NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

MÓDULO Y OPERACIONES

Universidad Tecnológica del Perú

$x^2 = -1$

$x = \sqrt{-1}$

$x = \nexists$

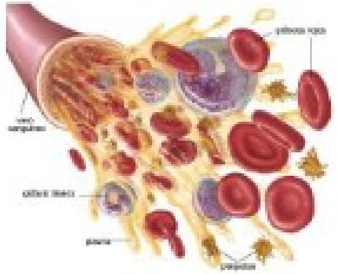
¿Para que sirven los números complejos?

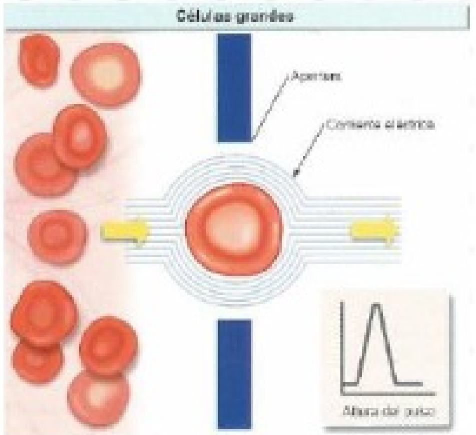
Universidad Tecnológica del Perú

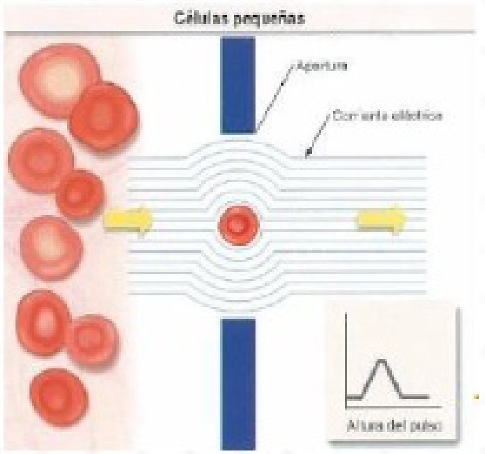
Otra aplicación impresionante es la fusión de la ingeniería con la medicina visto en el cálculo de la impedancia eléctrica

Basado en la resistencia que ofrecen las células al paso de la corriente eléctrica, cuando atraviesan un orifico de apertura que separa dos medios con diferente potencias (uno positivo y otro negativo)

- *La impedancia de los leucocitos.*
- *Concentración de la hemoglobina.*
- *Conteo de Eritrocitos y plaquetas*





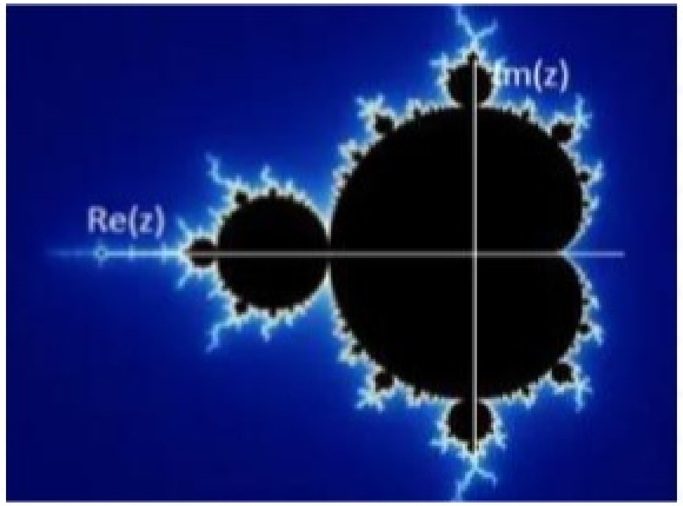


https://es.slideshare.net/SandraCruzGuerrero/automatizacion-en-hematologia?from_action=save

https://anestesiar.org/2012/pulmovista-500-drager/

¿Para que sirven los números complejos?

