随机过程
Stochastic Processes

讲义6：马尔可夫链-3

目录

（课本第4章部分3）

6.1 马氏链的长程性质和极限概率

6.1长程性质和极限概率
（课本4.4）

6.1.1 从状态i出发迟早到达状态j的概率

- 对于一对状态$i \neq j$,我们将从状态i开始的马氏链迟早会到达状态j的概率记为$f_{i,j}$. 即

$$f_{i,j} = P\{\exists \mathrm{n} > 0 \text{有} X_n = j | X_0 = i\}$$

- ➢ 从状态i出发，最终能访问状态j的概率
- ➢ 是讲义5中f_i的一般形式
  - ➢ 注意到：与首达概率不同，这里对$X_{n-1}, \ldots, X_1$没有限制

6.1.1 迟早到达状态j的概率

- 利用首达概率表达$f_{i,j}$

➢ $f_{i,j} = P\{\exists \mathrm{n} > 0 \text{有} X_n = j | X_0 = i\}$

$= P\{\, \cup_{n=1}^{\infty}\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, \ldots, n-1\}\, | X_0 = i\}$

$= P\{\cup_{n=1}^{\infty} A_{nij}\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_{nij}\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

思考：当$i \nrightarrow j$时，$f_{i,j}$如何取值？

➢ 进一步注意：$P\{A_{nij}\} \leq p_{ij}^{n}$

➢ 所以，当$i \nrightarrow j$时, 则 $\forall n \geq 0$,有$P_{ij}^{n} = 0$，必有 $f_{i,j} = 0$

6.1.2 常返性与迟早到达概率

- 命题4.3：若i是常返的，且i和j互通，则$f_{i,j}=1$

理解：

- 与推论4.2很相关，结论为j也常返
- 推论4.2的直观理解的论证过程在这里可以直接应用

- 直观理解：因为i是常返的，则从i出发的过程会无数次到达i，又因为$i\to j$，说明过程从i出发，有一定概率到j；所以过程无数次从i出发，每次有一定概率到j，说明过程也会无限次到j
- 说明，从i出发的过程，迟早会到达状态j,也即$f_{i,j}=1$

6.1.2 常返性与迟早到达概率

- 命题4.3：若i是常返的，且i和j互通，则$f_{i,j}=1$

证明：

- $i \to j \quad \to \exists n$使$P_{ij}^{n}>0$.
- $P_{ij}^{n}>0$代表什么？
  - 不失一般性的，令$X_0=i$, 若$X_n=j$, 则称为首次试验成功，试验成功的概率为$P_{ij}^{n}>0$.
    - 试验是什么？ 试验，即从状态i开始的过程，经过n步之后，到达j与否
    - 可知这是一个伯努利试验，成功的概率为P_{ij}^{n}
    - 思考1：试验会无限重复吗？会的，因为i是常返的，过程到i一次，即试验开始一次
    - 思考2：试验独立吗？独立，因为马氏性质，到了i，以后过程对状态的访问只依赖于当下的状态。

6.1.2 常返性与迟早到达概率

- 所以，过程从i出发可以考虑为无数次伯努利试验，直到一次试验成功
- 令，到达首次试验成功需要重复的试验次数为X，为参数为P_{ij}^{n}的几何随机变量
- 注意到：$P\{X=s\}=\left(1-P_{ij}^{n}\right)^{s-1}P_{ij}^{n}$
- 所以：$\mathrm{P}\{X=\infty\}=0$，即 $\mathrm{P}\{X<\infty\}=1$
- 所以试验经过重复，以概率1会成功，即进到状态j
- 也即证明了$f_{i,j}=1$

6.1.3 正/零常返定义

- 常返态的进一步区分：假设状态j是常返的.

