时间序列分析（TIME SERIES ANALYSIS）

主讲：吴尚
复旦大学管理学院统计与数据科学系

ARCH模型

- ARCH模型的背景
- ARCH模型及其基本性质
- ARCH模型的建立
- ARCH模型的预测

ARCH模型的背景

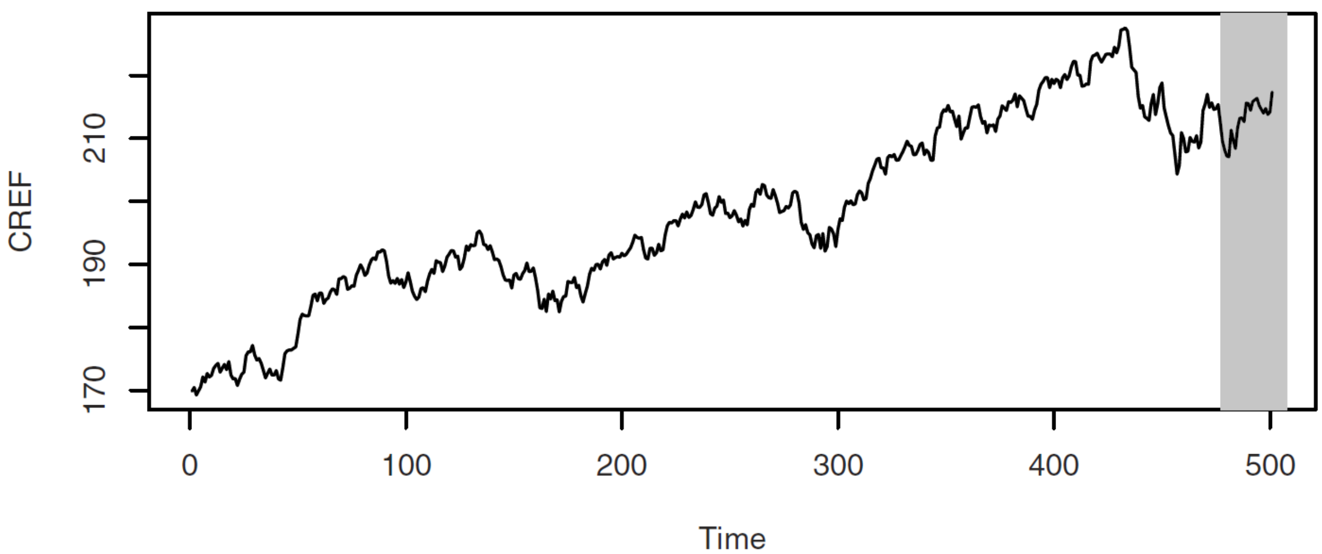
ARCH模型是1982年由恩格尔(Engle, R.)提出，并由博勒斯莱文(Bollerslev, T., 1986)发展成为GARCH (Generalized ARCH)——广义自回归条件异方差。这些模型被广泛的应用于经济学的各个领域。尤其在金融时间序列分析中。

ARCH模型的背景

- ARCH模型是获得2003年诺贝尔经济学奖的计量经济学成果之一。被认为是最集中反映了方差变化特点而被广泛应用于金融数据时间序列分析的模型。
- ARCH模型是过去20年内金融计量学发展中最重大的创新。目前所有的波动率模型中,ARCH类模型无论从理论研究的深度还是从实证运用的广泛性来说都是独一无二的。

