

# S E M I N A R A R B E I T

aus dem W-Seminar

*„Mathematik ist überall“*

Thema der Seminararbeit:

## **Analysis:**

Die Fouriertransformation ...

**Verfasser:** Felix Wager  
**Kursleiter:** StD Albert Thumann  
**Abgabetermin:** 11. November 2025

**Bewertung der schriftlichen Arbeit:** \_\_\_\_\_ Punkte in Worten: \_\_\_\_\_

**Bewertung der Präsentation:** \_\_\_\_\_ Punkte in Worten: \_\_\_\_\_

**Gesamtbewertung** ( $\frac{3 \cdot \text{schriftlich} + 1 \cdot \text{mündlich}}{2}$ ): \_\_\_\_\_ Punkte

**Abgabe bei der Oberstufenkoordinatorin am:** 11. November 2025

---

Unterschrift des Kursleiters

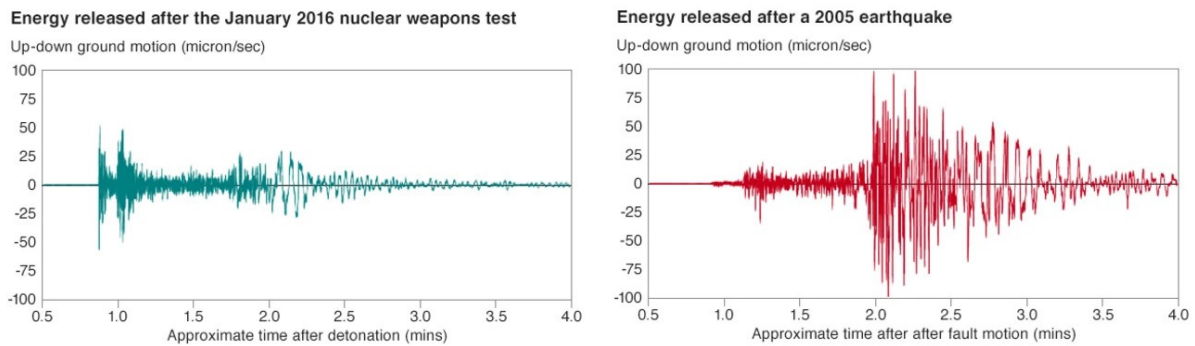
# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Mathematische Grundlagen der Fourier-Transformation</b>	<b>3</b>
3.1	Komplexe Zahlen und die Eulerformel . . . . .	4
3.2	Das Skalarprodukt von Funktionen und Orthonormalsysteme . . . . .	5
3.3	Die Fourierreihe . . . . .	5
3.4	Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation . . . . .	7
3.5	Die Fouriertransformation in der Praxis: Die DFT . . . . .	8
3.6	Die Fouriertransformation in der Praxis: Die FFT . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Von der Theorie zur Praxis: Eigenentwicklung eines Audioanalyzers mit C++</b>	<b>10</b>
4.1	Eigenständige Herleitung der DFT . . . . .	11
4.2	Erweiterung auf die FFT . . . . .	15
4.3	Implementierung der FFT auf der GPU . . . . .	18
4.4	Vergleich der implementierten FFT-Varianten . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Mehrdimensionale FFTs und die Anwendung an einem Röntgenbild</b>	<b>22</b>
5.1	Die mehrdimensionale Fouriertransformation . . . . .	22
5.2	Das Moiré-Muster . . . . .	22
5.3	Entwicklung einer eigenen 2D-FFT mit Python . . . . .	24
5.4	Filterung von Moiré-Mustern in Röntgenaufnahmen . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>28</b>
6.1	Eigene Beweise . . . . .	28
6.2	Zusätzliche Quellcode Ausschnitte . . . . .	31

# 1 Abstract

## 2 Einleitung

10.10.1955, Mitten im kalten Krieg, das Datum an welchem der Limited Test Ban Treaty, kurz LTBT, in Kraft trat. Inhalt dieses Vertrags ist das Verbot von Kernwaffenversuchen in der Atmosphäre, im Weltraum und unter Wasser. Motiviert durch die alarmierende Radioaktivität in der Erdatmosphäre, wurde dieser Vertrag zwischen den Atommächten USA, Großbritannien und der Sowjetunion abgeschlossen. Durch den Test einer Atomwaffe, wird bei der Explosion so viel Energie freigesetzt, dass es zu einer Bodenbewegung kommt, welche man auch in größeren Distanzen bezüglich des Messorts feststellen kann. Diese Bodenbewegungen dienten zur damaligen Zeit zur Überprüfung, ob der zuvor genannte Vertrag eingehalten wird. Wenn man jedoch die Bodenbewegung zwischen einer Atombombe und einem Erdbeben vergleicht, fällt folgendes auf:



Es fällt auf, dass die beiden Ereignisse nur durch die Erzeugte Schwingung des Bodens fast nicht zu unterscheiden sind, da man nicht wissen kann, wie stark eine Atomwaffe oder ein Erdbeben in der Realität ist. Dass, was eine Bombe von restlichen Ereignissen charakteristisch abgrenzt, sind plötzliche hohe Frequenzen, aufgrund des Impulses der Explosion. Deshalb wurde hier schon ein Algorithmus verwendet, welcher die Anteile von Frequenzen an einem periodischen Signal anzeigt: Die Fourier-Transformation. Diese geht auf Jean-Baptiste Joseph Fourier zurück, der sie Anfang des 19. Jahrhunderts im Rahmen seiner Untersuchungen zur Wärmeleitung entwickelte. Doch nicht nur zur Eindämmung von Radioaktivität ist die Fourier-Transformation unerlässlich, sie findet auch heute noch ein sehr großes Spektrum an Verwendungen. Deswegen möchte ich in dieser Arbeit nicht nur zeigen, wie die Fourier-Transformation funktioniert, sondern auch, wie sie in vielen verschiedenen Bereichen angewendet wird und so auch heute noch eine zentrale Rolle sowohl im Alltag, als auch in der Wissenschaft und Technik spielt.

## 3 Mathematische Grundlagen der Fourier-Transformation

Doch um die Fourier-Transformation zu verstehen, sind einige mathematische Grundlagen notwendig. Deswegen werde ich in diesem Kapitel die wichtigsten Grundlagen erklären, damit man die Fourier-Transformation auch wirklich nachvollziehen kann.

### 3.1 Komplexe Zahlen und die Eulerformel

Damit man sich die Arbeit mit Fourier-Transformationen, Reihen und sonstigem erheblich erleichtert, ist es sehr sinnvoll, mit komplexen Zahlen zu arbeiten. Doch was sind komplexe Zahlen? Komplexe Zahlen sind prinzipiell nichts anderes, als eine Erweiterung der Menge der reellen Zahlen, welche es ermöglicht, die Wurzel von negativen Zahlen zu ziehen. Dafür wird die Wurzel von  $-1$  als die imaginäre Einheit  $i$  definiert. Mathematisch korrekt sieht das wie folgt aus:

$$i^2 := -1$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit dem Symbol  $\mathbb{C}$  abgekürzt. Eine typische komplexe Zahl hat in der algebraischen Schreibweise die Form:

$$z = a + ib \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$a$  ist hierbei der Realteil  $\Re(z)$  und  $b$  der Imaginärteil  $\Im(z)$  von  $z$ .

Um mit komplexen Zahlen bei Fourier Reihen zu arbeiten, benötigt man auch ein paar Rechenoperationen. Die wichtigsten beiden sind hier der Betrag und das komplex Konjugierte einer komplexen Zahl. Eine komplexe Zahl lässt sich auch als Vektor im  $\mathbb{R}^2$  betrachten, so ist dann der Betrag als euklidische Norm dieses Vektors definiert.

$$|z| := \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

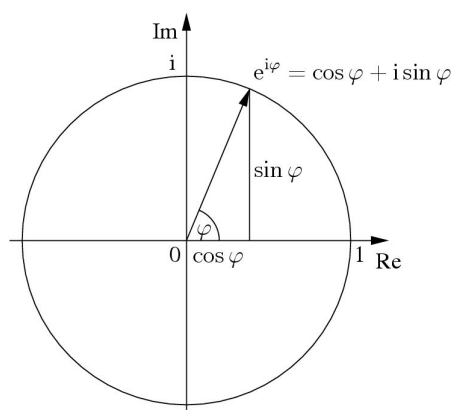
Bedeutet in einem Koordinatensystem, bei dem der Real- und Imaginärteil einer Zahl auf den x- und y-Achsen festgehalten wird, ist der Betrag die Länge vom Ursprung bis zum Punkt im Koordinatensystem dieser Zahl. Und das komplex Konjugierte einer Zahl ist eine Abbildung, welche lediglich den Imaginärteil mit  $-1$  multipliziert:

$$\bar{\phantom{x}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy$$

Mithilfe von komplexen Zahlen und den Taylorreihen von Sinus, Cosinus und der Exponentialfunktion  $e^x$  kann man nun die Eulerformel herleiten.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Wenn man den Betrag dieses Ausdrucks bildet, so fällt auf, dass hier das Ergebnis, unabhängig von  $x$ , 1 ist. Dies bedeutet, dass  $e^{ix}$  als ein gegen den Uhrzeigersinn rotierender Vektor, für steigende Werte für  $x$ , gesehen werden kann. Im vorher genannten Koordinatensystem, welches man auch die Gaußsche Zahlenebene nennt, sieht das so aus:



### 3.2 Das Skalarprodukt von Funktionen und Orthonormalsysteme

Des Weiteren spielen Orthonormalsysteme eine große Rolle, wenn man sich mit der Fourier-Analyse beschäftigt. Allgemein lässt sich sagen, dass ein Orthonormalsystem eine Menge von Vektoren oder Funktionen, aus einem Vektorraum mit Skalarprodukt, sind, welche sowohl orthogonal zueinander, als auch normiert zu sich selbst sind. Orthogonal sind sie, wenn das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Vektoren 0 ergibt, und normiert, wenn das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst 1 ergibt. Für alle Vektoren  $v_n$  im  $\mathbb{R}^n$  muss also Folgendes gelten, damit die Menge der Vektoren ein Orthonormalsystem bildet:

$$1. \text{ Orthogonalität: } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$2. \text{ Normiertheit: } \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \|v_i\|^2 = 1 \quad \text{mit } i = j$$

$$\left( \text{Skalarprodukt: } \langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i * w_i \right)$$

Hier sieht man auch, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, das gleiche ist wie die quadrierte euklidische Norm des Vektors, wodurch der Begriff der Normiertheit anschaulicher wird. Wie schon erwähnt lassen sich diese Eigenschaften auch auf Funktionen anwenden. Hierfür definiert man die Normiertheit und die Orthogonalität auch, exakt gleich wie bei Vektoren, über das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt für zwei Funktionen ist wie folgt definiert:

$$\langle v, w \rangle := \int_a^b v(x) * w(x) dx \quad \text{für } v, w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Falls eine Menge von Funktionen Orthogonalität und Normiertheit erfüllt, ist diese Menge auch ein Orthogonalsystem. Anschaulich kann man sich die Funktionen  $v(x)$  und  $w(x)$  noch als zwei Vektoren mit unendlich vielen Dimensionen vorstellen, wobei der  $x$ -Wert angibt, in welcher Dimension man sich befindet. Da das Skalarprodukt die jeweiligen Dimensionen von Vektoren multipliziert und diese schließlich aufsummiert, ergibt es Sinn, dass man bei Funktionen ähnlich vorgeht. So lässt sich also die Erweiterung der Summe zum Integral erklären. Die Formel für die Norm von Funktionen  $\left( \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \right)$  ergibt sich, wenn man das für Funktionen definierte Skalarprodukt ähnlich wie bei Vektoren auf die Funktion selbst anwendet. Im komplexen Fall wird das Skalarprodukt leicht angepasst, indem der zweite Faktor komplex konjugiert wird:

$$\langle v, w \rangle := \int_a^b v(x) * \overline{w(x)} dx \quad \text{für } v, w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

### 3.3 Die Fourierreihe

Der erste große Schritt, um die Fourier Transformation herzuleiten, ist die Fourier-Reihe. Eine Reihe selbst ist in der Mathematik ein Begriff für eine unendliche Summe von Termen. Die Fourier-Reihe ist hierbei eine besondere Reihe. Ihr Sinn ist es, periodische Funktionen mithilfe von Sinus- und Kosinustermen zu approximieren. Joseph Fourier hat in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur“ schließlich auch bewiesen, dass jede periodische Funktion auf diese Weise dargestellt werden kann. Die Approximation selbst

geschieht durch trigonometrische Polynome, mit welchen man später die Fourierreihe einer Funktion bildet. Ein trigonometrisches Polynom ist hier eine Funktion der Form:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Ziel ist es nun, die Faktoren  $a_k$  und  $b_k$  in Abhängigkeit zur anzunähernden Funktion zu bestimmen. Denn durch die Zählvariable  $k$ , welche die Periodenlänge der Sinus- und Kosinusterme bestimmt, kann man durch die Faktoren  $a_k$  und  $b_k$  festlegen, wie dominant die Anteile der Sinus- und Kosinusterme, mit der jeweiligen Periodenlänge, in der zu approximierende Funktion sind. Um die Berechnung der Faktoren kompakter zu gestalten, kann man mit dem Zusammenhang  $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$  und  $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ , einer Umstellung der Eulerformel, nun das trigonometrische Polynom zu dem komplexen trigonometrischen Polynom zusammenfassen:

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{für geeignete } c_k \in \mathbb{C}$$