➢ 记马氏链做一次到状态j的转移所需的转移次数为

$$N_j = \min\{n > 0 : X_n = j\},$$

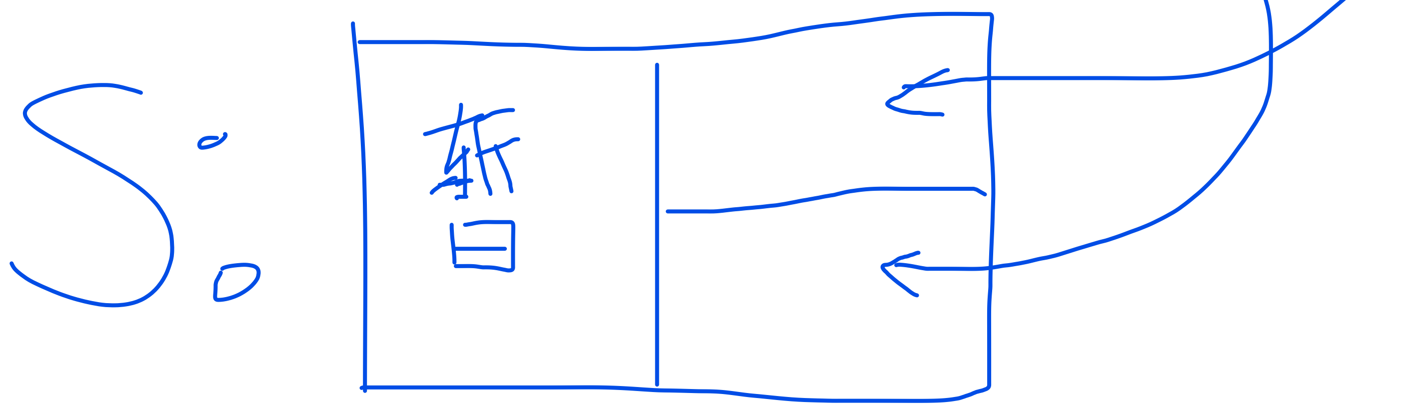
则从状态j开始的马氏链返回j的期望次数，m_j，可表示为

$$m_j = E[N_j | X_0 = j]$$

➢ <u>正/零常返定义</u>：

  ➢ 若$m_j < \infty$,则称状态j为正常返

  ➢ 而若$m_j = \infty$,则状态j为零常返的



6.1.3 正/零常返定义

➢ 注意到：

$$P\{N_j = n | X_0 = j\} = f_{jj}^{(n)}$$

➢ 所以：

$$m_j = E[N_j | X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} n * f_{jj}^{(n)}$$

要点：

➢ 常返性等价于(讲义5第18页)：

$$f_{jj} = P\{N_j < \infty | X_0 = j\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$$

➢ 正常返性等价于：

$$m_j = \sum_{n=1}^{\infty} n * f_{jj}^{(n)} < \infty$$

- ➢ 状态j是零常返的，说明从状态j出发的过程，平均要转移无穷多次才能回到状态j

6.1.3 正/零常返定义

$$P(X=2^n)=\frac{1}{2^n}$$

$$EX=\infty\text{；但}$$

$$P(X<\infty)=1$$

6.1.3 正/零常返例子：公平赌博

- 公平赌博可以看做对称的一维随机游动
  - 公平赌博是具有常返性的
  - 常返性说明，若足够本金，则赌徒一定有机会捞回输掉的赌资

- 那这个常返性，是正常返还是零常返？

6.1.4 处于状态j的次数的长程比例

- 命题**4.4**：若马氏链不可约且常返，定义π_j是马氏链处于状态j的长程时间比例，则，对于任意初始状态均有

$$\pi_j = \frac{1}{m_j} = \frac{1}{E[N_j|X_0 = j]}$$

理解：

（1） π_j怎么理解？

（2） 为啥不考虑暂态状态呢？

（3） 为啥不考虑多个状态类？

（4） m_j代表啥？平均需m_j个时刻，访问一次j

6.1.4 处于状态j的次数的长程比例

- 命题**4.4**：若马氏链不可约且常返，定义π_j是马氏链处于状态j的长程时间比例，则，对于任意初始状态均有

$$\pi_j = \frac{1}{m_j} = \frac{1}{E[N_j|X_0 = j]}$$

证明：

- 设马氏链从状态i开始，以T_1记直至进入状态j的转移次数
- T_2记从T_1直至马氏链下次进入状态j的转移次数
- T_3记从T_2直至马氏链下次进入状态j的转移次数，如此继续

