随机过程

Stochastic Processes

讲义4：马尔可夫链-1

目录

（课本第4章部分1）

4.1马尔可夫链介绍(课本4.1)

4.1.1 马尔可夫链-引例

- 随机过程：$\{X(t), t \in T\}$是随机变量的集合。
  - 成分1: 状态空间(state space)
  - 成分2:指标集
  - 成分3:相依关系
- 最重要的成分是?

4.1.1马尔可夫链-引例

●考虑离散时间随机过程$\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, 令$X_n$表示第$n$个交易日某股票的收盘价格（假设收盘价格基本单位为1元）。如何对随机过程进行建模？

- 成分1:
- 成分2:
- 成分3：？？

4.1.1马尔可夫链-引例

- 考虑离散时间随机过程$\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$, 令$X_n$表示第$n$个交易日某股票的收盘价格 。相关关系建模的方法：

➢ 方法1：概率统计课简单情形，假设X_n之间独立

➢ 方法2：假设X_{n+1}与$X_0, X_1 \ldots X_n$都相依，多元随机变量

➢ 方法3(折中）：假设X_{n+1}仅通过X_n依赖于历史收盘价格

- 方法3：实际上定义了一个马尔可夫链(亦称马氏链)

➢ 具体的：给定历史收盘价格$X_0, X_1 \ldots X_n$时，X_{n+1}的条件分布仅通过X_n依赖于历史收盘价格

4.1.2 马尔可夫链定义-部分1

- 马氏链定义第一部分：$\{X_n, n = 0,1,\ldots\}$是可取有限个或可数个可能值的随机过程。

➢ 可能值是什么？

  ➢ 此处要求X_n为离散随机变量

  ➢ 马氏链的状态空间：X_n所有可能取值的集合

  ➢ 教材中，状态空间如不特殊说明，是非负整数集合$\{0,1,\ldots\}$

  ➢ 相应的，$X_n = i$,一般称该随机过程在时间n时处于状态$\boldsymbol{i}$

➢ 马氏链为什么是离散时间随机过程？

  ➢ 指标集

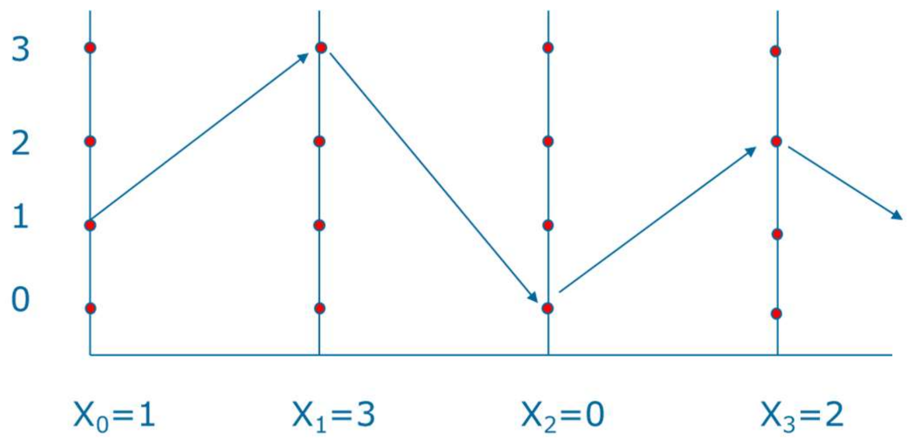
4.1.2 马尔可夫链定义-部分2

●马氏链定义第二部分：只要过程在状态i时，该过程就有固定概率P_{ij}在下一个时刻进入状态j. 即：

$$P\{X_{n+1}=j|X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\dots X_0=i_0\}$$
$$=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=P_{ij},\qquad \forall j,i,i_{n-1}\dots i_0$$