一个例子

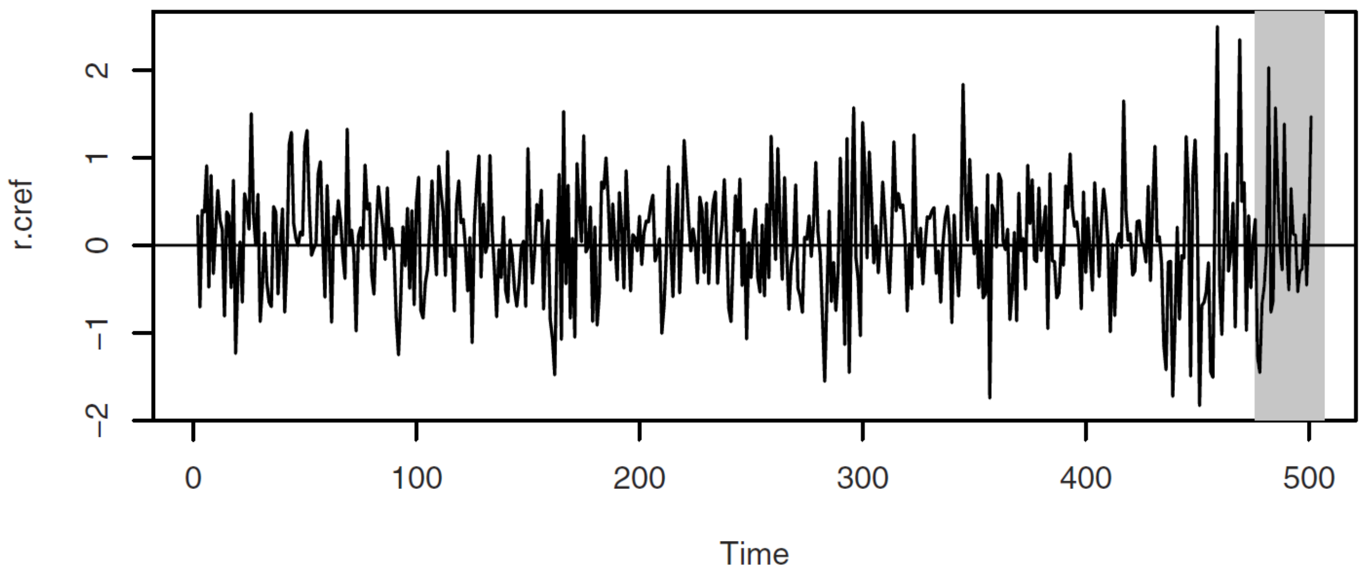
Exhibit 12.1 Daily CREF Stock Values: August 26, 2004 to August 15, 2006




```
> win.graph(width=4.875,height=2.5,pointsize=8)
> data(CREF); plot(CREF)
```

一个例子

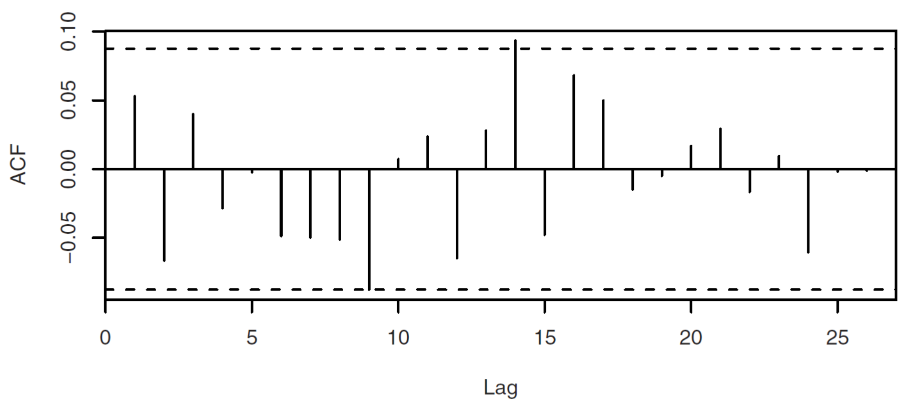
Exhibit 12.2 Daily CREF Stock Returns: August 26, 2004 to August 15, 2006




```
> r.cref=diff(log(CREF))*100
> plot(r.cref); abline(h=0)
```

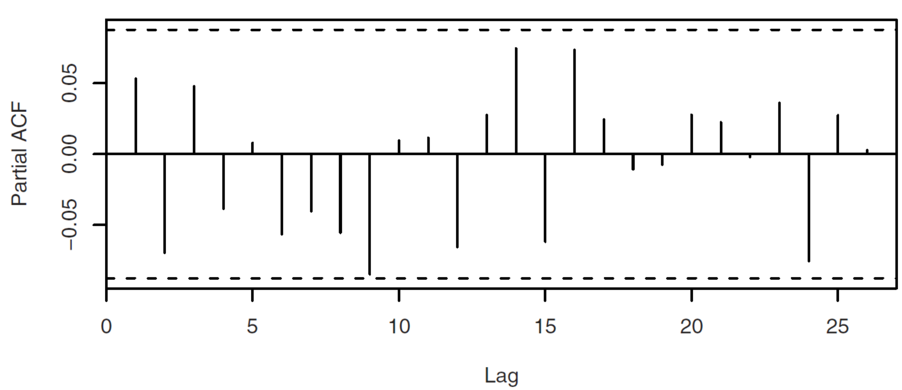
一个例子

Exhibit 12.3 Sample ACF of Daily CREF Returns: 8/26/04 to 8/15/06




```
> acf(r.cref)
```