- 注意到：
  - 由于j是常返的，T_1 以概率1有限
  - T_2, T_3 ...独立同分布，如何论证？

6.1.4 处于状态j的次数的长程比例

- 论证：$T_2, T_3 \ldots$独立同分布
  - 要点：前述命题4.3的论证类似，每次到状态j，过程条件独立于历史状态地重启

  - 独立于历史状态：保证$T_2, T_3 \ldots$独立性
  - 重启：保证$T_2, T_3 \ldots$同分布
    - $T_2, T_3 \ldots$均可视为从状态j出发的马氏链首次回到j所用的时刻（转移次数）
    - 遵循相同的马氏链
    - $E[T_2] = E[T_3] = \cdots = m_j$

6.1.4 处于状态j的次数的长程比例

- 所以，马氏链处于状态j的次数的长程比例

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}T_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{T_1}{n}+\frac{T_2+\cdots T_n}{n}}=\frac{1}{m_j}$$

  - T_1有限
  - 强大数定律：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_2+\cdots T_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{T_2+\cdots T_n}{n-1}\frac{n-1}{n}=m_j$$

- 命题得证

6.1.5 长程比例与正常返性

- 命题4.4的进一步理解：

由命题4.4可知，$m_j < \infty$等价于$\pi_j = \dfrac{1}{m_j} > 0$.

理解：

- 若状态j正常返（零常返），则状态j的长程时间比例大于0（等于0）
- 若状态j的长程时间比例大于0，则状态j正常返

- π_j可以理解为一个速率：m_j代表平均需要多久，能访问到状态j
  - m_j越小，则访问j的速率越快，π_j越大
- π_j也可以理解为一个概率：
  - 注意到π_j的和为1，即$\sum_j \pi_j = 1$
  - 长远来看，访问状态j的概率如何
  - 回到j需要的平均时间m_j越短，访问j的可能性越大

6.1.6 正常返性是类性质

- 命题**4.5**：若i是正常返，且$i \leftrightarrow j$,则j也正常返
- 由命题可得到下列性质：
  - 性质1：正常返是类性质，即同一类内状态只要有一个是正常返态，就说明该类内状态全是正常返态
    - 同一类内状态皆互通，结合命题4.5可得到结论
  - 性质2：零常返态也是类性质，即同一类内的状态只要有一个是零常返态，就说明该类内状态全是零常返态
    - 首先注意到：零常返态也是常返态，所以类内存在零常返态的话，则不能存在暂态
    - 然后：类内存在零常返态，说明类内不能存在正常返态，否则违背性质1，结论得证
    - 所以：暂态、常返态、零常返态、正常返态都是类性质

6.1.6 正常返性是类性质

- 性质3：有限状态不可约的马氏链的所有状态都是正常返态

证明：

- 若全是零常返，所有π_j为0
- 已知π_j的加和为1，但有限个0相加不能为0，推得矛盾
- 结论得证

6.1.6 正常返性是类性质

- 命题**4.5**：若i是正常返，且$i \leftrightarrow j$,则j也正常返

证明：

- 说明：$\pi_j > 0$ 即可
  - 要点：注意到$\pi_j \geq \pi_i P_{ij}^n > 0$即可

6.1.6 正常返性是类性质

- 命题**4.5**：若i是正常返，且$i \leftrightarrow j$,则j也正常返

证明：

➢ 由$i \rightarrow j$，说明$\exists n \geq 0$,有$P_{ij}^{n} > 0$； i正常返说明$\pi_i > 0$

注意到：

➢ $\pi_i P_{ij}^{n} =$ 链在i且在n次转移后在状态j的长程时间比例

$=$ 链在j且在n转移前在状态i的长程时间比例

$\leq$ 链在j的长程时间比例

$= \pi_j$

➢ 要点：π_i是该链处在状态i的长程时间比例

➢ 要点：P_{ij}^{n}是在状态i的链经过n次转移后在状态j的长程时间比例（即，概率）

➢ 无限独立地、重启思路

6.1.7 如何确定长程比例？

- 定理**4.1**：考虑一个不可约的马氏链，若此链是正常返的，则长程比例π_j是方程

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, j \geq 1;$$
$$\sum_j \pi_j = 1$$

的唯一解。

再则，若上述线性方程无解，则此马氏链是暂态的或者是零常返的，而且一切$\pi_j = 0$.

