随机过程
Stochastic Processes

讲义15：更新过程-2

目录

（课本第7章部分2）

15.1 极限定理及其应用

15.1 极限定理及其应用
(课本7.3-部分2,&7.4)

15.1.1. 基本更新定理

- 定理7.1-基本更新定理：

$$\text{当} t \to \infty \text{时，} \frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

且，当$\mu = \infty$时，$1/\mu$为0.

➢ 基本更新定理，是更新过程的中心极限定理的基础

- 疑问：当$t \to \infty$ 时，$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ 能说明 $\mathrm{E}[\frac{N(t)}{t}] \to \frac{1}{\mu}$吗？
  ➢ 反例见下页！

15.1.2. 随机变量收敛不能推出期望收敛

- 例7.8：令U是在(0,1)上均匀分布的随机变量，并且定义随机变量$Y_n(\mathrm{n} \geq 1)$为

$$Y_n = \begin{cases} 0, 若U > \frac{1}{n} \\ n, 若\ U \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

- 因此，以概率1有：

当$n \to \infty$，有$Y_n \to 0$

  - U以概率1大于0，由此推出，对于一切充分大的n，$\frac{1}{n}$趋向于0，Y_n将等于0.

- 然而，$E[Y_n]$ 不收敛到0:

$$E[Y_n] = nP\left\{U \leq \frac{1}{n}\right\} = n\frac{1}{n} = 1, \ \forall n$$

15.1.3. 又见停时

- **定义7.2**：随机过程$\{X_n, n \geq 1\}$的停时(随机时刻)N：N是可能无限的正整数随机变量。如果对于一切$n = 1, \ldots$，事件$\{N = n\}$完全由$X_1 \ldots X_n$来决定，也即，$\{N = n\}$独立于$X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$，那么非负整数随机变量N对独立随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$称为停时

➢ 停时背后的想法在于：想象X_i依次被观察，而N表示停止前被观察的事件数。我们在观察$X_1, \ldots X_n$后停止这一事件，只依赖于$X_1, \ldots X_n$这n个值，而不依赖(独立)于将来的值。

15.1.3. 停时例子

- **例7.9**：假设独立同分布的随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$满足

$$P\{X_i = 1\} = p = 1 - P\{X_i = 0\}$$

其中$p \in (0,1)$. 现定义：

$$N = \min\{n: X_1 + \cdots + X_n = r\}$$

理解

- N是这个序列的停时。
  - 假设依次操作一系列试验， $X_i = 1$ 对应试验 i 是成功的，则N是直至共获得r次成功需要的试验次数。
  - $\{N = n\}$完全决定于$X_1, \ldots X_n$且与$X_{n+1}, \ldots$独立

15.1.3. 停时例子

- **例7.10**：假设独立同分布的随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$ 满足

$$P\{X_i = 1\} = 0.5 = 1 - P\{X_i = -1\}$$

现定义：

$$N = \min\{n: X_1 + \cdots + X_n = 1\}$$

理解

- N是一个停时。
  - 对称随机游动(公平赌博)，每局等可能赢或者输1元，一个赌徒在首次赢钱时停止。
  - $\{N = n\}$完全决定于$X_1, \ldots X_n$且与$X_{n+1}, \ldots$独立

15. 1. 4. 瓦尔德方程

●定理**7.2-**瓦尔德方程：独立同分布的随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$，具有期望$E[X] < \infty$，而N是此序列的停时，使得$E[N] < \infty$, 则

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E[N]E[X]$$

15. 1. 4. 瓦尔德方程

- **定理7.2-瓦尔德方程**：独立同分布的随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$，具有期望$E[X] < \infty$，而N是此序列的停时，使得$E[N] < \infty$, 则

$$E[\sum_{n=1}^{N} X_n] = E[N]E[X]$$

不利用鞅停时定理的推导过程：

- 对$n = 1,2, \ldots$，令

$$I_n = \begin{cases} 1, 若 n \le N \\ 0, 若 n > N \end{cases}$$

  - 注意 $\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n$
  - 并注意到I_n完全由$X_1, \ldots, X_{n-1}$决定，独立于X_n
    - I_n在观察X_n之前就已经确定了(不需要观测到X_n)，因为如果到$n-1$没停，$I_n = 1$, 如果停了，$I_n = 0$

