复旦大学管理学院

2022~2023 学年第 1 学期期中考试

课程名称：时间序列分析 课程代码：MANA130022.01

开课院系：管理学院统计与数据科学系 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：__________ 专业：__________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	总分
得分					

（装订线内不要答题）

（以下为试卷正文）

（注：每道题的所有小问分值相同）

1. （24 分）考虑如下模型：

$$Y_t = 0.4Y_{t-1} + e_t - e_{t-1} + 0.21e_{t-2}$$

a) 说明该模型存在平稳可逆解。

b) 该平稳解可以写作$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots)e_t$，用待定系数法解得$\psi_1, \psi_2, \psi_3$, 通过递推式的通项计算$\psi_{20}$.

c) 计算该模型的二阶自相关系数ρ_2.

解：a) $\phi = 0.4 < 1, 1 - B + 0.21B^2 = (1 - 0.3B)(1 - 0.7B)$，根大于 1，所以该模型存在平稳可逆解。

b) $(1 - 0.4B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1 - B + 0.21B^2$, $\psi_1 = 0.4 - 1 = -0.6, \psi_2 = 0.4 \times (-0.6) + 0.21 = -0.03, \psi_3 = 0.4 \times (-0.03) = -0.012, \dots, \psi_{20} = 0.4^{18} \times (-0.03)$.

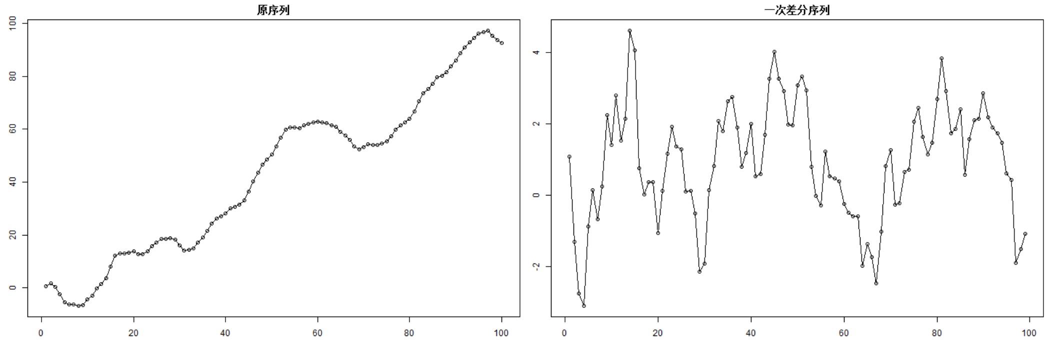
c) $Y_t = e_t - 0.6e_{t-1} - 0.03e_{t-2} + \cdots$, 所以

$$\gamma_0 = 0.4\gamma_1 + (1 + 0.6 - 0.21 \times 0.03)\sigma_e^2,$$

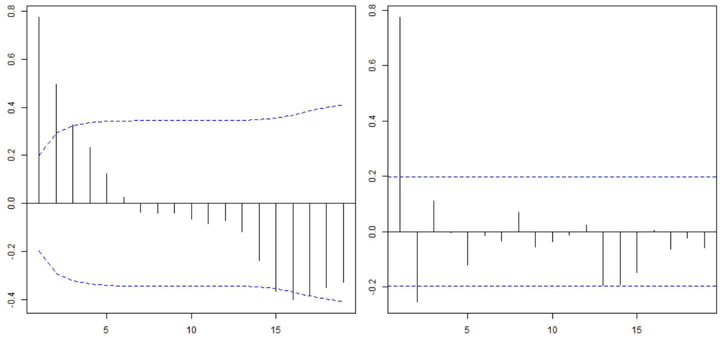
$$\gamma_1 = 0.4\gamma_0 + (-1 - 0.21 \times 0.6)\sigma_e^2$$

解得$\gamma_0 = 1.361\sigma_e^2, \gamma_1 = -0.582\sigma_e^2, \gamma_2 = 0.4\gamma_1 + 0.21\sigma_e^2 = -0.023\sigma_e^2, \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = -0.0166$.