证明不做要求，理解为主：

- 有解与正常返对应；无解即$\pi_j = 0$与暂态或零常返对应
- 注意：没有要求状态个数有限
  - 对有限状态不可约马氏链，方程有唯一解
    - 因为有限状态不可约马氏链必是正常返的！

6.1.7 如何确定长程比例？

- 定理**4.1**：考虑一个不可约的马氏链，若此链是正常返的，则长程比例$\boldsymbol{\pi_j}$是方程

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}\,, j \geq 1;$$
$$\sum_j \pi_j = 1$$

的唯一解。

理解：

- 本质：把长程中，访问j的时刻，分为具体的类型
  - 分类标准为：?
  - P_{ij}是访问状态j的转移中来自状态i的比例
  - $\pi_i P_{ij}$是链在j且在转移前在状态i的长程时间比例

6.1.8 例题

- **例4.20：考察下雨例子(例4.1)马氏链，转移概率**

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

➢ 计算长程时间比例：

$$\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_1,$$
$$\pi_1 = (1-\alpha)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1,$$
$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

➢ $\pi_0 = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}$，$\pi_1 = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$

➢ 若$\alpha = 0.7, \beta = 0.4,$ 则长程比例为$\pi_0 = \frac{4}{7} \approx 0.571$

6.1.8 例题

- 例**4.22**：一马氏链转移概率如下所示，计算长程时间比例：

$$P = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{bmatrix}$$

➢ 长程时间比例公式：

$$\pi_0 = 0.45\pi_0 + 0.05\pi_1 + 0.01\pi_2,$$
$$\pi_1 = 0.48\pi_0 + 0.70\pi_1 + 0.50\pi_2,$$
$$\pi_2 = 0.07\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.49\pi_2,$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

6.1.8 例题

- $\pi_0 = 0.07,\ \pi_1 = 0.62, \pi_2 = 0.31$
- 这个马氏链模型一般用来描述阶层迁移。
- 假定一个家庭中孩子的职业仅决定于他父母的职业。那么职业阶层跃迁可假设为有如此的转移概率。

6.1.8 例题

- 例**4.24**：假设杰伦奶茶店的奶茶机以转移概率$P_{ij}(i,j=1,\ldots,n)$的不可约且正常返的马氏链进行状态改变。
  假定其中一些状态是“好”的另一些状态为“差”的。以$\boldsymbol{A}$记好状态的集合，即$\boldsymbol{A}^c$记差状态集合。生产过程会处于好/差的状态。
- **1.**生产过程从好转为差的速率（可看做比率、故障率）
- **2.**当过程转为差时，保持在差状态的平均时间长度
- **3.**当过程转为好时，保持在好状态的平均时间长度
- ➢ 要点：把$\boldsymbol{A}$集合状态，与$\boldsymbol{A}^c$集合状态，整体考虑

6.1.8 例题

解答：

- $\pi_k(k=1,\ldots,n)$记长程比例。
- $\bar{U}$ 过程转为好状态时保持在好状态平均时间
- $\bar{D}$ 过程转为差状态时保持在差状态的平均时间

6.1.8 例题

- 要点1：$\frac{1}{\overline{U}+\overline{D}}=\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}$
  - 转移时刻的长程比例
  - 等式右侧是细致考虑从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{A}^c$转移的这个时刻的长程比例
    - π_i是处于好状态i的长程比例
    - P_{ij}是处于好状态i并往坏状态j转移的长程比例
    - 对所有$\boldsymbol{A}$集合与$\boldsymbol{A}^c$集合求和即可

- 要点2：$\frac{\overline{U}}{\overline{U}+\overline{D}}=\sum_{i\in A}\pi_i$
  - 好状态的长程比例

6.1.8 例题

- 可以解得： $\overline{U}=\frac{\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}}$;$\overline{D}=\frac{\sum_{i\in A^c}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}}$

6.1.8 例题

- 例**4.24**的一个具体例子：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$，状态1,2差，3,4好

- 则：$\pi_1=\frac{3}{16};\pi_2=\frac{1}{4};\pi_3=\frac{14}{48};\pi_4=\frac{13}{48};$
- 故障率$\frac{9}{32};$
- $\overline{U}=\frac{14}{9};$
- $\overline{D}=2$

6.1.9 平稳概率

- 平稳概率：长程比例 $\pi_j, j \geq 1$常称为平稳概率。
- 要点：平稳概率分布指的是初始时刻状态空间上，使得下一时刻状态分布 X_1 与初始时刻 X_0 状态分布相同的唯一分布！

