随机过程
Stochastic Processes

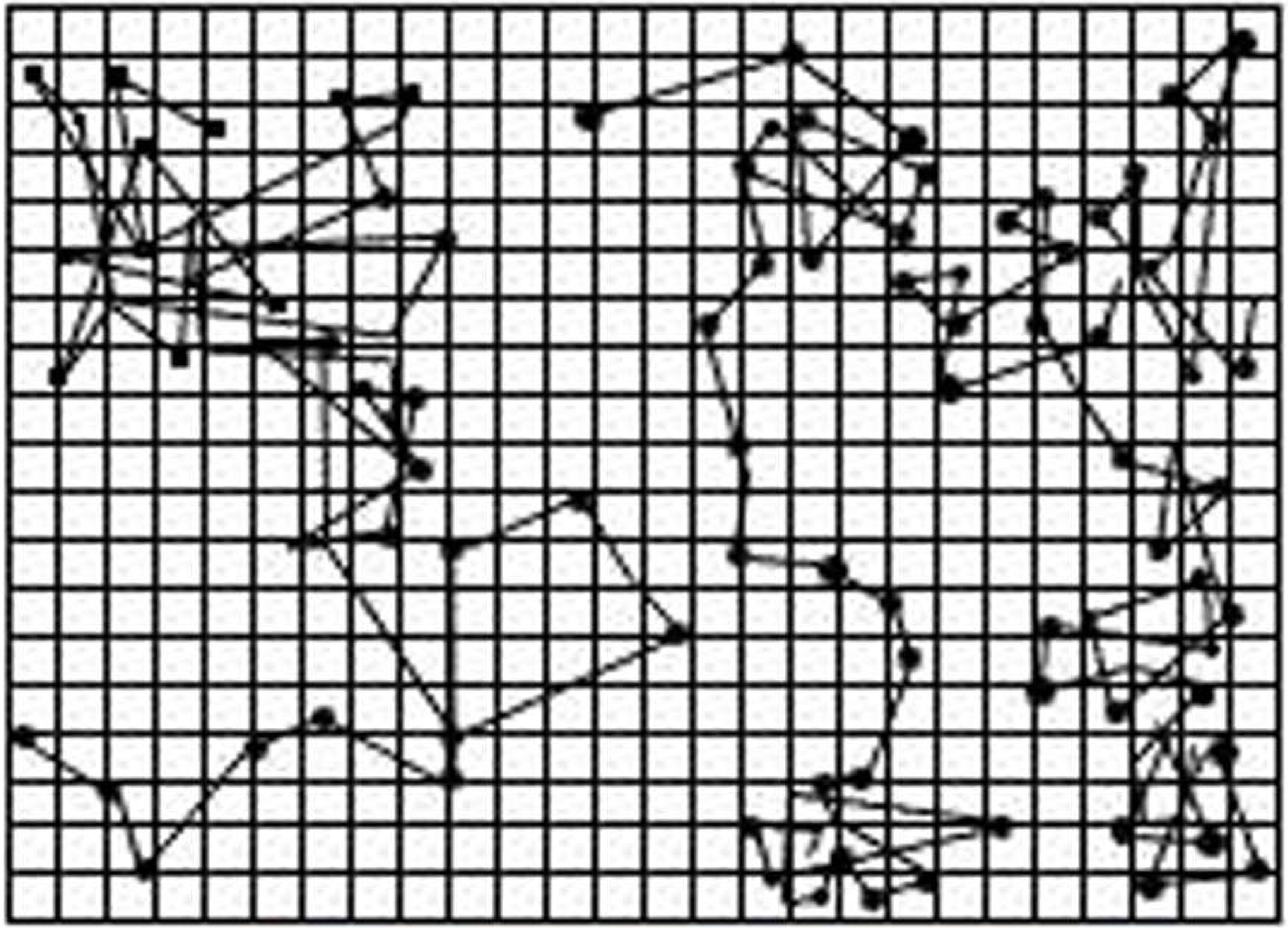
讲义16：布朗运动简介

目录

（课本第10章）

16.1布朗运动
（课本10.1）

16.1.1. 布朗运动现象



16.1.1. 布朗运动现象

- 布朗运动可以说是金融工程领域最重要的随机过程，常用来描述股票价格波动和证券综合指数波动。

16.1.2 布朗运动的定义

- 定义10.1-布朗运动定义：

1. $X(0) = 0$；

2. $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳、独立的增量；

3. 对任意$t > 0, X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$。

则称随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$为布朗运动过程，也叫维纳过程。

➢独立增量：对所有$t_1 < \cdots < t_n, X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1)$是独立的。

➢平稳增量：$X(t+s) - X(s)$不依赖于s,而仅取决于t，即，对相同的t，$X(t+s) - X(s)$分布皆相同

➢相依关系是什么?

16.1.3 布朗运动与对称随机游动

布朗运动可视为对称随机游动的极限

- 对称随机游动$\{X(t), t > 0\}$显示表达为：从原点开始，每个时间单位Δt下，质点等概率的向上或者向下移动一步，步长单位为Δx，以$X(t)$记质点在时刻t的位置，有：

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$$

➢其中X_i独立同分布：

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{如果第}i\text{ 步向上，概率}0.5 \\ -1, & \text{如果第}i\text{ 步向下，概率}0.5 \end{cases}$$

$$E(X_i) = 0, \quad Var(X_i) = E\left(X_i^2\right) - E(X_i)^2 = 1$$

➢ $[\frac{t}{\Delta t}]$为$\leq \frac{t}{\Delta t}$的最大整数

➢以特定（非平凡）方式对Δt、Δx取极限可得到布朗运动

16.1.3对称随机游动取极限

如何非平凡的取极限呢？

- 令$\Delta t \to 0$，$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$：

$$E[X(t)] = 0,$$
$$Var[X(t)] = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \to \sigma^2 t$$