Um jetzt den komplexen Faktor  $c_k$ , zunächst für  $2\pi$ -periodische Funktionen, zu berechnen verwendet man ein Orthonormalsystem, welches aus den Funktionen  $\phi_n(x)$  besteht:

$$\phi_n(x) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

Dass die Menge an Funktionen  $\phi_n$  ein Orthonormalsystem ist, habe ich im Anhang gezeigt (Beweis A. 1). Um endlich  $c_k$  zu berechnen, setzt man zunächst die zu approximierende Funktion  $f$ , mit der Periodizität  $2\pi$ , mit dem trigonometrischen Polynom gleich und schränkt sie zudem ein:

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k(x)$$

Anschließend bildet man das Skalarprodukt von  $f$  und  $\phi_m$ , was möglich ist, da  $f$  auf dem Definitionsbereich von  $f$  und  $\phi_m$  gleich ist.

$$\langle f, \phi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k(x) \overline{\phi_m(x)} dx$$

Da Integral und Summe beide linear sind, darf man die Summe mit dem Integral vertauschen. Zudem hängt  $c_k$  nicht von  $x$  ab, wodurch der Faktor  $c_k$  für das Integral eine Konstante ist. Nach einer Abwandlung des Distributivgesetzes darf er somit herausgezogen werden. Man erhält also diesen Ausdruck:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \overline{\phi_m(x)} dx$$

Aufgrund dessen, dass die Menge der Funktionen  $\phi_m$  ein Orthonormalsystem ist, ist jeder Summand, außer  $k = m$ , 0. Durch die Normiertheit des Orthonormalsystems bleibt übrig:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

Jetzt ist es möglich, mit dieser Formel und dem komplexen trigonometrischen Polynom eine  $2\pi$ -periodische Funktion zu approximieren. Jedoch wäre es hilfreich, wenn dies für alle Perioden möglich wären. Um auch Funktionen mit einer Periodizität von  $2L$  annähern zu können, muss man den Faktor  $c_k$  und das komplexe trigonometrische Polynom auf eine Periodizität von  $2L$  ausweiten. Damit das trigonometrische Polynom  $2L$  periodisch wird, muss Folgendes gelten:

$$e^{i\omega x} = e^{i\omega(x+2L)}$$

$\omega$  gilt es dabei herauszufinden, damit das trigonometrische Polynom  $2L$  periodisch wird:

$$e^{i\omega x} = e^{i\omega(x+2L)} \Leftrightarrow e^{i\omega 2L} = 1 \Leftrightarrow \omega 2L = 2\pi k \Leftrightarrow \omega_k = \frac{k\pi}{L}$$

Das neue trigonometrische Polynom sieht also so aus:

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega_k x} \Leftrightarrow \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x}$$

Um  $c_k$  zu berechnen, nimmt man sich eine  $2L$ -periodische Funktion  $f$  und definiert sich eine  $2\pi$ -periodische Hilfsfunktion  $g$  in Abhängigkeit von  $f$  wie folgt:

$$g(t) := f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$$

Da  $g$  eine  $2\pi$  periodische Funktion ist, kann man mit der hergeleiteten Formel  $c_k$  von  $g$  berechnen. Um die Formel für  $2L$  periodische Funktionen zu erhalten, ist das Ziel die Formel über  $g$  auf  $f$  auszuweiten. Das funktioniert über die Substitutionsregel. Um sie anzuwenden, fügen wir die Ableitung der inneren Funktion von  $f$ , also  $\frac{L}{\pi}$  in Form einer 1 ein und erhalten die Formel für  $c_k$ , für die Periodizität  $2L$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{2\pi} * \frac{\pi}{L} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{L}{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) e^{-i\omega_k t} dt$$

Wendet man jetzt die Substitutionsregel an, erhält man:

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_k x} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi}{L} x} dx$$

### 3.4 Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation

Die Fourierreihe erlaubt es uns, periodische Signale als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen oder komplexen Exponentialfunktionen darzustellen. Doch viele Signale in der Praxis sind nichtperiodisch. Um auch diese Signale in ihre Frequenzanteile zerlegen zu können, verallgemeinern wir das Konzept der Fourierreihe zur Fouriertransformation. Mit der Fouriertransformation werden wir so eine Funktion erhalten, welche uns sagen wird, wie groß der Anteil einer Frequenz oder Periodenlänge in einem Signal ist. Dazu nehmen wir die Fourierreihe einer Funktion  $f$  mit der Periode  $2L$  und der Frequenz  $\omega_k$ :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}, \quad c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_k x} dx$$

Dazu definieren wir eine Hilfsfunktion  $F(\xi)$ :

$$F : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(\xi) = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi x} dx$$

damit gilt

$$c_k = \frac{1}{2L} F(\omega_k)$$

Setzt man den neu gewonnenen Ausdruck für  $c_k$  in die Fourierreihe ein, so erhält man

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x}$$

Anschließend bildet man  $\Delta\omega$  aus  $\omega_k$ :

$$\omega_k = k \frac{\pi}{L} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{1}{2L} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Und setzt die Gleichung auch in die Fourierreihe ein:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k x} \Delta\omega$$

Dies ist eine Riemann-Summe. Lässt man nun  $L \rightarrow \infty$  laufen, erhält man ein Integral, welches die inverse Fouriertransformation ist:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k x} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Die Funktion  $F(\omega)$  selbst ist die Fouriertransformation von  $f$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Man kann das Integral in der Fouriertransformation am besten verstehen, wenn man es als eine Art Durchschnitt betrachtet. Ähnlich wie beim Berechnen eines Mittelwerts summiert das Integral nicht nur eine endliche Anzahl von Werten auf, sondern unendlich viele, unendlich kleine Beiträge von  $f(x)$ . Im Integral steht dabei das Produkt  $f(x) \cdot e^{-i\omega x}$ . Dieses Produkt misst, wie stark die Frequenz  $\omega$  in  $f(x)$  enthalten ist:

- Ist der Anteil der Frequenz  $\omega$  in  $f(x)$  hoch, dann verstärkt  $e^{i\omega_k x}$  den Wert der Funktion  $f(x)$  im Integral konstruktiv und  $F(\omega)$  wird groß.
- Enthält  $f(x)$  diese Frequenz nicht, heben sich die positiven und negativen Anteile im Integral weitgehend auf und  $F(\omega)$  wird klein.

So zeigt die Fouriertransformation, wie groß der Anteil jeder einzelnen Frequenz  $\omega$  in der Funktion  $f$  ist.

### 3.5 Die Fouriertransformation in der Praxis: Die DFT

In der Praxis arbeitet man selten mit kontinuierlichen Funktionen, sondern mit diskreten Messwerten, zum Beispiel bei Audiosignalen oder digitalen Bildern. Um diese Signale in ihre Frequenzanteile zu zerlegen, verwendet man die diskrete Fouriertransformation (DFT). Formell lässt sich die DFT für eine endliche Folge von  $N$  Messwerten

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$$



durch die folgende Formel darstellen:

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{kj}{N}} \quad \text{mit } k \in [0, N-1]$$

Anzumerken ist aber noch, dass es eine Besonderheit gibt. Wenn das Eingangssignal reell ist, liefert die DFT zwar  $N$  Koeffizienten, jedoch sind die Frequenzen oberhalb von  $N/2$  wegen des Nyquist-Theorems lediglich Spiegelungen der tieferen Frequenzen und enthalten keine neuen Informationen. Warum das so ist, werde ich hier nicht näher eingehen. Wie man die Formel für die DFT herleitet, erkläre ich im nächsten Kapitel.

### 3.6 Die Fouriertransformation in der Praxis: Die FFT

Obwohl die DFT so in der Praxis anwendbar ist, ist sie heutzutage in fast keinem Programm oder Algorithmus zu finden. Denn will man eine Funktion oder ein Signal mit  $N$  Werten komplett transformieren, so sind für  $N$  unterschiedliche Frequenzen jeweils die entsprechenden Werte gemäß der oben angegebenen Formel zu bestimmen. Also sind es insgesamt  $N^2$  Berechnungen, die man durchführen muss. In der Informatik spricht man für den Abschnitt der DFT in einem Programm von einer Laufzeit von  $O(N^2)$ .

Im Jahre 1965 entdeckten James W. Cooley und John W. Tukey eine neue Art, die DFT zu berechnen, was die Laufzeit auf  $O(N \log N)$  verringerte. Somit konnte man die DFT erheblich schneller berechnen. Daher kommt auch der Name FFT für den neuen Algorithmus, was für Fast Fourier Transform, also schnelle Fouriertransformation, steht. Um die Umformung gut zu sehen, kann man die diskrete Fouriertransformation etwas umschreiben. Dafür definiere ich die Folge  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt:

$$\omega_n := e^{-2\pi i/n}$$

Schreibt man jetzt die Werte der Ausgangsfunktion  $f$  als Vektor, kann man aufgrund der Struktur der Matrixmultiplikation, diesen Vektor mit einer besonderen Matrix multiplizieren und erhält das Ergebnis der Transformation auch in Form eines Vektors derselben Länge, mit den Werten  $\hat{f}$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_n^{0 \cdot 0} & \omega_n^{0 \cdot 1} & \cdots & \omega_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \omega_n^{1 \cdot 0} & \omega_n^{1 \cdot 1} & \cdots & \omega_n^{1 \cdot (n-1)} \\ \omega_n^{2 \cdot 0} & \omega_n^{2 \cdot 1} & \cdots & \omega_n^{2 \cdot (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot 0} & \omega_n^{(n-1) \cdot 1} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Jeder Eintrag im Ergebnisvektor entsteht, indem man die Zahlen in der Zeile der Matrix mit den Zahlen im Vektor multipliziert und die Produkte zusammenzählt. Deshalb muss jeder Eintrag der Matrix aus  $\omega_n$  noch mit  $k$ , der die Frequenz bestimmt, und der Zählvariable  $j$ , die über die Zeilen läuft, als Exponent potenziert werden.

Was Cooley und Tukey herausgefunden haben, ist, dass man diesen Ausdruck so umschreiben kann:

$$\hat{f} = F_N \cdot f = \begin{bmatrix} I_{N/2} & D_{N/2} \\ I_{N/2} & -D_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{N/2} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{gerade} \\ f_{ungerade} \end{bmatrix}$$

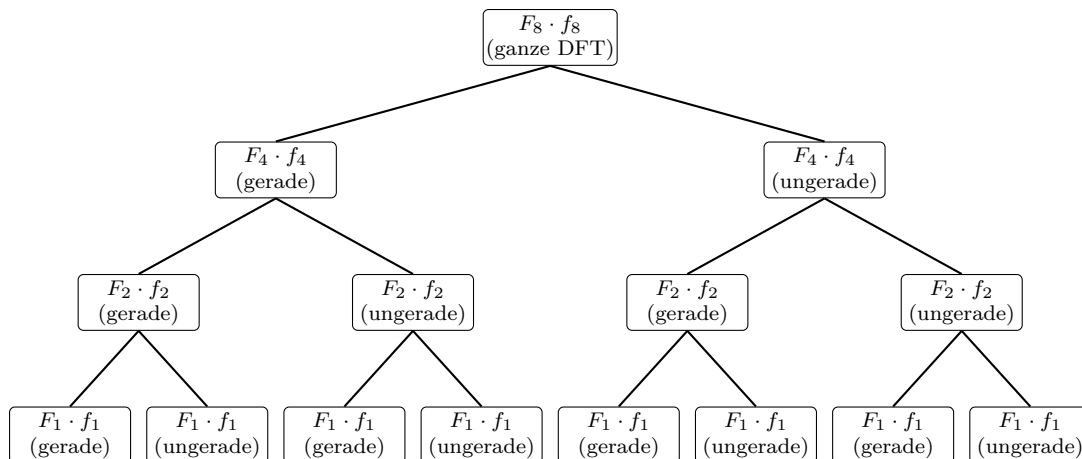
$F$  ist die DFT-Matrix, mit der der ursprüngliche Wertevektor  $f$  multipliziert wurde.  $I_N$  ist die Einheitsmatrix: Alle Einträge außerhalb der Diagonale sind 0, auf der Diagonale

stehen 1, von links oben nach rechts unten.  $D_N$  ist ebenfalls eine Diagonalmatrix wie  $I_N$ , jedoch bestehen die Diagonaleinträge aus  $\omega_N^k$ , wobei  $k$  von 0 bis  $N - 1$  läuft. Der Index der Matrizen gibt jeweils die Anzahl der Zeilen und Spalten an.  $f$  wurde den Indizes nach aufgeteilt.