理解：

- 若初始状态按概率$\pi_j(j \geq 0)$选取，那么马氏链在任意时间n处于j的概率也等于π_j
  - 即，X_0取值状态j的概率为π_j，也即$P\{X_0 = j\} = \pi_j$
  - 会令到：所有X_n，均有$P\{X_n = j\} = \pi_j$

证明（数学归纳法）：

若$P\{X_0 = j\} = \pi_j$，$j \geq 0$

- $P\{X_1 = j\} = \sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j$

若$P\{X_n = j\} = \pi_j$，$j \geq 0$

- $P\{X_{n+1} = j\} = \sum_i P\{X_n = i\} P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \pi_j$

6.1.9 例题

- 例**4.25** 假定在相继的日子里，每日新入住某宾馆的家庭数是均值λ的泊松随机变量。
- 再假定一个家庭在宾馆停留的天数是参数为$p \in (0,1)$(退房概率)的几何随机变量。假定所有家庭彼此独立。
- 可以看出，以X_n记在第n天住在宾馆的家庭数，那么$\{X_n, n \geq 0\}$是马氏链。求
- （a）马氏链的转移概率；（b）$E[X_n|X_0 = i]$
- （c）马氏链的平稳概率

6.1.9 例题

为何是马氏链:

- 几何随机变量说明，在前一个晚上留宿宾馆的家庭，独立于已经在宾馆呆的天数，将在第二天以概率p退房
- 可知下一天的家庭数，与下一天入住和下一天退住（与今天住宿的家庭数相关）的相关，所以仅取决于今天的情况

6.1.9 例题

(a) 转移概率：P_{ij}

- 状态i: 今天在住的家庭数为i
- 新一天入住的家庭数为N~Poisson(λ)
- 留下的家庭数$R_i \sim$ 二项分布$B(i, q = 1 - p)$.
- 所以$P_{ij} = P(R_i + N = j)$

$$= \sum_{k=0}^{i} P(R_i + N = j | R_i = k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} P(N = j - k | R_i = k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P(N = j - k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \binom{i}{k} q^k p^{i-k}$$

6.1.9 例题

(b) $E[X_n|X_0=i]$

递归式推导如下：

- $E[X_n|X_{n-1}=i]=E[R_i+N]=iq+\lambda$
- $E[X_n|X_{n-1}]=X_{n-1}q+\lambda$
- $E[X_n]=E[X_{n-1}]q+\lambda$
  $=\lambda(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})+q^nE[X_0]$
- $E[X_n|X_0]=\lambda(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})+q^nX_0$
- $E[X_n|X_0=i]=\frac{\lambda(1-q^n)}{p}+q^ni$

6.1.9 例题

(c) 平稳概率:

- 要点：利用平稳概率分布是初始状态空间上使得下一个时刻的状态有与它相同分布的唯一分布。
  - 初始状态X_0具有均值为α的泊松分布。
  - 后续X_n也应为均值α的泊松分布
  - 考虑$X_1 = R + N \sim \text{Poisson}(\lambda + \alpha q)$
    - 由讲义2泊松分布的分解例题（例3.23）可知，第1天留下的家庭数R服从$Pois(\alpha q)$
    - 新加入家庭N，服从独立泊松分布$\text{Poisson}(\lambda)$
    - 两个独立泊松分布相加，得到新的泊松分布
  - 由平稳概率的意义: $\alpha = \lambda + \alpha q \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\lambda}{1-q} = \frac{\lambda}{p}$
  - 所以，平稳概率$\pi_j = P\{X_0 = j\} = e^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^i / i!$

6.1.9 例题

- 例4.25 推广：一个公司，有r种不同类型员工。
- 假定一个员工目前为类型i, 并以概率q_{ij}在下一个时期变成类型j $(j=1,\ldots,r)$, 或者以概率$1-\sum_{j=1}^{r} q_{ij}$离开该公司。
- 再者，假定每个时期都雇佣新的员工，且雇佣的各类型员工数是均值为$\lambda_1,\ldots,\lambda_r$的独立泊松随机变量。
- 记$\boldsymbol{X_n}=\left(X_n(1),\ldots,X_n(r)\right)$,其中$X_n(i)$是在时期$n$时在公司中的类型$i$的员工数，则$X_n$是马氏链。

