

复旦大学管理学院

2022~2023 学年第 1 学期期末考试

A 卷

课程名称: 时间序列分析 课程代码: MANA130022.01

开课院系: 管理学院统计与数据科学系 考试形式: 闭卷

姓名: 学号: 专业:

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	总分
得分					

(以下为试卷正文)

(注: 每道题的所有小问分值相同)

(装订线内不要答题)

1. (28 分) 假设 $\{e_t\}$ 为独立白噪声, 考虑如下模型:

$$Y_t = 0.7Y_{t-4} - 0.1Y_{t-8} + e_t - 0.5e_{t-1}$$

- a) 说明该模型存在平稳可逆解, 下面假设 Y_t 是该平稳可逆解。
- b) 求 ρ_4, γ_0 .
- c) 求 ρ_1 .
- d) 哪些 $\rho_k = 0$?

2. (24 分) 考虑如下季节模型

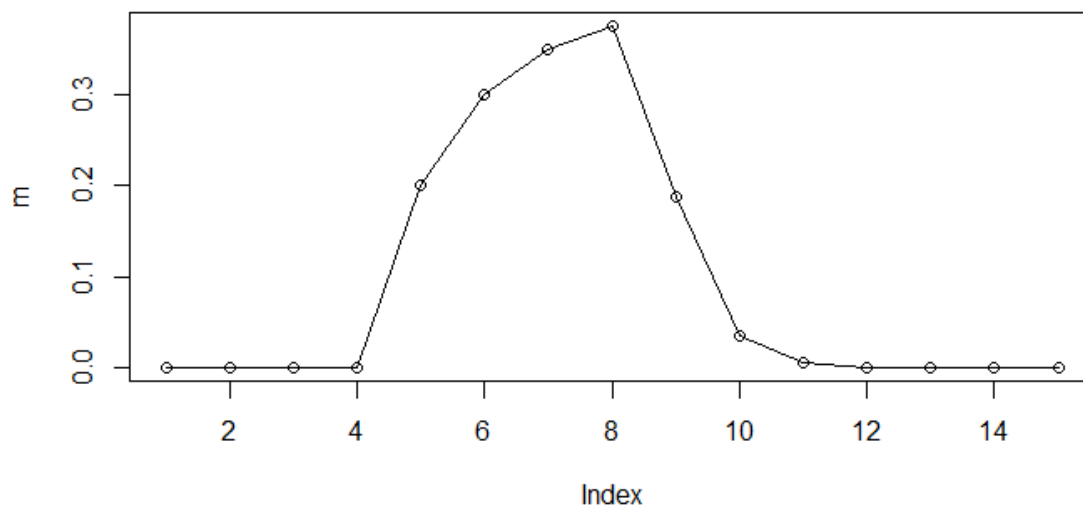
$$Y_t = 0.2Y_{t-1} + 0.5Y_{t-8} - 0.1Y_{t-9} + 1 + e_t - 0.4e_{t-1} + 0.5e_{t-4} - 0.2e_{t-5}$$

- a) 将该模型分解为 $\text{SARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_5$, 注意周期选取。
- b) 计算 $\hat{Y}_t(3)$ 和 $e_t(3)$.
- c) 已知 $\hat{Y}_t(1), \hat{Y}_t(2), \dots, \hat{Y}_t(9)$ (无需计算), 计算 $\hat{Y}_t(l), l > 9$.
- d) 如果 e_t 满足 $\text{GARCH}(2,2)$ 模型, 求 $\text{Var}(Y_{t+3}|Y_t, \dots)$.

3. (24 分)

(a) 考虑如下干预效应以及其图示, 已知 $m_8 - m_7 = 0.025$, $m_8 - m_9 = 0.1875$, 且最终 m_t 趋于 0, 求 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的值。

$$m_t = \frac{\omega_1}{(1 - 0.5B)(1 - B)} P_t^{(5)} + \left(\frac{\omega_2}{1 - 0.2B} + \frac{\omega_3}{1 - B} \right) P_t^{(9)}$$



b) 假设 Y_t 是 ARMA 模型 $Y_t = 0.2Y_{t-2} + e_t - 0.1e_{t-7}$ 的平稳解, 如果 $Y'_t = Y_t + 1$ (其他不变), 则新的误差 e'_{t+5} 与 e_{t+5} 有什么差别? 如果 $e'_t = e_t + 1$ (其他不变), 则新的序列 Y'_{t+5} 与 Y_{t+5} 有什么差别?

c) 假设 $Y_t = 1 + 0.5X_{t-1} + e_t$, $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$, e_t 和 ε_t 是互相独立的白噪声, 分别具有方差 σ_e^2 和 σ_ε^2 , 求 $\rho_k(X, Y) = \text{Corr}(X_t, Y_{t-k})$; 令 $\tilde{X}_t = X_t - 0.8X_{t-1}$, $\tilde{Y}_t = Y_t - 0.8Y_{t-1}$, 求 $\rho_k(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Corr}(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_{t-k})$.

4. (24 分) 考虑ARCH(1)模型, 假设 $\{\varepsilon_t\}$ 正态,

$$r_t = \sigma_{t|t-1} \varepsilon_t, \\ \sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$$

- a) 已知 $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$, $\sigma_{1|0} = \sqrt{\frac{\omega}{1-\alpha}}$, r_1 服从正态分布。求 r_t 的峰度, 该峰度是否大于 3?
- b) 诊断该模型的残差时, 可以用 Mcleod-Li 检验吗?
- c) 给定 r_{t-2}, r_{t-3}, \dots 的情况下, 求 r_t 的条件峰度 (条件四阶矩 $E(r_t^4 | r_{t-2}, r_{t-3}, \dots)$ 除以条件二阶矩 $E(r_t^2 | r_{t-2}, r_{t-3}, \dots)$ 的平方), 该条件峰度是否大于 3?
- d) 证明无论给定怎样的历史 (时刻 t 之前的) 数据, 即给定集合 $X \subseteq \{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$, r_t 的条件峰度 (条件四阶矩 $E(r_t^4 | X)$ 除以条件二阶矩 $E(r_t^2 | X)$ 的平方) 至少是 3, 何时刚好是 3?