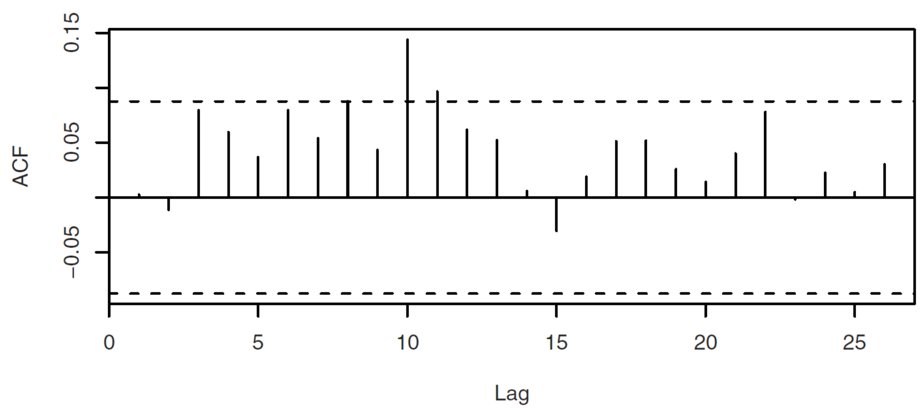
Exhibit 12.4 Sample PACF of Daily CREF Returns: 8/26/04 to 8/15/06




```
> pacf(r.cref)
```

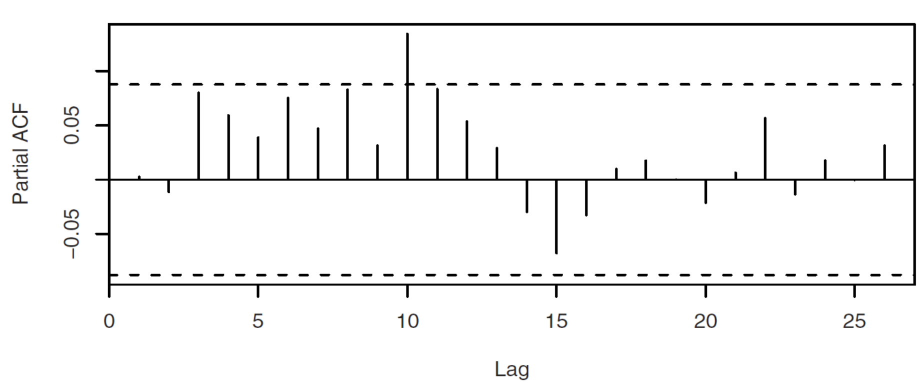
一个例子

Exhibit 12.5 Sample ACF of the Absolute Daily CREF Returns




```
> acf(abs(r.cref))
```

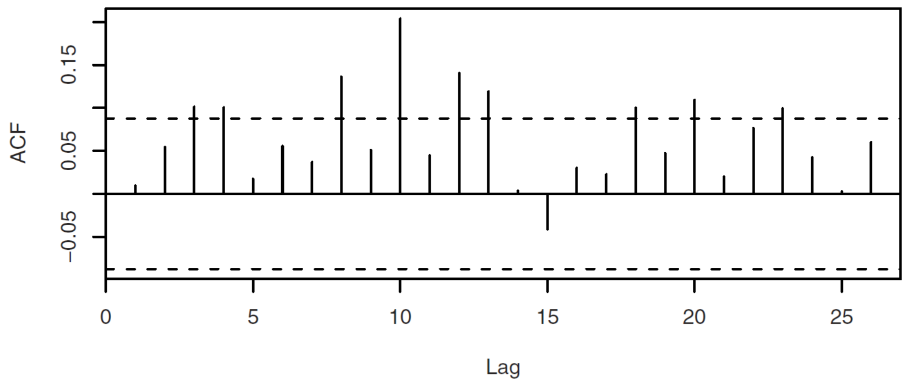
Exhibit 12.6 Sample PACF of the Absolute Daily CREF Returns




```
> pacf(abs(r.cref))
```

