Prof. Dr. O. Sander WiS 2015/2016

Numerische Mathematik

5. Übungsblatt: 14. Dezember 2015 - 8. Januar 2016

Hinweise zu nachfolgender modulbegleitenden praktischen Aufgabe

Bearbeitung: In Gruppen von je 2 Studierenden.

Wer bis 17.12. keine Zweier-Gruppe bilden konnte, meldet sich per E-mail bei Dr. Vanselow !

Abgabe: Bis zum 15.1.2016, 24:00 Uhr.

zur Abgabe:

Programme und Ausarbeitung (inkl. Bilder) als zip-File im Anhang senden an:

`opal.numerik<at>mailbox.tu-dresden.de`

Ausarbeitung als pdf-Datei, im Ausnahmefall auch als Text-Datei.

Das zip-File muss bei den Bearbeitern mit Namen "Klara Meier" und "Hans Müller" sowie für die Aufgabe "Nr" und das Programm "Pr" mit Pr=Matlab oder Pr=Octave den Namen Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr_Pr.zip haben.

Beim Entpacken des zip-Files müssen alle Files in das Verzeichnis Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr_Pr (oder Unterverzeichnisse davon) entpackt werden.

Im Programm mit einem Kommentar in der ersten Zeile die Bearbeiter und die Aufgabennummer wie folgt vermerken: % Klara_Meier_Hans_Mueller_Nr_Pr.

Betreff der E-Mail: "Numerik_Nr" mit Nr = Aufgabennummer.

Ausarbeitungen in handschriftlicher Form können auch bis 15.1. im Sekretariat des Instituts Numerik (Frau Krug, WIL C 319) abgegeben werden. Bitte ins Postfach des Kursassistenten legen lassen.

Vorstellung der Programme und Resultate: 15 Minuten Dauer pro Gruppe zum Vorstellungstermin im PC-Pool WIL B 221 in der Regel zu den bekannten Poolzeiten.

Einschreibung zum Vorstellungstermin:

Einschreibung für einen Vorstellungstermin nach dem Absenden der E-Mail bis zum 19.1. im Sekretariat des Instituts bei Frau Krug WIL C 319. Beachten Sie bitte, dass das Sekretariat i.Allg. von 8 bis 15.30 Uhr besetzt ist.

Falls Sie nicht zu allen Terminen können, dann schreiben Sie sich bitte rechtzeitig ein.

Wer die praktische Aufgabe am 18.1. vorstellen möchte, muss sich dazu bis spätestens 18.1. bis 11 Uhr einschreiben, sonst bis 19.1. bis 15 Uhr.

Wer die praktische Aufgabe vorzeitig schon am 13.1. vorstellen möchte, muss die E-Mail am 12.1. abgeschickt haben und sich bis spätestens 13.1. bis 11 Uhr einschreiben.

Beachten Sie bitte auch noch folgenden Hinweis:
Verzeichnis- und Dateinamen sollte keine Umlaute, kein ß und keine Leerzeichen enthalten.

Modulbegleitende Aufgabe IV - Praxis: (Abgabe bis zum 15.1.2016)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit dem normalen Newton-Verfahren und dem gedämpften Newton-Verfahren:

$$x^n = x^{n-1} + \alpha_{n-1}\,\Delta x^{n-1} \qquad \text{für } n = 1, 2, ..., n_{max},$$

mit Δx^{n-1} bestimmt aus dem linearen Gleichungssystems

$$F'(x^{n-1})\,\Delta x^{n-1} = -\,F(x^{n-1}).$$

Hierbei bezeichne F' die Jacobi-Matrix der Abbildung F.

Beim gedämpften Newton-Verfahren wird der Dämpfungsparameter α_{n-1} dabei so gewählt, dass mit einer vorgegebenen Konstanten $0 < \gamma < 1$ gilt

$$\|F(x^n)\|_2^2 = \left\|F(x^{n-1} + \alpha_{n-1}\,\Delta x^{n-1})\right\|_2^2 \le (1 - \gamma\alpha_{n-1})\left\|F(x^{n-1})\right\|_2^2.$$

Dabei verkleinert man, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, α_{n-1} bei einer vorgegebenen Konstanten $0 < \rho < 1$ mittels

$$\alpha_{n-1} = \rho \cdot \alpha_{n-1}.$$

Um bei einer regulären Nullstelle die quadratische Konvergenz zu erhalten, wählt man außerdem als Startwert für α im ersten Iterationsschritt $\alpha_0 = 1$ und im nächsten Iterationsschritt

$$\alpha_n = \min\{1, \alpha_{n-1}/\rho\}.$$

Brechen Sie die Iteration ab, falls die Bedingung $\min\{\|x^n - x^{n-1}\|_2, \|F(x^n)\|_2\} \le tol$ erstmalig erfüllt ist oder falls $n = n_{max}$ gilt. Hier sind $n_{max} \in \mathbb{N}$ mit $n_{max} > 0$ und $tol > 0$ frei wählbare Parameter.