Wichtig ist: Diese Formel funktioniert nur, wenn die Anzahl der Werte der Ausgangsfunktion eine Zweierpotenz ist. Zumal das genau der Grund ist, warum die Umstellung es überhaupt schafft, die Laufzeit so drastisch zu reduzieren. Das, was diese Formel ausmacht, sind eigentlich nur die letzten beiden Faktoren des Produkts. Denn multipliziert man diese Faktoren miteinander, dann fällt auf, dass man diesen Ausdruck erhält:

$$\begin{bmatrix} F_{N/2} \cdot f_{\text{gerade}} & 0 \\ 0 & F_{N/2} \cdot f_{\text{ungerade}} \end{bmatrix}$$

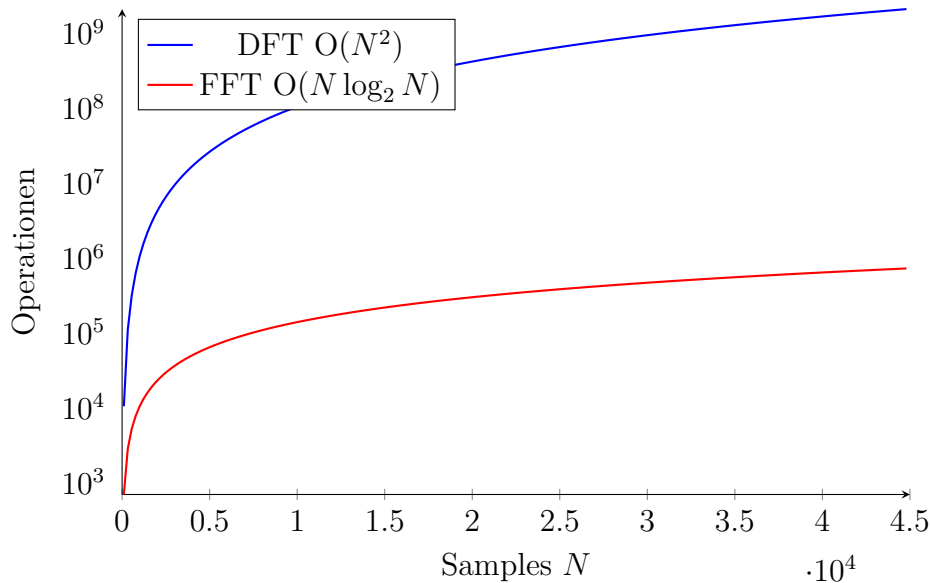
Auffällig ist jetzt, dass man zweimal das Anfangsproblem, in halber Größe erhält. Man könnte zunächst denken, dies mache keinen Unterschied, aber dadurch, dass die Berechnung der kompletten Matrix, einen Aufwand von  $O(N^2)$  erfordert, reduziert man mit jeder Anwendung der Formel die Laufzeit für die Berechnung von  $F_{N/2} \cdot f$  auf  $O((N/2)^2)$ . Wendet man diese Formel rekursiv, also immer wieder auf sich selbst, an, bis man Matrizen mit einer Größe von 1 oder 2 erhält, so schafft man es, durch ein zeitsparendes Zusammenfügen, die Laufzeit der Berechnung auf  $O(N \log N)$  zu kürzen. Die Struktur einer FFT mit 8 Werten, kann man auch so darstellen:



In meinem Programm, zu welchem ich im nächsten Kapitel komme, mit welchem ich eine Audiospur aufnehme und verarbeite, nutze ich auf meinem Gerät eine Samplerate von 44800. Bedeutet ich nehme pro Sekunde 44800 Datenpunkte auf. Wenn man nun die Laufzeit einer DFT und einer FFT grob skizziert, sieht man, dass bei der Verarbeitung eines Signals, mit nur einer Sekunde, bei meinem Programm die DFT mehr als doppelt so lang dauert, wie die FFT.

## 4 Von der Theorie zur Praxis: Eigenentwicklung eines Audioanalyzers mit C++

Nachdem im vorherigen Kapitel die mathematischen Grundlagen der Fouriertransformation und ihrer diskreten Varianten vorgestellt wurden, möchte ich nun zeigen, wie ich



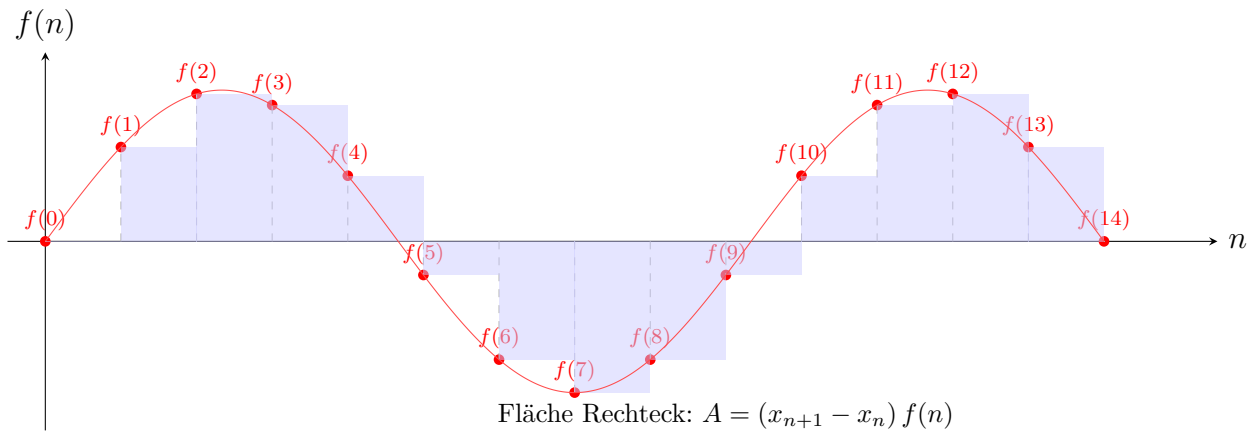
diese Konzepte praktisch umgesetzt habe. Angefangen hat alles mit der Idee, einen eigenen Audioanalyzer zu programmieren. Dieser soll live ein Audiosignal aufnehmen, dieses visualisieren und anschließend die Frequenzanteile, die in dem Signal enthalten sind, anzeigen. Somit könnte ich mithilfe meines eigenen Programms Musik genauer unter die Lupe nehmen, die Funktion der Fouriertransformation so manipulieren, dass Rauschen unterdrückt wird, Töne von Tieren oder Instrumenten erkennen oder auch Raumresonanzen sichtbar machen. Als ich mit dem Programmieren begann und alles zur Liveaufnahme eines Audiosignals implementiert hatte, stieß ich auf eine erste Schwierigkeit. Mein Problem war der Übergang von der Theorie der Fouriertransformation zur Praxis. Denn ich hatte ein Signal in Form einer Liste von Zahlen, wodurch die normale Formel für die Fouriertransformation durch das Integral nicht anwendbar war. Da ich zum damaligen Zeitpunkt die diskrete Fouriertransformation nicht kannte, versuchte ich eigenständig eine Approximation der Formel für endliche Werte zu finden. Im folgenden Abschnitt zeige ich also, wie ich eigenständig die DFT mit einer minimalen Abweichung hergeleitet habe.

## 4.1 Eigenständige Herleitung der DFT

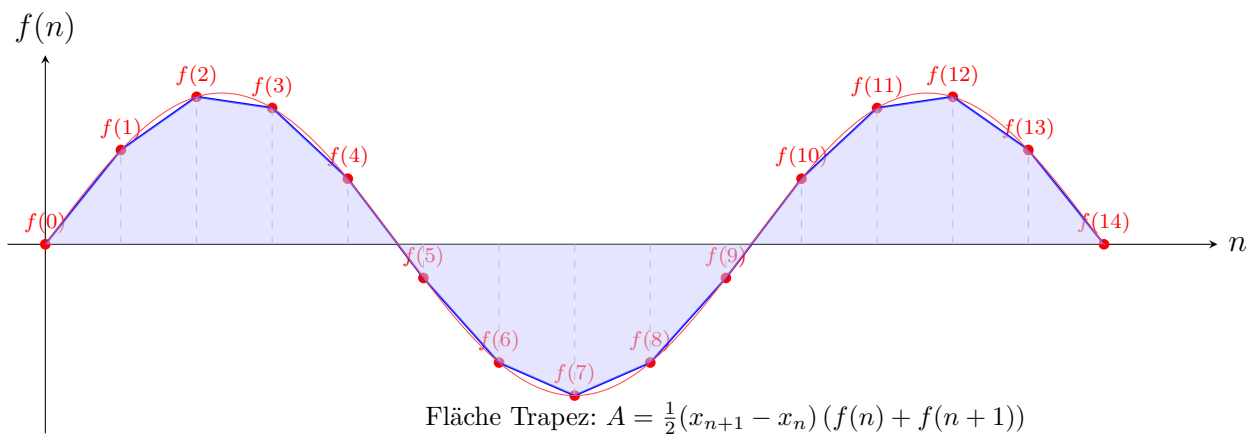
Da ich, wie zuvor erwähnt, die DFT noch nicht kannte, versuchte ich zunächst aus den Punkten, also die Daten der Audioaufnahme, eine Funktion zu erstellen, auf welche die Formel anwendbar ist. Ein Hauptkriterium, um die Formel zu realisieren, ist, dass die Funktion integrierbar ist. Natürlich kann man ausgehend von den Punkten viele Rechtecke nutzen und diese als Approximation für die Fläche des Integrals zu benutzen. Das sähe so aus:

Das Bild zeigt, wie man eine gekrümmte Fläche (die Sinuskurve) durch eine Abfolge von Rechtecken annähert. Man benutzt dazu die Funktionswerte an den ganzzahligen Stellen – also so, als würde man die Kurve in kleine Treppenstufen „übersetzen“.

Wenn man eine große Menge an Datenpunkten hat und diese sehr nah aneinander liegen, dann ist diese Methode eine gute Approximation des tatsächlichen Integrals. Trotzdem habe ich mich dazu entschieden, die Punkte durch eine jeweilige stetige Fortsetzung zu verbinden und dann das Integral davon zu bilden, um die Approximation noch etwas genauer zu gestalten. Meine stetige Fortsetzung besteht aus geraden Linien, welche die



Punkte zu einer stetigen Funktion am Ende verbinden. Bei wenigen Punkten wie in meinem Beispiel ist der Unterschied zwischen den zwei Approximationen gut zu erkennen.



Die Funktionenfolge, die ich dabei als Fortsetzung für die jeweiligen Punkte genutzt habe, ist folgende:

$$(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0} = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1 - n} \cdot x + \frac{nf(n+1) - (n+1)f(n)}{n+1 - n} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Die Nenner der beiden Brüche fallen weg, doch ich habe sie hier dagelassen, damit man sieht, dass die Steigung beispielsweise der Differenzenquotient zweier Punkte ist.

Um auch sicherzustellen, dass meine resultierende Funktion wirklich stetig ist, habe ich es bewiesen. Da man es bei einem Punkt jeweils von zwei Seiten zeigen muss, dass die Funktion dort stetig ist, habe ich die Stetigkeit auf zwei Arten bewiesen. Einmal über das Epsilon-Delta-Kriterium und einmal über die Folgenstetigkeit. Die Beweise findet man beide im Anhang (LÜCKE). Da ich die Funktion  $a(x)$  bestehend aus den Daten und der Funktionenfolge  $g_n$  aber noch mit dem Faktor  $e^{-i\omega x}$  multiplizieren muss, habe ich dazu noch bewiesen, dass dieser Ausdruck stetig ist. Dazu musste ich nur beweisen, dass das

Produkt aus zwei stetigen Funktionen auch stetig ist. Denn es gibt einen Satz aus der komplexen Analysis, welcher besagt, dass eine komplexe Funktion genau dann stetig ist, wenn ihre Real- und Imaginärteile stetig sind. Und da der Sinus und Kosinus stetige Funktionen sind, ist lediglich zu zeigen, dass das Produkt zweier stetiger Funktionen stetig ist (Anhang LÜCKE). Bedeutet: Man könnte theoretisch mit einem Stift die Funktion nachzeichnen, ohne diesen abzusetzen.

Anschließend müsste man noch beweisen, dass man die Funktion  $a(x) \cdot e^{-i\omega x}$  auf die gleiche Weise fortsetzen kann wie  $a(x)$ , um so die Funktion  $z(x)$  zu erhalten. Das habe ich hier, aber nicht gemacht, da der Beweis sehr ähnlich zum Stetigkeitsbeweis zuvor ist. Anschließend bleibt noch die tatsächliche Fläche, also das Integral, der neu gebildeten Funktion  $z(x)$  zu berechnen. Dazu habe ich zunächst gezeigt, dass die Funktion  $z(x)$ , eine Zusammensetzung aus  $a(x)$  und  $e^{-i\omega x}$ , eine Regelfunktion ist und so auch integrierbar ist (Anhang, Eigene Beweise, Theorem 9.5). Die Berechnung des Integrals von  $z(x)$  bin ich wie folgt angegangen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} z(x) dx$$

Einschränkung der Integralgrenzen auf den Definitionsbereich von  $z(x)$ :

$$\begin{aligned} &= \int_{-N}^N z(x) dx = \int_0^N z(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_j) (z(j) + z(j+1)) \quad y := (x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{1}{2} y \sum_{j=0}^{N-1} z(j) + z(j+1) \quad \text{in unserem Fall ist } y, \text{ unabhängig von } j, \text{ gleich } 1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} z(j) + z(j+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( z(0) + z(N) + \sum_{j=1}^{N-1} 2 \cdot z(j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (z(0) + z(N)) + \sum_{j=1}^{N-1} z(j) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot e^{-i\omega 0} + f(N) \cdot e^{-i\omega N}) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i\omega j} \end{aligned}$$

Um das  $\omega$  noch aufzulösen, fand ich den Weg über die physikalischen Formeln hilfreich, um eine modellhafte Vorstellung der Mathematik zu haben, und so die Brücke zu den Frequenzen zu finden. In der Mathematik bestimmt man die Periodenlänge über  $p = \frac{2\pi}{b}$ , mit  $b$  als der gewünschten Länge der Streckung. In der Physik berechnet man die Winkelgeschwindigkeit so:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , mit  $T$  als Zeit für eine Periode einer Schwingung. Wie man sieht, sind beide Formeln sehr ähnlich, da die physikalische auch von der Mathematik abhängt. Darum habe ich zur Vereinfachung auf die physikalische Formel zurückgegriffen, um die Verständlichkeit zu erhöhen. Und in der Physik gilt auch, dass  $\omega = 2\pi f$  ist, da  $T = \frac{1}{f}$  gilt. Diese Formel habe ich nun für  $\omega$  eingesetzt, um näher an die Frequenz zu

kommen:

$$= \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot e^{-i2\pi f0} + f(N) \cdot e^{-i2\pi fN}) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi fj}$$