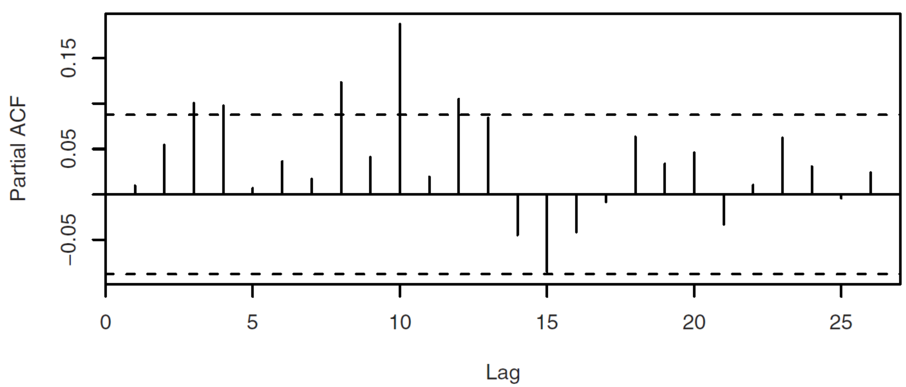
一个例子

Exhibit 12.7 Sample ACF of the Squared Daily CREF Returns




```
> acf(r.cref^2)
```

