随机过程
Stochastic Processes

讲义5：马尔可夫链-2

目录

（课本第4章部分2）

5.1 马氏链中状态的分类

5.1马氏链中状态的分类
(课本4.3)

5.1.1 马氏链状态类别不同吗？

- 考虑：状态i是否有可能最终转移到状态j呢？

5.1.1 马氏链状态类别不同吗？

●例：$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$

➢ 状态0能最终转移到状态1和2吗？

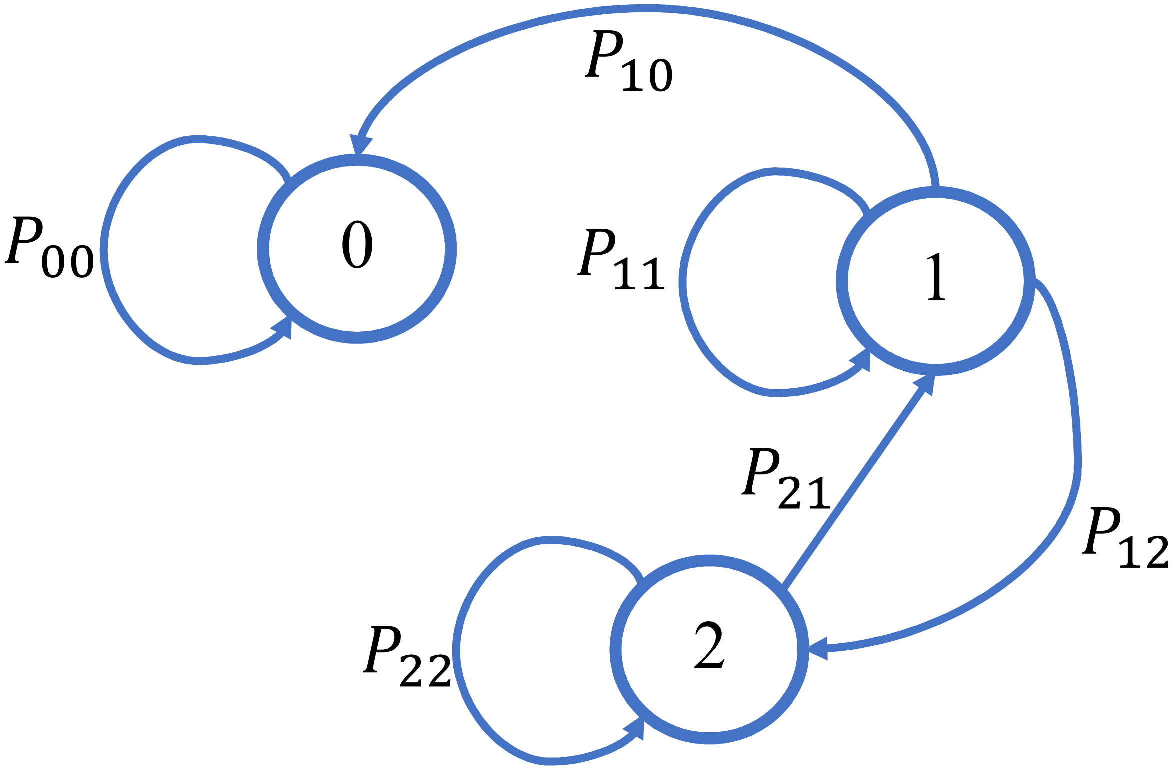
➢ 状态1能最终转移到状态0和2吗？

➢ 状态0可能最终转移到状态1和2吗？

●能否互相转移最终到达，实将状态分到了不同的状态类中！

5.1.1 状态类别不同吗？-马氏链图示

- 例：$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$



5.1.2 马氏链状态分类正式定义

- 可达性：如果$\exists n \geq 0$,有$P_{ij}^n > 0$,则称状态j是从状态i可达的
  - 即马氏链由状态i经过一或多步可能转移到状态j！

