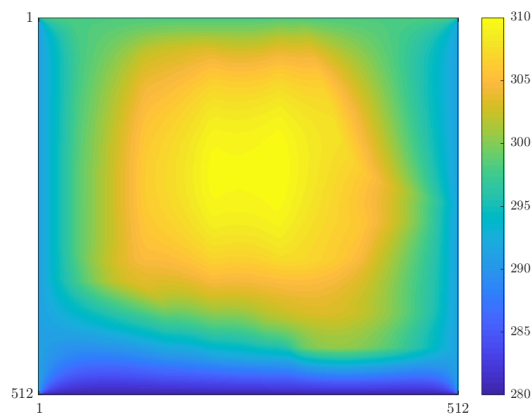


---

# Bericht – Wärmeleitung

## Auslegung einer Fußbodenheizung

30. Oktober 2018



---

im Rahmen des Moduls „Numerische Mathematik I für Ingenieurwissenschaften“  
an der TU Berlin im Sommersemester 2018

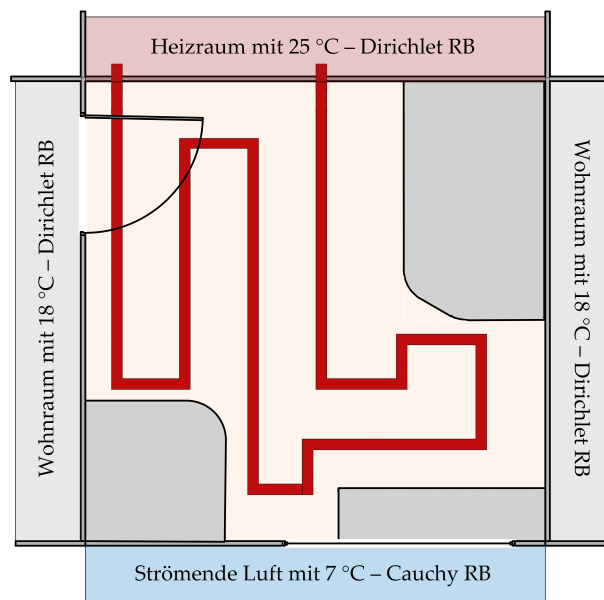
vorgelegt von der Gruppe nm1-118

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Anwendungsbeispiel</b>	<b>1</b>
<b>2. Theorieteil</b>	<b>3</b>
2.1. Grundlagen der Wärmetransportprozesse . . . . .	3
2.2. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	5
<b>3. Numerik – Finite Volumen Methode</b>	<b>10</b>
3.1. Diskretisierung des Bilanzraums . . . . .	10
3.2. Kontrollvolumengleichung . . . . .	11
<b>4. Auswertung</b>	<b>15</b>
4.1. Ergebnispräsentation der stationären Lösung . . . . .	15
4.2. Fehlerbetrachtung . . . . .	15
4.3. Ergebnisvorstellung der instationären Lösung . . . . .	18
<b>5. Fazit</b>	<b>27</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>29</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>30</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>31</b>
A.1. Grundriss . . . . .	31
A.2. Materialeigenschaften . . . . .	32
A.3. Randbedigungen . . . . .	32
A.4. Ergebnisse der stationären Lösung . . . . .	33
A.5. Exemplarische Ergebnisse der instationären Lösung . . . . .	34
A.6. Zusammenfassung Anwendungsbeispiel . . . . .	35
A.7. Größter Gradient entlang y-Achse . . . . .	35
<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>36</b>

# 1. Anwendungsbeispiel

Ein Kunde baut ein neues Einfamilienhaus und möchte nun in diesem ein Badezimmer mit einer Fußbodenheizung ausstatten, damit auch im kalten Winter ein angenehm temperierter Fußboden vorzufinden ist. Der Kunde hat sich beim Sanitäraustatter beraten lassen und kommt mit dem Grundriss seines Wunsch-Badezimmers nun zu einem Ingenieursbüro. Die Aufgabe ist es nun, eine Bewertung des Grundrisses samt der Heizung vorzunehmen und Verbesserungsvorschläge zu unterbreiten. Dafür soll ein möglichst variables und flexibles Programm entwickelt werden, welches die Temperatur im Fußboden simulieren kann. Das Badezimmer ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet: *a)* quadratischer Grundriss mit einer Wandlänge von 5 m *b)* dort wo die Dusche, die Badewanne und ein Vorsprung für Blumenkübel stehen sollen, wird aus Kostengründen kein Bodenbelag verbaut *c)* bis auf die Südseite grenzen andere Räume an das Badezimmer an *d)* es soll eine Fußbodenheizung eingebaut werden, welche den Fußboden von 15 °C in angemessener Zeit temperieren kann. Ein Bild des Grundrisses ist im Anhang auf Seite 31 angehängt. Der Grundriss des Bades wurde „abstrahiert“ und mit den ingenieursrelevanten Angaben versehen. Eine Skizze ist in Abb. 1.1 angegeben.



**Abbildung 1.1.:** Grundriss des Wunsch-Badezimmers mit relevanten Angaben für das „Ingenieursbüro“. Der Verlauf der elektrischen Fußbodenheizung ist für die bessere Visualisierung in roter Farbe in den Grundriss eingezeichnet, obwohl diese unter den verbauten Materialien liegt.

**Materialien** Für den Boden des Bades liegen Materialvorschläge vor: Der zugängliche Bereich soll mit Holz verkleidet werden, für die bebauten Flächen soll Beton vergossen werden. Die Materialeigenschaften hängen hierbei jedoch sehr von den genauen *Materialarten* ab – es gibt viele hundert Arten von Beton und Holz. Für das konkrete Anwendungsbeispiel wurde je eine Art herausgesucht. Nichtsdestotrotz können in dem Programm beliebige Materialien simuliert werden [1].

**Randbedingungen** An der Nordseite liegt ein Heizungsraum, weswegen die Temperatur der Wand dort konstant  $25^{\circ}\text{C}$  beträgt. Ähnlich ist die Temperatur in den Wänden zu den benachbarten Räumen östlich und westlich konstant  $18^{\circ}\text{C}$ . Diese Ränder werden mit einer *Dirichlet*-Randbedingung dargestellt. Zur Südseite hin befindet sich die Außenmauer des Hauses. Draußen weht Luft mit  $7^{\circ}\text{C}$ . Es wird angenommen, dass aus der Wand ein Wärmestrom abgeht. Dieser wird mit einem konvektiven Wärmeübergang simuliert.