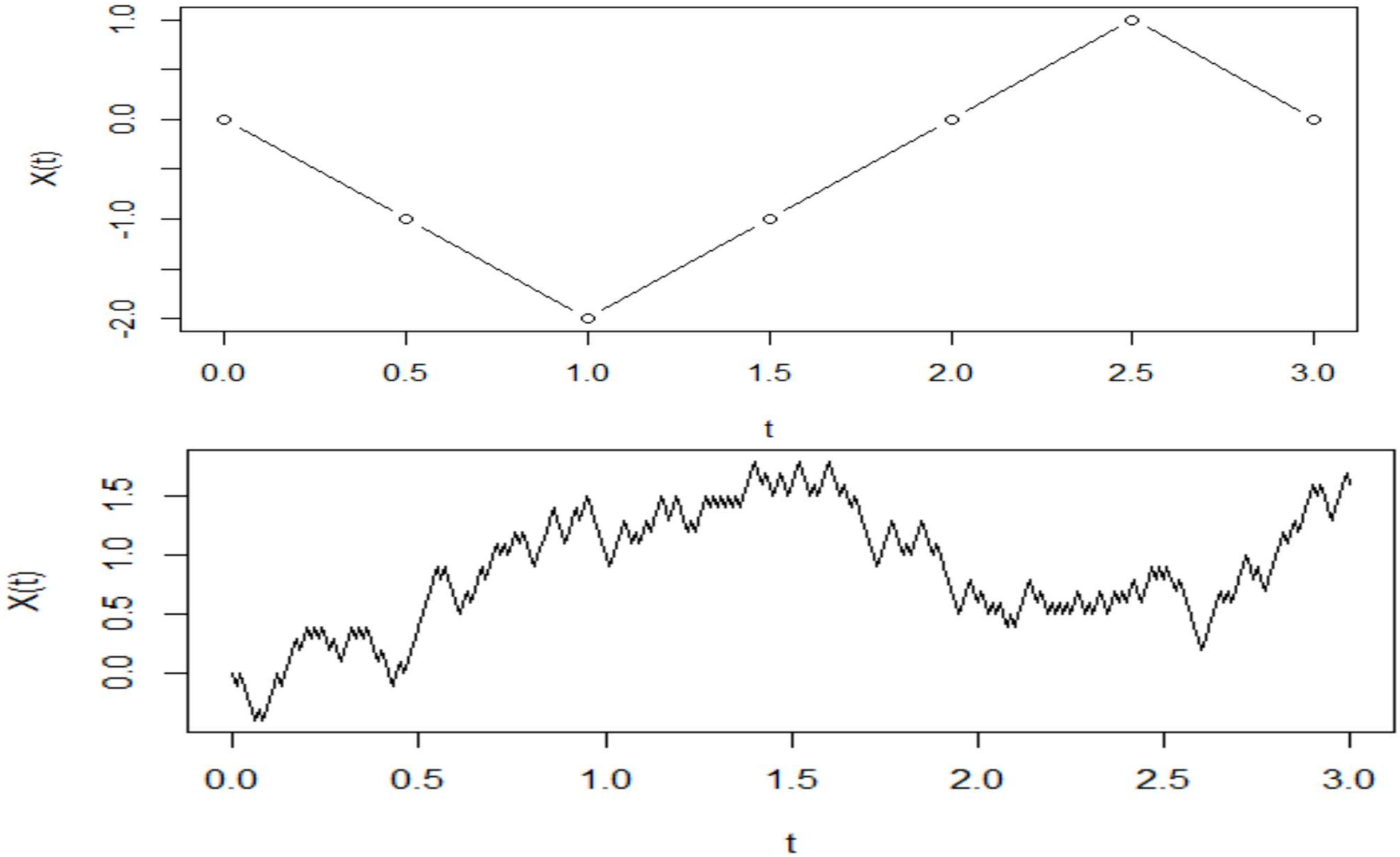
- 由$X(t)$和中心极限定理，直观上，$X(t)$应有下述性质：

1. $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ 中心极限定理
2. $\{X(t), t \geq 0\}$有独立增量 独立同分布随机变量加和
3. $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳增量 独立同分布随机变量加和

➢近似得到布朗运动

16.1.3 对称随机游动取极限的图示

➢对Δt、Δx取极限的示例（R软件生成）：



16.1.4 标准布朗运动

任意布朗运动都可以方便转化为标准布朗运动$B(t)=\frac{X(t)}{\sigma}$

- 定义：$\sigma=1$的布朗运动称为标准布朗运动$B(t)$。

➢不特别说明，课本一般假设$\sigma=1$

16.1.5 布朗运动的$X(t)$的连续性

•$X(t)$是t的连续函数，即以概率1有：

$$\lim_{h\to 0}(X(t+h)-X(t))=0$$

理解：

- 注意到$X(t+h)-X(t)$均值为0，方差$h\sigma^2$
- 令$h\to 0$时，$X(t+h)-X(t)$收敛到均值为0，方差为0的随机变量
- 所以$X(t+h)-X(t)$趋于0是合理的

•$X(t)$连续，但不可导：

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{h})$$

- 令$h\to 0$时，$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$的方差趋向∞

- $X(t)$处处连续，处处不可导

16. 1. 6 $X(t_1),\dots,X(t_n)$的联合密度函数

- $X(t_1),\dots,X(t_n)$ 的联合密度函数:

$$f_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$= f_{X(t_1)}(x_1)f_{X(t_2)-X(t_1)}(x_2-x_1)\dots f_{X(t_n)-X(t_{n-1})}(x_n-x_{n-1})$$
$$= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{x_1^2}{t_1\sigma^2}+\frac{(x_2-x_1)^2}{(t_2-t_1)\sigma^2}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{(t_n-t_{n-1})\sigma^2}]\}}{(2\pi)^{n/2}[t_1\sigma^2(t_2-t_1)\sigma^2\dots(t_n-t_{n-1})\sigma^2]^{1/2}}$$

- 对$t_1<\cdots<t_n$; $X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\dots X(t_n)=x_n$ 等价于 $X(t_1)=x_1, X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1,\dots X(t_n)-X(t_{n-1})=x_n-x_{n-1}$
- 独立增量说明$X(t_1), X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$独立
- 平稳增量说明$X(t_k)-X(t_{k-1})\sim N(0,(t_k-t_{k-1})\sigma^2)$
  - 因为布朗运动条件3，$X(t)\sim \mathrm{N}(0,t\sigma^2)$:

$$f_{X(t)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}}e^{-x^2/2t\sigma^2}$$