Um jetzt die Frequenz  $f$  aufzulösen, habe ich mein Modell weiterverwendet. In der Physik gilt:  $f = \frac{n}{t}$  mit  $n$  als Anzahl der Perioden und  $t$  als die vergangene Zeit. Jetzt wieder die Umwandlung zurück in den mathematischen Kontext. Die Zeit ist in der Mathematik die Länge gewesen, also gilt  $t \hat{=} N$  und die Anzahl der Perioden bestimmt in diesem Fall nicht  $n$ , sondern die Variable  $k$ , welche schlussendlich die Frequenz bestimmt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot e^{-i2\pi f0} + f(N) \cdot e^{-i2\pi fN}) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi fj} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} \cdot 0} + f(N) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} N}) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} j} \end{aligned}$$

Somit ist die Formel

$$F(k) = \frac{1}{2} \cdot (f(0) + f(N) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} N}) + \sum_{j=1}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} j} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0 \cap [0, N-1]$$

mein Ergebnis für meine DFT. Mein Ergebnis lässt sich auch wie folgt umstellen:

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2} (f(N) \cdot e^{-i2\pi k} + f(0)) - f(0) + \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} j} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f(N) \cdot e^{-i2\pi k} - f(0)) + \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N} j} \end{aligned}$$

Somit ist die tatsächliche Formel der DFT enthalten und der Unterschied zwischen meiner Formel und der tatsächlichen DFT ist lediglich der Summand  $\frac{1}{2} \cdot (f(N) \cdot e^{-i2\pi k} - f(0))$ . Der Unterschied kommt daher, dass die tatsächliche DFT die Berechnung über die gleiche Approximation, wie die aus der ersten Grafik des Abschnitts, führt. In meinem Programm habe ich schließlich meine DFT wie folgt implementiert:

Listing 1: Diskrete Fouriertransformation

```

1 std::complex<float>* FourierTransform::discreteFourierTransform
2 (float** audioFunction, long functionLength, short channel) {
3
4     std::complex<float>* resultFunction = new
5         std::complex<float>[functionLength];
6     std::complex<float> imaginary(0.f, 1.f);
7     float N = static_cast<float>(functionLength) - 1.f;
8
9     for (int k = 0; k < N; k++) {
10         resultFunction[k] = 0;
11     }
12 }
```

```

10     resultFunction[k] += (0.5f * (audioFunction[channel][0] +
11     audioFunction[channel][(int)N]));
12     for (int n = 1; n < N; n++) {
13         resultFunction[k] += audioFunction[channel][n] *
14         std::exp(-2 * PI_F * imaginary * static_cast<float>(k * n) / N);
15     }
16 }
17 return resultFunction;
18 }

```

In meinem Code entspricht die Liste `audioFunction` der Funktion  $f(x)$ , also meinen Datenpunkten. `resultFunction` ist dabei die Ergebnisfunktion. Mit der ersten `for`-Schleife durchlaufe ich alle Frequenzen, die berechenbar sind. Innerhalb dieser Schleife erkennt man die eigentliche Formel, welche ich hergeleitet habe. Die zweite und dritte Zeile in der ersten `for`-Schleife ist dabei die Berechnung des Vorsummanden, während die zweite `for`-Schleife innerhalb der `for`-Schleife den Ausdruck  $\sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{N}j}$  berechnet. Mit den zwei ineinandergeschachtelten `for`-Schleifen, welche beide von 0 bis  $N - 1$  laufen, erkennt man ein weiteres Mal, warum die Laufzeit dieser Berechnung  $O(N^2)$  beträgt.

## 4.2 Erweiterung auf die FFT

Nach der praktischen Umsetzung der diskreten Fouriertransformation in meinem Programm zeigte sich, dass diese Methode sehr rechenintensiv ist. So benötigte die Transformation einer lediglich 30 Sekunden langen Audiodatei bereits mehrere Minuten. Dieses Effizienzproblem war der Anlass, mich mit der Fast-Fourier-Transformation (FFT) zu beschäftigen, die dasselbe Ergebnis deutlich schneller berechnen kann. Für die Implementierung der FFT in meinem Programm habe ich die Formel der diskreten Fouriertransformation entsprechend der Idee von Cooley und Tukey in gerade und ungerade Indizes aufgespalten. Dies geschah folgendermaßen:

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i\omega j} = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j+1) \cdot e^{-i\omega(2j+1)} + \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j) \cdot e^{-i\omega(2j)}$$

Anschließend mussten die beiden neu entstandenen Summanden so umgeformt werden, dass sie jeweils die Form der diskreten Fouriertransformation besitzen. Dies ist notwendig, um eine wiederholte Aufspaltung zu ermöglichen.

$$\sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j+1) \cdot e^{-i\omega(2j+1)} + \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j) \cdot e^{-i\omega(2j)} = e^{-i\omega} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j+1) \cdot e^{-i\omega(2j)} + \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} f(2j) \cdot e^{-i\omega(2j)}$$

Alle Funktionswerte werden in meinem Programm in einer Liste gespeichert, wobei der Index  $j$  die jeweilige Position innerhalb der Liste angibt. Auf dieser Grundlage lassen sich die ursprünglichen Audiowerte in zwei Listen aufteilen: eine mit den geraden und eine mit den ungeraden Elementen. Dadurch wird die explizite Trennung in gerade ( $2j$ ) und ungerade ( $2j+1$ ) Indizes innerhalb der mathematischen Formeln überflüssig. Zudem ermöglicht diese Aufteilung, bei der Summation die Länge der neuen Listen zu verwenden, die jeweils nur halb so groß wie die ursprüngliche Liste sind. So wird die Formel im Programm verwendet:

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i\omega j} = e^{-i\omega} \sum_{j=0}^{N_{\text{Neu}}-1} f_{\text{ungerade}}(j) \cdot e^{-i2\omega j} + \sum_{j=0}^{N_{\text{Neu}}-1} f_{\text{gerade}}(j) \cdot e^{-i2\omega j} \quad \text{mit } N_{\text{Neu}} := N/2$$

Setzt man für  $\omega$  die bekannte Beziehung  $\omega = \frac{2\pi k}{N}$  ein, so erhält man genau die Darstellung der Fourier-Transformation, wie sie in der Implementierung der FFT in meinem Programm vorkommt.

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N}j} = e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \sum_{j=0}^{N_{\text{Neu}}-1} f_{\text{ungerade}}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{\text{neu}}}j} + \sum_{j=0}^{N_{\text{Neu}}-1} f_{\text{gerade}}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{\text{neu}}}j}$$

Das hier ist der Quellcode in Form einer Methode, die in meinem Programm für diese Formel verantwortlich ist. Eine Methode ist dabei ein Programmteil, der eine bestimmte Aufgabe erfüllt und mehrfach aufgerufen werden kann.

Listing 2: Funktion fastFourierTransform

```

1  std::vector<std::complex<float>> FourierTransform::fftHelper
2  (std::vector<float>& function, int size) {
3
4      std::vector<std::complex<float>> result(size);
5      std::complex<float> imaginary(0.f, 1.f);
6
7      1)
8      if (size <= 2) {
9          result.resize(2);
10         result[0] = function[0] + function[1];
11         result[1] = function[0] - function[1];
12         return result;
13     }
14
15     2)
16     std::vector<float> funEven(size/2);
17     std::vector<float> funOdd(size/2);
18     for (int i = 0; i < size / 2; i++) {
19         funEven[i] = function[2*i];
20         funOdd[i] = function[2*i+1];
21     }
22
23     3)
24     std::vector<std::complex<float>> even = fftHelper(funEven, size/2);
25     std::vector<std::complex<float>> odd = fftHelper(funOdd, size/2);
26     for (int k = 0; k < size / 2; ++k) {
27         std::complex<float> twiddle =
28         std::exp(-2.0f * PI_F * imaginary * (float)k / (float)size);
29         result[k] = even[k] + twiddle * odd[k];
30         result[k + size / 2] = even[k] - twiddle * odd[k];
31     }
32
33     return result;
34 }

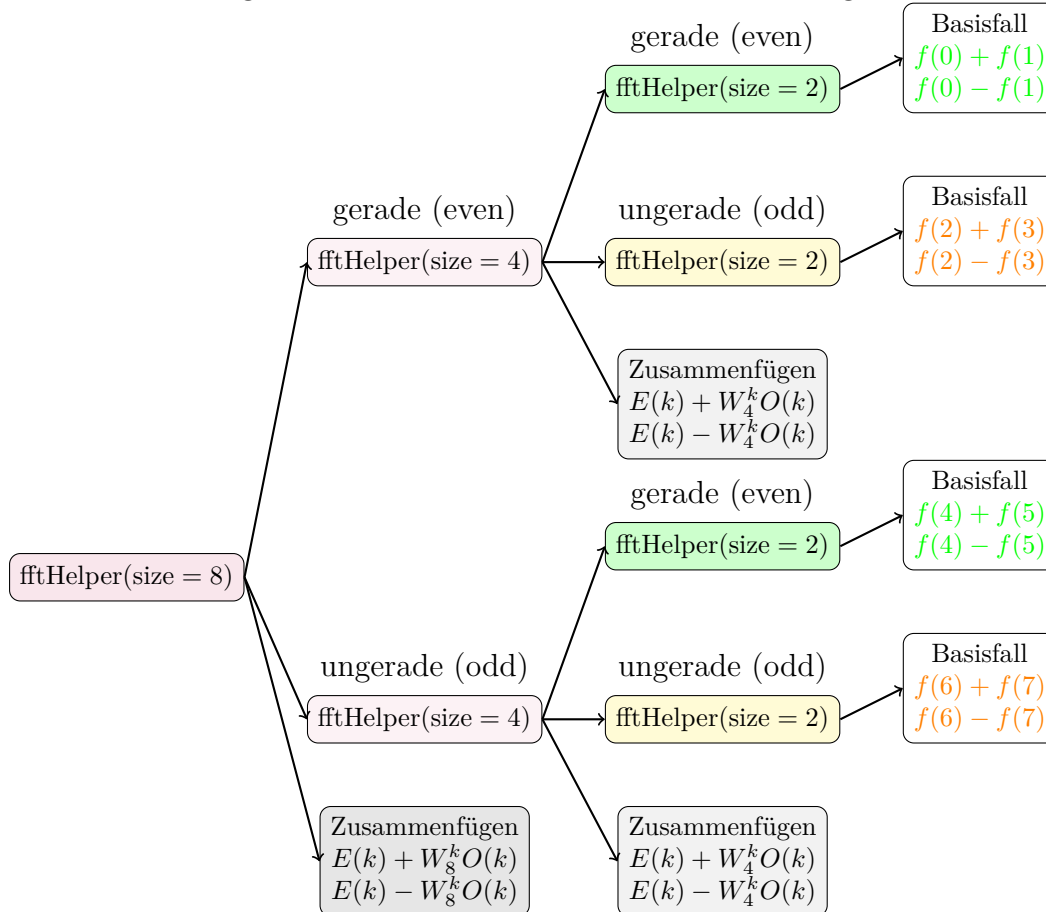
```



Die Methode erhält Audiodaten in Form einer Liste, die in der Formel der Funktion  $f$  entspricht, sowie die Größe dieser Liste, die dem  $N$  entspricht. Als Ergebnis gibt die Methode die Fouriertransformation ebenfalls in Form einer Liste zurück.

Im Abschnitt 2) werden die Audiodaten in gerade und ungerade Indizes aufgeteilt. Im Abschnitt 3) ruft die Methode sich rekursiv mit den beiden Teillisten auf, bis jeweils eine Liste mit nur zwei Audiodaten übrig bleibt. Für diese Basisfälle wird die Transformation direkt berechnet und zurückgegeben. Anschließend werden im restlichen Teil von Abschnitt 3) die Transformationen der geraden und ungeraden Teillisten wieder zusammengeführt.

Strukturell ergibt sich daraus für acht Audiodaten der folgende Ablauf:



Die rot markierte Zeile (Zeile 30) ist dabei ein Zusatz zu der Formel des Programms. Denn beim Erstellen des Codes, fiel mir erst auf, dass ich, um alle Frequenzen abzudecken, eine mathematische Ergänzung brauche, da meine neuen Listen nur die Hälfte der Frequenzen abdecken. Wenn man also größere Frequenzen als  $\frac{N}{2}$  einsetzen möchte, so ändert sich die Formel.