  - 可能会出现$P_{ij}^1 = 0$，$P_{ij}^2 > 0$吗？
    - 讲义4（课本例4.9）：两天下雨情况的例题
  - 状态j从i不可达，如何用概率式子描述呢？
    - $\forall n \geq 0$,有$P_{ij}^n = 0$
    - 不可达说明马氏链无法最终进入状态j：

$$P\{\text{最终进入状态}j|\text{初始状态}i\}$$
$$= P\{\cup_{n=0}^{\infty}\{X_n = j\}\,|X_0 = i\}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = j|X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n = 0$$

  - 可达性可由单向箭头来表示！$i \to j$

5.1.2 马氏链状态分类正式定义

- 互通性：互相可达的两个状态i和j称为互通的，表示为$i \leftrightarrow j$
  - 任意状态都与它自己是互通的
    - 注意，可达性定义中$n \geq 0, n = 0$的意思是？
      - $P_{ii}^{0} = P\{X_{?} = i | X_0 = i\} = 1$
  - 互通关系将马氏链的状态自然地划分为不同类别！
  - 这种类别划分很重要！
    - 同类的状态会分享一些同类的性质

5.1.3 互通关系的性质

- 互通关系有如下三个性质：
  - 1. 自返性：一切$i \geq 0$, 状态i与状态i互通
  - 2. 对称性：如果状态i与状态j互通，那么状态j与i互通
  - 3. 传递性：若状态i与状态j互通，且状态j与状态k互通，那么状态i与状态k互通

- 性质1、2得自互通的定义

5.1.3 互通关系的性质

- 互通关系性质：
  - 3. 传递性：若状态 i 与状态 j 互通，且状态 j 与状态 k 互通，那么状态i与状态k互通

- 证明性质3：
  - 条件1：$i \leftrightarrow j$，$\exists n_1 \geq 0$,有$P_{ij}^{n_1} > 0$；$\exists n_2 \geq 0$,有$P_{ji}^{n_2} > 0$
  - 条件2：$j \leftrightarrow k$，$\exists m_1 \geq 0$,有$P_{jk}^{m_1} > 0$；$\exists m_2 \geq 0$,有$P_{kj}^{m_2} > 0$
  - 要证明：$i \leftrightarrow k$
  - 先证：$i \rightarrow k$

$$P_{ik}^{n_1+m_1} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{n_1} P_{rk}^{m_1} \geq P_{ij}^{n_1} P_{jk}^{m_1} > 0$$

  - 再证：$k \rightarrow i$

$$P_{ki}^{m_2+n_2} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{kr}^{m_2} P_{ri}^{n_2} \geq P_{kj}^{m_2} P_{ji}^{n_2} > 0$$

  - 结论得证

5.1.4 互通关系确定的状态类

- 状态类：两个互通的状态称为在同一状态类
  - 性质1：同一状态类中的状态皆互通
  - 性质2：两个状态类或者完全重合，或者完全无交集，没有中间地带

  - 性质1&2说明：互通概念将状态空间分为许多分离的类
    - 互通关系确定状态类
    - 分离：状态类之间无交集

5.1.4 互通关系确定的状态类

- 证明 状态类性质1：同一状态类中的状态皆互通
  - 由互通性的传递性性质（性质3），易得
  - 要点：若$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，必有 $i \leftrightarrow k$
  - 若状态 i，k 在同一状态类，但不互通
    - 在同一状态类说明 i，k 必然皆与某同一状态互通，否则i，k 不在同一状态类，说明i，k 必然互通，推得矛盾

5.1.4 互通关系确定的状态类

- 证明 状态类性质2：两个状态类或完全重合，或完全无交集
  - 结合上述性质1与传递性，易得
  - 只需证明：若两个状态类有交集，则状态类即完全重合
    - 当两状态类有交集，不失一般性的假设交集中含状态k
    - 由性质1，状态k与两个状态类中的所有状态皆互通
    - 即，两个状态类中的状态皆与同一状态互通
    - 由传递性，所有状态皆互通，即所有状态在同一类

5.1.4 互通关系确定的状态类

- 不可约马氏链：当马氏链的状态都在一个类中，称这样的马氏链为不可约马氏链
    - 不可约指不可约减

5.1.4 互通关系确定的状态类–例子

- 例(4.14)：$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$
  - 该马氏链有几个类？可约吗？