**Quelle** Bei der Fußbodenheizung handelt es sich um eine elektrische Fußbodenheizung. Diese Art der Fußbodenheizung besteht aus dünnen Heizkabeln, welche elektrische Energie in Wärmeenergie umwandeln. Durch ihre niedrige Bauhöhe ( $< 3\text{ mm}$ ) werden sie oft direkt unter dem Fußbodenmaterial verbaut [2].

Um die Auslegung einer Fußbodenheizung samt Bewertung des Vorschlages des Sanitäraustatters vornehmen zu können, hat sich das Ingenieurbüro entschlossen, den Fußboden des Badezimmers mittels der Finiten Volumen Methode (*FMV*) diskretisiert und die Wärmeübertragung mit der Wärmeleitungsgleichung zweidimensional zu simulieren.

## 2. Theorieteil

In diesem Kapitel soll in die Grundlagen und verschiedenen Arten des Wärmetransportes eingeführt werden. Dabei bilden die Charakteristiken des molekulare Wärmetransportes den Ausgangspunkt für die Herleitung der erforderlichen Gleichungen für das Anwendungsbeispiel.

### 2.1. Grundlagen der Wärmetransportprozesse

Energie ist eine fundamentale physikalische Größe. Außerdem ist sie eine sogenannte *Erhaltungsgröße*. Das bedeutet, dass die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems immer gleich ist. Man kann daher für Systeme Bilanzgleichungen aufstellen. Energie ist ein Sammelbegriff für verschiedenen Energieformen. Sie wird nur dann als Wärme bezeichnet, wenn der Energietransport allein durch einen Temperaturunterschied zwischen mindestens zwei Systemen verursacht wird. Dabei gilt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Anschaulich ausgedrückt besagt der 2. Hauptsatz, dass Wärme immer in Richtung niedriger Temperatur fließt.

Bei dem Transport von Wärme unterscheidet man allgemein zwischen drei Arten: *a)* Wärmeleitung (auch Konduktion genannt), *b)* Wärmeübergang (auch Konvektion genannt), *c)* sowie Wärmestrahlung.

Um den Wärmetransport zu beschreiben, bedient man sich der *Kontinuumstheorie*, in welcher vereinfacht die Massenelemente eines Körpers als System betrachtet werden können.

#### 2.1.1. Molekularer Energietransport

Unter molekularem Energietransport versteht man im Allgemeinen den Energiestrom, der auf die *thermische Bewegung* der Moleküle zurückzuführen ist. Atome und Moleküle sind nicht starr, sondern bewegen sich auf der kleinsten Ebene. Diese zufälligen Bewegungen führen jedoch auf einer makroskopischen Skala zu einem diffusiven Energieaustausch. Je nach Aggregatzustand, unterscheiden sich die Bewegungen: in Flüssigkeiten und Gasen sind vorrangig Molekülstöße, in Feststoffen die Gitterschwingungen der Kristalle sowie die Bewegung der freien Elektronen in Metallen für den diffusiven Energieaustausch verantwortlich. Diese Art von Energietransport bezeichnet man als Wärmeleitung oder Konduktion. Sie basiert also auf dem Ausgleichsvorgang der kinetische Energie von benachbarten Molekülen. Notwendig ist hierfür ein vorhandener

Temperaturgradienten. Ingenieurstechnisch lässt sich die molekulare Wärmestromdichte  $q_m$  mit dem Gesetz von Fourier berechnen[3]:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \nabla T \quad (2.1)$$

$$\text{bzw. } \vec{q} = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} e_x + \frac{\partial T}{\partial y} e_y + \frac{\partial T}{\partial z} e_z \right) \quad (2.2)$$

Der molekulare Transportkoeffizient  $\lambda$  [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ] wird als *Wärmeleitfähigkeit* bezeichnet und kann als Proportionalitätsfaktor betrachtet werden. Das Minuszeichen ergibt sich aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik: Wärme strömt spontan nur in Richtung des Temperaturgefälles. Die Vektoren  $e_i$  stehen unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem für die Einheitsvektoren der Koordinatenrichtungen. Die Wärmeleitfähigkeit hängt im Allgemeinen nur von dem Druck und der Temperatur ab:  $\lambda = \lambda(T, p)$ . Für Berechnungen wird  $\lambda$  oftmals als Skalar vorausgesetzt, obwohl dies streng genommen nur für isotrope Materialien, in welchen das Wärmeleitvermögen zwar vom Ort aber nicht von der Richtung abhängig ist, gilt. Diese Eigenschaft ist besonders für unser Anwendungsbeispiel wichtig, da Holz die Wärme in Faserrichtung wesentlich besser als in Querrichtung leitet[4].

### 2.1.2. Konvektiver Wärmeübergang

Unter *Konvektion* wird eine strömende Bewegung verstanden. In einem strömenden Fluid kann Wärme auch zusätzlich zur Wärmeleitung auch durch die makroskopische Bewegung des Fluids transportiert werden. Für das Anwendungsbeispiel ist der Wärmeübergang von einem Festkörper auf ein bewegtes Fluid von besonderer Bedeutung. Konvektiver Wärmetransport zeichnet sich dadurch aus, dass der Energietransport auf die makroskopische Bewegungen des Fluids zurückzuführen ist, das Fluid also strömt. Da das Fluid in ständiger Bewegung ist, wird durch die Konvektion in der Regel der Temperaturgradient zwischen dem Festkörper und dem Fluid aufrechterhalten oder sogar verstärkt. Dadurch verbessert sich der gesamte Wärmetransport. Zur Berechnung des konvektiven Wärmeüberganges wird das erstmals von Newton[4] eingeführte *Abkühlungsgesetz* verwendet:

$$\vec{q}_W = \alpha \cdot \Delta T \quad (2.3)$$

Hierbei entspricht  $\Delta T$  das Temperaturgefälle zwischen der festen Grenzfläche und dem strömenden Fluid:  $\Delta T = (T_{\text{Festkörper}} - T_{\text{Fluid}})$ . Der Koeffizient  $\alpha$  wird als *Wärmeübergangskoeffizient* bezeichnet und ist von dem Stoff und der Geometrie der Grenzfläche abhängig. Es handelt sich daher nicht um eine Stoffgröße, sondern um eine Systemgröße welche je nach Anwendungsfall bestimmt werden muss. Der konvektive Wärmeübergang wird in dem Anwendungsbeispiel nur als Randbedingung berücksichtigt.