- 所以，$\mathrm{E}[\sum_{n=1}^{N} X_n] = E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]E[I_n] = E[X]\sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] = E[X]E[\sum_{n=1}^{\infty} I_n] = E[X]E[N]$

15. 1. 5. 瓦尔德方程的推论

- 命题**7.2**：更新过程到达间隔时间列$X_1, \ldots, X_n$，则

$$E\left[X_1 + \cdots + X_{N(t)+1}\right] = E[X]E[N(t) + 1]$$

思考：

- 如果$N(t) + 1$是$X_1, \ldots, X_n$的停时，命题7.2是定理7.2的直接结论
- 那么$N(t) + 1$是停时吗？
  - 即，$\{N(t) + 1 = n\}$, 是否完全由$X_1, \ldots, X_n$来决定呢？
  - 也即，$\{N(t) = n - 1\}$, 是否完全由$X_1, \ldots, X_n$来决定呢？

15.1.5. $N(t)$是停时

$\{N(t)=n-1\}$ 由 什么决定呢?

- 回忆$N(t)$ 与 S_n的关系:

$$N(t)=\max\{n: S_n \le t\}$$

$$\{N(t)=n\} \quad \leftrightarrow \quad \{S_n \le t \text{ 且 } S_{n+1} > t\}$$

- 得到: $\{N(t)=n\}$ 完全由 $X_1, \dots, X_{n+1}$来决定
- 也即: $\{N(t)=n-1\}$ 完全由 $X_1, \dots, X_n$ 来决定
- 命题得证

15.1.5. 瓦尔德方程推论的重要结论

- 命题**7.2**：更新过程到达间隔时间列$X_1, \ldots, X_n$，则
$$E[X_1 + \cdots + X_{N(t)+1}] = E[X]E[N(t) + 1]$$

➢ 命题7.2 说明一个非常重要的结论：
$$E[S_{N(t)+1}] = \mu[m(t) + 1]$$
  ➢ $S_{N(t)+1} = X_1 + \cdots + X_{N(t)+1}$

推论的重要结论的重要作用：

➢ 是证明基本更新定理的基础

➢ 能推导出平均超额寿命和更新函数的关系！

15.1.6. 基本更新定理的证明

- 定理7.1-基本更新定理：

$$\text{当} t \to \infty \text{时，} \frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

且，当$\mu = \infty$时，$1/\mu$为0.

第1步，$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$的证明：

- 因为$S_{N(t)+1}$是t后的首次更新时刻，由此推出：

$$S_{N(t)+1} = t + Y(t)$$

  - $Y(t)$称为t后的超额寿命，定义为从t到下一更新间的时长
    - 超额寿命一定非负
    - 超额寿命可用来计算更新函数$m(t)$
    - 又一种求$m(t)$的办法

15.1.6. 基本更新定理的证明

利用超额寿命$Y(t)$表示更新函数

- 应用命题7.2，得到重要的平均超额寿命和$m(t)$的关系：

$$\mu(m(t)+1)=E\left[S_{N(t)+1}\right]=t+E[Y(t)]$$

即：

$$\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}+\frac{E[Y(t)]}{\mu t}-\frac{1}{t}$$

- 由$Y(t)\geq 0$：

$$\frac{m(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}-\frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}$$

15.1.6. 基本更新定理的证明

第2步，得到 $\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$

- 2.1步：间隔X_i有界的条件下确定$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$
  - 假设存在一个值M使得对一切i有$P\{X_i < M\} = 1.$
  - 这蕴含了$Y(t)$也必须小于M, 所以我们有$E[Y(t)] < M$

➢ 所以：

$$\frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu} + \frac{M}{t\mu} - \frac{1}{t}$$