- 步骤（课后任务）：
  - Step1：可达性如何？
  - Step2：互通性如何？
  - Step3：构建状态类？
  - Step4：可约吗？

  - 所有状态均在1个类，所以不可约

5.1.4 互通关系确定的状态类-例子

- 例(4.15)：$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0 & 0\\0.5 & 0.5 & 0 & 0\\0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
  - 该马氏链有几个类？可约吗？

- 步骤：
  - Step1：可达性如何？$0\rightarrow 1$， $1\rightarrow 0$，$2\rightarrow 0,1,3$， $3\rightarrow 3$
  - Step2：互通性如何？$0\leftrightarrow 1$
  - Step3：构建状态类？ $\{0,1\},\{2\},\{3\}$
  - Step4：可约吗？ 可约

5.1.5 常返态和暂态

一种重要的二分割的状态分类：

- 对任意状态i,以f_i记从状态i开始的过程，最终(ever)将再次进入状态i的概率;
- 常返态：状态i对应的$f_i = 1$
  - ➢ 马氏链从i出发，一定能回到i无数次（后面的结论1）
- 暂态：状态i对应的$f_i < 1$
  - ➢ 马氏链从i出发，只能有限次回到i，可能回不到i（后面的结论2）

5.1.5 常返态和暂态

- 怎么理解这个最终再次进入的概率f_i呢？
  - 首达概率：记$f_{ij}^{(n)}$为从i出发经n步后首次到达j的概率
    - 首达事件：$A_{nij} = \{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i\}$
    - $f_{ij}^{(n)} = P(A_{nij})$
      - 注意到：$f_{ij}^{(1)} = P_{ij}$

  - 理解：$f_i = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nii}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{nii}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$
    - 最终再次进入状态i的概率f_i,等于首达概率之和

5.1.5 常返态和暂态

- **结论1**：如果状态i是常返态，那么开始在状态i的过程将一再地(也即，无穷多次)进入状态i

证明：

➢ 由常返态定义：从状态i开始，过程将以概率1再次进入状态i.

➢ 由马氏性，当过程进入i时，常返性将重启，从而状态i最终将再度被访问.

➢ 上述过程会继续重复无穷多次；结论得证。

5.1.5 常返态和暂态

- 结论2：如果状态i是暂态，那么起始状态为状态i的过程总进入状态i的次数服从均值(期望)为有限值$1/(1-f_i)$的几何分布，且暂态i在过程中只能被访问有限多次。

证明：

- ➢ 由暂态定义，过程从i出发，再次进入状态i的概率为f_i，即有一个$1-f_i$的概率不再进入这个状态. ← 可视为伯努利试验
- ➢ 所以，起始状态为i的过程将恰好再进入状态i $n-1$次的概率等于$f_i^{n-1}(1-f_i), n \geq 1.$ ← 即重复伯努利试验，直到首次出现不再进入这个状态的结果
- ➢ 所以，进入状态i的次数n（注意从i出发的，算1次）服从几何分布。
- ➢ 且$\mathrm{P}(n=\infty)=0$，结论得证

5.1.5 常返态和暂态

- 结论3：状态i是常返态当且仅当由状态i开始的过程处于状态i的期望次数是无穷的。

证明：

- 结论1说明：状态i是常返态，说明从状态i开始的过程必然会无限次访问状态 i, 那次数的期望也是无穷
- 结论2说明：若由状态i开始的过程处于状态i的期望次数是无穷的，那么状态i必然不是暂态
  - 那么状态i必然是常返态
- 命题得证

5.1.5 常返态和暂态

- 结论4：有限(个)状态马氏链不可能所有状态都是暂态。

证明：

- 结论2说明：暂态i在过程中只能被访问有限多次
- 假设有限个状态有限(个)状态马氏链所有状态都是暂态
- 不失一般性的，假设共M个状态
  - 由结论2知，经过有限时间T_m后，状态$m = 1, \ldots, M$不再被访问
  - 所以，在有限时间$T = max\{T_1, \ldots T_M\}$后无状态可访问
  - 但马氏链必然可以无限进行，推得矛盾
- 结论得证