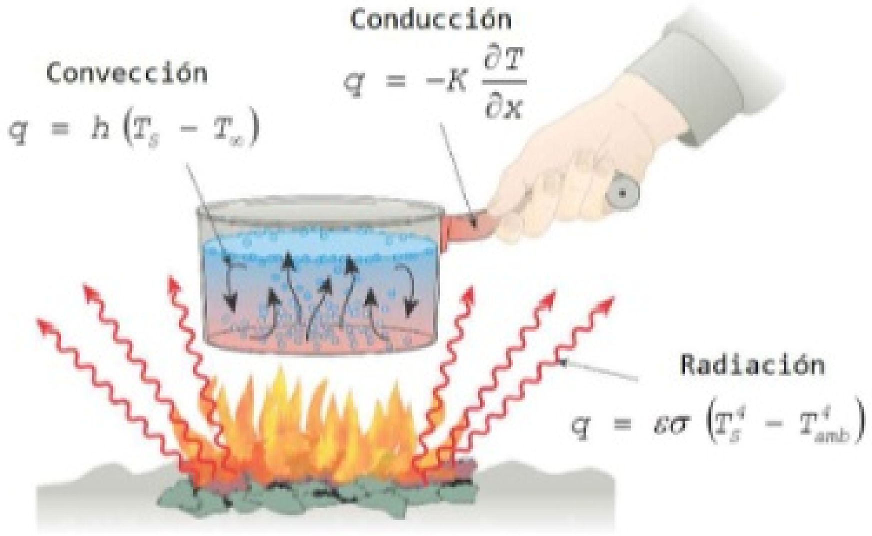
El conjunto de complejos también aparece en muchos objetos fractales



Conjunto de Mandelbrot

https://nusgrem.es/conoces-los-numeros-complejos/

En la física térmica, es posible obtener cantidades de energía imaginarias.



https://nusgrem.es/conoces-los-numeros-complejos/

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión de aprendizaje el estudiante reconoce y realiza operaciones con números complejos.

Universidad Tecnológica del Perú

Universidad Tecnológica del Perú

NÚMEROS COMPLEJOS ℂ

MÓDULO

OPERACIONES

Desaprende lo que te limita

¿Qué es un número complejo?

Universidad Tecnológica del Perú

Un número complejo es una expresión de la forma $\boldsymbol{a + bi}$, *donde* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son números reales,* $\boldsymbol{i}$ *la unidad imaginaria, dicha expresión tiene la propiedad de que* $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

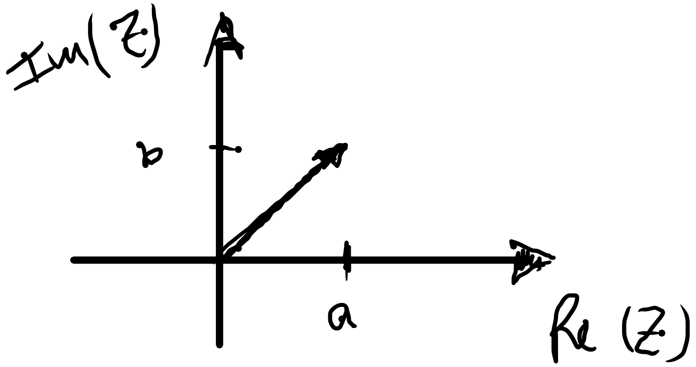
En general, todo número complejo puede ser representado como:

$$z = a + bi \quad = a + ib$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

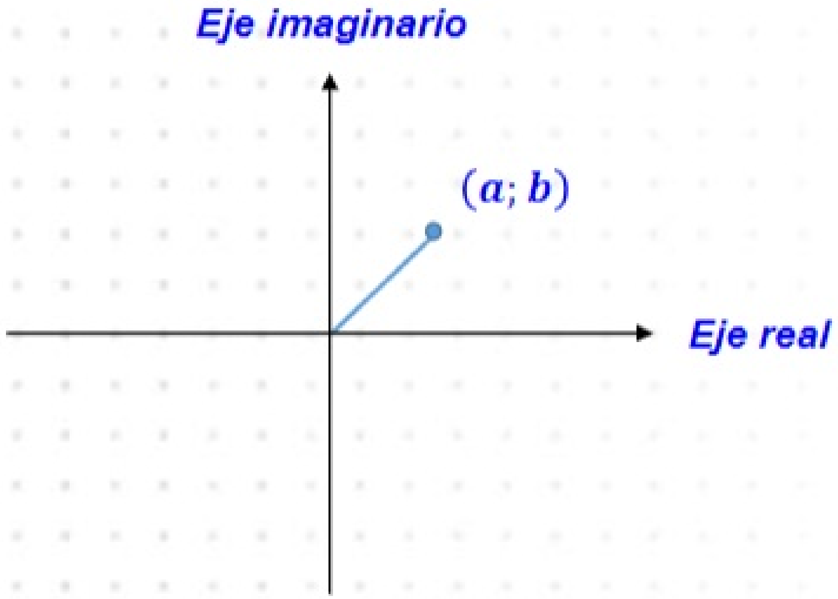
a *es la parte real* $(Re\{z\})$
b *es la parte imaginaria* $(Im\{z\})$