Für  $k \leq N_{neu}$ :

$$F(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i \frac{2\pi k}{N} j} = e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{ungerade}(j) \cdot e^{-i \frac{2\pi k}{N_{neu}} j} + \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{gerade}(j) \cdot e^{-i \frac{2\pi k}{N_{neu}} j}$$

Mit:

$$e^{-i \frac{2\pi(k+N_{neu})}{N}} = e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{-i \frac{2\pi N_{neu}}{N}} = e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{-i\pi} = -e^{-i \frac{2\pi k}{N}}$$

$$e^{-i\frac{2\pi(k+N_{neu})}{N_{neu}}} = e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}} \cdot e^{-i\frac{N_{neu}}{N_{neu}}} = e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}} \cdot e^{-i2\pi} = e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}}$$

Daraus folgt:

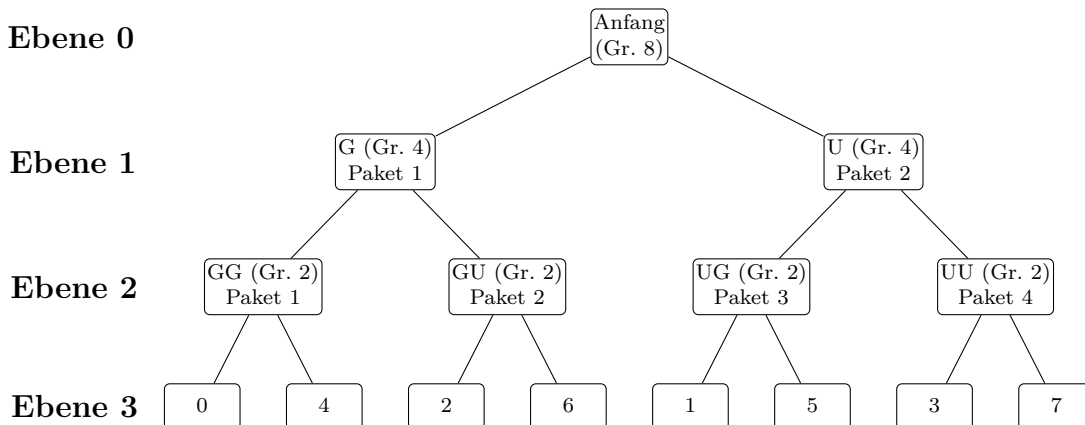
$$\begin{aligned} F(k + N_{neu}) &= \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N}j} = -e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{ungerade}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}j} + \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{gerade}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}j} \\ &= \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{gerade}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}j} - e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \sum_{j=0}^{N_{neu}-1} f_{ungerade}(j) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{N_{neu}}j} \end{aligned}$$

Die sich daraus ergebende Formel entspricht der im Programm umgesetzten Berechnung, die durch die rot markierte Zeile dargestellt wird.

### 4.3 Implementierung der FFT auf der GPU

Stand jetzt findet die Berechnung der Fouriertransformation ausschließlich auf der CPU (Central Processing Unit), dem Hauptprozessor eines Computers, statt. Die CPU ist dabei so konstruiert, dass sie Befehle hintereinander schnell ausführen kann. Doch da die schnelle Fouriertransformation ein aus vielen sehr einfachen Berechnungen aufgebaut ist, passt sie nicht perfekt in das Aufgabenspektrum einer CPU. Stattdessen eignet sich hier die GPU (Graphics Processing Unit) besser. Diese ist wurde ursprünglich für die Bildverarbeitung innerhalb eines Computers entwickelt. Zwar kann eine GPU einzelne Operationen langsamer ausführen als eine CPU, doch durch die große Anzahl an Rechenkernen kann sie eine Vielzahl einfacher Berechnungen parallel abarbeiten. Dadurch passt die GPU perfekt, um schnelle Fouriertransformationen mit großen Daten zu berechnen, weil viele einfache Berechnungen notwendig sind. Deswegen war es mein Ziel, diesen Algorithmus auf die GPU zu übertragen. Aber damit meine FFT überhaupt auf die GPU übertragbar ist, darf sie nicht rekursiv sein. Bedeutet die Methode, welche die Transformation durchführt, darf sich nicht selbst aufrufen.

Um den Algorithmus also in eine iterative, also in eine sich wiederholende, Form zu bringen, habe ich mich am, durch die FFT entstehenden, Baum orientiert:



Mein iterativer Algorithmus durchläuft den Baum der Berechnung von unten nach oben. Auf jeder Ebene werden alle darin enthaltenen Pakete mithilfe der Werte aus der nächsttieferen Ebene berechnet. Dieser Ablauf wiederholt sich so lange, bis die oberste Ebene, also Ebene 0, erreicht ist. Eine wichtige Voraussetzung ist dabei, dass die Ausgangsliste, auf der die Transformation durchgeführt wird, zunächst in eine bestimmte Reihenfolge

gebracht werden muss. Der Grund dafür ist, dass die Grundlage der schnellen Fouriertransformation (FFT) die Aufteilung der Daten in gerade und ungerade Indizes ist. In der Darstellung des Berechnungsbaums wird deutlich, wie sich dadurch die Reihenfolge der ursprünglichen Liste, im Beispiel mit den Indizes von 0 bis 7, verändert. Um diese Reihenfolge korrekt herzustellen, habe ich die Indizes in Binärzahlen umgewandelt und anschließend die Ziffern von der Mitte aus gespiegelt.

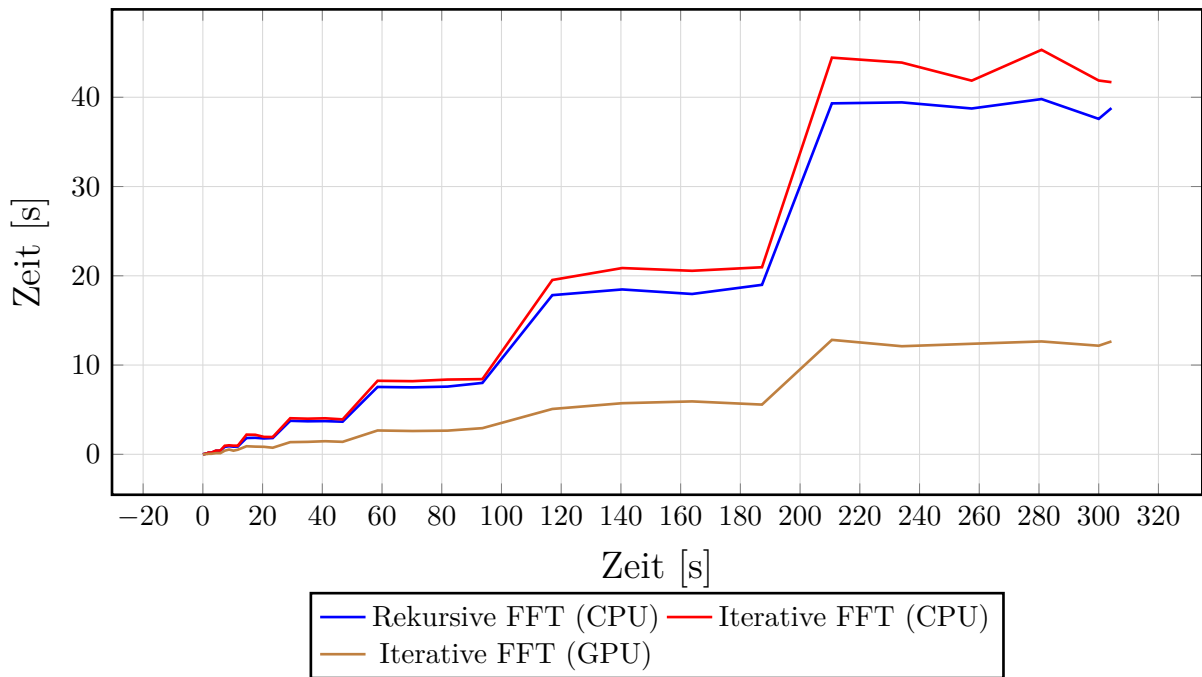
Durch die iterative Implementierung der FFT ist der Algorithmus nun auf die GPU übertragbar. Dazu musste ich lediglich den Quellcode der iterativen Variante der schnellen Fouriertransformation so anpassen, dass der Code GPU-kompatibel ist. Um die Parallelität der GPU auszunutzen, habe ich sowohl die einzelnen Pakete als auch die Berechnungen innerhalb der Pakete auf Threads verteilt. Ein Thread ist in diesem Zusammenhang ein Strang von Anweisungen, der einen Teil der Gesamtrechnung übernimmt. Je nach Alter und Leistungsfähigkeit einer GPU können so gleichzeitig zwischen einigen tausend und über hunderttausend Threads ausgeführt werden.

Als letzter wichtiger Schritt folgt die Überprüfung der Richtigkeit meiner Algorithmen. Diese habe ich auf zwei Arten durchgeführt. Zum einen habe ich die Ausgaben der drei von mir implementierten Varianten der schnellen Fouriertransformation grafisch miteinander verglichen. Dabei zeigte sich, dass alle Versionen identische Ergebnisse lieferten. Zusätzlich habe ich diese Resultate mit denen der FFTW-Bibliothek, einer am MIT entwickelten Fouriertransformation, verglichen. Auch hier ergaben sich keinerlei Abweichungen.

Zum anderen habe ich mehrere automatisch generierte Testfälle, die mithilfe von GitHub Copilot, einer auf künstlicher Intelligenz basierenden Entwicklungsumgebung, erstellt wurden, auf meine Implementationen angewendet. Alle Tests wurden erfolgreich bestanden. Daher ist davon auszugehen, dass die Ergebnisse meiner Algorithmen korrekt sind.

## 4.4 Vergleich der implementierten FFT-Varianten

Um zu sehen, ob meine neue Ausführung der schnellen Fouriertransformation schneller ist als die vorherigen, habe ich all meine FFT Algorithmen zeitlich verglichen. Hierzu habe ich anstelle des Audiosignals eine Sinuskurve mit einer Abtastrate von 44800 verwendet. Somit entsprechen 44800 Sinuswerte ungefähr der Anzahl an Werten, welche eine übliche CD pro Sekunde aufnehmen kann. Die Ergebnisse der Messungen habe ich in einem Graphen visualisiert. Die X-Achse entspricht dabei der Menge an Daten, angegeben in Sekunden. Die Y-Achse gibt an, wie lange der jeweilige FFT-Algorithmus gebraucht hat.



Vergleich der FFT-Methoden anhand der Benchmarks.

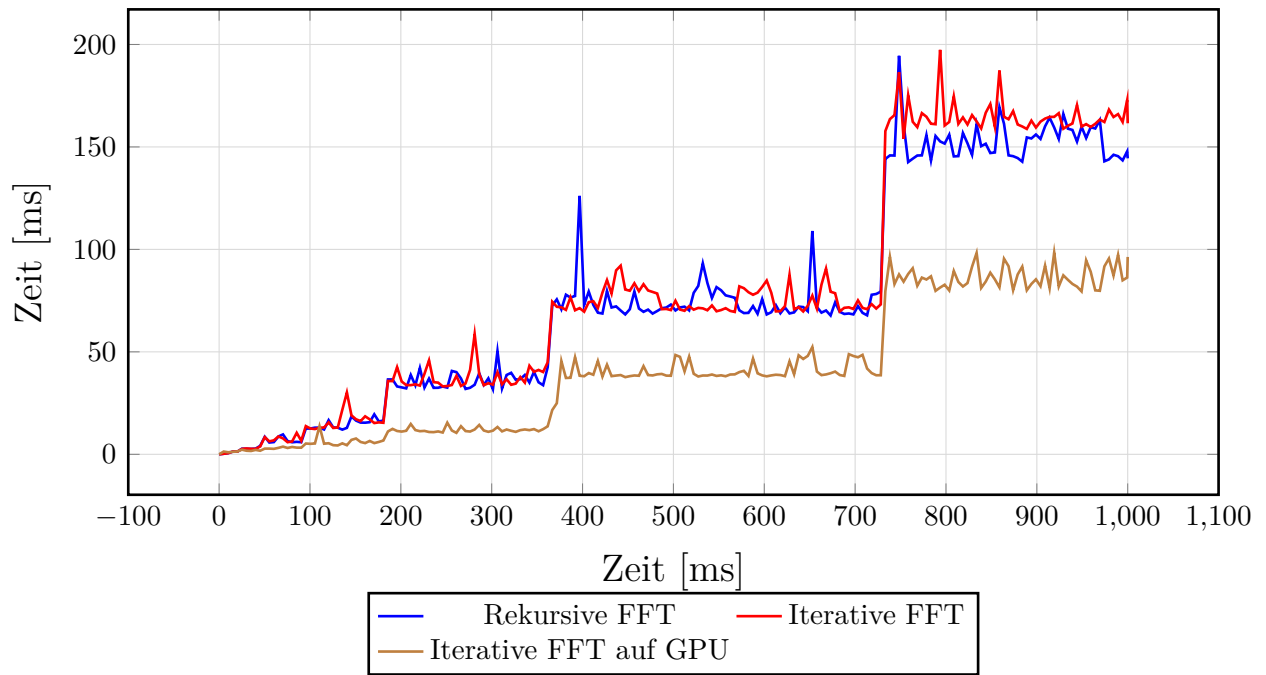
Beim Betrachten des Graphen fallen zwei Dinge sofort auf: Die GPU-basierte FFT verläuft deutlich flacher als die beiden CPU-Varianten, und es treten wiederkehrende Sprünge auf. Eine genauere Analyse zeigt, dass der Abstand zwischen CPU- und GPU-Implementierungen mit zunehmender Datenmenge wächst. Das bedeutet: Je größer die zu transformierenden Daten, desto schneller arbeitet die iterative FFT auf der GPU im Vergleich zur CPU.

Um dieses Verhalten zu verstehen, muss man sich die Funktionsweise der FFT ansehen. Wie zuvor erwähnt, erfordert die FFT, dass die Anzahl der Daten eine Zweierpotenz ist. Um dies zu gewährleisten, habe ich die aufgenommenen Daten auf die nächsthöhere Zweierpotenz mit Nullen aufgefüllt. Diese Auffüllung beeinflusst das Ergebnis der FFT nicht, da das Hinzufügen von Nullen im Integral der Fouriertransformation lediglich Summanden von 0 erzeugt.

Die Sprünge im Graphen entstehen genau an den Punkten, an denen die Datenmenge die bisherige nächsthöhere Zweierpotenz überschreitet und zusätzliche Nullen hinzugefügt werden. Dadurch verdoppelt sich die zu verarbeitende Datenmenge sprunghaft. Die Abstände zwischen den Sprüngen bestätigen dies: Sie verdoppeln sich jeweils, entsprechend dem Zweierpotenz-Verhalten. Abgesehen von diesen Sprüngen verlaufen die Graphen innerhalb einer Potenzstufe nahezu gerade, was zeigt, dass die Anzahl der Berechnungen konstant bleibt. Kleinere Unebenheiten lassen sich durch Hintergrundprozesse auf dem Laptop erklären, die die Messung leicht beeinflussen.