Exhibit 12.8 Sample PACF of the Squared Daily CREF Returns



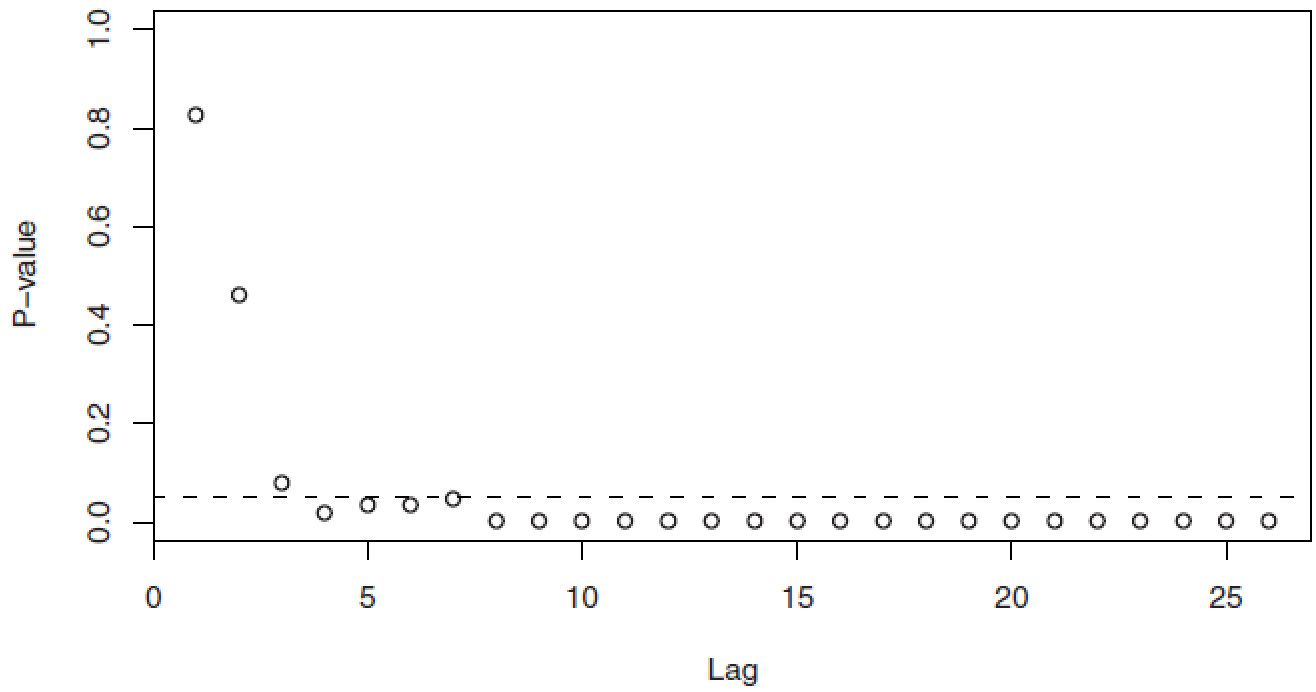

```
> pacf(r.cref^2)
```

ARCH效应检验

- H_0: 没有ARCH效应（独立同分布） $\leftrightarrow$ H_1: 有ARCH效应
- 在H_0下，序列平方$\{r_t^2\}$也是白噪声，其ACF记为$\hat{\rho}_i$，用Ljung-Box统计量来检验其相关性。
- 检验统计量$Q(K) = n(n+2)\sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i} \sim \chi^2(K)$
- 检验结果
  - *拒绝原假设*$Q(K) > \chi_{1-\alpha}^2(K)$
  - *接受原假设*$Q(K) \leq \chi_{1-\alpha}^2(K)$
- 用数据或模型残差的平方构造的Ljung-Box统计量来判断ARCH效应的检验称为Mcleod-Li检验。

Mcleod-Li检验

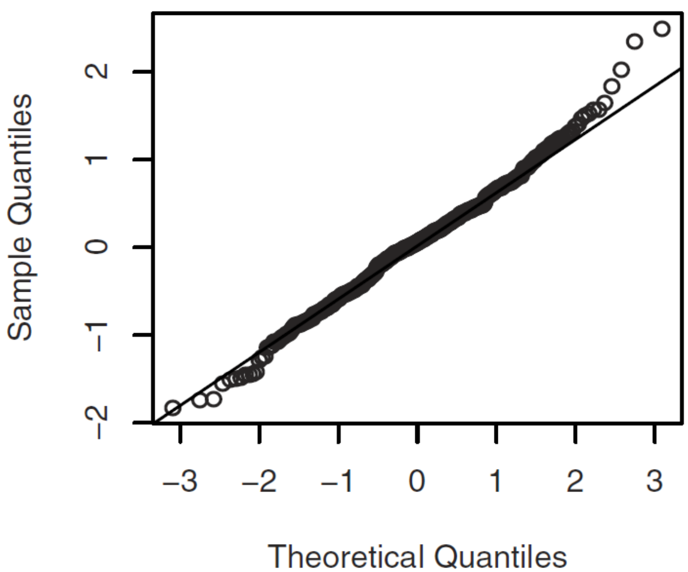
Exhibit 12.9 McLeod-Li Test Statistics for Daily CREF Returns




```
> win.graph(width=4.875, height=3,pointsize=8)
> McLeod.Li.test(y=r.cref)
```

一个例子

Exhibit 12.10 QQ Normal Plot of Daily CREF Returns




```
> win.graph(width=2.5,height=2.5,pointsize=8)
> qqnorm(r.cref); qqline(r.cref)
```

偏度

- 偏度（Skewness）反映的是序列分布密度对称性的指标。
- 若偏度大于0，则分布是右偏或正偏。反之,若偏度小于0，称分布是左偏或负偏。偏度由序列的三阶矩来度量:
- 随机变量Y的偏度为$E(Y-\mu)^3/\sigma^3$
- 样本偏度为$g_1=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^3/(n\hat{\sigma}^3)$，其中$\hat{\sigma}^2=\sum(Y_i-\bar{Y})^2/n$

峰度

- 峰度（Kurtosis）是用来测定序列分布的形状，一般以正态分布的峰度（=3）为标准
- 若峰度大于3，则表示该分布具有尖峰厚尾的特性；反之，若峰度小于3，则表示该分布具有低峰薄尾的特征。若峰度值较大，是由于存在大幅度偏离均值的异常值所造成的。峰度由序列的四阶矩来度量：
- 随机变量Y的峰度为$\frac{E(Y-\mu)^4}{\sigma^4}-3$
- 样本偏度为$g_2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^4/(n\hat{\sigma}^4)-3$

金融时间序列的特点

金融时间序列往往具有以下特点:

- 存在波动率（方差）聚集现象。即波动率在一段时间上高，一段时间上低。称为波动集群现象。

- 尖峰厚尾（Leptokurtosis）：金融时间序列普遍表现出厚尾（fat tails）和在均值处出现过度的峰度（excess peakedness），偏离正态分布。

ARCH(q)模型

- 1982年由恩格尔(Engle, R.)提出自回归条件异方差(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model，ARCH)模型是特别用来建立条件方差模型并对其进行预测的。

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \cdots\cdots + \alpha_q r_{t-q}^2$$