$\boldsymbol{z = a + bi}$	$\boldsymbol{z = (a; b)}$
forma binómica	*forma cartesiana*

1 MÓDULO

Dado $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ *y como vector* $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$, *el módulo será:*



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El módulo es la ***distancia del centro de coordenadas*** *al punto complejo o afijo.*

2 POTENCIAS DE i

$i = \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-1} = i$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \Rightarrow i^2 = -1$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i \Rightarrow i^3 = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$i^4 = 1$

Ejemplo:

$$i^{23} = (i^2)^{11} \cdot i$$
$$= (-1)^{11} \cdot i$$
$$= -i$$

$i^{16} = (i^2)^{8} = (-1)^8 = \underline{1}$

$i^{32} = (i^2)^{16} = (-1)^{16} = \underline{1}$

$i^{25} = i^{24} \cdot i^{1}$

$= (i^2)^{12}\, i$

$= (-1)^{12}\, i$

$= i$

$i^{39} = i^{38} \cdot i$

$= (i^2)^{19}\, i$

$= (-1)^{19}\, i$

$= \underline{-i}$

$(a^n)^m = a^{m.n}$

$a^{n+m} = a^n . a^m$

3 CONJUGADO

$$z = a + bi$$

Sólo se cambia el signo de la parte imaginaria.

$$\bar{z} = a - bi$$

PROPIEDADES:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$z_1 = 2+i \longrightarrow \bar{z}_1 = 2-i \longrightarrow \bar{\bar{z}}_1 = 2+i \Rightarrow \bar{\bar{z}}_1 = z_1$$

$$z_2 = 3-2i \longrightarrow \bar{z}_2 = 3+2i$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

4 OPERACIONES

Universidad Tecnológica del Perú

Igualdad en $\mathbb{C}$

$$z_1 = z_2$$
$$a + bi = c + di$$
$$a = b \;\wedge\; c = d$$

Ejemplo:

$z_1 = (3x; 5)$; $z_2 = 6 + (y+2)i$

Si $z_1 = z_2$. Hallar $x + y$

$z_1 = (3x; 5)$ $\quad$ $z_2 = (6; y+2)$

$3x = 6$ $\quad$ $y + 2 = 5$

$x = 2$ $\quad$ $y = 3$

$x + y = 2 + 3 = 5$

4 OPERACIONES

Suma en $\mathbb{C}$:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

Resta en $\mathbb{C}$:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$= (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:

$z_1 = (3;4)$; $z_2 = 6 + i$

Hallar $z_1 \pm z_2$

$z_1 = 3 + 4i$ $z_2 = 6 + i$

$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 6 + i$

$z_1 + z_2 = 9 + 5i$

$z_1 - z_2 = 3 + 4i - (6 + i)$

$= 3 + 4i - 6 - i$

$z_1 - z_2 = -3 + 3i$

4 OPERACIONES

Universidad Tecnológica del Perú

Producto de una escalar por un $\mathbb{C}$:

$$k \cdot z = k(a+bi) = ka + kbi$$
$$k \cdot z = (ka; kb)$$

Producto de 2 números $\mathbb{C}$:

Dados dos números complejos

$$z_1 = a + bi \; ; \; z_2 = c + di$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

$$z = 4(3;4) = 4(3+4i)$$

$$A = (12;\ 16) = 12 + 16i$$

$$z_1 = (3;4) \; ; \; z_1 = (2;-5)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(2-5i)$$
$$= (6 - (-20)) + (-15 + 8)i$$
$$= 26 - 7i$$

$$z_1 = 3+2i$$

$$z_2 = 5+4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(5+4i)$$

$$= 15+12i+10i+8i^2$$

$$= 15+22i+8(-1)$$

$$= 15-8+22i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 7+22i$$

$$z_3 = 4-2i$$

$$z_4 = 3+4i$$

$$z_3 \cdot z_4 = (4-2i)(3+4i)$$

$$= 12+16i-6i-8i^2$$

$$= 12+8+10i$$

$$= 20+10i$$

4 OPERACIONES

División de 2 números ℂ:

Dados dos números complejos

$$z_1 = a + bi \; ; \; z_2 = c + di$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Ejemplo:

$z_1 = (3;4)$; $z_1 = 2 - 5i$. *Hallar* $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2-5i}$$

$$= \frac{(3+4i)}{(2-5i)} \cdot \frac{(2+5i)}{(2+5i)}$$

$$= \frac{(6-20)+(15+8)i}{2^2+5^2}$$

$$= \frac{-14+23i}{29}$$

$$= -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$$

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = 5 + 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$|z_2| = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25 + 9}$$

$$|z_2| = \sqrt{34}$$

$$\bar{z}_2 = 5 - 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 2i)(5 - 3i)}{34}$$

$$= \frac{15 - 9i - 10i + 6i^2}{34}$$

$$= \frac{15 - 6 - 19i}{34}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{34} - \frac{19}{34} i$$

