

Aufgabe 1)

Bei der Funktion handelt es sich um eine generative Rekursion mit Akkumulator, wobei der Parameter t der Funktion sgrt/above der Akkumulator ist. t gibt die aktuelle Zahl an, für welche in jedem Rekursionsschritt geprüft wird, ob für diese $t^2 \leq x$ gilt. x ist dabei eine feste natürliche Zahl, welche in allen Rekursionsaufrufen konstant bleibt. Die Funktion terminiert, wenn $t^2 > x$ ist. Für die Bedingung gilt:

$$t^2 > x \iff 1 > \frac{x}{t^2}$$

Anhand der Bedingung kann folgende Abbildung entwickelt werden. Seien $T_1 = \{x\}$ und $T_2 \subseteq \mathbb{N}$

$$st : T_1 \times T_2 \rightarrow \mathbb{N}, \quad st(x, t) = \frac{x}{t^2}$$

Die Funktion terminiert, wenn $st(x, t) \leq 1$ gilt. Die Abbildung ist für ein festes x und ein steigendes t streng monoton fallend. Das heißt es muss für jedes mögliche x aus den natürlichen Zahlen ein $t \leq x$ geben, für das $t^2 \geq x$ gilt, wodurch dann $st(x, t) \leq 1$ gilt. Da t mit jedem Rekursionsschritt um 1 erhöht wird, muss das entsprechende t gefunden werden, für welches die Abbruchbedingung gilt, und die Funktion muss terminieren.