- 其中，ε_t为均值为0，方差为1的独立同分布的随机变量序列。

条件期望

- 条件期望：
- $E[Y|X=x]=\begin{cases}\int_y y f_{y|x}(y|x)dy \\ \sum_y y f_{y|x}(y|x)\end{cases}, f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}$

- 条件期望$E[Y|X=x]=g(x)$是关于随机变量X的值的函数，$E[Y|X]=g(X)$为随机变量。
- 回顾：$E\big[E[Y|X]\big]=E[Y]$

条件方差

- 条件方差:

$$Var[Y|X] = E[(Y - E(Y|X))^2|X]$$

- 全方差公式:

$$Var(Y) = E[Var[Y|X]] + Var[E[Y|X]]$$

ARCH(1)模型的性质

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$$

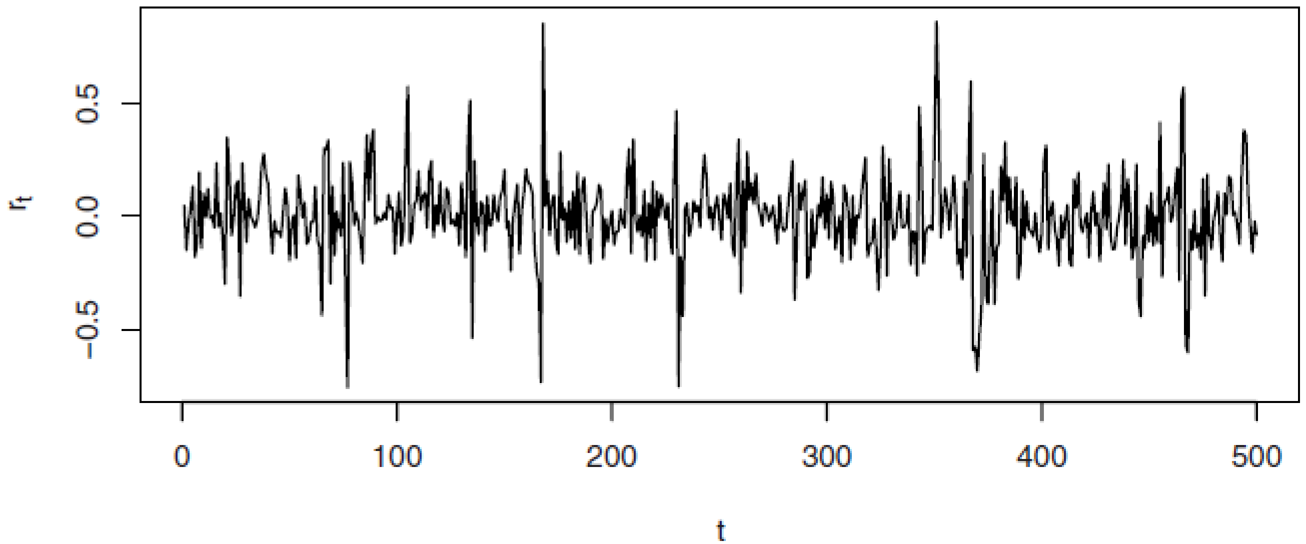
（1）条件均值为零;

（2）序列不相关;

（3）条件异方差。

模拟的ARCH(1)序列

Exhibit 12.11 Simulated ARCH(1) Model with ω = 0.01 and α_1 = 0.9




```
> set.seed(1235678); library(tseries)
> garch01.sim=garch.sim(alpha=c(.01,.9),n=500)
> plot(garch01.sim,type='l',ylab=expression(r[t]), xlab='t')
```

ARCH(1)模型的性质

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$$

$$Er_t^2 = \omega + \alpha E[r_{t-1}^2]$$

- 如果收益率序列$\{r_t\}$是平稳的，则序列方差$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha}$
- 要求：$\omega > 0, 0 \le \alpha < 1$
- $\eta_t = r_t^2 - \omega - \alpha r_{t-1}^2$是均值为0的不相关序列。故$\{r_t^2\}$满足AR(1)模型。

ARCH(1)模型的厚尾性

- r_t的无条件峰度为

$$K = \frac{m_4}{[\sigma^2]^2} = \frac{3\omega^2(1+\alpha)}{(1-\alpha)(1-3\alpha^2)} \div \left(\frac{\omega}{1-\alpha}\right)^2$$
$$= 3\frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} > 3$$