➢ 给定过去状态$X_0,\dots,X_{n-1}$和现在状态X_n，下一时刻状态X_{n+1}的条件分布仅依赖于现在状态，并条件独立于过去的状态

➢ P_{ij}称为一步转移概率，与时刻n有关吗？



4.1.2马尔可夫链定义-部分2

●转移概率：P_{ij}是过程经过1个单位时间（1步），从状态i转到状态j的概率

- $i,j \geq 0$
- $P_{ij} \geq 0$
- $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, i = 0,1 \ldots$

●转移概率矩阵：$\boldsymbol{P}$ 是一步转移概率 P_{ij}组成的矩阵

- $$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

4.1.2 马尔可夫链定义-部分3

- 思考：X_n的分布是啥？

4.1.2 马尔可夫链定义-部分3

●马氏链定义第三部分（课本160页）：初始状态X_0的分布. 可记为：

$$a_i = P\{X_0 = i\}, i \geq 0$$

- 注意到：$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$
- 无条件概率(边缘分布)可利用全概率公式：

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n a_i$$

- 如果初始状态未知，可假设X_0在各个状态的概率均等

4.1.3 马尔可夫链例子

- 例1(4.3)：给定杰伦奶茶店的主理人一天的心情可能是快乐(C)、一般(S)、忧郁(G)三个状态。
  - 假如今天快乐，则明天他状态C,S,G的概率分别为为0.5,0.4,0.1；今天一般，明天状态C,S,G的概率为0.3,0.4,0.3;今天忧郁，明天状态C,S,G的概率为0.2,0.3,0.5
  - 如何定义马氏链?
  - 状态空间:
  - 指标集:
  - 相依关系(转移概率):

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & \\ 0.3 & 0.4 & \\ 0.2 & 0.3 & \end{bmatrix}$$

4.1.3 马尔可夫链例子

•例2(4.1&4.4)：假设明天是否下雨仅依赖于今天是否下雨。

1. 假设若今天下雨，明天下雨概率为α;
2. 今天不下雨，明天下雨概率为β;

➢ 马氏链如何定义？

➢ 状态空间:

➢ 指标集:

➢ 相依关系:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\alpha & \\ \beta & \end{bmatrix}$$

"最美的不是下雨天，是曾与你躲过雨的屋檐"

4.1.3 马尔可夫链例子

- 例2(4.1&4.4)：假设明天下雨依赖于今天和昨天是否下雨

1. 过去两天都下雨，明天下雨的概率为0.7
2. 今天下雨，昨天不下雨，明天下雨概率0.5
3. 昨天下雨，今天不下雨，明天下雨概率0.4
4. 过去两天都不下雨，明天下雨概率0.2

- 构建马氏链?
- 注意：若时间n的状态反映时间n是否下雨，并非马氏链！

4.1.3 马尔可夫链例子

- 过去两天都下雨，明天下雨的概率为0.7
- 今天下雨，昨天不下雨，明天下雨概率0.5
- 昨天下雨，今天不下雨，明天下雨概率0.4
- 过去两天都不下雨，明天下雨概率0.2

- 状态0：今天和昨天都下雨
- 状态1：今天下雨而昨天没有
- 状态2：昨天下雨而今天没有
- 状态3：今天和昨天都没下雨

- 转移概率： $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0.7 & & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & \\ 0 & 0.2 & 0 & \end{bmatrix}$