- 有了这个联合密度，所有相关的分布和概率都可得到

16.1.7 联合密度函数的应用

- 例：给定s < t, 且$X(t)=B$时，$X(s)$的条件分布？

➢ $f_{X(s)|X(t)}(x|B)=\frac{f_{X(s),X(t)}(x,B)}{f_{X(t)}(B)}$

➢ $=\frac{f_{X(s)}(x)f_{X(t)-X(s)}(B-x)}{f_{X(t)}(B)}$

➢ $=K_1\exp\{-\frac{x^2}{2s\sigma^2}-\frac{(B-x)^2}{2(t-s)\sigma^2}\}$

➢ $=K_2\exp\{-x^2\left(\frac{1}{2s\sigma^2}+\frac{1}{2(t-s)\sigma^2}\right)+\frac{Bx}{(t-s)\sigma^2}\}$

➢ $=K_2\exp\{-\frac{t}{2s(t-s)\sigma^2}\left(x^2-\frac{2sB}{t}x\right)\}$

➢ $=K_3\exp\{-\frac{\left(x-\frac{Bs}{t}\right)^2}{2s(t-s)\sigma^2/t}\}$

➢ K_1,K_2,K_3是不依赖于x的常数

➢ 可以得到给定$X(t)=B$时，$X(s)$的条件分布是正态分布:

$E[X(s)|X(t)=B]=\frac{s}{t}B$, $Var(X(s)|X(t)=B)=\frac{s}{t}(t-s)\sigma^2$

16.1.7 联合密度函数的应用

- **例10.1：两人比赛的自行车赛**
- 以$Y(t)$记当$100t\%$的竞赛完成时，从内道出发的竞赛者领先的时间数量（以秒计）
  - $t \in [0,1]$的连续时间，代表竞赛已完成比例
  - $Y(t)$是内道跑者的领先秒数，可正可负
- 假设$\{Y(t)\}$可以有效地用方差参数为σ^2的布朗运动建模：

（a）竞赛的中点，内道的竞赛者领先σ秒，她获胜概率为？

（b）若内道竞赛者在竞赛中领先σ秒获胜，那么她在竞赛中点领先的概率为？

厘清问题：竞赛中点是？中点领先σ秒？领先σ秒获胜？

- $t = 0.5$
- $Y(0.5) = \sigma$
- $Y(1) = \sigma$
- 问题（a）：$P\{Y(1) > 0|Y(0.5) = \sigma\}$
- 问题（b）：$P\{Y(0.5) > 0|Y(1) = \sigma\}$

16.1.7 联合密度函数的应用

（a）$P\{Y(1)>0|Y(1/2)=\sigma\}$

$$= P\left\{Y(1)-Y\left(\frac{1}{2}\right) > -\sigma \middle| Y\left(\frac{1}{2}\right)=\sigma\right\}$$

$$= P\{Y(1)-Y\left(\frac{1}{2}\right) > -\sigma\}$$ 独立增量

$$= P\{Y(1/2) > -\sigma\}$$ 平稳增量

$$= P\left\{\frac{Y\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} > -\sqrt{2}\right\} = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0.9213$$

（b）$P\{Y(1/2)>0|Y(1)=\sigma\} = P\left\{N\left(\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma^2}{4}\right)>0\right\} = \Phi(1) =$ 0.8413

- 前例的直接应用

16.2布朗运动的结论
(课本10.2)

16.2.1 击中时刻的分布

- 问题1：击中时刻T_a分布：布朗运动首次击中a的时刻T_a.

推导过程：全概率公式的灵活应用

- $a > 0$的情况
- 考虑$P\{X(t) \geq a\} = P\{X(t) \geq a|T_a \leq t\}P\{T_a \leq t\} + P\{X(t) \geq a|T_a > t\}P\{T_a > t\}$
  - 注意到，$P\{X(t) \geq a|T_a \leq t\} = 1/2$
    - 如果$T_a \leq t$，那么过程在$[0, t]$的某个点击中a, 且由于布朗运动对称性，最终过程到达时间t的时候，等可能的比a大或比a小
  - 进一步看到$P\{X(t) \geq a|T_a > t\} = 0$
    - 因为直到T_a才首次击中a
- 得到：$P\{X(t) \geq a\} = 0.5P\{T_a \leq t\}$
- 即：$P\{T_a \leq t\} = 2P\{X(t) \geq a\} = 2/\sqrt{2\pi t}\int_a^{\infty} e^{-x^2/2t}dx$
  - 与课本一致，这里默认$\sigma^2 = 1$

16.2.1 击中时刻的分布

- $a < 0$的情况
- 考虑$P\{X(t) \le a\} = P\{X(t) \le a|T_a \le t\}P\{T_a \le t\} + P\{X(t) \le a|T_a > t\}P\{T_a > t\}$
- 同理得到：$P\{X(t) \le a\} = 0.5P\{T_a \le t\}$
- 即：$P\{T_a \le t\} = 2P\{X(t) \le a\}$

$$= 2/\sqrt{2\pi t}\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2t}dx$$

- 一般性的：$P\{T_a \le t\} = 2/\sqrt{2\pi}\int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy$
- 也可以看出，T_a分布与T_{-a}分布相同，这也是布朗运动的对称性的反映

16.2.2 $[0,t]$之间达到的最大值的分布

- 问题2：时间区间$[0,t]$内达到的最大值$\max\limits_{0\le s\le t} X(s)$的分布：

核心点：$\left\{\max\limits_{0\le s\le t} X(s) \ge a\right\} \leftrightarrow \{T_a \le t\}$

- ➢ 能否互推?

- 对$a > 0$　　(注意布朗运动初始点取值为0)

$$P\left\{\max_{0\le s\le t} X(s) \ge a\right\} = P\{T_a \le t\}$$

$= 2P\{X(t) \ge a\}$　　问题1中结论

$$= 2/\sqrt{2\pi t}\int_a^{\infty} e^{-x^2/2t}dx$$

16.2.3 布朗运动与赌徒破产问题

- 问题3：我们现在考虑布朗运动在击中 $-B$ 前先击中 A 的概率，其中$A > 0, B > 0$：

要点：问题转化为赌徒破产问题

- 将布朗运动考虑为对称随机游动的极限

转化为赌徒破产问题（课本4.5.1节）：

- 对称随机游动，每一步增加或减少一个距离Δx，相当于赌徒总资产一局+1或−1，$X(t)$理解为赌徒总资产。
- 赌徒问题：总资产在减少B前先增加A的概率。
  - 参数：$i = B/\Delta x$ (起始资产)；$N = (A + B)/\Delta x$ (目标)
  - 此时为等概率，公平赌博：所以结果为i/N
- 从0开始，到$-B$前先到A的概率，等于 $\frac{B/\Delta x}{(A+B)/\Delta x} = \frac{B}{A+B}$
- 因此令$\Delta x \to 0$, 得到

$$P\{\text{在减少到}B\text{前先增加到}A\} = \frac{B}{A+B}$$

16.3 决策树
(课本10.4)