Ejemplo. *Dados $z_1 = 3 + 5i$ y $z_2 = -4 + 3i$. Determine la suma, resta, multiplicación y división de estos números complejos.*

$$z_1 + z_2 = 3 + 5i - 4 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = -1 + 8i$$

$$z_1 - z_2 = 3 + 5i - (-4 + 3i)$$

$$= 3 + 5i + 4 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 7 + 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i)(-4 + 3i)$$

$$= -12 + 9i - 20i + 15i^2$$

$$= -12 - 15 - 11i$$

$$z_1 \cdot z_2 = -27 - 11i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = ?$$

$$|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= 5$$

$$\bar{z}_2 = -4 - 3i$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 5i)(-4 - 3i)}{25}$$

$$= \frac{-12 - 9i - 20i - 15i^2}{25}$$

$$= \frac{-12 + 15 - 29i}{25}$$

$$= \frac{3}{25} - \frac{29}{25}i$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 2i$; $z_3 = -5 + i$. Determine el valor de:

$$M = (z_2)^2 - 3z_1 + 4\overline{z_3} - \sqrt{-64} + i^{27}$$

$$z_2^2 = z_2 \cdot z_2 = (3-2i)(3-2i)$$
$$= 9 - 6i - 6i + 4i^2$$
$$= 9 - 4 - 12i$$
$$(z_2)^2 = 5 - 12i$$

$$\overline{z_3} = -5 - i$$

$$\sqrt{-64} = 8i$$

$$i^{27} = i^{26} \cdot i$$
$$= (i^2)^{13} \cdot i$$
$$= (-1)^{13} i = -i$$

$$M = 5 - 12i - 3(2+3i) + 4(-5-i) - 8i - i$$
$$= 5 - 12i - 6 - 9i - 20 - 4i - 9i$$
$$M = -21 - 34i$$

$$i^{27} = i^{26} \cdot i$$

$$= (i^2)^{13}\, i$$

$$= (-1)^{13}\, i$$

$$= -i$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Sea $z_1 = -1 - 2i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 2$. Determine el valor de:

$$P = (z_3 - 2z_1)(2z_2 + z_1)$$

$z_3 - 2z_1 = 2 - 2(-1 - 2i)$

$= 2 + 2 + 4i$

$z_3 - 2z_1 = \underline{4 + 4i}_u$

$2z_2 + z_1 = 2(3 - i) - 1 - 2i$

$= 6 - 2i - 1 - 2i$

$= 5 - \underline{4i}_u$

$P = (4 + 4i)(5 - 4i)$

$= 20 - 16i + 20i - 16i^2$

$= 20 + 16 + 4i$

$= 36 + \underline{4i}_u$

1. Resolver: $T = \frac{2}{3+i} - \frac{2-3i}{3} + \frac{1}{2-i}$

Solución. :

$$Z_1 \cdot \overline{Z_1} = |Z_1|^2$$

$$\frac{2}{(3+i)} \cdot \frac{(3-i)}{(3-i)} = \frac{6-2i}{3^2+1^2}$$

$$= \frac{6-2i}{10}$$

$$\frac{1}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5}$$

$$T = \frac{6-2i}{10} - \frac{(2-3i)}{3} + \frac{2+i}{5}$$

$$T = \frac{3(6-2i) - 10(2-3i) + 6(2+i)}{30}$$

$$T = \frac{18 - \cancel{6i} - 20 + 30i + \cancel{12} + 6i}{30}$$

$$T = \frac{10}{30} + \frac{30i}{30} \rightarrow T = \frac{1}{3} + 3i$$

2. Sea $z_1 = a - 2i$; $z_2 = 1 - bi$; $z_3 = 4 + 3i$.
Si $z_1 + z_3 = z_2 \cdot z_3$. Hallar $a + b$

$$a - 2i + 4 + 3i = (1 - bi)(4 + 3i)$$

$$(a+4) + i = 4 + 3i - 4bi - 3bi^2$$

$$(a+4) + 1i = (4+3b) + (3-4b)i$$

$$a + 4 = 3b + 4$$

$$a = 3b$$

$$3 - 4b = 1$$

$$3 - 1 = 4b$$

$$4b = 2$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$a = 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