### 2.1.3. Wärmestrahlung

Jeder Körper mit einer positiven thermodynamischen Temperatur strahlt Energie in Form von elektromagnetischen Wellen ab. Im Vergleich zu der Wärmeleitung und dem konvektiven Wärmeübergang ist Wärmestrahlung nicht materialgebunden und kann somit auch im leeren Raum stattfinden. Die Emissionsstärke der Wärmestrahlung ist durch die thermodynamische Temperatur nach oben beschränkt. Die maximale Wärmestromdichte der von der Oberfläche eines Körpers emittierten ist durch *Stefan-Boltzmann-Gesetz* gegeben:

$$\dot{q}_S = \sigma T^4 \quad (2.4)$$

wobei  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Strahler, die den Maximalwert der Wärmestromdichte erreichen, werden *Schwarze Strahler* genannt. Diese sind idealisiert und treten nicht in der Realität auf. Die spezifische Wärmestromdichte realer Strahler wird mittels eines Korrekturfaktors  $\epsilon(T) \leq 1$  angegeben:

$$\dot{q}_S = \epsilon(T) \cdot \sigma T^4 \quad (2.5)$$

In dem Anwendungsbeispiel soll nur Wärmeleitung und konvektiver Wärmetransport in Randbedingung betrachtet werden. Daher wird Wärmestrahlung nicht weiter berücksichtigt.

## 2.2. Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

### 2.2.1. Grundlagen der Bilanzgleichung

Jede Erhaltungsgröße kann bilanziert werden. Wichtig ist hierbei eine exakte Definition des Bilanzgebietes. Als Bilanzgebiet kann bspw. eine vollständige Anlage, Teile oder bzw. ein Teil davon, ein gesamter Körper oder nur ein differentielles Volumenelement bezeichnet werden. Die Grenze des Gebiets kann eine Wand, Oberfläche oder eine imaginäre Fläche sein, die in einer dreidimensionalen Betrachtungsweise das System komplett einschließt. Man unterscheidet zwischen einer integralen und differentiellen Bilanzgleichung. Integrale Bilanzen beschreiben die in ein System insgesamt ein- und austretende Ströme. Differentielle Bilanzen werden verwendet, um das Feld der Erhaltungsgröße zu untersuchen.

Allgemein ist die Bilanzgleichung einer Erhaltungsgröße durch folgende Gleichung definiert:  $\dot{S} = \dot{Z} - \dot{A} + \dot{W}$ . Hierbei ist  $\dot{S}$  die Änderung der im System gespeicherten Menge der entsprechenden Erhaltungsgröße,  $\dot{Z}$  die in das System eintretenden und  $\dot{A}$  die aus dem System austretenden Ströme. Die Zuströme  $\dot{Z}$  und Abströme  $\dot{A}$  umfassen sowohl den konvektiven, molekularen als auch stoffungebunden Transport.  $\dot{W}$  ist der Wandlungsterm. Diese noch unbestimmte Darstellung der allgemeinen Bilanzgleichung lässt sich in einer mathematischen, vektoriellen Schreibweise

ausdrücken:

$$\underbrace{\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega}_{\text{Speicherterm}} = - \underbrace{\oint_{\Gamma_t} \left[ \underbrace{\Phi(\vec{v} - \vec{u})}_{\text{konvektiver Term}} + \underbrace{\vec{q}}_{\text{diffusiver Term}} \right] \cdot \vec{v} d\Gamma}_{\text{Zu- und Abfuhrterm}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \pi d\Omega}_{\text{Wandlungsterm}} \quad (2.6)$$

In dieser Schreibweise stellt  $\xi$  eine beliebige extensive Zustandsgröße dar. Extensive Zustandsgrößen sind Größen, die fest für einen Raum, für eine Fläche oder Kurven definiert sind und deswegen bei einer gedachten Teilung des Systems auf die jeweiligen Teilsysteme proportional aufgeteilt werden.  $\Phi$  ist eine beliebige intensive, volumenspezifische Zustandsgröße und  $\Omega$  das zugehörige Volumen. Intensive Zustandsgrößen sind Größen, die für jeden Punkt definiert sind und deshalb Funktionen des Ortes sind. Im Gegensatz zu einer extensiven Zustandsgröße wird sie bei einer gedachten Teilung eines Systems nicht aufgeteilt. Der Rand des Bilanzgebietes wird durch  $\Gamma_t$  beschrieben, wobei  $\vec{v}$  der Normalenvektor dieser Randfläche ist. Der Geschwindigkeitsvektor der Materie wird durch  $\vec{v}$  ausgedrückt, während der Geschwindigkeitsvektor des Bilanzraumes durch  $\vec{u}$  ausgedrückt wird.  $\vec{q}$  stellt die Flussdichte einer Erhaltungsgröße dar. Letztlich ist mit  $\pi$  der Quellterm bzw. der Wandlungsterm im Bilanzgebiet gegeben. Auf der linken Seite (Seite des Speicherterms) hängen sowohl die extensive Zustandsgröße  $\xi$  als auch das Bilanzvolumen  $\Omega_t$  von der Zeit ab. Um diese Verknüpfung aufzulösen wird die Definition der Ableitung angewendet und dazu ein „Nullterm“ addiert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega_{t+\Delta t}} \Phi_{t+\Delta t} d\Omega - \int_{\Omega_t} \Phi_t d\Omega + \int_{\Omega_t} \Phi_{t+\Delta t} d\Omega - \int_{\Omega_t} \Phi_{t+\Delta t} d\Omega}{\Delta t} \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta \Omega} \Phi_{t+\Delta t} d\Omega}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Besitzt das Bilanzvolumen eine Geschwindigkeit  $\vec{u}$ , kann sich das Bilanzvolumen mit der Zeit vergrößern oder verkleinern. Die zeitliche Änderung des Bilanzvolumens entspricht dem Flächenintegral der Strecke des Gebiets über alle Ränder. Dieser Zusammenhang wird als das Reynold'sche Transporttheorem bezeichnet. Aus der Gleichung 2.7 ergibt sich dann:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Phi d\Omega = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma_t} \Phi_{t+\Delta t} \Delta t \vec{u} \cdot \vec{v} d\Gamma}{\Delta t} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Gamma_t} \Phi \vec{u} \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (2.8)$$

