ S_n \leq t$$

- 由上述关系：

$$\begin{aligned} P\{N(t)=n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

  - $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$；$X_i \sim i.i.d. F$ 分布函数；F_n为n个F的卷积

14.2.2. 时间间隔为几何分布的更新过程

- 例7.1：假设更新过程的间隔时间X_n服从几何分布，即 $P\{X_n = i\} = p(1-p)^{i-1}, i \geq 1$. 求$P\{N(t) = n\}$。

注意点：

- 此时考虑的是离散时间

- 各时刻对应1次伯努利试验，是否发生更新，发生概率是p

对 S_n 的理解：$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

- S_n服从负二项分布，即

$$\mathrm{P}\{S_n = k\} = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, & k \geq n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

  - S_1可以解释为为了得到1次成功所必须的试验次数
  - S_n可以解释为为了得到n次成功所必须的试验次数

14.2.2. 时间间隔为几何分布的更新过程

$N(t)$的分布可通过S_n的分布函数表示为：

$$P\{N(t)=n\}=P\{S_n\le t\}-P\{S_{n+1}\le t\}$$
$$=\sum_{k=n}^{[t]}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

对 $N(t)$ 的直接理解：$Binomial(n,p)$

- 对每个时刻，更新事件以概率p独立发生
- $N(t)$为到时刻n发生更新事件的次数

$$P\{N(t)=n\}=\binom{[t]}{n}p^n(1-p)^{[t]-n}$$

- 也自然地得到如下关系式：

$$P\{N(t)=n\}=\binom{[t]}{n}p^n(1-p)^{[t]-n}$$
$$=\sum_{k=n}^{[t]}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

14.2.3. $N(t)$的分布的表达式-2

利用S_n的密度函数表示$N(t)$的分布

- 利用全概率公式，对S_n取条件：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N(t)=n\} &= \int_0^{\infty} P\{N(t)=n|S_n=y\} f_{S_n}(y)dy \\
&= \int_0^{t} P\{X_{n+1}>t-y|S_n=y\} f_{S_n}(y)dy \\
&= \int_0^{t} \bar{F}(t-y) f_{S_n}(y)dy
\end{aligned}
$$

  - 其中$\bar{F}=1-F$

14. 2. 4. 时间间隔为指数分布的更新过程

•例7.2：更新过程间隔时间分布函数 $F(x) = 1 - e^{\lambda x}$，求 $P\{N(t) = n\}$。

➢ 间隔时间为指数时间，更新过程为泊松过程

➢ S_n作为n个速率为λ的指数随机变量的和，具有$Gamma(n,\lambda)$分布。

$N(t)$的分布可表示为：

$$\mathrm{P}\{N(t) = n\} = \int_0^t \bar{F}(t-y) f_{S_n}(y) dy$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda(t-y)} \frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda y}}{(n-1)!} \int_0^t y^{n-1} dy$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

14.2.5. $N(t)$的均值：更新函数

更新函数$m(t)$：$N(t)$的均值$m(t)=E[N(t)]$如何计算？

- 基于$N(t)$的分布可求$m(t)$，但可能较复杂，不易求解

可基于$N(t)$与S_n的进一步关系：

- $m(t)=E[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{S_n\leq t\}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$
  - 先用到，作业一中出现的结论：

$$\begin{aligned}E[N]&=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{N=k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P\{N=k\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\{N=k\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N\geq n\}\end{aligned}$$

  - 再用到：$N(t)\geq n \ \leftrightarrow\ S_n\leq t$

- 函数$m(t)$是均值函数，称为更新函数

14.2.5. 更新函数的性质

更新函数$m(t)$唯一确定更新过程

- ➢ 证明不做要求

- $m(t)$与到达间隔分布F间存在一一对应关系。

➢ 例如，对泊松过程来说：

$$m(t) = \lambda t$$

- ➢ 泊松过程是具有线性均值函数的唯一更新过程！

14. 2. 5. 更新函数的性质

对有限时间，更新函数是有限的

- $\forall t < \infty$， $m(t) < \infty$
  - 证明很困难，对该定理证明不做要求

- 注意，$N(t)$以概率1有限, 不能推出 $m(t) < \infty$
- 因为，随机变量有限，并不能推出期望有限
  - 例如：令Y是随机变量，具有如下的概率分布

$$P\{Y = 2^n\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n \geq 1$$

Y 有限：$P\{Y < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

$E[Y]$ 无限：$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$

14.2.6. 可计算更新函数的积分方程

- 更新函数满足的一般更新方程：

$$m(t)=\int_0^t[1+m(t-x)]f(x)dx=F(t)+\int_0^t m(t-x)f(x)dx$$

  - ➢ $f(x)$是间隔时间X_i的概率密度函数
  - ➢ 很多情况是，$N(t)$分布不易得，S_n分布也不易得，利用这种微分方程求解也可，仅基于间隔时间X的分布