16.3.1 期权定义

- 期权(options)：分为买方期权和卖方期权， 一种权利，可以在未来的某个约定时间，以约定价格购买或者卖出标的资产。

➢ 这里考虑欧式期权，即只能在约定时间决定是否行使权利。

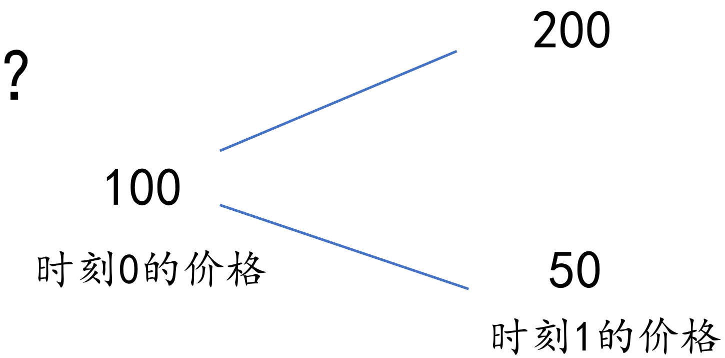
16.3.2 欧式期权定价

欧式期权定价示例

- 考虑欧式期权：1单位欧式买方期权，权力为在时刻1可以以价格150元购买1股某股票。请问在时刻0，期权价值 C 为多少？
  - 定价需要情境：考虑一个简化情形，时刻0的时候，股价为100元，时刻1时，股价可能上涨至200元，或下跌至50元。

理解：到了时刻1，期权的价值是多少？

- 若股票价格200元，期权值50元
- 股票价格50元，期权值0元



- 思路1：若知道各价格对应概率，可计算期权在时刻0的期望价值
  - 价格波动概率一般未知
- 思路2：无“套利”条件+构造投资组合定价

16.3.2 欧式期权定价

套利是什么？

- 套利指：可无风险获得超额收益
  - “超额”中的“额”指：无风险收益额（收益率）

具体解释

- 无风险收益率：一般假设存在一个无风险收益率
  - 例如，国债利率，即无风险可获得的收益，具体的，存100元，单位时间后得到101元，1元为单位时间的无风险收益额，而1%称为单位时间无风险利率
- 存在套利机会
  - 如果存在一种投资渠道，使得单位时间，可以确定获得超过1%的收益率
- 套利操作
  - 通过国债利率借钱，并利用上述渠道进行投资，可以获得（套取）无限收益。
- 因而，一般假设无“套利”！

16.3.2 欧式期权定价

构造投资组合

- 考虑时刻0的一个投资组合：x单位的股票，y单位的期权
  - 注意，这里x和y可正可负，可以为非整数，负值代表卖空(卖出)操作
  - 例如：$x=1, y=-3$ 说明投资组合包含购买1单位股票和卖出3单位期权，则，在时刻0，这个投资组合价值：

$$100x-yC=100*1-3*C$$

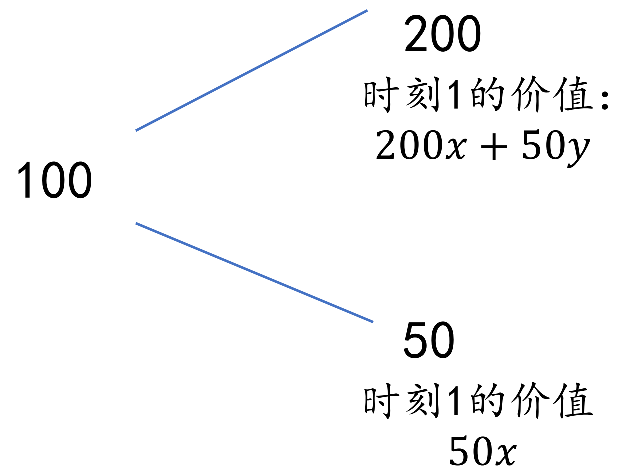
即，时刻0，通过付出$100-3C$元，可持有该投资组合

- 时刻1时，这个投资组合的价值？
  - 若股价200元，投资组合值：

$$200x+50y$$

  - 若股价50元，投资组合值：

$$50x$$



16.3.2 期权定价的例子

- 要点：选取y使得时刻1的两种价值相等
  - 即使得：$200x+50y=50x$
    - 需设定：$y=-3x$
  - 此时，资产组合在时刻1的确定价值为$50x$
  - 也即，资产组合在时刻0的折现价值为$50xe^{-a}$
    - a为折现因子，也即无风险利率

- 已知，时刻0时，这个资产组合的价值是

$$100x+yC=100x-3xC$$

- 由无“套利”条件，必有：

$$50xe^{-a}=100x-3xC$$

- 所以期权价值C应为：

$$C=(100-50e^{-a})/3$$

16.3.2 期权定价的例子

详解无“套利”条件1

- 要点：若，$50xe^{-a} \neq 100x - 3xC$，则存在“套利”机会

当$50xe^{-a} > 100x - 3xC$ 时：

- 当 $50xe^{-a} > 100x - 3xC$ 时，即$C > (100 - 50e^{-a})/3$
  - 说明期权定价过高
  - 可通过卖出期权、买入股票，进行套利

16.3.2 期权定价的例子

- 套利实例：已知$a = 1\%$，$C = 30$

➢ 时刻0：卖出3单元期权，买入1单元股票，共需付出10元，此时以利率$a = 1\%$从银行借得10元，即未付出任何东西，即可持有资产组合

➢ 时刻1：

  ➢ 若股价为200元，需为3份卖出的期权赔付−150元，股票价值200元卖掉，并还银行$10 * \exp(\alpha)$元，资产组合清空，此时净收益为$50 - 10 * \exp(\alpha)$

  ➢ 若股价为50元，无需为期权赔钱，股票价值50元，还银行$10 * \exp(\alpha)$元，资产组合清空，此时净收益为$50 - 10 * \exp(\alpha)$