Es wird nun gefordert, dass das betrachtete Bilanzgebiet  $\Omega$  stetig differenzierbar sei. An dieser Stelle kann dann der Gauß'sche Integralsatz verwendet werden. So erhält man anschließend die allgemeine Bilanzgleichung in ihrer integralen Form:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi \vec{u} d\Omega = - \oint_{\Gamma_t} [\Phi(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{q}] \cdot \vec{v} d\Gamma \quad (2.9)$$

### 2.2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

In dem vorliegenden Anwendungsbeispiel wird eine Fragestellung im Bereich des Wärmetransports innerhalb eines quadratischen Fußbodens betrachtet. Es wird daher die Energie in der „obersten



Schicht“ des gesamten Bodens bilanziert. Die Bilanzgrößen umfassen die massenspezifische innere Energie  $u$ , die massenspezifische kinetische Energie  $e_k$  und die massenspezifische potentielle Energie  $e_p$ . Der Bilanzraum ist für einen unbeweglichen Festkörper als fest definiert, daraus folgt:

$$e_p = e_k = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{und } \vec{u} = \vec{v} = 0 \quad (2.11)$$

Nun kann die zeitliche Änderung der massenspezifischen inneren Energie  $u$  bilanziert werden. Diese ist eine Funktion der Temperatur und des Volumens. Es wird das totale Differential gebildet:

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \quad (2.12)$$

. Im Falle eines festen Körpers kann dieser als inkompressibel betrachtet werden – die Änderung der inneren Energie nach dem Volumen ist gleich Null. Der Ausdruck  $\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v := c_v$  wird als isochore Wärmekapazität bezeichnet. Diese Größe ist zwar von der Temperatur abhängig, kann jedoch für einen kleinen Temperaturbereich als konstant angenommen werden. Für ein inkompressibles Material ist die isochore Wärmekapazität gleich der isobaren Wärmekapazität ( $c_v = c_p = c$ ). Dies rührt daher, dass per Definition bei inkompressiblen Materialien die Volumenänderung bei verändertem Druck gleich Null ist. Die Integration des totalen Differentials ergibt:

$$\int_{u_0}^{u(T)} du = c \int_{T_0}^T dT \quad \leftrightarrow \quad u(T) = u_0 + c(T - T_0) \quad (2.13)$$

Der diffusive Term der allgemeine Bilanzgleichung (Gl. 2.9) kann im Falle des Anwendungsbeispiels mit der Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.1) beschrieben werden. Das Volumen des Bereichs sei  $V$  und seine Oberfläche werde mit  $A$  bezeichnet. Zusammenfassen der Gleichungen (2.13) und (2.9) ergibt:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho(u_0 + c(T - T_0))}{\partial t} dV &= - \oint_A -\lambda \cdot \nabla T \cdot \vec{v} dA + \int_V \pi dV \\ \Rightarrow \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV &= \oint_A \lambda \nabla T \cdot \vec{v} dA + \int_V \pi dV \end{aligned} \quad (2.14)$$

welches als integrale Wärmeleitungsgleichung bezeichnet wird. Weiter kann angenommen werden, dass die Funktion  $\lambda \nabla T$  in dem betrachteten Volumen stetig differenzierbar ist. Somit darf der Gauß'sche Integralsatz verwendet werden:

$$\oint_A \lambda \nabla T \cdot \vec{v} = \int_V \operatorname{div}(\lambda \nabla T) dV \quad (2.15)$$

Auch die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  kann in dem betrachteten Temperaturintervall als konstant angenommen werden. Die Gleichung 2.15 wird in 2.14 eingesetzt und anschließend integriert [4]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \pi \quad (2.16)$$

## Betrachtung des Quellterms

Im Abschnitt 2.1 wurde bereits erwähnt, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist. Wärme dagegen ist eine Prozessgröße. Als Form der Energie kann sie daher ohne Transportströme „erzeugt“ bzw. „verbraucht“ werden. Dieses Phänomen liegt beispielsweise bei einer chemischen Reaktion vor. Durch die Reaktionsenthalpie lässt sich die Bindungsenergie der an der Reaktion beteiligten Molekülen in Wärme umwandeln. Diese Veränderung der Wärme in dem Bilanzgebiet wird durch den Quellterm beschrieben. Der Quellterm kann demnach auch temperaturabhängig sein, es gilt:  $\pi_p = f(T_p)$ . In dem Anwendungsbeispiel wird ein Wärmefluss aus der elektrischen Fußbodenheizung in das System betrachtet. Durch die vernachlässigbare Dicke der Heizung, wird angenommen, dass diese kein Teil des Bodens ist sondern direkt „unter“ der obersten Fußbodenschicht liegt. Die Heizung ist so dünn und der Widerstand des molekularen Wärmetransportes von der Heizung in die direkt darüber liegende Fußbodenschicht praktisch vernachlässigbar klein. Da der Quellterm damit nur noch von der elektrischen Leistung der Fußbodenheizung abhängt, wird der Quellterm  $\pi$  als temperaturunabhängig angenommen, welcher einen konstanten Wärmefluss ( $\pi_p = \text{konst.}$ ) besitzt.

### 2.2.3. Grenzbedingungen

Die Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.16) ist eine Differentialgleichung, um das Temperaturfeld im Inneren des Volumens  $V$  zu bestimmen. Damit lässt sich die gesuchte Funktion  $T$  noch nicht vollständig bestimmen, denn der Körper mit dem Volumen  $V$  ist zeitlich und örtlich nicht unendlich ausgedehnt und mehrere Grenzbedingungen müssen festgelegt werden. Diese Grenzbedingungen setzen sich aus der zeitlichen Anfangsbedingung und aus den örtlichen Randbedingungen an den Bilanzgrenzen zusammen.