推导过程

➢ 对首次更新的时间X_1取条件：

$$m(t)=E[N(t)]=\int_0^\infty E[N(t)|X_1=x]f(x)dx$$

  - ➢ $E[N(t)|X_1=x]=0$, 若 $x>t$
  - ➢ $E[N(t)|X_1=x]=1+E[N(t-x)]$, 若 $x<t$
    - ➢ 因为，已知首次更新发生的时刻x小于t，由于更新过程概率地在一次更新发生后重新开始，利用这一事实推出，在时刻t之前的更新次数将与1加上前$t-x$时间单位中的更新次数有相同分布。

14.2.7. 时间间隔为均匀分布的更新过程

- 例7.3：考虑X_i服从(0,1)上的均匀分布，在$t \le 1$的情况下容易求得$m(t)$的显示解。

➢ 当$t \le 1$，带入更新方程：

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)dx$$

$$= t + \int_0^t m(y)dy \quad ,这里用y = t - x替换$$

➢ 两边同时求微分，得到：

➢ $m'(t) = 1 + m(t)$

➢ 令$h(t) = m(t) + 1$，有，$h'(t) = h(t)$ ← 经典形式

➢ $\ln h(t) = t + C$

➢ $h(t) = Ke^t$

➢ $m(t) = Ke^t - 1$

➢ 定解条件：$m(0) = 0$, 得到$K = 1$

➢ 最终解：$m(t) = e^t - 1, 0 \le t \le 1$

14.3 极限定理及其应用

(课本7.3-部分1& 7.4部分)

14.3.1. 更新过程的速率$1/\mu$

●**命题7.1：** 以概率1有

$$当 t \to \infty 时，\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

- 当$t \to \infty$时，到时刻t的平均更新率以概率1收敛到$1/\mu$.
- $1/\mu$ 称为更新过程的速率
  - 因为μ是更新间隔时间的均值，更新速率为单位时间平均发生的更新数，也即$1/\mu$

  - 特例（讲义6命题4.4）：离散马氏链的常返性状态，长程比例等于回归状态所需步长的期望的倒数
  - 马氏链的特殊情境可以考虑为更新过程

14.3.1. 更新过程的速率$1/\mu$

推导过程：

由$N(t)$与S_n关系的重要结论：

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$$

- 从而 $\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \dfrac{t}{N(t)} < \dfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$

先说明：$t \to \infty$时，$\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$

- 注意到：$\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i / N(t)$
- $\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)}$是$N(t)$个独立同分布的随机变量的均值，由强大数律

$$\text{当}N(t) \to \infty,\ \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

- $N(t)$初步结论：当$t \to \infty$时，$N(t) \to \infty$，所以

$$\text{当}t \to \infty\text{时},\ \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

14.3.1. 更新过程的速率$1/\mu$

再说明：$t\to\infty$时，$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}\to\mu$

➢ 另外，注意到：$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}=\left(\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right)\left(\frac{N(t)+1}{N(t)}\right)$

$$当t\to\infty时，\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\to\mu 且 \frac{N(t)+1}{N(t)}\to 1$$

➢ 所以，当$t\to\infty$时，$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}\to\mu$

$\frac{t}{N(t)}$在$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$和$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$之间，得到结论：

$$当t\to\infty时，\frac{t}{N(t)}\to\mu$$

14.3.2. 更新过程速率的例子

- 例7.4：杰伦奶茶店有一台用电池的老唱片机。一旦电池失效，主理人立即换上新电池。如果电池的寿命（小时）在区间(30,60)上均匀分布，长远来看，更换电池的速率是什么？

更新过程速率的求解：

$$\text{当} t \to \infty \text{时，} \frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{30+6}{2}} = \frac{1}{45}$$

- 说明长远来看，单位时间(一小时)更新$\frac{1}{45}$次
- 也即，主理人须45小时更换一次电池

14.3.2. 更新过程速率的例子

●**例7.5**：如果杰伦奶茶店储藏空间非常有限，主理人想换电池时，都需要去买，购买新电池花的时间是 (0,1) 上均匀分布的。那么，长远来看，更换电池的速率是什么？

- 本质上就是间隔时间变长！

$$\text{当}\, t \to \infty \text{时，} \frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} = \frac{1}{E(U_1)+E(U_2)} = \frac{1}{45+0.5}$$