4.1.3 马尔可夫链例子

●例3(4.5&4.6随机游动)：一个马尔可夫链，状态空间为整数$i=0,\pm1,\ldots$，对某个数$p\in(0,1)$，有：

$$P_{i,i+1}=p=1-P_{i,i-1}, i=0,\pm1,\ldots$$

- 该马尔可夫链称为随机游动

- 状态空间：
- 指标集：
- 相依关系：

4.1.3 马尔可夫链例子

●随机游动-赌博模型：一个赌徒，每局概率p赢1美元，以概率$1-p$输1美元。假设赌徒在破产或财富达到N美元时离开。赌徒不同时刻资产构成马氏链。

- 状态空间：
- 指标集：
- 相依关系：

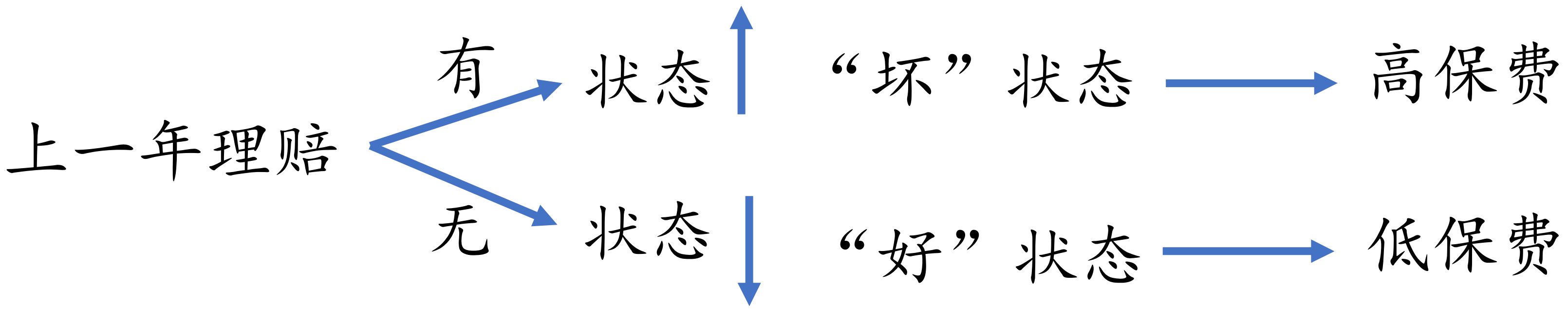
$$P_{i,i+1}=p=1-P_{i,i-1}, i=1,2,\ldots,N-1$$
$$P_{00}=P_{NN}=1$$

4.1.3 马尔可夫链例子

➢ 注意：这里状态$0, N$是吸收状态，即进了这个状态，就不会再离开。

4.1.3 马尔可夫链例子

- 例4(4.7)：车险的保费会每年更新，具体金额由参保人在保险公司内的定级状态决定，这整个系统称为“好-坏系统”。
- 每个参保人被赋予一个正整数状态，状态对应不同保费。
- 参保人的状态可随着参保人要求的理赔次数每年变化。



- ➢ 状态空间：$\{1, \ldots, N\}$
- ➢ 指标集：
- ➢ 相依关系：

4.1.3 马尔可夫链例子

- 例4(4.7):
- 令$s_i(k)$指参保人下年的状态，其中i是上年的状态，k是上年理赔的次数
- 假设任一参保人理赔次数服从Poisson(λ), 那么参保人相继状态构成一个马氏链
- 转移概率 $P_{ij}=\sum_{\{\forall k:s_i(k)=j\}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, j\geq 0$

➢ $\{\forall k: s_i(k)=j\}$:指的是满足所有这个条件的k, 条件是使得$s_i(k)=j$的k

➢ 即上年状态i的参保人，上年有k次理赔，其下年状态改为j

4.1.3 马尔可夫链例子

- 接下来：详细说明一个4个状态的“好-坏”系统。

		下一个状态			
当前状态	年保费	0理赔	1理赔	2理赔	≥3理赔
1	200	$s_1(0) =$	$s_1(1) =2$	$s_1(2) =3$	$s_1(\geq 3) =4$
2	250	$s_2(0) =$	$s_2(1) =$	$s_2(2) =4$	$s_2(\geq 3) =4$
3	400	$s_3(0) =$	$s_3(1) =4$	$s_3(2) =4$	$s_3(\geq 3) =4$
4	600	$s_3(0) =3$	$s_4(1) =4$	$s_4(2) =4$	$s_4(\geq 3) =4$