➢ 可类似的计算该马氏链的长程比例/平稳概率分布。

6.1.9 例题

马氏链理解:

- 状态空间：$\{(0,0,\dots)_{1\times r},(1,0,\dots)_{1\times r},\dots\}$
  - 向量每一个元素可能取值均为非负整数
- 转移概率：$\boldsymbol{X}_{n+1}$ 由$\boldsymbol{X}_n$ 转换 + 新招聘人数 $\boldsymbol{N}=\{N_1,\dots,N_r\}$ 决定，独立于$\boldsymbol{X}_{n-1},\dots$
  - 确实是马氏链

r维

$(0,0,\cdots,0)$ $(1,0,\cdots,0)$ ⋯⋯

$(0,0,\cdots,0)$

$(1,0,\cdots,0)$

$\vdots$

每一维都取所有可能非负整数

$(\text{非负整数个值})^{r次方}$

极大的转移概率矩阵.

6.1.9 例题

平稳概率:

- 要点：利用平稳概率分布是初始状态空间上使得下一个时刻的状态有与它相同分布的唯一分布。
  - 初始状态$\boldsymbol{X_0} = \left(X_0(1), \dots, X_0(r)\right)$中的元素$X_0(j)$具有独立的、均值为$\alpha_j$的泊松分布
  - 后续$\boldsymbol{X_1} = \left(X_1(1), \dots, X_1(r)\right)$中的元素$X_1(j)$也应为独立的、均值为$\alpha_j$的泊松分布
  - 考虑$X_1(j) = N_j + \sum_{i=1}^{r} M_i(j) \sim \text{Poisson}(\lambda_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_{ij})$
    - $M_i(j)$记类型i的员工在下一个时期转为类型j的员工的数量，由讲义2泊松分布的分解推广（讲义2第27页）可知，$M_i(j)$服从独立的$Pois(\alpha_i q_{ij})$
    - 新加入类型j员工数N_j，服从独立泊松分布$\text{Pois}(\lambda_j)$
  - 由要点: 令 $\alpha_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_{ij}, j = 1, \dots, r$即可
  - 解得α_j即可确定$\boldsymbol{X_0}$分布，相应可以确定平稳概率
    - 平稳概率，即$\boldsymbol{X_0}$取相应向量值的概率

6.1.10 状态的函数的长程单位均值

- 命题**4.6**：令$\{X_n, n\geq 1\}$是有平稳概率$\pi_j(j\geq 0)$的不可约马氏链，$\boldsymbol{r}$是状态空间上的一个有界函数。那么，以概率**1**有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} r(X_n)}{N}=\sum_{j=0}^{\infty} r(j)\pi_j$$

报酬角度来理解：

- 访问一次状态j, 得到单位时间报酬$r(j)$
  - 那么，在时段$\{1,\ldots,N\}$内获得总报酬为$\sum_{n=1}^{N} r(X_n)$
  - 时段内$\{1,\ldots,N\}$的平均报酬为$\frac{\sum_{n=1}^{N} r(X_n)}{N}$
  - $\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} r(X_n)}{N}$，即长远看，马氏链的单位时间平均报酬
- 命题4.6说明：
  长远看，马氏链的单位时间平均报酬$=\sum_{j=0}^{\infty} r(j)\pi_j$
  - π_j概率解释的重要应用，长远来看以概率π_j得到单位报酬$r(j)$，求期望即得$\sum_{j=0}^{\infty} r(j)\pi_j$，为单位时间平均报酬

6.1.10 状态的函数的长程单位均值

- 命题**4.6**：令$\{X_n, n \geq 1\}$是有平稳概率$\pi_j (j \geq 0)$的不可约马氏链，$\boldsymbol{r}$是状态空间上的一个有界函数。那么，以概率**1**有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} r(X_n)}{N} = \sum_{j=0}^{\infty} r(j)\pi_j$$

推导：

- 令$\alpha_j(N)$为马氏链在时段$\{1, \dots, N\}$中在状态j的时刻数，有：

$$\sum_{n=1}^{N} r(X_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(N) r(j) \qquad (*)$$

  - 时段内访问状态j 共$\alpha_j(N)$次
  - 即$\sum_{n=1}^{N} r(X_n)$中共有$\alpha_j(N)$个$r(j)$相加

- 将（*）式除以N，然后令$N \to \infty$即得到结果
  - 由π_j的长程定义，可知 $\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_j(N)}{N} = \pi_j$