- 说明长远来看，主理人须45.5小时更换一次电池

14.3.2. 更新过程速率的例子

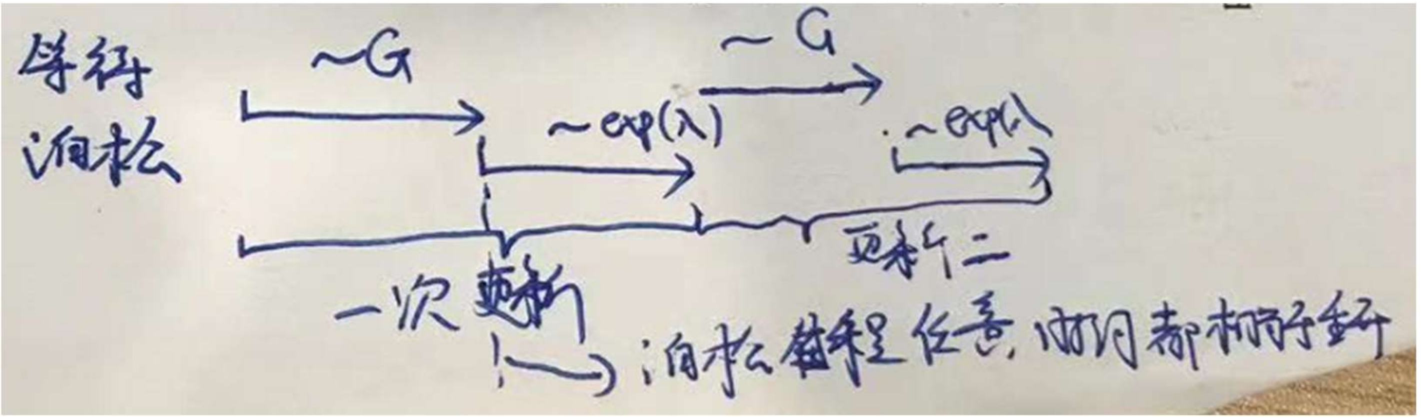
●例7.6：假设潜在顾客按照速率为λ的泊松过程来到只有一个服务窗口的杰伦奶茶店。

●假设，潜在顾客只在服务窗口有空时进入奶茶店消费。如果在奶茶店中已经有顾客，则后来者选择立即放弃消费。

●如果我们假定进入奶茶店的顾客在店里停留的时间是一个具有分布G的随机变量，那么

（a）顾客进入银行的速率是多少?

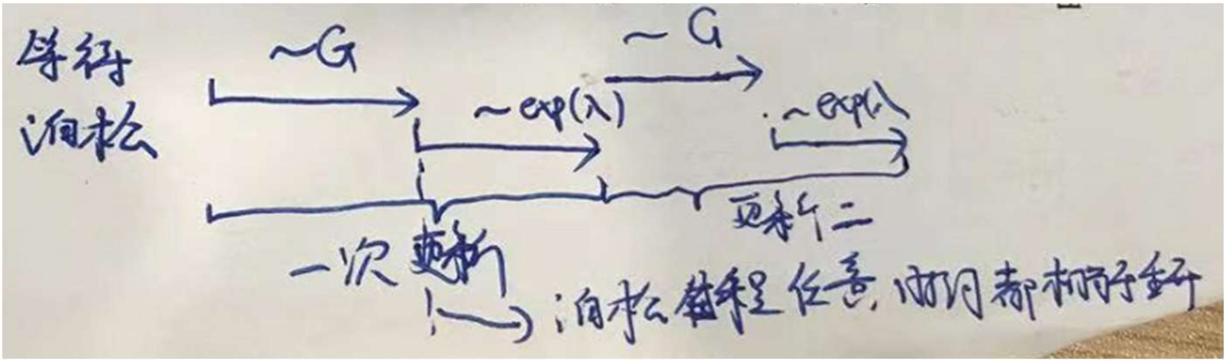
（b）潜在的顾客确实进入银行的比例是多少？



14.3.3. 均匀间隔时间的更新速率

更新过程建模

- 要点：确定更新过程的间隔时间
- 定义过程在第一个顾客进入银行时开始，即时刻0恰好有一个顾客进入银行。



更新过程速率的求解：

- 以μ_G记平均服务时间，那么由泊松过程的无记忆性，进入顾客间的间隔时间的均值是

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda}$$

- 因此，长期来看，进入银行的顾客的速率为：

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mu_G}$$

14.3.3. 均匀间隔时间的更新速率

进入银行的比例求解：

- 进入速率$\frac{1}{\mu}$可理解为：单位时间进入银行的人数
- 到来的速率为λ：单位时间到达人数
- 进入人数/到达人数，给出进入银行的顾客的比例：

$$\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda\mu_G}}{\lambda}=\frac{1}{1+\lambda\mu_G}$$

具体算例：

- 特别地，如果$\lambda=2$，而$\mu_G=2$, 那么5个顾客中只有1个将确实进入这个系统。

14.3.4. 更新报酬过程

更新报酬过程的定义

- 考虑一个更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$，到达间隔时间为X_n。
  - $E[X_n] = E[X]$。
- 假设更新n发生时，我们接受一个报酬R_n。
  - 假定$R_n(n \geq 1)$独立同分布
    - $E[R_n] = E[R]$。
  - 注意：R_n可能依赖于X_n的长度，也可能是在过程中累计获得。
- 令