2.　（28 分）下图（左）是某商店的累计盈利（单位：千元）。



a)　为什么要对原序列作差分？一次差分后得到上图（右），下图给出了一次差分序列的 ACF, PACF, EACF, 从这三幅图中，我们可以给该序列尝试建立哪三种模型？说明大致理由。



AR/MA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	x
1	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	x	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7	x	o	o	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o

b)　分别拟合 MA(2), AR(2), ARMA(1,1)这三种模型，得到参数估计如下：

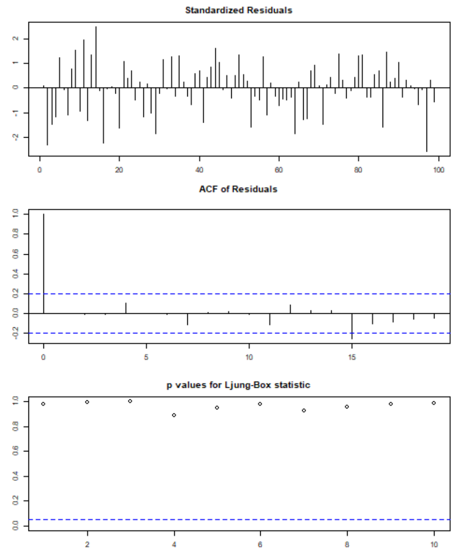
```
Call:
arima(x = x, order = c(0, 0, 2))
Coefficients:
          ma1      ma2    intercept
        0.9845   0.4339     0.9261
s.e.    0.0910   0.0794     0.2428
sigma^2 estimated as 1.013:   log likelihood = -141.65,   aic = 289.31
```

```
Call:
arima(x = x, order = c(2, 0, 0))
Coefficients:
          ar1      ar2    intercept
        0.9831   -0.264     0.9237
s.e.    0.0981    0.100     0.3442
sigma^2 estimated as 0.9533:   log likelihood = -138.64,   aic = 283.29
```

```
Call:
arima(x = x, order = c(1, 0, 1))
Coefficients:
          ar1      ma1    intercept
        0.6469   0.3649     0.9039
s.e.    0.0915   0.1103     0.3691
sigma^2 estimated as 0.9409:   log likelihood = -138.01,   aic = 282.02
```

在这三种模型中，是否存在参数不显著的情况？假设三种模型都通过了模型诊断，你会选择什么模型？对于你选择的模型，给出一次差分序列$X_t = \nabla Y_t$的模型表达式（估计）。（注意 R 语言中 MA 系数要取相反数）

c) 对 ARMA(1,1)进行残差分析，简要说明下图（左）中的三幅图代表的含义，并诊断该模型对于数据的拟合程度。




```
Call:
arima(x = z, order = c(2, 0, 1))

Coefficients:
         ar1      ar2      ma1   intercept
      0.9900  -0.2564  -1.0000      0.0011
s.e.  0.0989   0.1010   0.0285      0.0124

sigma^2 estimated as 0.9631:   log likelihood =
-138.76,   aic = 285.52
```

d) 对一次差分序列X_t作进一步的差分，得到二次差分序列$Z_t = \nabla X_t$，为该序列拟合 ARMA(2,1)模型，所得参数估计结果见上图（右），根据该结果，是否有必要对原序列作二次差分？为什么？

解：a) 因为原序列明显均值不同，不平稳，做差分后可能消除不平稳性。MA(2), AR(2), ARMA(1,1)，根据第一幅图可知r_3不显著，不拒绝 MA(2)；根据第二幅图可知$\hat{\phi}_{33}$不显著，不拒绝 AR(2)；根据第三幅图的三角形顶点位置判断为 ARMA(1,1).

b) 所有参数估计值的绝对值都大于对应的两倍标准差，故而所有参数都显著。由于 ARMA(1,1)的 AIC 最小，所以选择 ARMA(1,1)，模型表达式为$X_t - 0.9039 = 0.6469(X_{t-1} - 0.9039) + e_t + 0.3649e_{t-1}$.