Testen Sie das Programm anhand folgender Beispiele, dokumentieren und interpretieren Sie den Fehler $\|x^n - x^*\|_2$ und den Defekt $\|F(x^n)\|_2$ sowie beim gedämpften Newton-Verfahren den Dämpfungsparameter α_n.

(I)

$$(a) \qquad F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2,x_3) \\ F_2(x_1,x_2,x_3) \\ F_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ 2x_1x_2 + 3x_2 + 3x_3 - 3 \\ -3x_1x_2 - 5x_2 - 4x_3 + x_3^2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$(b) \qquad F(x) = \begin{pmatrix} \hat{F}_1(x_1,x_2,x_3) \\ F_2(x_1,x_2,x_3) \\ F_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \hat{F}_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1 + F_1(x_1,x_2,x_3).$$

Zeigen Sie, dass $x^* = (0,0,1)^T$ eine Lösung für beide Systeme ist.

<u>Rechnungen jeweils für:</u>

$x^0 = (0.1, 0.1, 0.9)^T$, $tol = 10^{-16}$, $n_{max} = 20$ und normales Newton-Verfahren.

(II)

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2) \\ F_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - 2)\cos(x_2) \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veranschaulichen Sie an Hand einer Skizze die Lage der Lösungen.

Geben Sie alle Lösungen an und zeigen Sie, dass es Lösungen sind.

<u>Rechnungen für:</u>

$tol = 10^{-10}$, $n_{max} = 50$ sowie

(a) $x^0 = (3, 1)^T$ und normales Newton-Verfahren,

(b) $x^0 = (5, 3)^T$ und normales Newton-Verfahren,

(c) $x^0 = (4.7, 2.7)^T$ und

- (c1) normales Newton-Verfahren,
- (c2) gedämpften Newton-Verfahren und $\gamma = 0.9$, $\rho = 0.5$,
- (c3) gedämpften Newton-Verfahren und $\gamma = 0.5$, $\rho = 0.5$,
- (c4) gedämpften Newton-Verfahren und $\gamma = 0.9$, $\rho = 0.1$,
- (c5) gedämpften Newton-Verfahren und $\gamma = 0.5$, $\rho = 0.1$.

Bemerkungen:

1. Erstellen Sie FUNCTION-Unterprogramme (m-Files) mit unterschiedlichen Namen jeweils für die Berechnung des Funktionswertvektors $F(x)$ und der Jacobi-Matrix $F'(x)$.

   Input: Vektor x

   Output: Funktionswertvektor $F(x)$ bzw. Jacobi-Matrix $F'(x)$

2. Erstellen Sie ein FUNCTION-Unterprogramm (m-File) zur obigen Variante des Newton-Verfahrens.

   Input: Startvektor x,
   Name (String) des FUNCTION-Unterprogramms (m-File) zur Berechnung des Funktionswertvektors $F(x)$,
   Name (String) des FUNCTION-Unterprogramms (m-File) zur Berechnung der Jacobi-Matrix $F'(x)$,
   Anzahl der maximalen Newton-Schritte n_{max},
   logische Variable zur Auswahl, ob normales oder gedämpftes Newton-Verfahren,
   obige Parameter γ, ρ,
   obiger Abbruchparameter *tol*,
   exakte Lösung x^*, gegen die das Verfahren konvergiert (für Berechnung des Fehlers)

   Output: letzter Vektor x und zugehöriger Funktionswertvektor $F(x)$

3. Erstellen Sie ein Skript (m-file), das nacheinander (jeweils mit Unterbrechung durch den *pause*-Befehl) die Aufgaben mit der obigen Variante des Newton-Verfahrens abarbeitet.

4. Dokumentieren Sie die Ergebnisse bzgl. der Fehler $\|x^n - x^*\|_2$ und bzgl. der Defekte $\|F(x^n)\|_2$ sowie beim gedämpften Newton-Verfahren bzgl. der Dämpfungsparameter α_n.

   Die obigen Skizzen können auch als geeignetes Matlab-Bild dokumentiert werden. Ebenso kann der Nachweis, dass ein x^* Lösung ist, in Matlab erfolgen.

   Interpretieren Sie die Ergebnisse bzgl. der Fehler $\|x^n - x^*\|_2$ und bzgl. der Defekte $\|F(x^n)\|_2$ sowie beim gedämpften Newton-Verfahren bzgl. der Dämpfungsparameter α_n.

Weitere Anforderungen

Die Programme sind in Matlab oder Octave zu schreiben und sollen in der jeweiligen Version im PC-Pool der Mathematik lauffähig sein.