➢ 可以看出，不付出任何东西，即可确定净赚$50 - 10 * \exp(\alpha)$，也即，可进行无限套利

16.3.2 期权定价的例子

详解无“套利”条件2

➢ 要点：若，$50xe^{-a} \neq 100x - 3xC$，则存在“套利”机会

当$50xe^{-a} < 100x - 3xC$ 时：

- 当 $50xe^{-a} < 100x - 3xC$ 时，即$C < (100 - 50e^{-a})/3$
  - ➢ 说明期权定价过低
  - ➢ 可通过买入期权、卖出股票，进行套利

16.3.2 期权定价的例子

- 套利实例：已知$a = 1\%$，$C = 10$

➢ 时刻0：买入3单元期权，卖出1单元股票，得到70元，将70元存入银行，即可持有资产组合

➢ 时刻1：

  ➢ 若股价为200元，买入股票，付出200元，执行3份期权，得到150元，初始70元，价值$70 * \exp(\alpha)$元，资产组合清空，此时净收益为$70 * \exp(\alpha) - 50$元

  ➢ 若股价为50元，期权不执行，无价值，买入1股股票，付出50元，初始70元，价值$70 * \exp(\alpha)$元，资产组合清空，此时净收益为$70 * \exp(\alpha) - 50$元

➢ 可以看出，没有付出任何东西，即可确定净赚$70 * \exp(\alpha) - 50$元，也即，可进行无限套利

16.3.2 欧式期权定价的一个思考

- 一个有趣的发现是：并不需要股票上涨到200元的概率和下跌到50元的概率
  - 直观来说：股票99%上涨到200元，与1%上涨到200元的情境下，期权的定价好像应该不同
  - 但结果告诉我们，我们不需要知道股票上涨和下跌的概率

- 原因：
- 我们并不是在为期权定义一个绝对价格，而是基于股票价格来定价期权！
  - 所有的概率已经反映在股票价格里面了！

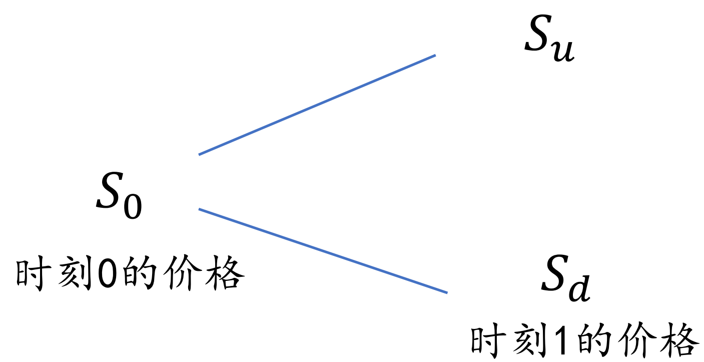
16.3.2 一般欧式期权定价

欧式期权定价的一般公式

- 考虑欧式期权：1单位欧式买方期权，权力为在时刻1可以以价格S_C元购买1股某股票。请问在时刻0，期权价值（价格）C为多少？

➢ 定价需要情境：考虑一个简化情形，时刻0的时候，股价为S_0元，时刻1时，股价可能上涨至S_u元，或下跌至S_d元。

思考问题：请问C应该如何定价？



➢ 提示：S_0是前例里的100
S_u是前例里的200
S_d是前例里的50

16.3.3 二叉树模型的推广

- 二叉树模型的后续节点可以继续二分叉，进行推广！
  - ➢ 刚才讲到的模型，是最简单的二叉树模型，通过继续考虑后续时刻的分支，进一步贴近现实情况
  - ➢ 这种树模型，可以解决非常困难的衍生品定价的问题

- 决策树模型：可以考虑超过两个叉的情况
  - ➢ 清楚展示随着时间的推移将发生的进展，系统地呈现决策者将面对的各种选择与不确定性，辅助决策

16.3.3 决策树模型

●暑期实习的抉择

- 陆哥在复旦大学管理学院读本科
- 他开始认真考虑关于明年暑期实习的事情
- 8月底，陆哥遇见了Maggie，一家科技公司的老板，她愿意考虑明年夏天雇用陆哥的可能性，希望陆哥在她公司于11月中旬进行暑期招聘计划时，直接与她联系。（录用概率与薪酬见下图）
- 陆哥的一个朋友周董许诺第二年夏季帮他在自己科技公司找一份为期12周的实习工作，薪水为$12000，但是必须10月底给出回复是否愿意。
- 复旦管院在每年1月和2月会举办公司暑期招聘会。（录用概率与薪酬见下下页图）

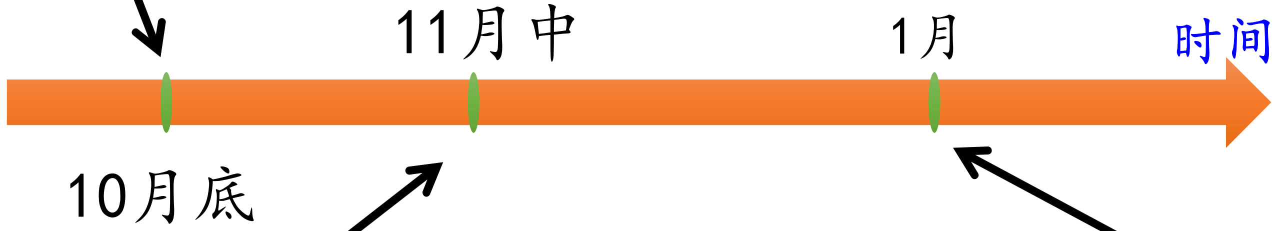
16.3.3 决策树模型

- 陆哥接下来需要面临 选择和不确定性

- 10月底前，需决定是否接受周董提供的实习工作，但此时Maggie公司的暑期招聘计划还没有启动
- 如果陆哥拒绝了周董提供的实习工作，并且Maggie的公司给了他实习机会，那么他需要决定是否接受这个工作
- 如果陆哥拒绝了周董提供的实习工作，并且Maggie的公司也没有给他实习机会，或者他拒绝了这个工作，那么陆哥只能去学院举办的公司暑期招聘会找实习
- 陆哥的最佳决策方案是什么？（以薪水为标准）

16.3.3 决策树模型

决定是否接受周董提供的实习($12000)