➢ 可得，在间隔X_i有界的条件下：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$$

➢ 更新间隔时间有界的条件下，基本更新定理得证

15.1.6. 基本更新定理的证明

- 2.2步：间隔时间推到无界的情形，得到$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$

➢ 要点：构造$N_M(t), t\ge 0$为具有间隔时间$\min(X_i, M)$, $i\ge 1$的更新过程。

  ➢ $N_M(t), t\ge 0$ 是更新间隔有界的更新过程

➢ 利用上页结论（更新间隔时间有界的基本更新定理）：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N_M(t)]}{t}=\frac{1}{E[\min(X_i,M)]}$$

➢ 进一步注意到：

$$N_M(t)\ge N(t),\ \forall t$$

  ➢ 因为，$\forall i$, 有 $\min(X_i, M)\le X_i$

15.1.6. 基本更新定理的证明

- 也即：

$$m(t) = E[N(t)] \le E[N_M(t)]$$

- 可得：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t} \le \lim_{t\to\infty}\frac{E[N_M(t)]}{t} = \frac{1}{E[\min(X_i,M)]}$$

- 要点：令$M \to \infty$, 得到：

$$E[\min(X_i, M)] = E[X_i] = \mu$$

- 结论得证

15.1.7. 应用平均超额寿命期望求$m(t)$

- 例7.11：考察一个更新过程，到达时间间隔分布是两个指数分布的卷积（即，两个独立随机变量相加），即：

$$F = F_1 * F_2，其中 F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}，i = 1,2$$

- 求更新过程的更新函数$m(t)$。

本例目标：通过确定$E[Y(t)]$来确定更新函数

- 想象每个更新对应于使用一台新的机器，假设机器有两个组件，开始组件1在使用，并持续一个速率为μ_1的指数时间，然后使用组件2，并持续一个速率为μ_2的指数时间。
  - 更新事件：当组件2失效时，一台新的机器开始使用
  - 时刻0时：刚换了一台新机器开始使用

15.1.7. 应用平均超额寿命期望求$m(t)$

要点：更新过程转化为连续时间马氏链

- 现在考虑过程$\{X(t), t \geq 0\}$，如果组件i在时间t在使用，令过程的状态为$X(t) = i$
- 容易看出$\{X(t), t \geq 0\}$是一个两状态的连续时间马氏链
- 所以由例6.11，它的转移概率为

$$P_{11}(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)t} + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

  - 注意，这里的状态1，对应例6.11中的状态0
  - 即，经过时间t后，过程处于状态1的概率，即机器在时刻t在使用组件1的概率
  - 初始刚换了新机器：初始状态为1

15.1.7. 应用平均超额寿命期望求$m(t)$

求$E[Y(t)]$:

- 取条件于机器在时间t使用的是组件1还是组件2
  - 如果是组件1，则平均剩余寿命是$\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$
  - 如果是组件2，则平均剩余寿命是$\frac{1}{\mu_2}$
  - 注意：指数随机变量的无记忆性
- $p(t)$是机器在时刻t在使用组件1的概率，有：

$$p(t)=P_{11}(t)$$

  - 注意到：在时刻0第一台机器使用的是组件1，所以是从状态1起始，$p(t)$ 是到时间t处于状态1的概率
- 得到：

$$E[Y(t)]=\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)p(t)+\frac{1}{\mu_2}(1-p(t))=\frac{1}{\mu_2}+\frac{p(t)}{\mu_1}$$
$$=\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}+\frac{\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}$$

15.1.7. 应用平均超额寿命期望求$m(t)$

基于$E[Y(t)]$得到更新函数$m(t)$

- 已知：

$$m(t)+1=\frac{t}{\mu}+\frac{E[Y(t)]}{\mu}$$

- 到达间隔时间的均值为μ：

$$\mu=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}=\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}$$

- 得到：

$$m(t)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}t-\frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}[1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}]$$

15.1.8. 基本更新定理的推论

基本更新定理在离散间隔更新过程的推论：

- 若更新过程的间隔时间X_i取离散的正整数，如下结论成立：
- 如果$\lim_{n\to\infty} P\{在时刻n更新\}$存在，则有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{在时刻n更新\} = \frac{1}{E[更新之间的时间]}$$