3. Sea $z_1 = (2, i)$; $z_2 = (1, 2i)$; $z_3 = 1 - i$.

Determine el valor de $R = \left[\frac{z_2}{z_3 - i} + \frac{z_1}{z_2}\right] \cdot z_3$

$z_1 = 2 + i$

$z_2 = 1 + 2i$

$z_3 = 1 - i$

$\frac{z_2}{z_3 - i} = \frac{1+2i}{1-i-i} = \frac{(1+2i)}{(1-2i)} \frac{(1+2i)}{(1+2i)}$

$\frac{z_2}{z_3 - i} = \frac{1+2i+2i+4i^2}{1^2+2^2}$

$= \frac{1-4+4i}{5}$

$\frac{z_2}{z_3 - i} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+i)}{(1+2i)} \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{2-4i+i-2i^2}{1^2+2^2}$

$= \frac{2+2-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

$R = \left[-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right] \cdot (1-i)$

$= \left[\frac{1}{5} + \frac{i}{5}\right)(1-i)$

$= \frac{1}{5}(1+i)(1-i) = \frac{1}{5}(1^2 + i^2)$

$R = \frac{2}{5}$

4. Sea $z_1 = (4, -3i)$; $z_2 = 1 - 2i$;
$z_3 = 4 + i$.

Determine $M = 2z_2 - 3\overline{z_1} + 3z_3$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 4 - 3i \\ z_2 &= 1 - 2i \\ z_3 &= 4 + i \end{aligned}\right\}$$

$$M = 2(1 - 2i) - 3(4 + 3i) + 3(4 + i)$$

$$= 2 - 4i - \cancel{12} - 9i + \cancel{12} + 3i$$

$$M = 2 - 10i$$

LISTO PARA MIS EJERCICIOS RETOS

UTP Universidad Tecnológica del Perú

EJERCICIOS RETOS

1. Sea $z_1 = 2 + i; z_2 = 1 + 2i; z_3 = 1 - i$. Determine el valor de $R = \left[\frac{z_2}{z_3 - i} + \frac{z_1}{z_2}\right] \cdot z_3$.

2. Hallar los números reales x e y tal que: $2x - 3iy - 2y - 5 - 10i = (x + y - 2) - (y - x + 3)i$.

3. Resolver el sistema de ecuaciones en $\mathbb{C}$. $\begin{cases} (1+i)x - iy = 2 \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$

4. Efectuar y el resultado expresar en la forma binómica.

$$\frac{5}{(1+i)(2-i)(3-i)}$$

5. Calcular $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo.

Universidad Tecnológica del Perú

Hallar los números reales x e y tal que: $2x - 3iy - 2y - 5 - 10i = (x + y - 2) - (y - x + 3)i$.

$$2x - 2y - 5 + (-3y - 10)i = (x + y - 2) - (\cancel{y} - x + 3)i$$

$$2x - 2y - 5 = x + y - 2$$

$$x - 3y = 3$$

$$-3y - 10 = x - y - 3$$

$$-10 + 3 = x - y + 3y$$

$$-\begin{cases} x + 2y = -7 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\cancel{-x} - 2y = 7$$

$$\cancel{x} - 3y = 3$$

$$-5y = 10$$

$$y = -2$$

$$x - 3y = 3$$

$$x - 3(-2) = 3$$

$$x + 6 = 3$$

$$x = 3 - 6$$

$$x = -3$$

5. Calcular $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un entero positivo.

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n \cdot (1-i)^{-2}} = \frac{(1+i)^n \cdot (1-i)^2}{(1-i)^n}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n (1-i)^2$$

$$\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{1-1+2i}{2}$$

$$= \underline{i}$$

$$= (i)^n (1-i)(1-i)$$

$$= (i)^n (1-i-i+i^2)$$

$$= (i)^n (1-1-2i)$$

$$= i^n \cdot (-2i) = \underline{-2i^{n+1}}$$

Si $\frac{a+3i}{2-i} - \frac{3+i}{1+i} = 7 + bi$. Determine $a + b$

Conclusiones

1. Considerar en las operaciones de números complejos que el valor de $i^2 = -1$.

2. Para dividir hay que usar el conjugado del denominador.

Operaciones con $\mathbb{C}$

Lo logré

Desaprende lo que te limita

FINALMENTE

Excelente tu participación

Recuerda que la práctica hace al maestro.

Ésta sesión quedará grabada para tus consultas.

PARA TI

1. Realiza los ejercicios propuestos de ésta sesión y práctica con la tarea .
2. Consulta en el FORO tus dudas.

Universidad
Tecnológica
del Perú