- 对不同$k, s_i(k) =$
- 对不同$j, s_i(\quad) = j$

- 具体转移概率矩阵如何？

4.1.3 马尔可夫链例子

- 具体转移概率如何？

➢ 各用户k次理赔次数概率：$a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \geq 0$

➢ 这里可以更详细建模！

- 转移概率$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{bmatrix}$

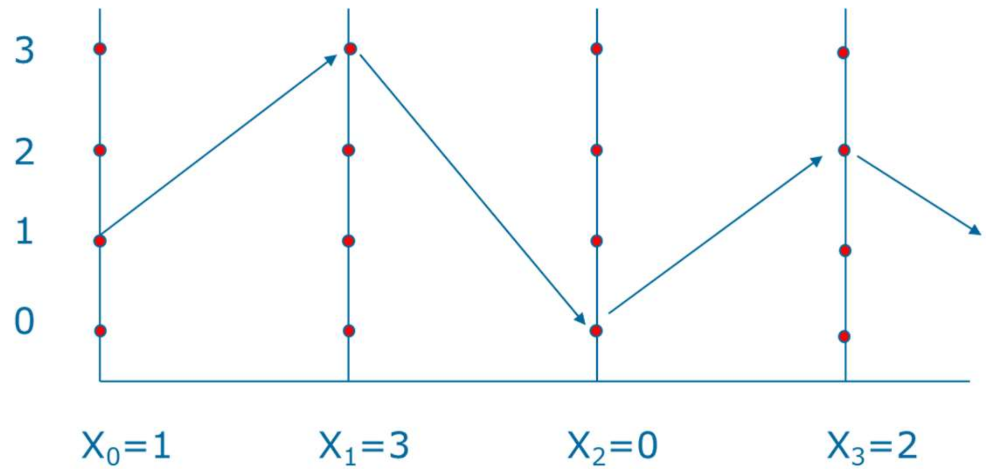
4.2 C-K方程(课本4.2)

4.2.1 多步转移概率

- P_{ij}是一步转移概率：从状态i, 下个时刻到状态j

- n步转移概率：P_{ij}^{n}指过程现在处于状态i，在n次转移后处于状态j的概率。

➢ 表达式：$P_{ij}^{n} = P\{X_{k+n} = j | X_k = i\}, n \geq 0, i, j \geq 0$



4.2.2 C-K方程求解多步转移概率

- C-K(Chapman-Kolmogorov)方程:

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}, \qquad \forall n, m \geq 0, \forall i, j$$

- 推导: $P_{ij}^{n+m} = P\{X_{n+m} = j | X_0 = i\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j | X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}$$

4.2.3 C-K方程的矩阵形式

- $\boldsymbol{P}^{(n)}$:n步转移概率P_{ij}^{n}的矩阵，C-K方程可表示为矩阵形式：

$$\boldsymbol{P}^{(n+m)} = \boldsymbol{P}^{(n)}\boldsymbol{P}^{(m)}$$

  - $P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}$的矩阵形式

- 有：$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{n}$

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例1(4.8课本有笔误) 例4.1天气情况中$\alpha = 0.7, \beta = 0.4$, 今天下雨，那么4天后下雨的概率为？状态0=下雨，1=不下雨

➢ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.7} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.4} & \mathbf{0.6} \end{bmatrix}$

➢ $\boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{P}^4 = (\boldsymbol{P}^2)^2 = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$

➢ 所以，$P_{00}^4 = 0.5749$

4.2.4 C-K方程的应用例子

●例1：如果问到的是，之后4天都下雨的概率?

$$P_{00} \times P_{00} \times P_{00} \times P_{00}$$

➤ $P\{X_4 = 0, X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0\}$

$= P\{X_4 = 0 | X_3 = 0, X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 0\} \times$

$P\{X_3 = 0 | X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 0\} \times$

$P\{X_2 = 0 | X_1 = 0, X_0 = 0\} \times$

$P\{X_1 = 0 | X_0 = 0\}$

➤ 对条件概率一定一定要非常熟练！

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例2(4.9) 已知周一和周二下雨，问周四下雨的概率是多少？