5.1.5 常返态和暂态

- 确定常返态和暂态的方法：
- **命题(4.1)**：
  - 1. 若$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$，状态$i$是常返态
  - 2. 若$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty$，状态$i$是暂态
- 注意：这里的P_{ii}^{n}是n步转移概率！与首达概率不同！

证明：

- 令$I_n = \begin{cases} 1, 若X_n = i \\ 0, 若X_n \neq i \end{cases}$，$\sum_{n=0}^{\infty} I_n$即过程处于状态$i$的次数
  - 有：$E[\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i | X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n}$
  - 说明$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$代表的是开始在状态$i$的过程处于状态$i$的期望数
  - 由结论3得到命题结论！

5.1.6 常返性和暂态性都是类性质

- 命题**(4.1)**的推论**(4.2)**：若状态i是常返态，而状态i与状态j互通，那么状态j是常返态
- 由上述推论可得到下列性质：
  - 性质1：常返态是类性质，即同一类内状态只要有一个是常返态，就说明该类内状态全是常返态
    - 同一类内状态皆互通，结合推论（4.2）得到结论
  - 性质2：暂态也是类性质，即同一类内的状态只要有一个是暂态，就说明该类内状态全是暂态
    - 由上述性质1，直接可得
  - 性质3：有限状态不可约的马氏链的所有状态都是常返态
    - 本讲义22页 结论4＋上述性质1

5.1.6 常返性和暂态性都是类性质

- 推论(4.2): 若状态i是常返态，且$i \leftrightarrow j$，则状态j是常返态

证明:

➢ 推出$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n} = \infty$即可

➢ 由$j \rightarrow i$，说明$\exists m \geq 0$,有$P_{ji}^{m} > 0$；由$i \rightarrow j$，说明$\exists k \geq 0$,有$P_{ij}^{k} > 0$

➢ 有：$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ij}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$

➢ 命题得证

➢ 直观理解：因为i是常返的，则从i出发的过程会无数次到达i，又因为$i \rightarrow j$，说明过程从i出发，有一定概率到j；所以过程无数次从i出发，每次有一定概率到j，说明过程也会无限次到j，状态j是常返

5.1.6 常返性和暂态性都是类性质

- 事实上推论**(4.2)**可以简化为：若状态i是常返态，而状态i与状态j连通(可达的另一种说法)，那么状态j是常返的，且与状态i互通
  - 上述直观理解：因为i是常返的，则从i出发的过程会无数次到达i，又因为$i \to j$，说明过程从i出发，有一定概率到j；所以过程无数次从i出发，每次有一定概率到j，说明过程也会无限次到j，说明状态j是常返的
  - 进一步的：因为状态 i 是常返的，所以在无限次到 j 后，又会无限次返回i，所以有$j \to i$
  - 推出了$i \leftrightarrow j$

- 上述推论**(4.2)**简化版蕴含的结论：
  - 说明从一个常返态的状态，不能连通到（可达）一个暂态的状态！

5.1.7 例子

- 例**4.16**：对具有如下转移概率矩阵的马氏链进行状态分类
- $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

  - 四个状态均互通（如何确定？请作为课后任务），处于同一状态类
  - 有限个状态的不可约马氏链
  - 所有状态均常返

5.1.7 例子

- 例**4.17**：对具有如下转移概率矩阵的马氏链进行状态分类
- $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$
- 步骤：
  - Step1：可达性如何？
  - Step2：互通性如何？
  - Step3：构建状态类？{0,1}; {2,3}; {4}
  - Step4：状态类属性？
    - {0,1}为常返态；{2,3}为常返态；{4}为暂态
    - 牢记：从该状态出发，是否会无限次返回该状态呢？

5.1.7 例子

- 例**4.18(随机游动):** 考虑马氏链，状态空间由整数 $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 组成，转移概率如下,其中 $p \in (0,1)$