复旦管院暑期招聘会

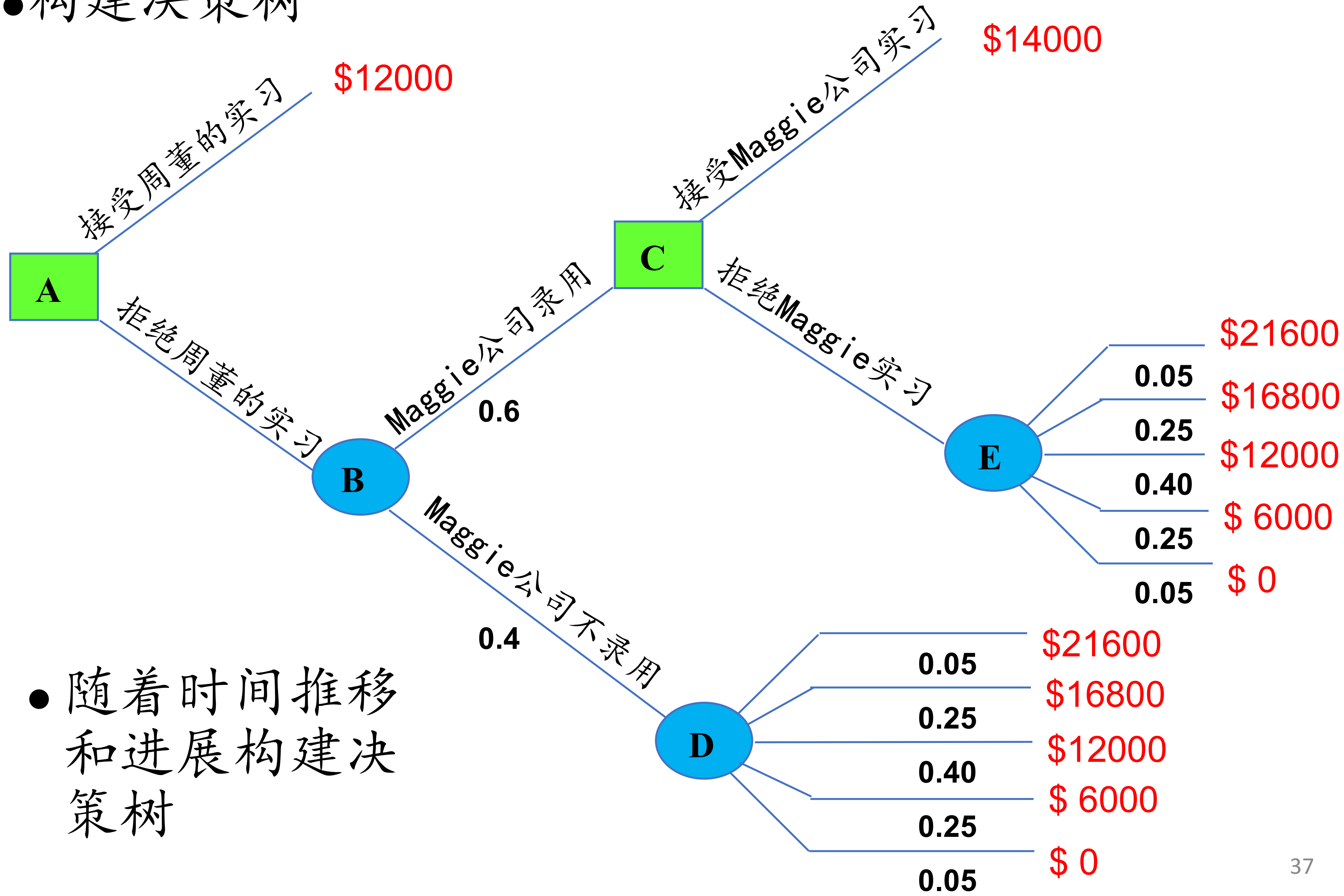
Maggie提供的实习

事件（机会）	可能性
Maggie公司录用 ($14000)	60%
Maggie公司不录用 (no pay)	40%

暑期薪水	获得该薪水的学生的百分比
$21600	5%
$16800	25%
$12000	40%
$6000	25%
$0	5%

16.3.3 决策树模型

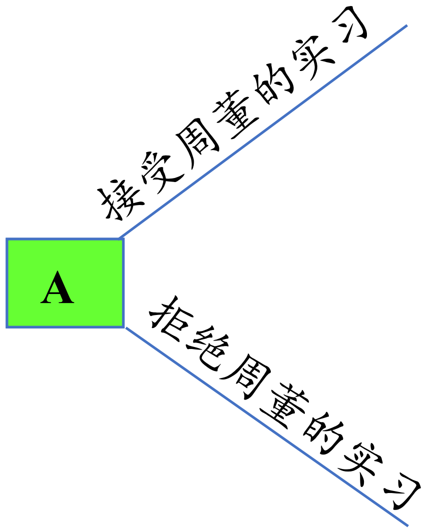
- 构建决策树

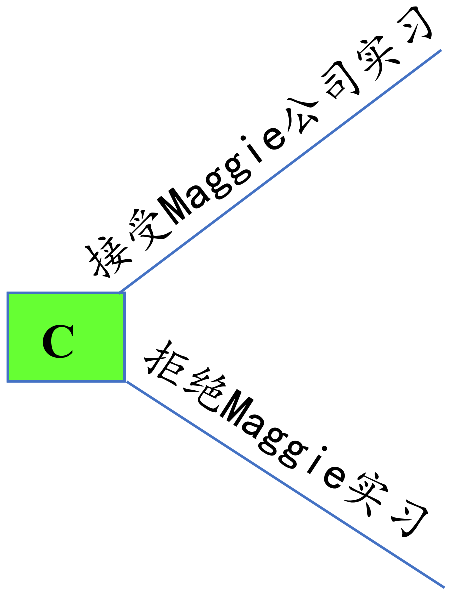


- 随着时间推移和进展构建决策树

16.3.3 决策树模型

- 决策节点(自己可以把握的，要做决策的！)
  - 需要做决策的(时间)节点，绿色方框表示
  - 延伸出的分枝对应该节点可选择的各种决策方案
  - 延伸出的分枝应包含该节点所有可能的选择