- 四阶矩有限的条件：$0 \leq \alpha^2 < \frac{1}{3}$

ARCH(1)模型的预测

$$\sigma^2_{t+1|t} = \omega + \alpha r_t^2$$

$$\sigma^2_{t+h|t} = E\left[r^2_{t+h} \middle| r_t, r_{t-1}, \dots\right]$$

$$= E\left[E\left[\sigma^2_{t+h|t+h-1}\varepsilon^2_{t+h} \middle| r_{t+h-1}, r_{t+h-2}, \dots\right] \middle| r_t, r_{t-1}, \dots\right]$$

$$= E\left[\sigma^2_{t+h|t+h-1}E\left[\varepsilon^2_{t+h} \middle| r_{t+h-1}, r_{t+h-2}, \dots\right] \middle| r_t, r_{t-1}, \dots\right]$$

$$= E\left[\sigma^2_{t+h|t+h-1} \middle| r_t, r_{t-1}, \dots\right] = E\left[\omega + \alpha r^2_{t+h-1} \middle| r_t, r_{t-1}, \dots\right]$$

$$= \omega + \alpha\sigma^2_{t+h-1|t}$$

ARCH模型的建模

步骤（1）：通过检验数据的序列相关性建立一个均值方程，如有必要，对收益率序列建立一个计量经济模型（如ARMA）来消除任何线形依赖；

步骤（2）：对均值方程的残差进行ARCH效应检验；

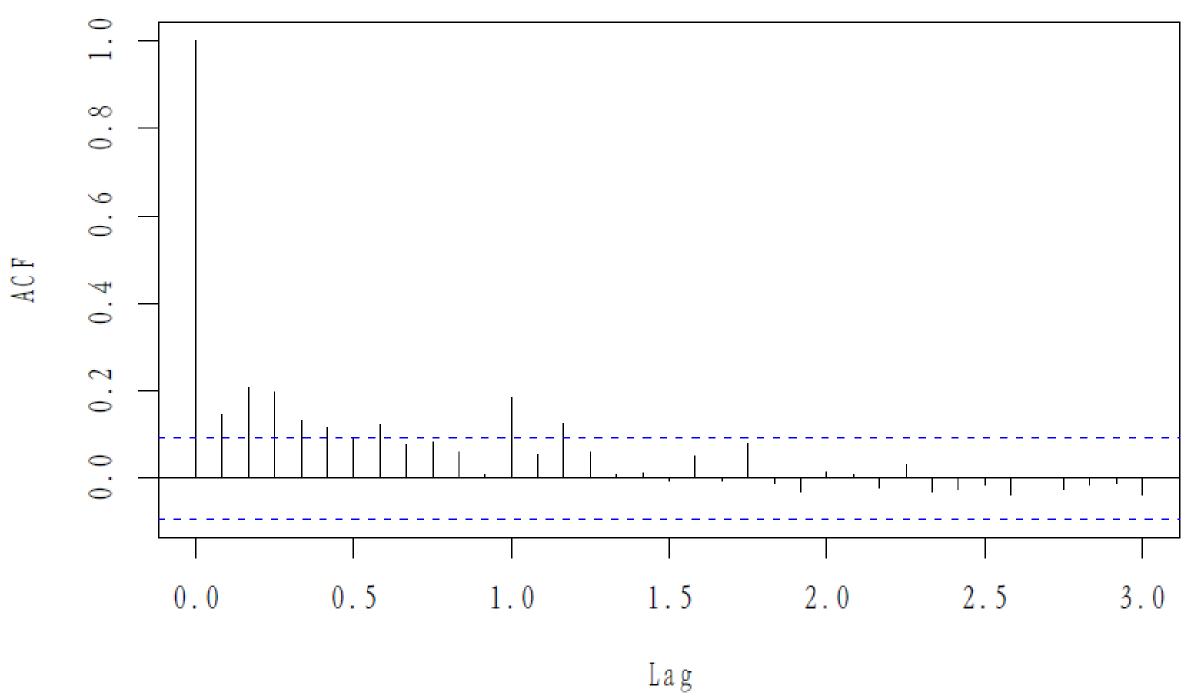
步骤（3）：如果具有ARCH效应，则建立波动率模型；

步骤（4）：检验拟合的模型，如有必要则进行改进。

例子

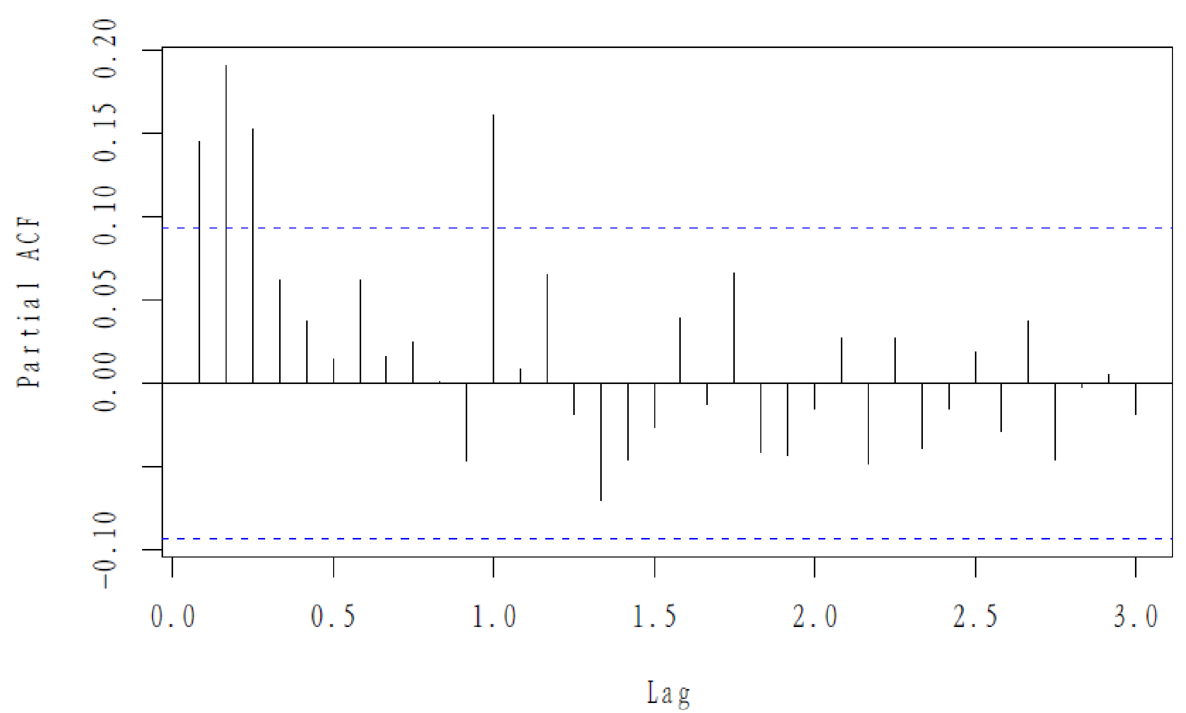
- 使用1973年到2009年Intel公司股票的月对数收益率数据。