推导

➢ 令
$$I_i = \begin{cases} 1, & 在时刻i有更新 \\ 0, & 其他情形 \end{cases}$$

➢ 则到时刻n为止的更新次数$N(n)$可表示为

$$N(n) = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

➢ 对上式两边取期望得

$$m(n) = E[N(n)] = \sum_{i=1}^{n} P\{在时刻i更新\}$$

➢ 基本更新定理得到：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P\{在时刻i更新\}}{n} = \frac{1}{E[更新之间的时间]}$$

15.1.8. 基本更新定理的推论

- 不做证明的叙述下列引理，对数列$a_1, a_2, \ldots$：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{a} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a_i}}{\mathrm{n}} = \mathrm{a}$$

蕴含：若 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a_n}$， $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{a_i}}{\mathrm{n}}$存在，其必相等！

- 结合引理，得到：

如果$\lim_{n\to\infty} P\{\text{在时刻}n\text{更新}\}$存在，则有：

$$\lim_{n\to\infty} P\{\text{在时刻}n\text{更新}\} = \frac{1}{E[\text{更新之间的时间}]}$$

- 若，$\lim_{n\to\infty} P\{\text{在时刻}n\text{更新}\} \neq \frac{1}{E[\text{更新之间的时间}]}$，利用引理，得到矛盾结论:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P\{\text{在时刻}i\text{更新}\}}{n} \neq \frac{1}{E[\text{更新之间的时间}]}$$

15.1.9. 基本更新定理推论的应用

倒霉蛋赌徒问题：*i.i.d.*随机变量部分和恒为负的概率

- 例7.12-随机徘徊：$X_i(i \geq 1)$是独立同分布的随机变量，令

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, n > 0$$

- 过程$\{S_n, n \geq 0\}$ 称为随机徘徊过程。
- 假设$E[X_i] < 0$。由强大数定律可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to E[X_i]$$

- 已知$\frac{S_n}{n}$收敛到一个负数，那么S_n必定趋向于$-\infty$
- 求初次游动开始，随机徘徊恒为负的概率α，即

$$\alpha = P\{S_n < 0, \forall n \geq 1\}$$

- ➢ 课本3.6.6我们研究过不带左跳的随机徘徊的恒为负的概率
- ➢ 这里利用更新过程的角度来求解

15.1.9. 随机徘徊部分和恒为负的概率

要点：构建更新过程

- 定义一个计数过程：如果

$$S_n < \min(0, S_1, \ldots, S_{n-1})$$

就说在时刻n有一个事件发生。

  - 事件发生，说明随机徘徊过程降到了一个新的低点
  - 且第1个事件的发生时间是首次观察到$S_n < 0$的时间

确定这个计数过程是一个更新过程：

- 两个事件之间的间隔时间是i.i.d.的吗？
  - 要点：X_i是i.i.d.的，所以，间隔时间也是i.i.d.的

15.1.9. 随机徘徊部分和恒为负的概率

详细考察事件之间的间隔时间T_i的分布：

- 考察第一个事件发生时间，与事件1和2的间隔即可，再直观推广即可
- 第事件1发生时间T_1：

$$\{T_1 = n\} \leftrightarrow \{X_1 \geq 0, X_1 + X_2 \geq 0, \ldots, X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq 0, X_1 + \cdots + X_n < 0\}$$

- 事件1和事件2的间隔时间T_2：

$$\{T_2 = n\} \leftrightarrow \{X_{T_1+1} \geq 0, X_{T_1+1} + X_{T_1+2} \geq 0, \ldots, X_{T_1+1} + \cdots + X_{T_1+n-1} \geq 0, X_{T_1+1} + \cdots + X_{T_1+n} < 0\}$$

  - 注意这里所有变量与T_1无关

- 事件$i-1$和事件i的间隔时间T_i：

$$\{T_i = n\} \leftrightarrow \{X_{T_i+1} \geq 0, X_{T_i+1} + X_{T_i+2} \geq 0, \ldots, X_{T_i+1} + \cdots + X_{T_i+n-1} \geq 0, X_{T_i+1} + \cdots + X_{T_i+n} < 0\}$$