Die Anfangsbedingung beschreibt das Temperaturfeld in jedem Punkt innerhalb des Volumens zu einem konkreten Zeitpunkt  $t_0$ :

$$T(\vec{x}, t = 0) = T_0(\vec{x}) \quad (2.17)$$

Die Randbedingungen allgemein gefasst die örtliche Bedingungen für die Randfläche eines Körpers. Diese werden in drei Arten unterteilt:

- 1. Art: Dirichlet-Randbedingung  
Der Temperatur- bzw. der Funktionswert an einem Rand wird vorgegeben.
- 2. Art: Neumann-Randbedingung  
Das Gradienten des Temperaturwertes an einem Rand wird vorgegeben.
- 3. Art: Cauchy-Randbedingung  
Sie stellt eine Linearkombination von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen. Der Wert und die Ableitung der Temperatur an einem Rand wird vorgegeben.

Eine Übersicht der Randbedingungen mit den zugehörigen mathematischen Funktionen für das Anwendungsbeispiel ist mit Tabelle A.2 im Anhang gegeben.

## 3. Numerik – Finite Volumen Methode

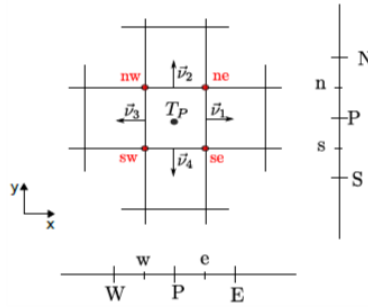
Im vorherigen Kapitel wurde die Differentialgleichung zur Beschreibung des Wärmetransportes in einem Festkörper hergeleitet. Für Spezialfälle, beispielsweise für die eindimensionale Betrachtung, lässt sich diese Gleichung analytisch exakt lösen. Für zwei- und dreidimensionale Problemstellungen ergeben numerische Verfahren akzeptable und gleichzeitig wenig aufwändige Lösungen. Um die hergeleitete Wärmeleitungsgleichung (Gl 2.16) in einem numerischen Verfahren lösen zu können, muss die Wärmeleitungsgleichung zunächst mittels der Finiten Volumen Methode (FVM) diskretisiert werden. Mit dieser Methode wird für den stationären Fall die allgemeine Kontrollvolumengleichung (KVG) hergeleitet, welche sich für den instationären Fall anschließend um den zeitabhängigen Term erweitern lässt. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung kann darüber hinaus auch zeitlich diskretisiert werden. Die instationäre Gleichung wird dann mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren, als auch mit dem Crank-Nicolson Verfahren gelöst.

### 3.1. Diskretisierung des Bilanzraums

Die FVM beruht darauf, dass das zu bilanzierenden Volumen in eine endliche (finite) Anzahl an kleineren Rechengebieten, den Kontrollvolumen, zerlegt wird. Aus diesen Gebieten (den finiten Volumen) wird ein Funktionsverlauf berechnet, der global die Differentialgleichung mit sämtlichen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt. Die FVM gilt demzufolge als eine konservative Methode, denn die Erhaltungseigenschaft der bilanzierten Größe wird in jedem einzelnen Kontrollvolumen gewährleistet.

Als Rechengebiet können verschiedene Geometrien ausgewählt werden. Um die Fragestellung des Anwendungsbeispiels zu beantworten wird die oberste Schicht des Fußbodens in endlich viele kleine Quadrate aufgeteilt. Dabei wird die Bedingung erfüllt, dass sich Quadrat einerseits nicht überlagern und sich andererseits keine Lücken zwischen ihnen bilden dürfen. In der Mitte, dem so genannten „Schwerpunkt“ dieser Quadrate befinden sich die Rechenpunkte. Innerhalb der Quadrate herrscht überall die gleiche Temperatur und es liegen dieselben Stoffeigenschaften vor, da es sich nur um ein Material handeln kann. Das Kontrollvolumen entspricht folglich so einem Quadrat. Für die Berechnung werden die Quadrate vollständig durchnummeriert. Die Nummerierung der Quadrate beginnt oben links, geht die Spalte weiter nach unten und anschließend wieder einer Spalte weiter rechts von oben los. Die Nummerierung endet daher unteren rechten Ecke. Es handelt sich also insgesamt um eine Diskretisierung mit strukturiertem Gitter und mit *cell-centered* Rechenpunkten. Eine Darstellung des Gitters kann Abbildung 3.1 entnommen werden. Neben dem ausgewählten

Diskretisierungsverfahren gibt es noch weitere Verfahren, die sich auf unstrukturierte Gitter und der *cell-vertex*-Methode beruhen. In der *cell-vertex*-Methode sind die Rechenpunkte in den Ecken der Zellen definiert. Die Kontrollvolumen sind somit nicht mehr identisch mit den definierten Gitterzellen.



**Abbildung 3.1.:** Abbildung des Gitters und Darstellung der Kompassnotation mit den verwendeten Indizes

## 3.2. Kontrollvolumengleichung

Bei der FVM wird das Bilanzgebiet in  $N$  Kontrollvolumen zerlegt. Jedes einzelne Kontrollvolumen ist zu bilanzieren. Dafür muss eine passende Gleichung aus der Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.16) hergeleitet werden.

### 3.2.1. Stationärer Fall

Bei der stationäre Lösung einer Gleichung wird der Fall betrachtet, in welchem keine zeitliche Änderung der betrachteten Größe vorhanden ist. In dem vorliegenden Fall wird die innere Energie  $u$  betrachtet. Es wird demnach der Gleichgewichtszustand der inneren Energie des gesamten Körpers untersucht. Folglich fällt den zeitabhängige Speicherterm der Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.16) weg:  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . Dieser wird in der Herleitung aus der Wärmeleitungsgleichung in Abschnitt 2.2.2 noch berücksichtigt. Die Gleichung 2.14) vereinfacht sich dann zu:

$$0 = \oint_{\Gamma_{ij}} \lambda \nabla T \cdot \vec{v} d\Gamma + \int_{\Omega_{ij}} \pi d\Omega \quad \forall i, j \quad (3.1)$$

Diese Gleichung gilt für jedes Kontrollvolumen  $i, j$ . Bei einer zweidimensionalen Betrachtung besitzt jedes Kontrollvolumen vier benachbarte Kontrollvolumen. In jedes findet Wärmeleitung statt, weswegen diese in das Flächenintegral einzubeziehen sind. Zur weiteren Berechnung wird die Kompassnotation (siehe Abbildung 3.1) eingeführt. Die Gleichung (3.1) lässt sich somit umschreiben.