c) 图一为标准化残差，图二为残差的 ACF，图三为 Ljung-Box 统计量Q^*对应的 p 值。从图一可以看出残差没有明显形状，较为随机；图二显示残差 ACF 不显著；图三显示 p 值均大于 0.05. 故而该模型对于数据拟合良好。

d) 没必要，因为 MA 参数θ的估计值等于 1（R 要取相反数），表明这是过度差分。

3. （30 分）给一个长度为$n = 400$的时间序列建模，序列均值为1.5，方差为0.2，其样本自相关系数为$r_1 = 0.7, r_2 = 0.5, r_3 = 0.36.$

a) 尝试建立 MA(2)模型，请在 0.05 显著性水平下检验r_3是否显著不为 0，根据所得结果，MA(2)模型是一个合理的假设吗？

b) 计算样本偏自相关函数$\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}$，根据所得结果，几阶的 AR 模型是合适的？

c) 现在给该序列拟合 AR(1)模型，用矩估计方法来估计所有模型参数。

d) 仍然拟合 AR(1)模型，给出条件平方和函数和最小二乘估计需满足的方程，并计算最小二乘估计的近似值。

e) 给出 AR(1)模型的对数似然函数和无条件平方和函数。

解：a) $\hat{s}_2 = \sqrt{\frac{1}{400}(1 + 2 \times (0.7^2 + 0.5^2))} \approx 0.079$, $r_3 > 1.96\hat{s}_2$,所以显著不为 0，根据该结果 MA(2)模型不合理。

b) $\hat{\phi}_{11} = r_1 = 0.7$, 通过解方程可得$\hat{\phi}_{22} = 0.0196$，$\hat{\phi}_{33} = 0.00615$，均小于$\frac{1.96}{\sqrt{400}} = 0.098$, 故 AR(1)模型是合适的。

c) $\hat{\phi} = r_1 = 0.7$, $\hat{\mu} = 1.5$, $\hat{\sigma}_e^2 = \left(1 - \hat{\phi}^2\right)S^2 = 0.102.$

d) $S_c(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^{n}(Y_t - \mu - \phi(Y_{t-1} - \mu))^2$. 对于$\phi, \mu$分别求偏导并令其等于 0，可得方程组如下

$$\phi = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)}{\sum_{t=2}^{n}(Y_{t-1} - \mu)^2}$$

$$\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \mu - \phi(Y_{t-1} - \mu)) = 0$$

最小二乘估计的近似值为$\hat{\phi} = r_1 = 0.7$, $\hat{\mu} = 1.5$.

e)

$$l(\phi, \mu, \sigma_e^2 | Y_1, \ldots, Y_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma_e^2) + \frac{1}{2}\log(1 - \phi^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2}S(\phi, \mu)$$

$$S(\phi, \mu) = S_c(\phi, \mu) + (1 - \phi^2)(Y_1 - \mu)^2.$$

4. （18 分）已知序列$\{Y_t\}$满足$Y_t = 2.5Y_{t-1} - 2Y_{t-2} + 0.5Y_{t-3} + e_t$

   a) 序列$\{Y_t\}$满足什么 ARIMA 模型？

   b) 假设观测值受到测量误差的影响，有$X_t = Y_t + \varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$是独立于$\{e_t\}$的白噪声，有方差$\sigma_\varepsilon^2$，那么$\{X_t\}$满足什么 ARIMA 模型，是否平稳？

   c) 如果对$\{X_t\}$拟合 ARIMA(1,2,0)模型，其残差的自相关系数是否截尾？

解：a) $(1-0.5B)\nabla^2 Y_t = e_t$，$\{Y_t\}$满足 ARIMA(1,2,0)模型.

b) $(1-0.5B)\nabla^2 X_t = (1-0.5B)\nabla^2 Y_t + (1-0.5B)\nabla^2 \varepsilon_t = e_t + (1-0.5B)\nabla^2 \varepsilon_t$. 等号右边的序列$e_t + (1-0.5B)\nabla^2 \varepsilon_t$平稳，且三阶滞后以上的 ACF 均为 0，三阶滞后 ACF 非 0，与 MA(3)序列的 ACF 具有相同的性质，故而可以看作是 MA(3)序列，则$\{X_t\}$满足 ARIMA(1,2,3)模型，不平稳。

c) $\nabla^2 X_t$满足 ARMA(1,3)模型，对$\{X_t\}$拟合 ARIMA(1,2,0)模型相当于对$\nabla^2 X_t$拟合 AR(1)模型，对一个 ARMA(1,3)序列拟合 AR(1)模型，其残差将满足 ARMA(1,4)模型，ACF 不截尾。