Prof. Dr. O. Sander WiS 2015/2016

Numerische Mathematik

3. Übungsblatt: 16.-27. November 2015

Hinweise zu nachfolgender modulbegleitenden praktischen Aufgabe

Bearbeitung: In Gruppen von je 2 Studierenden.

Wer bis 13.11. keine Zweier-Gruppe bilden konnte, meldet sich per E-mail bei Dr. Vanselow !

Abgabe: Bis zum 4.12.2015, 24:00 Uhr.

zur Abgabe:

Programme und Ausarbeitung (inkl. Bilder) als zip-File im Anhang senden an:

`opal.numerik`<*at*>`mailbox.tu-dresden.de`

Ausarbeitung als pdf-Datei, im Ausnahmefall auch als Text-Datei.

Das zip-File muss bei den Bearbeitern mit Namen "Klara Meier" und "Hans Müller" sowie für die Aufgabe "Nr" den Namen Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr.zip haben.

Beim Entpacken des zip-Files müssen alle Files in das Verzeichnis Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr (oder Unterverzeichnisse davon) entpackt werden.

Im Programm mit einem Kommentar in der ersten Zeile die Bearbeiter und die Aufgabennummer wie folgt vermerken: % Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr

Betreff der E-Mail: "Numerik_Nr" mit Nr = Aufgabennummer.

Ausarbeitungen in handschriftlicher Form können auch bis 4.12. im Sekretariat des Instituts Numerik (Frau Krug, WIL C 319) abgegeben werden. Bitte ins Postfach des Kursassistenten legen lassen.

Vorstellung der Programme und Resultate: 15 Minuten Dauer pro Gruppe zum Vorstellungstermin im PC-Pool WIL B 221 in der Regel zu den bekannten Poolzeiten.

Einschreibung zum Vorstellungstermin:

Einschreibung für einen Vorstellungstermin nach dem Absenden der E-Mail bis zum 8.12. bei Frau Krug WIL C 319.

Beachten Sie bitte, dass das Sekretariat i.Allg. von 8 bis 15.30 Uhr besetzt ist.

Wer die praktische Aufgabe am 7.12. vorstellen möchte, muss sich dazu bis spätestens 7.12. bis 11 Uhr einschreiben, sonst bis 8.12. bis 15 Uhr.

Wer die praktische Aufgabe vorzeitig schon am 2.12. vorstellen möchte, muss die E-Mail am 1.12. abgeschickt haben und sich bis spätestens 2.12. bis 11 Uhr einschreiben.

Beachten Sie bitte auch noch folgenden Hinweis: Verzeichnis- und Dateinamen sollte keine Umlaute, kein ß und keine Leerzeichen enthalten.

Modulbegleitende Aufgabe II - Praxis: (Abgabe bis zum 4.12.2015)

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $I := [-1, 1]$ durch die Stützstellen $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N \leq 1$ und Funktionen $f_R, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

1. die Runge-Funktion
$$f_R(x) := \frac{1}{1 + 25x^2},$$
2. die Funktion
$$f_1(x) := \big(1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x)\big)^{2/3}.$$

Berechnen Sie Funktionen g_N, die f in x_i, $i = 0, ..., N$ interpolieren. Dabei seien

(A) $\{x_i\}$ gleichabständig mit $x_i := -1 + 2i/N$ (bei $h_N = 2/N$),

(B) $\{x_i\}$ die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{N+1} auf $[-1, 1]$,

und

(a) g_N das Interpolationspolynom,

(b) g_N ein Polynomspline aus $\mathcal{S}_3^1(\Delta)$, wobei zusätzlich f' in x_i, $i = 0, ..., N$ interpoliert wird.

Weitere Anforderungen

Die Programme sind in Matlab oder Octave zu schreiben und sollen in der jeweiligen Version im PC-Pool der Mathematik lauffähig sein. N soll frei wählbar sein.

Die Bilder der Funktionen f und g_N sollen auf I geplottet werden.

Weiterhin ist die Fehlerfunktion $F_N : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F_N(x) := f(x) - g_N(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

an den Stützstellen einer feineren Zerlegung Δ_M mit den Stützstellen $-1 = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \cdots < \tilde{x}_{M-1} < \tilde{x}_M = 1$ zu berechnen und zu plotten.

Ist die Zerlegung Δ_N gleichabständig, dann ist die Zerlegung Δ_M durch $M := 10N$ und $M+1$ gleichabständige Stützstellen $\tilde{x}_j$ $(j = 0, \ldots, M)$ mit $\tilde{x}_0 := -1$, $\tilde{x}_M := 1$ gegeben.

Ist die Zerlegung Δ_N durch die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms gegeben, dann ist zunächst Zerlegung durch die Randpunkte gemäß $x_{-1} = -1$ und $x_{N+1} = 1$ zu erweitern. Die Zerlegung Δ_M ist dann durch $M = 10(N + 2)$ und die erweiterte Zerlegung gegeben, zu der in den Intervallen (x_i, x_{i+1}), $i = -1, ..., N$, jeweils 9 gleichabständige Stützstellen eingefügt werden.

Berechnen Sie für den Plot der Bilder die benötigten Werte nur auf den Stützstellen der feineren Zerlegung Δ_M und verwenden Sie den Befehl *plot*(), der die jeweilige Funktion zwischen zwei benachbarten Stützstellen linear interpoliert plottet.

Berechnen Sie außerdem jeweils die Näherung

$$E(h_N) := \max_{j=0,\ldots,M} |f(\tilde{x}_j) - g_N(\tilde{x}_j)|.$$

für den maximalen Fehler $\|f - g_N\|_\infty$ auf I.

Bestimmen Sie auch die **experimentelle Konvergenzordnung** (EOC) von $E(h_N)$, die durch

$$\mathrm{EOC}(h_{N_1}, h_{N_2}) := \frac{\ln E(h_{N_1}) - \ln E(h_{N_2})}{\ln h_{N_1} - \ln h_{N_2}}$$

für je zwei Stützstellenabstände $h_{N_1} \neq h_{N_2}$ erklärt ist.

Konkret ist folgendes zu tun:

1.Teil: Bestimmen Sie g_N für (a), $N = 12$ und (A) sowie (B).

Benutzen Sie dabei die bereits implementierte Polynominterpolation (polyfit und polyval).

Plotten Sie jeweils zwei Bilder,

i) ein Bild, das gleichzeitig die Funktionen f und g_N darstellt und

iii) ein Bild der Fehlerfunktion F_N.

Begründen Sie das Fehlerverhalten.

2.Teil: Geben Sie für (b) eine Vorschrift zur Berechnung der Spline-Funktionen g_N an (mit Angabe einer entsprechenden Referenz oder mit Herleitung).

Bestimmen Sie g_N, $E(h_N)$ und $\mathrm{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ für (b), (A) und $N = N_k$ mit $N_k := 2^k$ bei $k = 1, 2, .., 12$ ($\mathrm{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ natürlich nur bis $k = 11$) und tabellieren Sie $E(h_N)$ und $\mathrm{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$.

Plotten Sie jeweils zwei Bilder,

i) ein Bild, das für $N = 12$ in zwei Teilbildern einmal gleichzeitig die Funktionen f und g_N darstellt und einmal die Fehlerfunktion F_N, und

iii) ein Bild der Fehlerfunktionen F_{N_k} für $k = 1, 2, 3$.

Begründen Sie insbesondere die unterschiedliche experimentelle Konvergenzordnung.