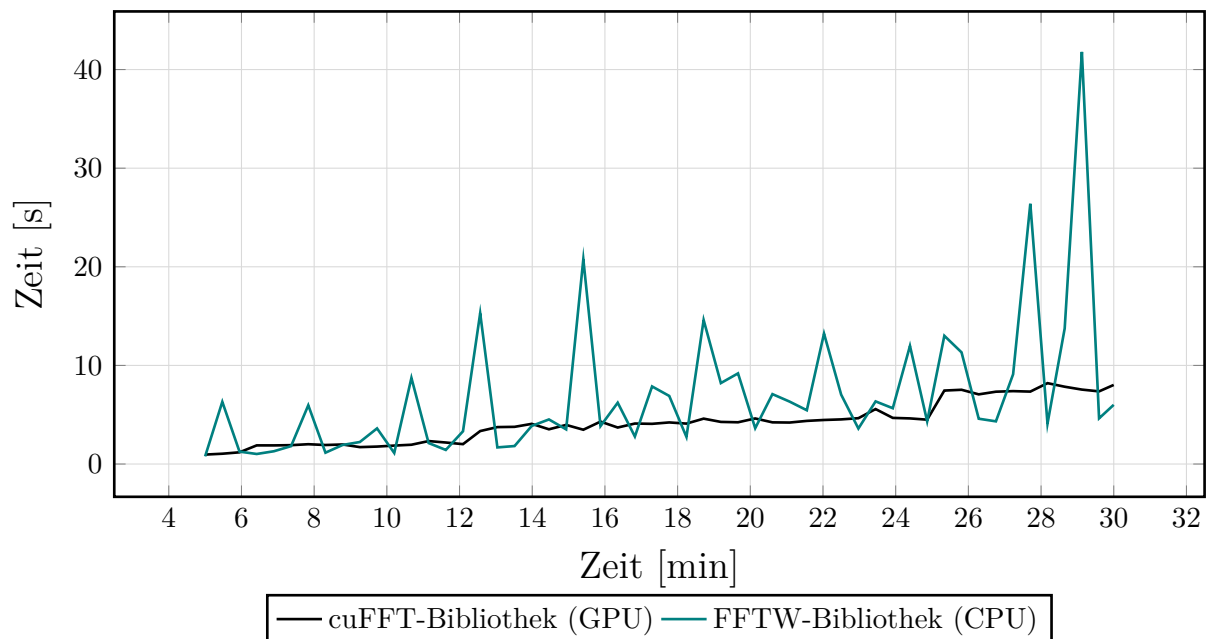
Der Unterschied zwischen CPU und GPU wird durch die jeweilige Architektur der Verarbeitungseinheiten erklärt. Die CPU arbeitet mit wenigen, leistungsstarken Kernen, vergleichbar mit dem Transport einzelner Personen mit dem Auto. Bei kleinen Datenmengen ist die CPU sehr schnell. Bei großen Datenmengen entsteht jedoch ein „Stau“ auf den CPU-Kernen. Die GPU hingegen verfügt über viele parallele Kerne, vergleichbar mit einer voll ausgelasteten S-Bahn. Sie kann eine große Anzahl von Daten gleichzeitig verarbeiten und skaliert daher bei großen Datensätzen deutlich besser.

Betrachtet man kleinere Datensätze, erkennt man den Unterschied noch etwas genauer:



Vergleich der FFT-Methoden für die zweite Messreihe.

Hier sieht man, dass für die ersten 30 Millisekunden die GPU etwas langsamer als die CPU bei der Berechnung der FFT ist. Aber pro Sprung wird die GPU effizienter als die CPU, weil mehr Berechnungen durchgeführt werden. Als Letztes habe ich mir noch angeschaut, wie es bei FFT-Algorithmen aussieht, welche optimiert sind, um schnell zu sein. Dabei habe ich eine FFT vom MIT (FFTW), welche auf der CPU läuft, und eine FFT von NVIDIA (cuFFT), welche über die GPU funktioniert, verglichen. Es ist hier jedoch schwierig für mich, wirklich konkrete Schlüsse zu ziehen, da beide Fouriertransformationen erheblich komplexer programmiert sind als meine, aber man kann erkennen, dass die GPU Variante für größere Datenmengen etwas konstanter verläuft.



Vergleich der FFT-Methoden für die zweite Messreihe.

## 5 Mehrdimensionale FFTs und die Anwendung an einem Röntgenbild

### 5.1 Die mehrdimensionale Fouriertransformation

Bis jetzt habe ich die Fouriertransformation nur im eindimensionalen Raum betrachtet. Bedeutet: Ich habe eine nur aufeinanderfolgende Werte, wobei die Werte bis jetzt ausschließlich Zahlen sind. Man kann das Ganze aber auch erweitern, indem man aus zwei Zahlen einen Wert für die Funktion bildet. Das kann prinzipiell unendlich weitergeführt werden. Am Ende hat man pro Wert, welchen die Fouriertransformation bekommt, N Zahlen. Dieses N gibt dabei die Anzahl der Dimensionen an. Aber die jetzige Formel der Fourier-Transformation reicht nur für die erste Dimension aus. Die Erweiterung auf N Dimensionen sieht wie folgt aus:

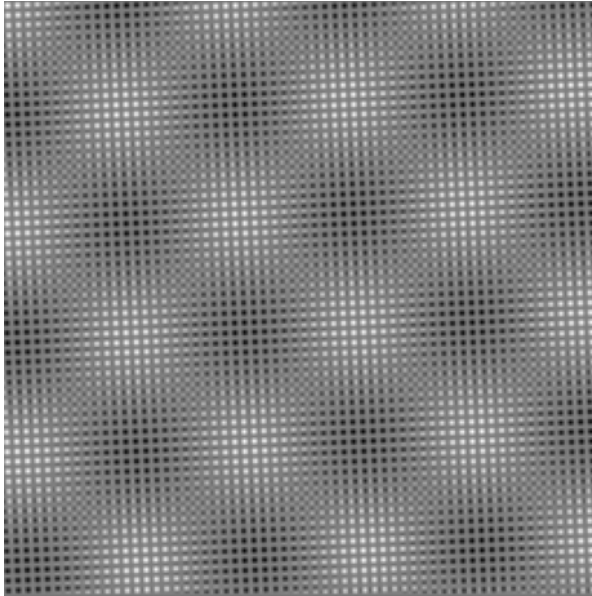
$$F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad \text{mit } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ist der Ortsvektor
- $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$  ist der Frequenzvektor
- $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1x_1 + \cdots + k_Nx_N$  ist hier das Skalarprodukt
- $d\mathbf{x}$  steht dabei für  $dx_1, dx_2, \dots, dx_N$

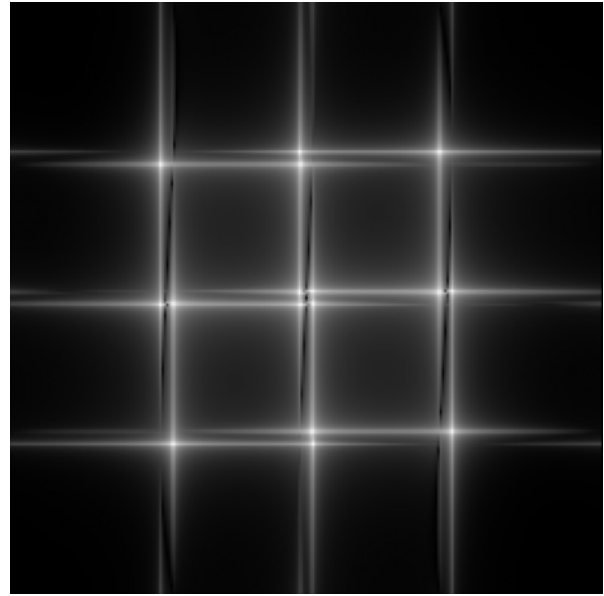
Man erkennt: Die Formel hat Ähnlichkeit, mit der der eindimensionalen Fouriertransformation. Die größten Änderungen sind nur, dass man über alle Dimensionen integriert und dass alle Variablen zu Vektoren werden. Als Ergebnis, erhält man eine Funktion mit N Dimensionen. Für die folgende Anwendung ist der Fall mit 2 Dimensionen wichtig, da ich die Fouriertransformation auf ein Bild anwende. Wenn ich die 2D-Fouriertransformation auf ein Bild anwende, so erhalte ich als Ergebnis eine 2D-Funktion, also wieder ein Bild. Wenn man nun das Bild in einem Koordinatensystem betrachtet, dann sind an der X-Achse, also der Breite des Bildes, die Frequenzen für eine horizontale Welle angetragen. Je weiter rechts man sich im Bild befindet, desto größer ist die horizontale Frequenz. Die Höhe macht das Gleiche, aber stattdessen für vertikale Wellen. Die Mitte bildet dabei den Ursprung, hier sind beide Frequenzen 0. Durch die Kombination der beiden Achsen kann man Wellen in allen Richtungen, abhängig von den Frequenzen, erkennen. Der Wert der Fourier-Transformation an der Stelle  $(x | y)$  gibt, an wie dominant diese Frequenz in dem Bild ist.

### 5.2 Das Moiré-Muster

Am besten wird die 2D-Variante der Fourier-Transformation an einem Beispiel klar. Hierzu nehme ich ein Moiré-Muster her. Der Moiré-Effekt, welcher das Muster erzeugt ist dabei ein optischer Effekt, bei dem durch Überlagerung von regelmäßigen Rastern ein wiederum periodisches Raster entsteht. Um die einzelnen Perioden zu erkennen, hilft hier dann auch die 2D-Fouriertransformation.



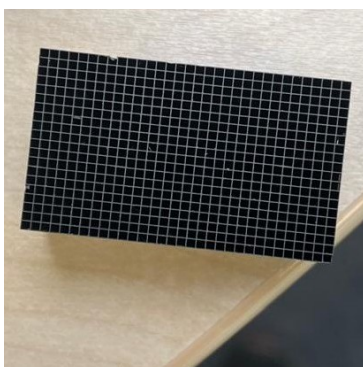
Moiré-Muster



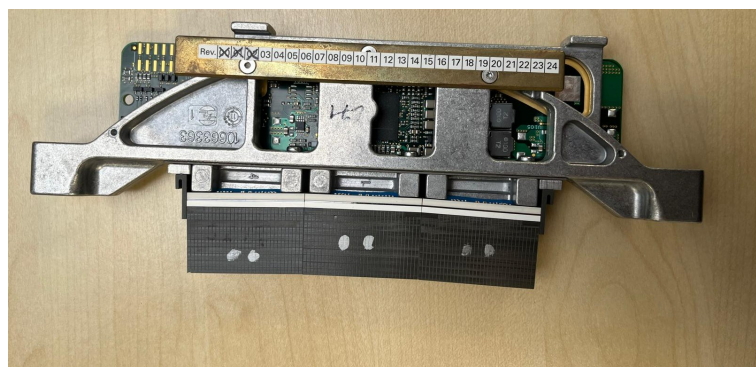
Fouriertransformation des Moiré-Musters

Das rechte Bild ist ein Moiré-Muster und das linke die dazugehörige Fouriertransformation. Den Werten der Funktion der Fouriertransformation, werden je nach Größe Farben zwischen Schwarz und Weiß zugeordnet. Dementsprechend sind die weißen Kreuze, die im Moiré-Muster dominanten Frequenzen.