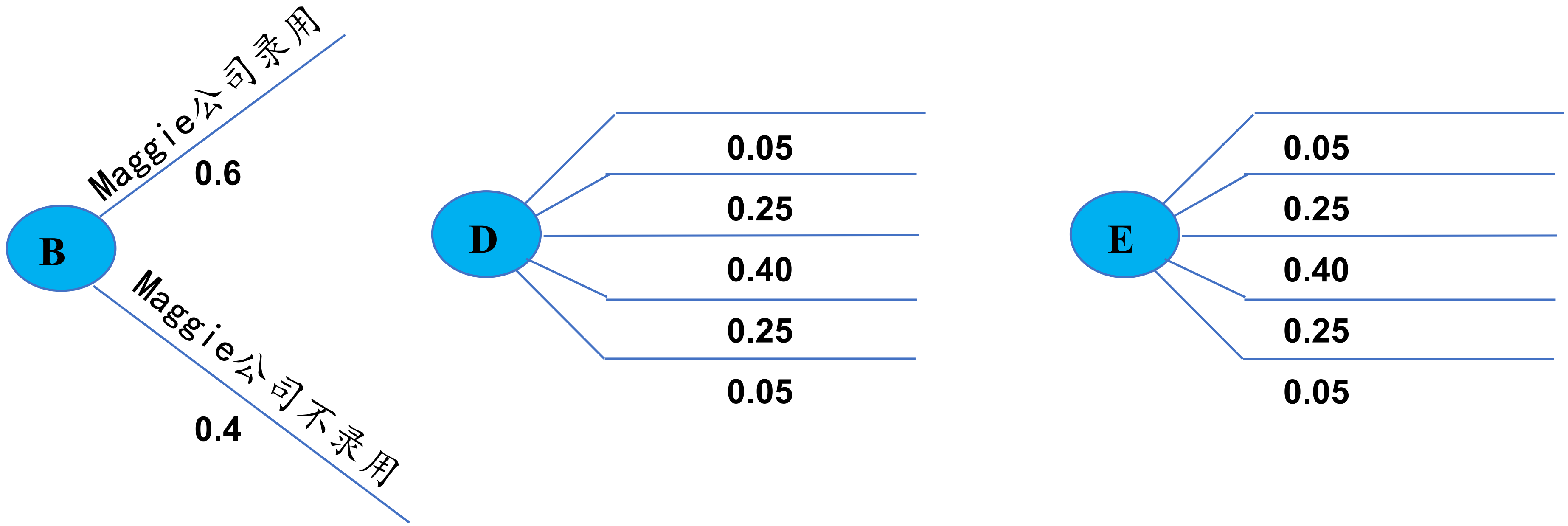




16.3.3 决策树模型

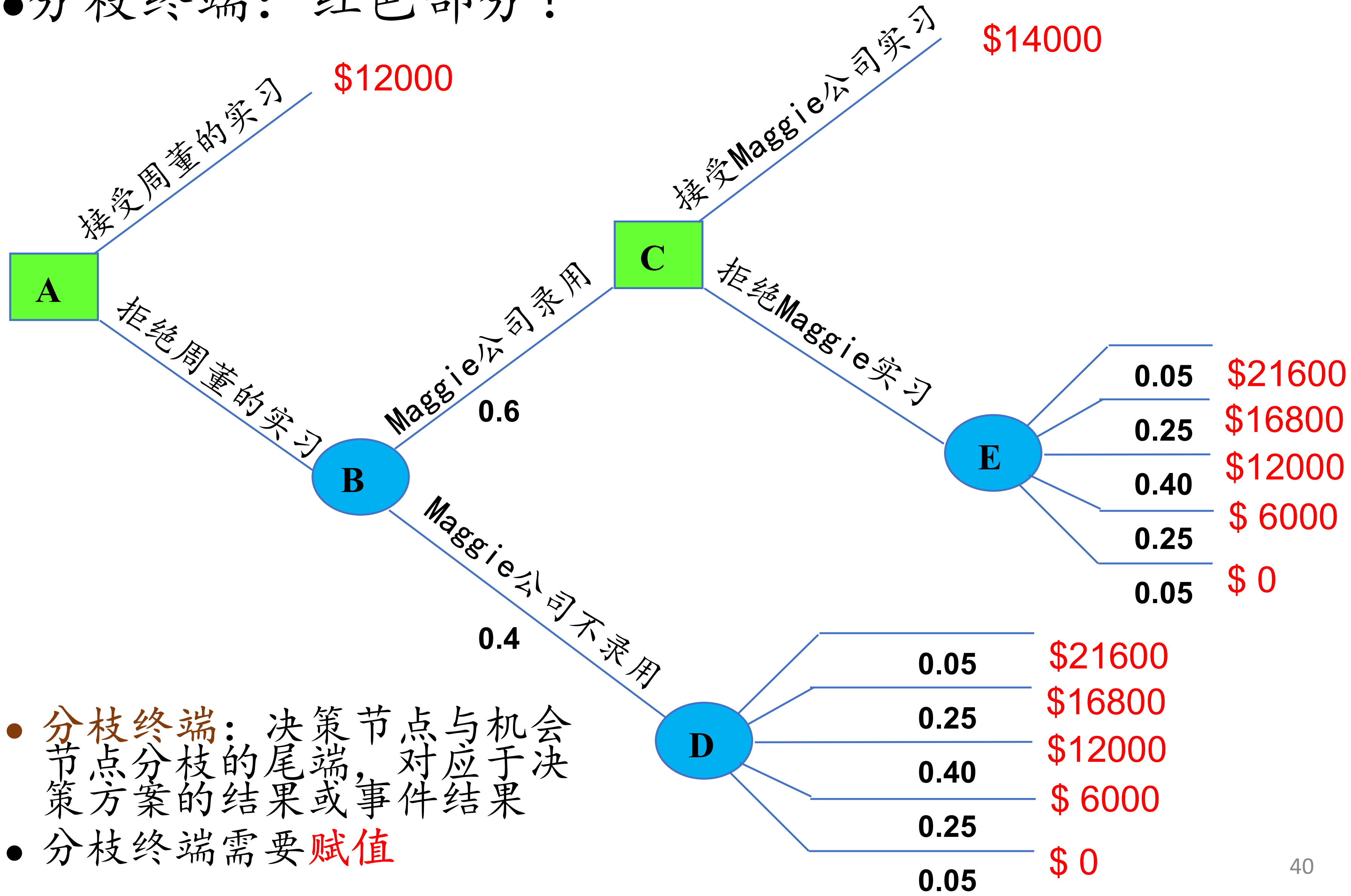
●机会节点(运气&概率，不是人为能控制的！)