Die jeweiligen Normaleneinheitsvektoren werden ebenfalls angegeben:

$$0 = \sum_{k=1}^4 \left( \int_{\Gamma_{ij}} \lambda \nabla T \cdot \vec{v}_k \, d\Gamma \right) + \int_{\Omega_{ij}} \pi \, d\Omega \quad (3.2)$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Ab hier werden durch Approximationen der Gleichung Fehler erzeugt. Beispielsweise wird die Mittelpunktsregel zur Approximation der Integrale angewendet. Setzt man die Normaleneinheitsvektoren in Gleichung 3.2 ein, ergibt sich:

$$0 = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e \Delta y - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n (-\Delta x) + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w (-\Delta y) - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s \Delta x + \pi_P \Delta x \Delta y + O(h^2) \quad (3.4)$$

Der Term  $O(h^2)$  entspricht dem Approximationsfehler der Mittelpunktsregel und beschreibt den Fehler in beide Richtungen des Koordinatensystems:  $O(h^2) = O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$ . Das liegt an der äquidistanten Struktur des Gitters. Der Fehler ist quadratisch, da es sich um ein lineares Approximationsverfahren handelt. Für die Berechnung der partiellen Ableitungen wird der zentrale Differenzenquotient verwendet. Die Gleichung 3.4 vereinfacht sich dann zu:

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda_e \frac{(T_E - T_P)}{\delta_e} \Delta y + \lambda_n \frac{(T_N - T_P)}{\delta_n} \Delta x + \lambda_w \frac{(T_W - T_P)}{\delta_w} \Delta y \\ & + \lambda_s \frac{(T_S - T_P)}{\delta_s} \Delta x + \pi_P \Delta x \Delta y + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der numerische Fehler in diesem Schritt beträgt  $O(\delta_e^2) + O(\delta_n^2) + O(\delta_w^2) + O(\delta_s^2)$  und wird zu dem Term  $O(h^2)$  addiert, denn der Abstand zwischen zwei benachbarten Rechenpunkten entspricht der Länge eines FVM-Elementes. Diese Vereinfachung ist der Wahl des strukturierten Gitters und der *cell-centered* Methode bei der Diskretisierung zu verdanken. Der äquidistante Gitterabstand führt ebenfalls dazu, dass sich die Terme  $\frac{\Delta x}{\delta_i}$  und  $\frac{\Delta y}{\delta_i}$  zu 1 verkürzen.

Durch beide Approximationen ist die integrale Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.14) diskretisiert. Der Approximationsfehler  $O(h^2)$  wird nicht mehr explizit angegeben, soll aber später noch weiter untersucht werden. Man erhält für das ausgewählte Diskretisierungsverfahren die sogenannte Kontrollvolumengleichung:

$$-a_P T_P + a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S = -\tilde{S}_P \quad (3.6)$$

$$\text{mit } a_P = a_W + a_E + a_N + a_S \quad (3.7)$$

$$\text{und } a_W = \lambda_W, \quad a_E = \lambda_E, \quad a_N = \lambda_N, \quad a_S = \lambda_S \quad (3.8)$$

$$\text{sowie } \tilde{S}_P = \pi_P \Delta x \Delta y + (\text{weitere Randbedingungen}) \quad (3.9)$$

Der Term  $\tilde{S}_P$  in Gleichung (3.9) beinhaltet formal nicht nur den Quellterm der Wärmeleitungsgleichung (2.16), sondern auch die Randbedingungen, wie es im Abschnitt 2.2.3 erläutert wurde. Gemäß der Konvention für die Durchnummerierung der Rechenpunkte (der einzelnen Gitterelemente) lassen sich die Koeffizienten  $a_P, a_W, a_N, a_S, a_E$  als Matrix  $A$  darstellen. Der horizontale Abstand zwischen  $a_S$  und  $a_E$  in der Matrix  $A$  beträgt  $(n - 1)$  Elemente, analog beträgt der vertikale Abstand

zwischen  $a_N$  und  $a_W$  1 Element. Abgesehen von den fünf Diagonalen, werden alle anderen Einträge mit Nullen besetzt. Die hier angegebene Matrix wurde für eine bessere Anschaulichkeit mit einem  $n = 2$  aufgestellt. In dem Programm wird als kleinstes  $n$  ein  $n = 4$  verwendet.

$$A = \begin{pmatrix} -a_P & a_S & & a_E & & 0 \\ a_N & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & a_E \\ a_W & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & a_S \\ 0 & & a_W & & a_N & -a_P \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.2.2. Instationärer Fall

Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.6) umfasst die Zu- und Abfuhrterme sowie den Quellterm in einer Bilanzgleichung. Wird die instationäre Lösung untersucht, lässt sich diese in die integralen Wärmeleitungsgleichung (Gl. 2.14) einsetzen:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = -a_P T_P + a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + \tilde{S}_P \quad (3.11)$$

Es ist weiterhin zu erwähnen, dass auf der rechten Seite der Gitterfehler der Größenordnung  $O(h^2)$  vorhanden ist. Mit der Annahme, dass der Festkörper inkompressibel ist und nur ein kleiner Temperaturbereich betrachtet wird, werden die Materialeigenschaften als konstant vorausgesetzt. Bei dem Anwendungsbeispiel trifft dies auf die Dichte  $\rho$  und die Wärmekapazität  $c$  zu. Die Reihenfolge der Integration und der Differentiation wird dazu vertauscht und das Volumenintegral kann erneut mit der Approximation der Mittelpunktsregel berechnet werden:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \rho_P c_P \frac{\partial \left( \int_{\Omega} T d\Omega \right)}{\partial t} = \rho_P c_P \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta y \quad (3.12)$$