6.1.10 例子

- 例4.27：例4.7的保险系统，年理赔次数考虑均值0.5的泊松随机变量，马氏链转移概率给出如下：

$$\alpha_0 = 0.6065, \alpha_1 = 0.3033, \alpha_2 = 0.0758$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 - a_0 - a_1 - a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1 - a_0 - a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1 - a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1 - a_0 \end{bmatrix}$$

求解

- ➢ $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \sum_i \pi_i = 1$
- ➢ $\pi_1 = 0.3692, \pi_2 = 0.2395, \pi_3 = 0.2103, \pi_4 = 0.1809$
- ➢ 注意到$r(1) = 200, r(2) = 250, r(3) = 400, r(4) = 600$
  - ➢ 状态下保费视为报酬
- ➢ 平均年保费（报酬）：

$$200\pi_1 + 250\pi_2 + 400\pi_3 + 600\pi_4 = 326.375$$

6.1.11 极限概率

引例：例4.8下雨情况入手，可知：

- $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{(4)}=\begin{bmatrix}0.575 & 0.425\\ 0.567 & 0.433\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{(8)}=\begin{bmatrix}0.57 & 0.43\\ 0.57 & 0.43\end{bmatrix}$

➢ 当$n\to\infty, P_{ij}^{n}$看起来会收敛到不依赖i的某个值

➢ 注意到，长程比例：$\pi_0=4/7\approx 0.571; \pi_1=3/7\approx 0.429$

➢ 发现，可能有极限概率$\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=j\}$等于长程比例$\pi_j$：

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{n}=\lim_{n\to\infty}P\{X_n=j\}=\pi_j$$

➢ 那么，极限概率等于长程比例吗？

  ➢ 若极限概率存在，则，极限概率等于长程比例

6.1.11 极限概率

- 例：考虑转移概率$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

➢ 长程比例为$\pi_0=\pi_1=0.5$

➢ 但是$P_{00}^n=\begin{cases}1, 若偶数n\\ 0, 若奇数n\end{cases}$,所以不存在极限概率

➢ 什么时候存在极限概率，与长程比例有什么关系呢？

6.1.12 周期的马氏链

- 状态的周期，d，定义为：从该状态出发，只能在d>1的倍数步回访该状态。
  - ➢ 只能：即，考虑P_{ii}^{n}这个转移概率，若$P_{ii}^{n} > 0$,必有$n = m * d$,其中m为正整数
  - ➢ 定理：互通类内的状态的周期相等(不要求证明!)

- 周期的马氏链：对一个不可约马氏链，其各状态的周期$d \geq 2$；否则被称为非周期马氏链。
  - ➢ 周期的马氏链没有极限概率

6.1.12 周期的马氏链

- 非周期的不可约马氏链，极限概率一定存在，且不依赖于初始状态；进而，极限概率等于长程比例。

仅在假设极限概率存在的情况下，尝试理解：

- 令$\alpha_j = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\}$为极限概率
- 要点：$P\{X_{n+1} = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = j|X_n = i\}P\{X_n = i\}$
  $= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P\{X_n = i\}$
- 并有$1 = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = i\}$
- 令$n \to \infty$, 可推出

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\alpha_i$$
$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$$

因此，$\{\alpha_j, j \geq 0\}$满足以$\{\pi_j, j \geq 0\}$为唯一解的方程，

- $\alpha_j = \pi_j, j \geq 0$
  - 假设均存在，极限概率等于长程比例等于平稳概率

6.1.12 周期的马氏链

- 补充定理1：非周期的不可约马氏链，必属于以下两类之一。

（1）一切状态或者都是暂态，或者都是零常返态；在此情形下，当$n \to \infty$时，对一切i，j都有$P_{ij}^{n} \to 0$,且不存在平稳分布

  - 各状态的长程比例均为0

（2）一切状态都是正常返态;且$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} > 0$；在此情形，$\{\pi_j\}$是平稳分布，且唯一。

  - 非周期的正常返的不可约马氏链是遍历的

- 补充定理2：设i是常返的，则i是零常返状态的充分必要条件是$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$
- 上述定理，均不要求证明！