- 不确定性事件的(时间)节点，蓝色圆圈表示
- 延伸出的分枝对应该不确定性事件中各种可能结果
- 每个可能出现的结果都伴随着一个相应的概率
- 延伸出的分枝应互斥，又应穷举所有可能的结果(完备)
- 所有分枝的概率求和必为1



16.3.3 决策树模型

- 分枝终端：红色部分！



- 分枝终端：决策节点与机会节点分枝的尾端，对应于决策方案的结果或事件结果
- 分枝终端需要赋值

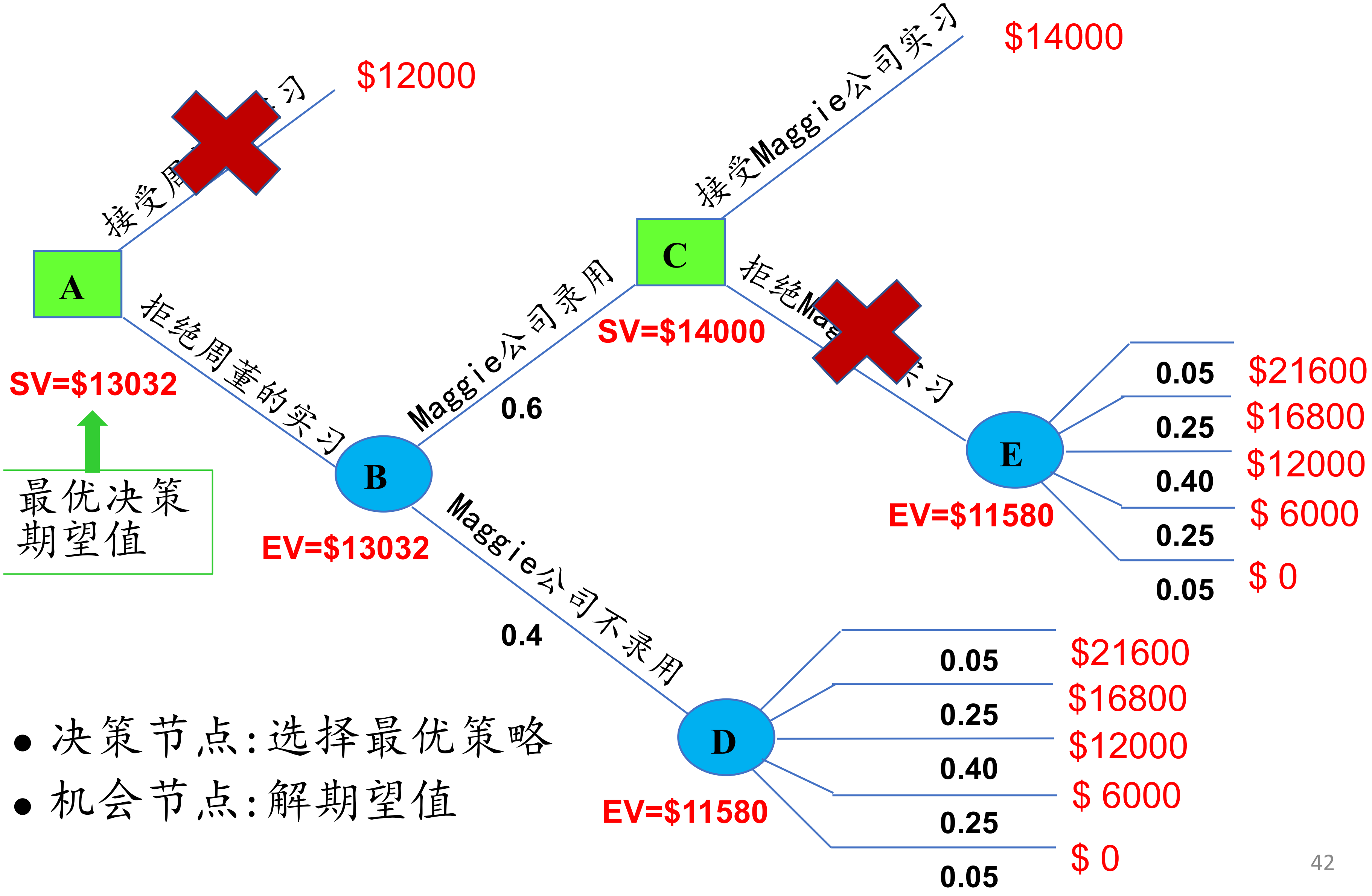
16.3.3 决策树模型

- 构造决策树的总结
  - 按时间与逻辑顺序列出所有需要做的决策，列出每个决策的所有选择
  - 按时间与逻辑顺序列出所有不确定性事件(机会)，列出每个事件的所有可能的结果
  - 按时间与逻辑顺序排列，以决策节点及其分枝描述决策
  - 按时间与逻辑顺序排列，以机会节点及其分枝描述不确定性事件
  - 给出不确定性事件中各结果出现的概率
  - 对分枝终端进行赋值

- 解决复杂问题时，往往是将这个问题分解成一系列较小的子问题，决策树提供了这样的一个分解后再串联的过程

16.3.3 决策树模型

- 基于决策树进行决策：反向求解法+期望值法



- 决策节点:选择最优策略
- 机会节点:解期望值

16.3.3 决策树模型

- 求解决策树的总结
  - 从分枝终端开始，对机会节点，计算其对应的期望值，并将期望值标注于节点之上
  - 对于决策节点，选择期望值最优的决策分枝，将其余的决策分枝删去，并将该最优期望值作为决策节点的期望值进行标注
  - 当对所有的节点都进行计算后，即可得到最优决策
  - 决策树初始节点的期望值即为最优决策的期望值

16.3.4 期末考试

- 考试时间：2023年6月15日 15:30 – 17:30
- 考试地点：H6212
- 1-16讲义内容（可参考课本对应部分，请务必仔细学习讲义内容）+ 6次作业内容
- 可携带一张手写非打印双面A4纸，所附内容自行决定，需与试卷一起提交
- 请携带计算器