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

  - $R(t)$代表的是到时刻t赚到的全部报酬。

- $\{R(t), t \geq 0\}$被称为更新报酬过程。

14.3.4. 更新报酬过程的极限定理

更新报酬过程的极限定理

●命题7.3： 若$E[R]<\infty$且$E[X]<\infty$, 那么

（a） 以概率1，有 $\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{E[R]}{E[X]}$

（b） $\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{E[R]}{E[X]}$

➢ $\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}$是单位时间的长程平均报酬(费用，花费)

$=$到时间t为止的所有报酬，除以到时间t的时间

$=$一次更新的期望报酬除以一次更新的期望长度

$=\frac{E[\text{一个循环引起的费用}]}{E[\text{一个循环的长度}]}$

➢ 为了方便理解：一次更新，也称为一个循环

➢ (a)的证明很简单，(b)的证明不做要求

14.3.4. 更新报酬过程的极限定理

（a）的证明：

以概率1，有 $\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{E[R]}{E[X]}$

- 注意到：

$$\frac{R(t)}{t}=\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{t}=\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}*\frac{N(t)}{t}$$

- 应用一般强大数定律：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}=E[R]$$

- 结合命题7.1，得到结果

14.3.4. 更新报酬过程实例

●例7.14：汽车寿命是一个具有分布H和概率密度h的连续随机变量X,默认为$i.i.d.$。

●布朗先生的做法是，一旦车坏了（即到达寿命）或者用了T年，他就购买一辆新车。

●假设新车价格C_1美元，车坏了的附加花费为C_2美元。

●用过的车直接销毁，没有剩余价值。

●布朗先生的长程平均费用是多少？

构建更新报酬过程

➢ 将买一辆新车定义为一次更新，即一个循环

➢ 间隔时间为$\min(T, X)$

➢ 循环内花费(更新报酬过程中的报酬):

$$R_n = 新车价格 + 车坏费用$$

14.3.4. 更新报酬过程的实例

确定循环（更新）期望花费$E[R_n]$和期望间隔时间：

- 对$\min(T,X)$的取值取条件
  - 若$\min(T,X)=T$, 则费用为C_1
    - $P\{\min(T,X)=T\}=P\{X>T\}$
  - 若$\min(T,X)=X$, 则费用为C_1+C_2
    - $P\{\min(T,X)=X\}=P\{X\le T\}$
- 所以：

$$E[R_n]=C_1*P\{X>T\}+(C_1+C_2)*P\{X\le T\}$$
$$=C_1+C_2H(T)$$

同理：

$$E[\min(T,X)]=T*P\{X>T\}+E[X|X\le T]*P\{X\le T\}$$
$$=\int_T^{\infty}Th(x)dx+\int_0^T x\frac{h(x)}{P\{X\le T\}}dx*P\{X\le T\}$$
$$=\mathrm{T}[1-\mathrm{H}(\mathrm{T})]+\int_0^T xh(x)\,dx$$

14.3.4. 更新报酬过程实例

应用更新报酬过程的极限定理：

- 命题7.3：

$$\text{长程平均花费}=\frac{E[\text{一个循环引起的费用}]}{E[\text{一个循环的长度}]}$$

$$=\frac{E[R_n]}{E[\min(T,X)]}$$

$$=\frac{C_1+C_2H(T)}{\int_0^T xh(x)dx+T[1-H(T)]}$$

14.3.4. 更新报酬过程实例

- 例7.16：假设顾客按速率λ的泊松过程到达一个单服务线系统。在到达时必须通过一个通向服务线的门。每次有顾客通过这个门，随后门会锁住t单位时间，之后开放。
- 顾客在门锁住的时间到来，就会流失，并导致一个费用C。
- 顾客在门开放的时间到来，就进入门内；若此时服务线闲着，顾客接受服务，如果服务线忙着，则该顾客流失，并导致一个费用K。
- 服务线服务一个顾客的时间是速率为μ的指数分布。
- 求此系统导致的单位时间的平均费用！

14.3.4. 更新报酬过程实例

- 难点：构建更新过程，保证间隔时间$i.i.d.$

- 解决：每次一个到达的顾客发现门没锁，为一次更新事件
  - 更新事件之间的时间间隔分布为 $t+X$, 其中t为固定的时间，而X是服从参数λ的指数分布的
  - 间隔时间是iid的：服务线的忙碌与否不影响顾客发现门锁没锁，

14.3.4. 更新报酬过程实例

确定循环内报酬：

➢ $t+X$ 产生多少费用