Durch die Approximation tritt ein weiterer Fehler  $O(h^2)$ , ähnlich wie in Abschnitt 3.2.1, auf, welcher analog nicht explizit aufgeführt wird. Setzt man die Gleichung 3.12 in die Gleichung 3.11 ein, ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$f(y(t), t) = \frac{\partial T_P}{\partial t} = \frac{-a_P T_P + a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + \tilde{S}_P}{\rho_P c_P \Delta x \Delta y} \quad (3.13)$$

### Zeitdiskretisierungsverfahren

Die Gleichung 3.13 entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung für ein gegebenes Anfangswertproblem  $\dot{y} = f(y(t))$ . Für die numerische Lösung ist der Wert des Temperaturfeldes im nächsten Zeitschritt aufschlussreich. Man integriert folglich für einen sehr kleinen Zeitschritt  $\Delta t$  und erhält:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(y(\tau), \tau) d\tau \quad (3.14)$$

Der Term  $\int_t^{t+\Delta t} f(y(\tau), \tau) d\tau$  lässt sich jedoch nur in speziellen Fällen analytisch lösen. Aus diesem Grund wird die Differentialgleichung diskretisiert und numerisch gelöst. Dafür wird angenommen, dass der Zeitschritt  $\Delta t$  ein sehr kleines Zeitintervall beschreibt und deshalb die Funktion  $f(y(t), t)$  in diesem entweder monoton steigt oder fällt. Die Integralrechnung erfüllt demnach folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) \cdot \Delta t &\leq \int_t^{t+\Delta t} \dot{y} d\tau \leq \dot{y}(t + \Delta t) \cdot \Delta t \quad \text{für monoton steigend} \\ \dot{y}(t + \Delta t) \cdot \Delta t &\leq \int_t^{t+\Delta t} \dot{y} d\tau \leq \dot{y}(t) \cdot \Delta t \quad \text{für monoton fallend} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mit dieser Überlegung kann die Gleichung 3.14 approximiert werden:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot ((1 - \gamma) \cdot \dot{y}(t) + \gamma \cdot \dot{y}(t + \Delta t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.16)$$

Durch die Approximation selbst entsteht der Zeitschrittfehler  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ . Der Gewichtungsfaktor  $\gamma$  mit  $0 \leq \gamma \leq 1$  stellt den Anteil der impliziten oder expliziten Methode dar. Je nach Auswahl dieses Faktors entwickeln sich unterschiedliche numerische Verfahren. Zum Lösen des Anwendungsbeispiels werden folgende drei Verfahren verwendet:

1. der explizite Euler mit  $\gamma = 0$ ,
2. das Crank-Nicolson Verfahren mit  $\gamma = 0.5$ ,
3. und schließlich der implizite Euler mit  $\gamma = 1$ .

Durch Einsetzen der Differentialgleichung (Gl. 3.13) in die Gleichung 3.16 wird die instationäre Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.17) erhalten [5]. Dabei werden die Indices  $T^0 = T(t)$  und  $T^1 = T(t + \Delta t)$  verwendet. Es gilt ebenfalls  $\Delta x = \Delta y \Rightarrow \Delta x \Delta y = h^2$

$$\begin{aligned} T_P^1(\gamma) = T_P^0 &+ \frac{\Delta t \cdot \gamma}{\rho_{PC} p h^2} (-a_P T_P^1 + a_W T_W^1 + a_E T_E^1 + a_N T_N^1 + a_S T_S^1 + \tilde{S}_P) \\ &+ \frac{\Delta t \cdot (1 - \gamma)}{\rho_{PC} p h^2} (-a_P T_P^0 + a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + a_N T_N^0 + a_S T_S^0 + \tilde{S}_P) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Zur Lösung der Gleichung 3.17 wird diese ebenfalls in Matrizendarstellung umgeformt. Zunächst sei der Faktor  $P = (\rho_{PC} p h^2)^{-1}$  für jedes Gitterelement spezifisch, da dieser von den Materialeigenschaften abhängig ist. Unter Berücksichtigung der Durchnummerierung der Rechenpunkte und der im Abschnitt 3.2.1 definierten Matrix  $A$  (Gl. (3.10)) lässt sich die instationäre Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.17) umformen. Die Operation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  stellt die skalare, elementweise Multiplikation von Matrizen oder Vektoren dar. Bei der Matrix  $I$  handelt es sich um die Einheitsmatrix.

$$A_{inst} \cdot T^1(\gamma) = S_{inst} \quad (3.18)$$

$$A_{inst} = I - (\langle \Delta t, \gamma, P \rangle \cdot A) \quad (3.19)$$

$$S_{inst} = (I - (\langle \Delta t, (1 - \gamma), P \rangle \cdot A) \cdot T^0 - \langle \Delta t, P \rangle \cdot S \quad (3.20)$$



## 4. Auswertung

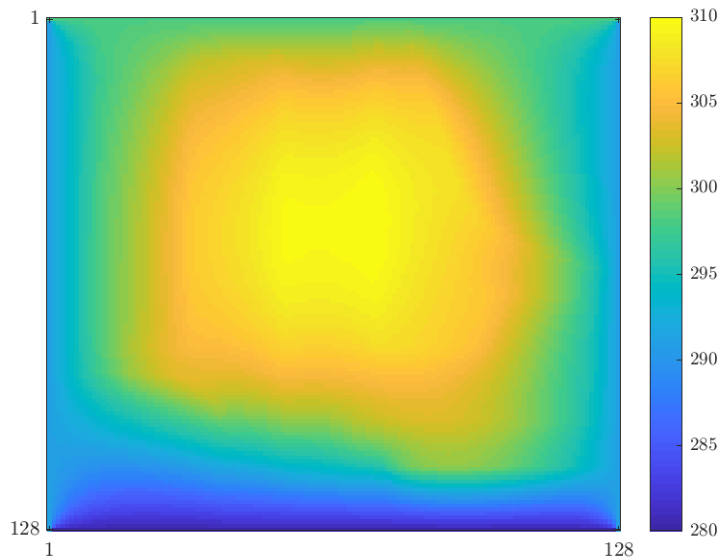
In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der stationären und instationären Lösung präsentiert. Vor der Präsentation der instationären Lösung wird jedoch zunächst eine Fehlerbetrachtung, eine Neumann-Stabilitätsanalyse und eine Zeitschrittanalyse durchgeführt, um die optimalen Parameter zu identifizieren. Anschließend wird dann mit diesen Parametern die instationäre Lösung mit dem impliziten-, expliziten Euler und dem Crank-Nicolson-Verfahren berechnet und anschließend miteinander verglichen.