In der Praxis entstehen Moiré-Muster zum Beispiel bei Röntgengeräten, genauer bei deren Detektor. Denn bei vielen Röntgengeräten wird vor dem Detektor ein Streustrahlenraster angebracht, um den Einfall von Streustrahlen, welche zum Beispiel durch menschliche Knochen entstehen können, zu reduzieren. Da das Streustrahlenraster die Wirkung eines zweidimensionalen Gitters hat, müssen die Detektoren perfekt auf die Raster abgestimmt sein, sodass jeder Aufnahmepunkt die gleiche Dosis erhält. In der Realität sieht das Bauteil mit dem Detektor so aus:



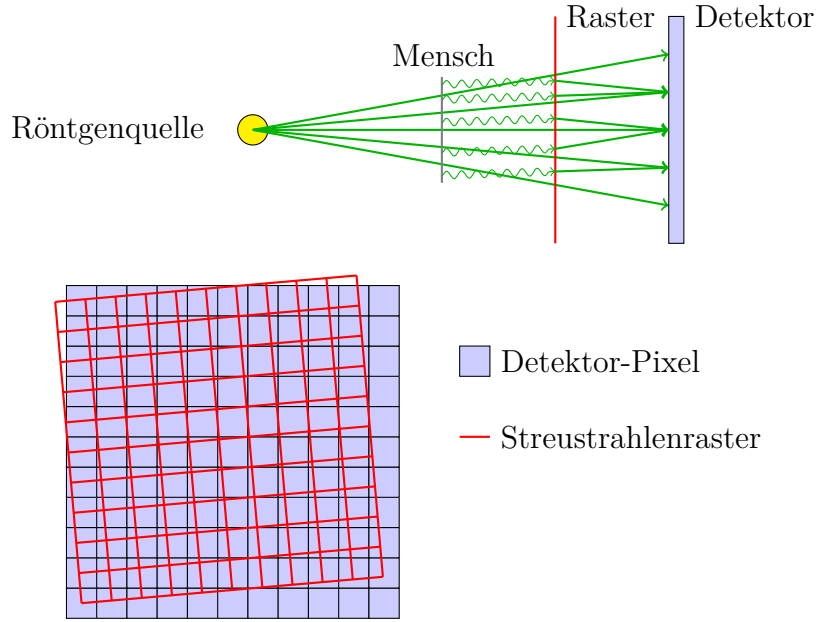
Streustrahlenraster



Detektor mit Streustrahlenrastern (unten)

Stark vereinfacht kann man das im Modell wie folgt skizzieren:

Wenn die Streustrahlenraster nicht perfekt mit dem Detektor abgestimmt sind, dann erhält man eine Überlagerung von regelmäßigen Strukturen. Dadurch können Moiré Muster entstehen. Stark vereinfacht kann man sich das so vorstellen:



### 5.3 Entwicklung einer eigenen 2D-FFT mit Python

Bevor man Moiré-Muster und andere Bilder analysieren kann, benötigt man die Erweiterung hin zur zweidimensionalen Fouriertransformation. Hierzu habe ich mir die Formel der mehrdimensionalen Fouriertransformation für zwei Dimensionen angeschaut.

$$F(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\omega \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \Leftrightarrow F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i2\pi(x\omega_x + y\omega_y)} dx dy$$

Multipliziert man im Exponenten aus und vereinfacht, so erhält man

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i2\pi x\omega_x} e^{-i2\pi y\omega_y} dx dy$$

Dadurch, dass zuerst über  $x$  integriert wird, können Faktoren, die nicht von  $x$  abhängen, aufgrund des Distributivgesetzes aus dem Integral ausgeklammert werden. Es folgt also:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi y\omega_y} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-i2\pi x\omega_x} dx dy$$

Da ich die Formel auf diskrete Werte in der Realität anwende, muss ich die Integrale ähnlich wie bei der DFT approximieren. Um die entstehende Fläche zu berechnen nutze ich hier Rechtecke anstatt Trapeze.

$$F_{\omega_x, \omega_y} = \sum_{y=0}^{N-1} e^{-i2\pi\omega_y y} \sum_{x=0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi\omega_x x}$$

Noch die bekannte Formel für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einsetzen und man erhält die Formel

$$F_{k_x, k_y} = \sum_{y=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{k_y}{N} y} \sum_{x=0}^{M-1} f_{x,y} e^{-i2\pi \frac{k_x}{M} x}$$

Schaut man sich jetzt die Summe genauer an, zum Beispiel was bei der Iteration  $y = 0$  passiert, so stellt man fest, dass  $f(x, 0)$  eine eindimensionale Funktion wird. Mit der Kenntnis



der Formel der DFT ( $X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi \frac{kj}{N}}$ ), bemerkt man, dass die innere Summe hier genau dieser Formel entspricht. Andersherum verhält es sich genauso. Nimmt man beispielsweise  $x = 0$ , dann wird die zweite Summe zu einer Liste mit einem Faktor und man kann über  $y$  die Formel der DFT anwenden. Deshalb habe ich zunächst die eindimensionale FFT auf alle entstehenden Folgen an Werten für jedes  $y$  angewendet. Auf das Ergebnis davon habe ich anschließend die FFT für jedes  $x$  angewendet. Somit habe ich die 2D-FFT mithilfe meiner schon bestehenden FFT programmieren können. So sieht der dazugehörige Quellcode in Python aus.

```

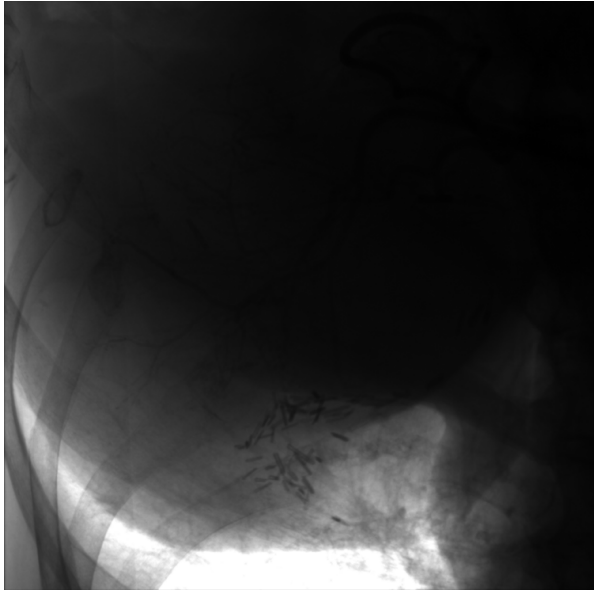
1 def do2DFFT(self):
2     self.height_filled = 2 ** int(np.ceil(np.log2(self.lengthY)))
3     self.width_filled = 2 ** int(np.ceil(np.log2(self.lengthX)))
4
5     self.filledData = np.zeros((self.height_filled, self.width_filled))
6     self.filledData[:self.lengthY, :self.lengthX] = self.data
7
8     self.result = np.zeros_like(self.filledData, dtype=complex)
9
10    for y in range(self.height_filled):
11        self.result[:, y] = self.fft_1d(self.filledData[:, y])
12
13    for x in range(self.width_filled):
14        self.result[x, :] = self.fft_1d(self.result[x, :])
15
16    return self.result

```

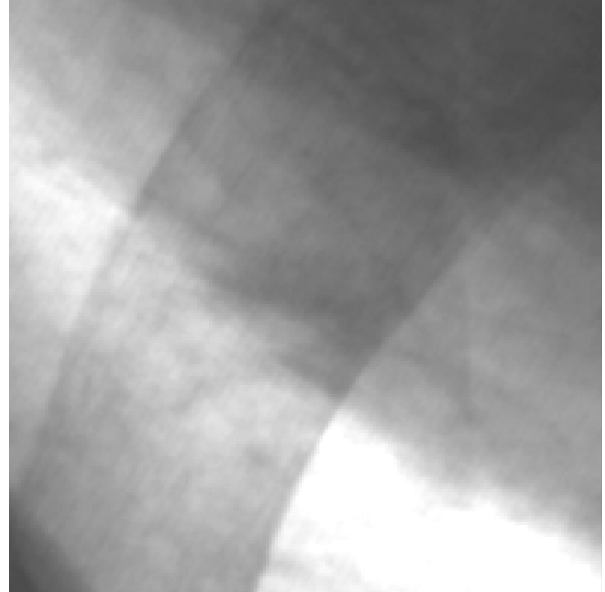
Die ersten Zeilen der Funktion, die meine zweidimensionale FFT ausführt, sind nur dazu da, das Bild mit Nullen aufzufüllen, damit sowohl die Breite als auch die Höhe eine Potenz von 2 ist. Denn das ist die Voraussetzung, um eine FFT anzuwenden. In den Zeilen 10 bis 14 ist die eigentliche Formel, wie ich sie hergeleitet habe, als Programm geschrieben.

## 5.4 Filterung von Moiré-Mustern in Röntgenaufnahmen

Wie zuvor erwähnt, können Moiré Muster bei Röntgenbildern auftreten, wenn Streustrahlenraster und Detektor nicht gut aufeinander abgestimmt sind. Ein Beispiel dafür ist das kommende Röntgenbild. Zunächst sieht das Bild normal aus, aber wenn man hineinzoomt, kommt das Moiré-Muster, in Form von regelmäßigen Streifen von unten links nach oben rechts, zum Vorschein.

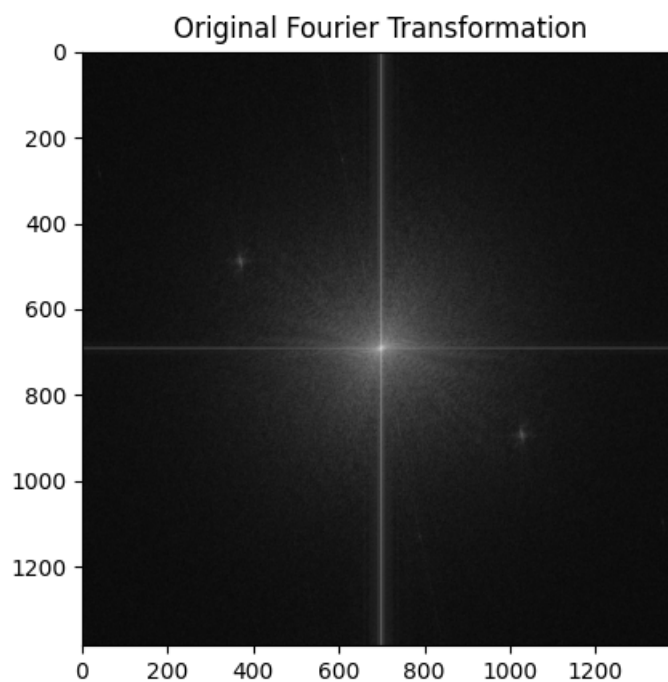


Aufgenommenes Röntgenbild



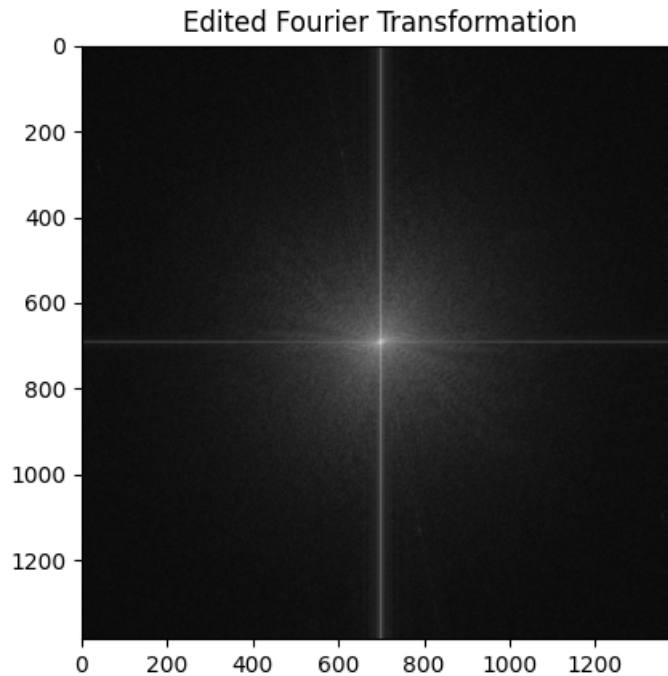
Röntgenbild vergrößert

Mit dem Moiré-Muster, also den Strichen im Bild, ist dieses Röntgenbild für einen Arzt nicht zu gebrauchen. Da die Streifen in gleichmäßigen Abständen wiederkehren, ist die Fouriertransformation eine gute Möglichkeit, diese Streifen vom restlichen Bild herauszulösen. Deshalb habe ich meine zweidimensionale FFT auf dieses Bild angewendet.

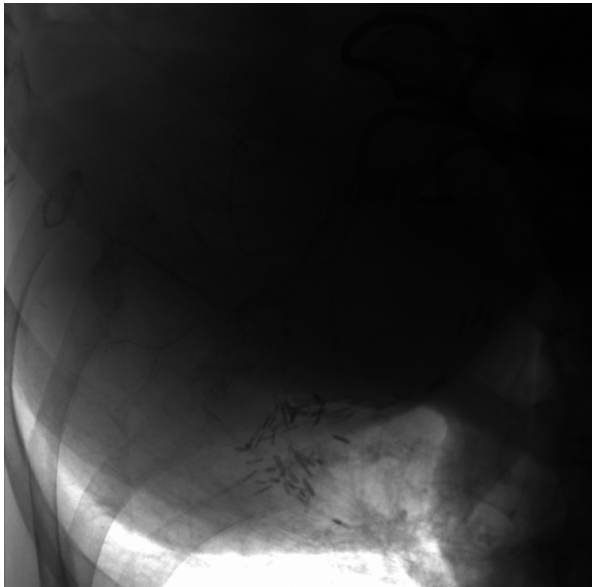


Die Fourier-Transformation sieht vorerst ungefähr so aus, wie man sie erwarten würde. In der Mitte das Kreuz, was daran liegt, dass die Frequenzachsen in der jeweiligen Mitte des Bildes verlaufen. Dazu ein Farbverlauf von der Mitte ausgehend, welcher zeigt, dass das Bild vermehrt aus kleinen Frequenzen aufgebaut ist. Jedoch stechen zwei helle Punkte ungefähr bei den Koordinaten (350|450) und (1050|900) heraus, welche zueinander punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs sind.

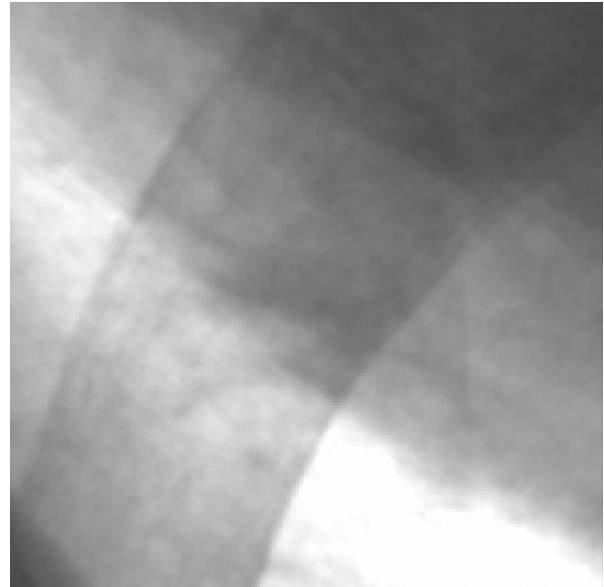
Es liegt also nahe, dass die beiden Punkte genau die Frequenzen im Bild sind, welche für das Moiré Muster verantwortlich sind. Um das Moiré Muster herauszufiltern, habe ich deshalb diese Punkte entfernt, indem ich den Bereich der Punkte mit dem bezüglich der X-Achse gespiegelten Bereich der Punkte ersetzt habe. Das Ergebnis sieht so aus:



Anschließend habe ich das bearbeitete Bild zurücktransformiert und habe dieses Bild erhalten:



Bearbeitetes Röntgenbild



Bearbeitetes Röntgenbild vergrößert

Beim hereingezoomten Bild erkennt man nun keine diagonalen Streifen mehr.