状态0：今天和昨天都下雨；状态1：今天下雨而昨天没有

状态2: 昨天下雨今天没有；状态3：今天昨天都没下雨

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0 & 0.3 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$$

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例2(4.9) 已知周一和周二下雨，问周四下雨的概率是多少？

状态0：今天和昨天都下雨；状态1：今天下雨而昨天没有

状态2: 昨天下雨今天没有；状态3: 今天昨天都没下雨

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0 & 0.3 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8\end{bmatrix}$$

- $$\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{P}^2=\begin{bmatrix}0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18\\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30\\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48\\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64\end{bmatrix}$$
- $$P_{00}^2+P_{01}^2=0.49+0.12=0.61$$

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例3(4.10) 考虑红蓝两种球。瓮中有两个球。每个时期随机取出一个球，并放回一个新球，新球颜色以概率0.8与取的球同色，而以概率0.2与取的球相反颜色。如果开始时瓮中两个球皆为红色，求第五次取到的球是红色的概率。

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例3(4.10) 考虑红蓝两种球。瓮中有两个球。每个时期随机取出一个球，并放回一个新球，新球颜色以概率0.8与取的球同色，而以概率0.2与取的球相反颜色。如果开始时翁中两个球皆为红色，求第五次取到的球是红色的概率。

- 令X_n为第n次取球后瓮中红球数目，X_n可取0,1,2三个状态
- $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$ ← 为什么？
- 又注意到$P(\text{第五次取红球}|X_0=2)$

$=\sum_{i=0}^{2}P(\text{第五次取红球}|X_4=i\,)P(X_4=i|X_0=2)$ ← 为什么？

$=0.5P_{21}^{4}+P_{22}^{4}$

- 求出$\boldsymbol{P}^{4}$，代入即可

4.2.4 C-K方程的应用例子

- 例4(4.11) 假定球被逐个分配到8个瓮中，各球等可能进到任意一个瓮。问在分配9次后，其中恰有3个瓮非空的概率？

4.2.4 C-K方程的应用例子

●例4(4.11) 假定球被逐个分配到8个瓮中，各球等可能进到任意一个瓮。问在分配9次后，其中恰有3个瓮非空的概率？

- 令X_n为第n次分配后非空瓮的量，X_n可取$0,1 \dots 8$
- 转移概率$P_{i,i} = \frac{i}{8} = 1 - P_{i,i+1}, i = 1, \dots, 7; P_{0,1} = P_{8,8} = 1$
- 要求$P_{0,3}^{9} = P_{1,3}^{8}$；求$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{8}}$即可

4.2.5 时刻m前进入过某状态

- 接下来考虑利用C-K方程解决一系列非直观情境！（课本4.2.5 & 4.2.6.）

- 已知：$\{X_n, n \geq 0\}$是马氏链
- 目标1：求 $\beta = P(X_k \in \boldsymbol{A}, \exists k = 1, \ldots m | X_0 = i)$

➢ $\boldsymbol{A}$为某些状态的集合；i不在集合$\boldsymbol{A}$中

➢ β中的事件是：

➢ 从状态i起始，在时刻m前，该马氏链曾经进入过$\boldsymbol{A}$中的任一状态

4.2.5时刻$\boldsymbol{m}$前进入过某状态

- 思路：构建新的随机过程$\{W_n, n \geq 0\}$

  令$N = \min\{n: X_n \in \boldsymbol{A}\}$,若$\forall n, X_n \notin \boldsymbol{A}$,则令$N = \infty$

$$W_n = \begin{cases} X_n, 若n < N \\ \mathrm{A}, 若n \geq N \end{cases}$$

- 进入A中状态前，W_n状态=原马氏链，进入后，保持于此
- 要点1：$\{W_n, n \geq 0\}$仍是马氏链吗？

- 要点2：原马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在时刻m前进入过$\boldsymbol{A}$中的状态