- 序列的均值模型是常数均值。考虑减去均值之后的残差的平方的序列相关性，进行ARCH效应检验证明有ARCH 效应。

例子



Intel 股票数据中心化的残差平方的ACF

例子



Intel 股票建模中心化的残差平方的PACF

例子

考虑对原序列$\{Y_t\}$拟合均值+ARCH(3)模型：

$$Y_t = \mu + r_t$$
$$r_t = \sigma_{t|t-1}\varepsilon_t,$$
$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \alpha_3 r_{t-3}^2$$

```
mod1 <- garchFit( ~ 1 + garch(3,0),
data=c(ts.intel), trace=FALSE)
summary(mod1)
```

```
Coefficient(s):
       mu      omega     alpha1     alpha2     alpha3
0.012567   0.010421   0.232889   0.075069   0.051994
```

例子

alpha1	0.232889	0.111541	2.088	0.0368	*
alpha2	0.075069	0.047305	1.587	0.1125	
alpha3	0.051994	0.045139	1.152	0.2494	

由于只有α_1显著不为0，考虑拟合均值+ARCH(1)模型。

```
mod2 <- garchFit( ~ 1 + garch(1,0), data=c(ts.intel),
trace=FALSE)
summary(mod2)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
mu	0.013130	0.005318	2.469	0.01355	*
omega	0.011046	0.001196	9.238	< 2e-16	***
alpha1	0.374976	0.112620	3.330	0.00087	***