- 由X_i是i.i.d.的，得到：$T_1, \ldots, T_i, \ldots$独立同分布

15.1.9. 随机徘徊部分和恒为负的概率

确立概率α的事件与{时刻n更新}事件的关系：

$$P\{在时刻n更新\} = P\{S_n < 0, S_n < S_1, S_n < S_2, \ldots, S_n < S_{n-1}\}$$
$$= P\{X_1 + \cdots + X_n < 0, X_2 + \cdots + X_n < 0, \ldots, X_n < 0\}$$

- 因为$X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1$ 与$X_1, X_2, \ldots, X_n$有相同的联合分布
- 所以，

$$P\{时刻n更新\} = P\{X_1 + \cdots + X_n < 0, X_{n-1} + \cdots + X_1 < 0, \ldots, X_1 < 0\} = P\{S_n < 0, S_{n-1} < 0, S_{n-2} < 0, \ldots, S_1 < 0\}$$

- 也即，

$$\lim_{n\to\infty} P\{在时刻n更新\} = P\{S_n < 0, n \geq 1\} = \alpha$$

应用基本更新定理推论：

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P\{在时刻n更新\} = \frac{1}{E[T]}$$

- T是更新间的间隔时间，有

$$T的分布 = T_1 = \min\{n: S_n < 0\}$$

15.1.9. 随机徘徊部分和恒为负的概率

倒霉蛋赌徒问题实例（讲义7，课本3.6.6部分）：

- 在不带左跳的随机徘徊情形（其中$\sum_{j=-1}^{\infty} P\{X_i = j\} = 1$）
- 更新事件i：总所得首次降到$-i$，i为正整数
  - 更新事件i发生的时间：T_{-i}
  - 更新事件间隔时间为：T_{-1}
  - 已知：$T_{-1} = -\frac{1}{E[X_i]}$

- 利用上页结论，得到与讲义7，课本3.6.6一致结论：

$$\alpha = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{E[T_{-1}]} = -E[X_i]$$

15.1.10. 更新过程的中心极限定理

●定理7.3-更新过程的中心极限定理:

$$\lim_{t\to\infty} P\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}dx$$

- 注意到：t/μ 是$E[N(t)]$；$\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}$ 是$SD(Var[N(t)])$
- 均值部分来自基本更新定理

理解

- 对于大的t，$N(t)$近似于均值为t/μ和方差为$t\sigma^2/\mu^3$的正态分布，其中μ和σ^2分别是到达间隔时间的均值和方差。
- 这个定理也蕴含着：可以证明$\frac{Var(N(t))}{t}$收敛到σ^2/μ^3:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Var(N(t))}{t} = \sigma^2/\mu^3$$

- 会用这个定理即可，证明不做要求。

15.1.10. 更新过程中心极限定理的例子

- 例7.13-两台机器持续地处理无穷个零活。
- 在机器1上处理一个零活的时间是参数为$n = 4$和$\lambda = 2$的伽马随机变量
- 在机器2上处理一个零活的时间在0和4之间均匀地分布。
- 求到时刻$t = 100$为止，两个机器一起至少可以处理90个零活的概率。

构建更新过程：

- $N_i(t)$记到时刻t为止机器i可以处理的零活个数
  - 两个独立更新过程：$\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$
  - $\{N_1(t), t \geq 0\}$的更新间隔时间为参数$n = 4$和$\lambda = 2$的伽马随机变量，均值为4*1/2=2，方差为4*1/4=1
  - $\{N_2(t), t \geq 0\}$的更新间隔时间为在0和4之间的均匀随机变量，均值为2，方差为16/12

15.1.10. 更新过程中心极限定理的例子

应用更新过程中心极限定理：

$$N_1(t) \sim \mathrm{N}(\frac{t}{2}, \frac{t}{8});$$

$$N_2(t) \sim \mathrm{N}\left(\frac{t}{2}, \frac{t*16}{12*8}\right) = N(\frac{t}{2}, \frac{t}{6});$$

- 所以：

$$N_1(100) + N_2(100) \sim N(100,175/6)$$

- 求得：

$$P\{N_1(100) + N_2(100) > 89.5\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10.5}{\sqrt{175/6}}\right) \approx \Phi(1.944)$$

$$\approx 0.9741$$