  等价于

  新马氏链$\{W_n, n \geq 0\}$在时刻m时处于状态$\boldsymbol{A}$

4.2.5时刻$\boldsymbol{m}$前进入过某状态

将思路转为概率算式：

- $$\begin{aligned}\beta &= P(X_k \in \boldsymbol{A}, \exists k = 1, \ldots m | X_0 = i) \\ &= P(W_m = A | X_0 = i) \\ &= P(W_m = A | W_0 = i) \\ &= Q_{i\mathrm{A}}^m\end{aligned}$$

- 问题转化为：新马氏链的m步转移概率

4.2.5时刻m前进入过某状态

- 新马氏链$\{W_n, n \geq 0\}$的具体定义
  - ➢ 状态空间：不在$\boldsymbol{A}$中的各个状态和额外一个附加状态A
    - ➢ A为吸收状态，即进入附加状态A即保持在其中
  - ➢ 转移概率：$Q_{ij} = P_{ij}$, 若$i \notin \boldsymbol{A}, j \notin \boldsymbol{A}$

    $Q_{iA} = \sum_{j \in A} P_{ij}$, 若$i \notin \boldsymbol{A}$

    $Q_{AA} = 1$

4.2.5时刻$\boldsymbol{m}$前进入过某状态

- 例(4.12)：在一系列公平抛掷硬币的试验中，以N记直至出现连续三次正面时的抛掷次数。求

(a)$P(N \le 8)$

(b)$P(N = 8)$

- 要点：定义合适马氏链$\{X_n, n \ge 0\}$，状态空间$\{0,1,\ldots\}$，状态i表示目前处在相继i次连贯正面的情形
- 定义$\{W_n, n \ge 0\}$，其状态为$0,1,2,\ge 3(A)$
- $$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- 求解$$\boldsymbol{Q}^8 = \begin{bmatrix} 81/256 & 44/256 & 24/256 & \mathbf{107/256} \\ 68/256 & 37/256 & 20/256 & 131/256 \\ 44/256 & 24/256 & 13/256 & 175/256 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.5时刻$\boldsymbol{m}$前进入过某状态

•例(4.12)：在一系列公平抛掷硬币的试验中，以N记直至出现连续三次正面时的抛掷次数。求

(a)$P(N \leq 8)$

(b)$P(N = 8)$

(b):

- $P(N = 8) = P(N \leq 8) - P(N \leq 7)$

4.2.6 时刻m前都未进入过某些状态

- 目标2：求$\alpha = P(X_m = j, X_k \notin \boldsymbol{A}, k = 1, \ldots m-1 | X_0 = i)$

➢ **情形1**: $i, j \notin \boldsymbol{A}$

➢ α中的事件是：从状态i起始，在时刻m前，该马氏链从未进入过A中的任一状态，且最终在时刻m时到达状态j

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

- **思路**：利用构建的随机过程$\{W_n, n \geq 0\}$

  令$N = \min\{n: X_n \in \boldsymbol{A}\}$,若$\forall n, X_n \notin \boldsymbol{A}$,则令$N = \infty$

$$W_n = \begin{cases} X_n, 若 n < N \\ \mathrm{A}, 若 n \geq N \end{cases}$$

- **要点**：原马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在时刻m前从未进入过$\boldsymbol{A}$中的状态，且时刻m 时进入状态j；

等价于

新马氏链$\{W_n, n \geq 0\}$在时刻m时进入状态j，即$W_m = j$

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

将思路转为概率算式：

- $\alpha = P(X_m = j, X_k \notin \boldsymbol{A}, k = 1, \ldots m-1 | X_0 = i)$
  $= P(W_m = j | X_0 = i)$
  $= P(W_m = j | W_0 = i)$
  $= Q_{ij}^m$