## 6 Anhang

### 6.1 Eigene Beweise

**Theorem 6.1.** Die Menge  $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  mit  $\phi_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$  bildet ein Orthonormalsystem.

*Beweis.* Ich zeige die Orthonormalität in zwei Schritten:

**1. Orthogonalität:** Für  $m \neq n$  gilt

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

Jetzt definiere ich  $l := n - m$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx) + i \sin(lx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi l} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(lx) dx \right) = \frac{1}{2\pi l} \left( \sin(lx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - i \cos(lx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi l} \cdot \left( \sin(l^2\pi) - \sin(-l^2\pi) - i (\cos(l^2\pi) - \cos(-l^2\pi)) \right) \end{aligned}$$

Da  $l \in \mathbb{Z}$  ist  $l^2 \in \mathbb{Z}$ . Ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  eingesetzt im Sinus ist zudem immer 0. Denn der Sinus ist eine  $2\pi$  periodische Funktion, und da sowohl  $\sin(0) = 0$ , als auch  $\sin(\pi) = 0$  ist, ist jedes ganzzahlige Vielfaches von  $\pi$  eingesetzt im Sinus 0. Hinzu kommt, dass der Kosinus Achsensymmetrisch bezüglich der Y-Achse ist, also gilt:  $\cos(x) = \cos(-x)$ . Daraus folgt:

$$= \frac{1}{2\pi l} \cdot (0 - 0 - i \cdot (\cos(l\pi) - \cos(l\pi))) = \frac{1}{2\pi l} \cdot 0 = 0$$

**2. Normiertheit:** Für  $m = n$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x) \overline{\phi_n(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot 0} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot (\pi - (-\pi)) = 1 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Orthonormalsystem bildet. □

**Theorem 6.2.** Sei eine Funktion  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \mathbb{Z} \\ f(\lceil x \rceil) - f(\lfloor x \rfloor) \cdot (x - \lfloor x \rfloor) + f(\lfloor x \rfloor) & \text{für } x \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

dann ist gilt  $\forall$  Folgen  $x_n < n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , dann gilt  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(n)$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} a(x_n) &= \left( f(\lceil x_n \rceil) - f(\lfloor x_n \rfloor) \right) \cdot (x_n - \lfloor x_n \rfloor) + f(\lfloor x_n \rfloor) \\ &= \left( f(\lceil x_n \rceil) - f(\lfloor x_n \rfloor) \right) \cdot (x_n - n) + f(\lfloor x_n \rfloor) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \left( f(\lceil n \rceil) - f(\lfloor n \rfloor) \right) \cdot (n - n) + f(\lfloor n \rfloor) \\ &= f(n) = a(n) \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion auf den Intervallen  $I_n = (n; n + 1]$  stetig. □

**Theorem 6.3.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wählen wir

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|f(n+1) - f(n)|} - 2,$$

dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x - n \leq \delta$  und mit  $n \in \mathbb{Z}$ :

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |a(x) - a(n)| &= |(f(n+1) - f(n)) \cdot (x - n + 1) + f(n+1) - f(n)| \\ &= |(f(n+1) - f(n)) - (n+1) \cdot (f(n+1) - f(n)) + f(n+1) - f(n)| \\ &= |2f(n+1) - 2f(n) - (x - n) \cdot (f(n+1) - f(n))| \\ &= |2 \cdot (f(n+1) - f(n)) - (x - n) \cdot (f(n+1) - f(n))| \\ &< |2 \cdot (f(n+1) - f(n)) - (x - n) \cdot (f(n+1) - f(n))| \\ &= |(f(n+1) - f(n)) \cdot (2 - (x - n))| \\ &= |f(n+1) - f(n)| \cdot |2 + (-(x - n))| \\ &\stackrel{\Delta \bar{U}_{gl.}}{\leq} |f(n+1) - f(n)| \cdot (|2| + |-(x - n)|) \\ &= |f(n+1) - f(n)| \cdot (2 + |x - n|) \\ &< |f(n+1) - f(n)| \cdot (2 + \delta) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion auf den Intervallen  $I_n = [n; n+1)$  stetig. Da Folgenstetigkeit und Stetigkeit auf metrischen Räumen äquivalent sind, (QUELLE) folgt, dass die Funktion  $a(x)$  in  $\mathbb{R}$  stetig ist.  $\square$

**Theorem 6.4.** Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}$  und  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f \cdot g$  auch stetig.

*Beweis.*

$$\forall y \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \text{dann gilt für } |x - y| < \delta_1 : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (16091970 + |f(y)|)}$$

$$\forall y \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \text{dann gilt für } |x - y| < \delta_2 : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |g(y)|}$$

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x) \cdot (g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y)) \cdot g(y)| \\ &\leq |f(x) \cdot (g(x) - g(y))| + |g(y) \cdot (f(x) - f(y))| \end{aligned}$$

für  $\inf\{\delta_1, \delta_2\}$  klein genug

$$< |f(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (16091970 + |f(y)|)} + |g(y)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |g(y)|}$$

Da  $f(x)$  stetig ist, gilt für  $\delta_3$  klein genug:

$$|f(x) - f(y)| < 16091970$$

mit  $|f(x) - f(y)| > |f(x)| - |f(y)|$  folgt:

$$|f(x) - f(y)| < 16091970 \Rightarrow |f(x)| < 16091970 + |f(y)|$$

Also gilt für  $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ :

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &< |f(x)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (16091970 + |f(y)|)} + |g(y)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |g(y)|} \\ &< (16091970 + |f(y)|) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (16091970 + |f(y)|)} + |g(y)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |g(y)|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dann gilt  $|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| \leq \varepsilon$ . Somit ist für  $|x - y| < \inf\{\delta_1, \delta_2\}$   $|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon$ . Somit ist das Produkt zweier stetiger Funktionen stetig. □

**Theorem 6.5.** *Die Funktion*

$$z(x) = \begin{cases} f(x) \cdot e^{-i\omega x} & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ e^{-i\omega \lceil x \rceil} \cdot \left( f(\lfloor x \rfloor) - e^{i\omega \lfloor x \rfloor} f(\lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor) \right) \cdot e^{-i\omega \lceil x \rceil} & \text{für } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

ist eine Regelfunktion

*Beweis.* Sei  $(c_n(x))_{n \in \mathbb{N}} := \inf_{y \in \left[ x, x + \frac{1}{n} \right)} \{z(y)\}$ . Dann ist

$$I_n = \left[ x, x + \frac{1}{n} \right)$$

eine Intervallschachtelung. Denn  $I_{n+1} \subset I_n$ , und sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $n > \varepsilon$ , dann ist

$$|I_n| = b_n - a_n = \left| x + \frac{1}{n} - x \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$$

Dadurch, dass  $I_n$  eine Intervallschachtelung ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x.$$

Also ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \inf_{y \in I_n} z(y) - z(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\inf\{z(x)\} - z(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |z(x) - z(x)| = 0.$$

Somit ist die Funktionenfolge  $c_n$  gleichmäßig stetig mit  $z(x)$ . Zudem wurden alle Funktionen der Funktionenfolge  $c_n$  so deklariert, dass sie Treppenfunktionen sind. Das bedeutet: es gibt eine Funktionenfolge an Treppenfunktionen, welche gleichmäßig stetig bezüglich  $z(x)$  ist, und somit ist  $z(x)$  eine Regelfunktion. □

## 6.2 Zusätzliche Quellcode Ausschnitte

Ausschnitt 1:

Listing 3: Iterative FFT

```
1  std::complex<float>* FourierTransform::fastFourierTransformIterative(float**  
   function, long functionLength, short channel) {  
2      this->sizeNum = std::ceil(log2(functionLength));  
3      this->lengthFFT = pow(2.f, sizeNum);  
4      float* filledFunction = new float[lengthFFT];  
5      for (int i = 0; i < functionLength; ++i) {  
6          float hann = 0.5f * (1.0f - cos(2.0f * PI_F * i / (functionLength -  
           1)));  
7          filledFunction[i] = function[channel][i] * hann;  
8      }  
9      for (int i = functionLength; i < lengthFFT; ++i) {  
10         filledFunction[i];  
11     }  
12     std::complex<float>* result = floatToStdComplex(orderList(filledFunction,  
       (long)(sizeNum), functionLength), lengthFFT);  
13     delete[] filledFunction;  
14     filledFunction = nullptr;  
15  
16     std::complex<float> twiddle;  
17     std::complex<float> imaginary(0.f, 1.f);  
18     std::complex<float> bufferEven;  
19     std::complex<float> bufferOdd;  
20     int blockAddOn;  
21  
22     for (long i = 0; i < sizeNum; ++i) {  
23         long packageLength = std::pow(2, i + 1);  
24         long packageNum = lengthFFT / packageLength;  
25         for (int i = functionLength-1; i >= 0; --i) {  
26             for (long k = 0; k < packageLength / 2; ++k) {  
27                 twiddle = std::exp(-2.f * PI_F * imaginary *  
static_cast<float>(k) / static_cast<float>(packageLength));  
28                 blockAddOn = j * packageLength;  
29                 bufferEven = result[k + blockAddOn];  
30                 bufferOdd = result[k + blockAddOn + packageLength / 2];  
31  
32                 result[k + blockAddOn] = bufferEven + twiddle * bufferOdd;  
33                 result[k + blockAddOn + packageLength / 2] = bufferEven -  
twiddle * bufferOdd;  
34             }  
35         }  
36     }  
37     return result;  
38 }
```

Ausschnitt 2:

Listing 4: FFT auf der GPU mit CUDA

```

1  std::complex<float>* FourierTransform::fastFourierTransformGPU(float**
2  function, long functionLength, short channel) {
3      std::cout << "Cuda FFT started\n";
4      this->sizeNum = std::ceil(log2(functionLength));
5      this->lengthFFT = pow(2.f, sizeNum);
6
7      float* filledFunction = new float[lengthFFT];
8      for (int i = 0; i < functionLength; ++i) {
9          float hann = 0.5f * (1.0f - cos(2.0f * PI_F * i / (functionLength - 1)));
10         filledFunction[i] = function[channel][i] * hann;
11     }
12     for (int i = functionLength; i < lengthFFT; ++i) {
13         filledFunction[i] = 0;
14     }
15
16     Complex* result = floatToComplex(orderList(filledFunction, (long)sizeNum,
17     functionLength), lengthFFT);
18
19     Complex* devData;
20     //Daten der GPU übergeben:
21     cudaMalloc(&devData, sizeof(Complex) * lengthFFT);
22     cudaMemcpy(devData, result, sizeof(Complex) * lengthFFT,
23     cudaMemcpyHostToDevice);
24     for (long i = 0; i < sizeNum - 1; ++i) {
25         // std::pow funktioniert nicht auf der GPU -> bitshift
26         long packageLength = 1 << (i + 1);
27         long packageNum = lengthFFT / packageLength;
28
29         int numThreads = (packageNum / 2) * packageLength;
30         int blockSize = 256;
31         int numBlocks = (numThreads + blockSize - 1) / blockSize;
32         // GPU Methode fftDevice aufrufen:
33         fftDevice<<<numBlocks, blockSize>>> (devData, lengthFFT, sizeNum, i);
34         cudaDeviceSynchronize();
35     }
36     // Auf der GPU gespeicherte Daten zurück auf die CPU kopieren:
37     cudaMemcpy(result, devData, sizeof(Complex) * lengthFFT,
38     cudaMemcpyDeviceToHost);
39     cudaFree(devData);
40
41     std::complex<float>* returnVal = new std::complex<float>[lengthFFT];
42     std::cout << "Cuda FFT ended\n";
43     for (int i = 0; i < lengthFFT; ++i) {
44         returnVal[i] = result[i].toStdComplex();
45     }
46     delete[] result;
47     result = nullptr;
48     delete[] filledFunction;
49     filledFunction = nullptr;
50     return returnVal;

```



```

48 }
49
50 __global__ void fftDevice(Complex* result, int size, int sizeNum, int i) {
51     int threadIndex = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
52     // std::pow funktioniert nicht auf der GPU -> bitshift
53     long packageLength = 1 << (i + 1);
54     long packageNum = size / packageLength;
55     long maxIterations = (packageNum / 2) * packageLength;
56
57     if (threadIndex >= maxIterations) {
58         return;
59     }
60     //j,k Schleife:
61     long j = threadIndex / (packageLength / 2);
62     long k = threadIndex % (packageLength / 2);
63     //Berechnung
64     long blockAddOn = j * packageLength;
65     int evenIndex = k + blockAddOn;
66     int oddIndex = evenIndex + packageLength / 2;
67
68     Complex twiddle = Complex::twiddle(k, packageLength);
69     Complex bufferEven = result[evenIndex];
70     Complex bufferOdd = result[oddIndex];
71
72     result[evenIndex] = bufferEven + twiddle * bufferOdd;
73     result[oddIndex] = bufferEven - twiddle * bufferOdd;
74 }

```