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

注意到转移时，以概率p向右一步，以概率$1-p$向左一步，请问各状态是常返态吗？

- 注意到：各状态间接互通，所有状态在同一类，确定某状态的常返性即可
- 考虑状态0 即可，确定是否有 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \infty$
- 注意到： $P_{00}^{2n-1} = 0,\ n = 1,2, \ldots$
- 再有： $P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(p(1-p)\right)^n$
- 由斯特林近似：$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$； 可得：

$$P_{00}^{2n} \approx \frac{\left(4p(1-p)\right)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

5.1.7 例子

- 问题转化为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} < \infty \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4p(1-p)\right)^{n}}{\sqrt{\pi n}} < \infty$$

- 注意到：$4p(1-p) \leq 1$, 且$p = 1/2$时， $4p(1-p) = 1$
- 当$4p(1-p) = 1$时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4p(1-p)\right)^{n}}{\sqrt{\pi n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$
  - 要点：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}} < \infty$（即，收敛），当$p > 1$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}} = \infty$（即，发散），当$p \leq 1$
- 当$4p(1-p) < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4p(1-p)\right)^{n}}{\sqrt{\pi n}} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(4p(1-p)\right)^{n} < \infty$

- 所以$p = 0.5$时，即对称随机游动时，状态皆为常返态
- 当$p \neq 0.5$,状态皆为暂态

5.1.7 例子

- **例4.18续1:** 考虑高一维度的对称随机游动
  $P_{(i,j),(i+1,j)}=P_{(i,j),(i-1,j)}=P_{(i,j),(i,j+1)}=P_{(i,j),(i,j-1)}=0.25$
  即每次均等可能向前、后、左、右四个方向之一走一步。
  - 各状态是常返的吗?
  - 易注意到：各状态间接互通，所有状态在同一类，确定某状态的常返性即可
  - 考虑状态0即可，确定是否有 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n}=\infty$
  - 注意到： $P_{00}^{2n-1}=0,\ n=1,2,\ldots$
  - 再有： $P_{00}^{2n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$$

5.1.7 例子

- $P_{00}^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$
- 由斯特林近似得：

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \approx \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}e^{-2n}(2\pi)} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

- $P_{00}^{2n} \approx \frac{1}{\pi n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty$
- 得到状态0为常返态，因而所有的状态都是常返态

5.1.7 例子

- 例**4.18**续**2:**虽然对于一维二维对称随机游动都是常返的，但所有更高维度的对称随机游动都是暂态的。
  - 例如：三维对称随机游动每次转移时等可能的向前、向后、向左、向右、向上、向下，六个方向，等可能的随机选一个方向转移一步，这个随机游动的所有状态在一个类，所有状态均为暂态的
  - 这里推导，本课不做要求！

5.1.7 例子

愚人节不愚人 | 看似在“捉弄”你的数学小知识

复旦大数院帝国 2021-04-01 13:30

愚人节到啦！今天你被人捉弄了吗？

或许你见过很多以假乱真的套路，

而在数学的世界里，

有很多知识却偏偏似假实真。

今天，(善良的)数院小编就和大家分享一些神奇的数学小知识。愚人节，我们真的没骗你！

" Part1 "

假如生活欺骗了你

生活中的直觉与数学中的理论

你更愿意相信哪一个？

13:19 5G

复旦大数院帝国 >

1.3 将当地地图平铺在地上，总能找到一个点，这个点下面的地上的点正好就是它在地图上所表示的位置。

#不动点定理

1.4 地球上一定有一个地方没有风。

#偶数维球面上连续向量场一定有奇点

1.5 一个喝醉的酒鬼有百分之百的几率可以回家，而喝醉的小鸟则可能永远也回不了家。

#二维随机游走是常返的，然而三维随机游走是不常返的

1.6 在一个50人的班级里，出现生日相同事件的概率是97%。

1.7 某流行病人群感染比例为10万分之一，进行准确率95%的病毒检测，得到阳性结果，感染的概率只有约万分之二。

#贝叶斯统计

- 有错吗？

5.1.7 例子

- 例**4.18**续**3:** 我们可以对一维随机游动的例子，直接求解在对称/非对称情形下，最终(ever)能回到状态0 (起点)的概率
  - 留为作业3中的题目！