- 问题转化为：新马氏链的$\boldsymbol{m}$步转移概率

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

- 例(4.13)：对一个状态为1,2,3,4,5的马氏链，计算

$$P(X_4 = 2, X_3 \leq 2, X_2 \leq 2, X_1 \leq 2 | X_0 = 1)$$

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

- 目标2：求$\alpha = P(X_m = j, X_k \notin A, k = 1, \dots m-1 | X_0 = i)$
- 情形**2**: $i \notin \boldsymbol{A}$, 但$j \in \boldsymbol{A}$
- α中的事件是：从状态i起始，在时刻m前，该马氏链从未进入过$\boldsymbol{A}$中的任一状态，且最终恰好在时刻m时到达$\boldsymbol{A}$

4.2.6 时刻m前都未进入过某状态

- 思路：利用情形1解决情形2的问题
- 要点：注意到情形2中，马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在$m-1$时刻未访问到$\boldsymbol{A}$，并在时刻$\{1,2,\ldots,m-2\}$中均未访问到$\boldsymbol{A}$

- 解决方法：考察马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在时刻$m-1$的状态，利用条件概率公式对其取条件，使情形2转化为情形1问题
- $\alpha = \sum_{r \notin A} P(X_m = j, X_{m-1} = r, X_k \notin \mathrm{A}, k = 1, \ldots m-2 | X_0 = i)$

$= \sum_{r \notin A} P(X_m = j | X_{m-1} = r, X_k \notin \mathrm{A}, k = 1, \ldots m-2, X_0 = i) * P(X_{m-1} = r, X_k \notin \mathrm{A}, k = 1, \ldots m-2 | \mathrm{X}_0 = \mathrm{i})$

$= \sum_{r \notin A} P_{rj} Q_{ir}^{m-1}$

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

- 目标2：求$\alpha = P(X_m = j, X_k \notin A, k = 1, \dots m-1 | X_0 = i)$

➢ 情形**3**: $i \in A$, 但$j \notin A$

➢ 此时α中的事件是：从状态i起始，第**1**步即离开状态$\boldsymbol{A}$，并在时刻m前，该马氏链未进入过$\boldsymbol{A}$中的任一状态，且最终在时刻m时到达j

4.2.6 时刻$\boldsymbol{m}$前都未进入过某状态

- **思路**：利用**情形1**解决**情形3**的问题
- **要点**：注意到情形3中，马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在1时刻即不在$\boldsymbol{A}$并在时刻$\{2, \dots, m-1\}$中均未访问到$\boldsymbol{A}$，并在时刻m进入非$\boldsymbol{A}$ 中状态j
- **解决方法**：考察马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$在时刻1的状态，利用条件概率公式对其取条件，使**情形3**转化为**情形1**问题
- $\alpha = \sum_{r \notin A} P(X_m = j, X_k \notin \mathrm{A}, k = 2, \dots m-1, X_1 = r | X_0 = i)$

$$= \sum_{r \notin A} P(X_m = j, X_k \notin A, k = 2, \dots m-1 | X_1 = r, X_0 = i) * P(X_1 = r | X_0 = i)$$

$$= \sum_{r \notin A} P(X_m = j, X_k \notin A, k = 2, \dots m-1 | X_1 = r) P_{ir}$$

$$= \sum_{r \notin A} P(X_{m-1} = j, X_k \notin A, k = 1, \dots m-2 | X_0 = r) P_{ir}$$

$$= \sum_{r \notin A} Q_{rj}^{m-1} P_{ir}$$

4.2.7 转移概率均为条件概率！

- 至今考虑的所有概率都是条件概率。
  - ➢ P_{ij}^n是给定时刻0的初始状态为i时，在时刻n的状态是j的概率。

- (马氏链定义第3部分)若需要在时刻n的状态的无条件分布(边缘分布)，必须给出初始状态的概率分布。

➢ 无条件概率可利用全概率公式：

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n a_i$$

例(4.8续): 保留天气记录4天后下雨（无条件）概率是？

➢ 假定初始状态概率分布为$\alpha_0 = 0.4, \alpha_1 = 0.6$

➢ $P\{X_4 = 0\} = \alpha_0 P_{00}^4 + \alpha_1 P_{10}^4 = 0.4 * 0.5749 + 0.6 * 0.5668$