### 4.1. Ergebnispräsentation der stationären Lösung

Für das Anwendungsbeispiel wurde die stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung berechnet. Das Ergebnis der stationären Wärmeleitungsgleichung ist in Abb. 4.1 dargestellt. Es lassen sich sehr gut die verschiedenen Randbedingungen identifizieren. Erwartungsgemäß findet sich an der Südseite des Raumes die kälteste Temperatur vor. Dies liegt an der Cauchy-Randbedingung, welche hier einen Wärmestrom aus dem Material heraus beschreibt. An den anderen Rändern kann bei genauem Hinsehen die konstante Temperatur der Wände betrachtet werden. Dies lässt sich besonders gut bei geringen Auflösungen erkennen, hierzu sei auf den Anhang ab Seite 33 verwiesen. Die Temperatur des Fußbodens liegt zwischen circa.  $7^{\circ}\text{C}$  und  $37^{\circ}\text{C}$ . Das Temperaturmaximum befindet sich in der Mitte des Raumes, damit ist der Fußboden zu heiß um angenehm begehbar zu sein. Dennoch kann man die unterschiedlichen Materialien gut erkennen. Der Boden aus Beton ist an den bläu- und grünlichen Farben gut zu erkennen. Das liegt an der wesentlich geringen Wärmeleitfähigkeit von Beton. Diese beträgt nur 0.86 % der Wärmeleitfähigkeit von Holz. Der Verlauf der Fußbodenheizung ist wesentlich schwerer zu erkennen. Dennoch können bei genauer Betrachtung zwei vertikale hellgelbe Streifen in der Mitte des Raums erkannt werden. Das Temperaturprofil lässt bereits erahnen, dass die elektrische Fußbodenheizung zunächst wenig Einfluss auf die Temperatur hat und die Randbedingungen einen großen Einfluss haben. Am Ende jedoch prägt die Fußbodenheizung das stationäre Temperaturfeld im Fußboden.

### 4.2. Fehlerbetrachtung

Idealerweise ist der Körper bei der Bilanzierung in unendlich viele Rechenpunkten zu zerlegen und die ODE in unendlich kleinen Zeitschritten zu iterieren, um eine exakte Lösung der Wärmelei-



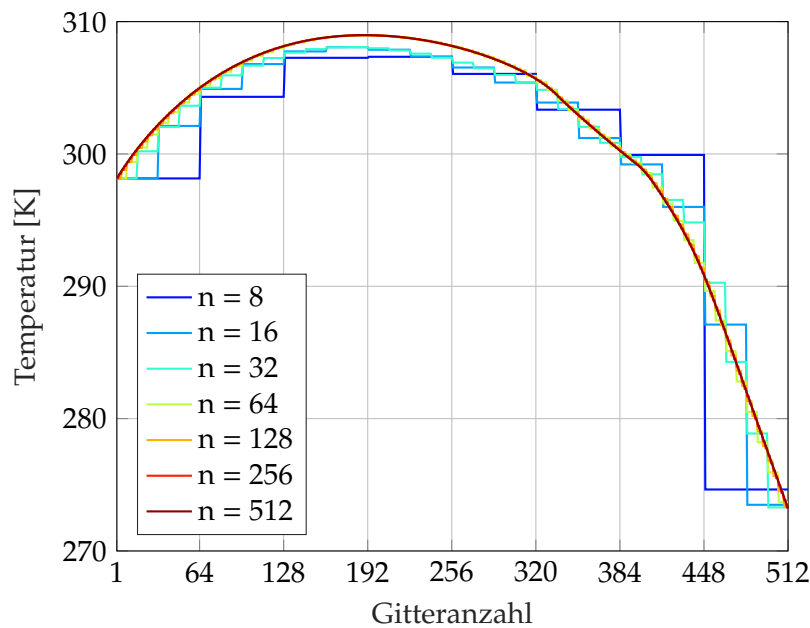
**Abbildung 4.1.:** Ergebnis der stationären Lösung für das Anwendungsbeispiel bei einer Gittergröße von  $128 \times 128$  Finiten-Volumen-Elementen. Die Einheit der Colormap ist in Kelvin.

tungsgleichung (Gl. 2.16) zu erhalten. Diese würde bei einem numerischen Verfahren jedoch auch eine unendlich große Rechenleistung benötigen und ist somit unmöglich zu erreichen. Im Kapitel 3 wurde festgestellt, dass der numerische Fehler durch Approximation der Integration (Mittelpunktsregel) bzw. der Differentiation (zentraler Differenzenquotient) in der Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.6 und Gl. 3.17) entsteht. Diese Approximationen soll nun weiter untersucht werden.

#### 4.2.1. Gitteranalyse

Die Anzahl der Gitterelemente  $n$  in einer Koordinatenachse wird im folgendem als die Auflösung des Gitters bezeichnet. Die Auflösung beeinflusst bei einer festgelegten Raumgeometrie von  $4 \times 4 \text{ m}^2$  direkt die Gittergröße. Um zu untersuchen, wie sich der Fehler bezüglich der Gittergröße verhält, sind stationäre Lösungen verschiedener Gittergröße genauer zu untersuchen.

Zunächst wird der größte Temperaturgradient entlang einer Achse in jedem  $(n \cdot n)$  Gitter bestimmt. In dem Anwendungsbeispiel ist der größte Temperaturgradient entlang der  $y$ -Achse in der Mitte des Gitters. Der Temperaturverlauf entlang dieser Schnittachse ist für verschiedene Auflösungen in Abb. 4.2 dargestellt. Es erscheint ebenfalls sinnvoll, den Gradienten entlang der  $y$ -Achse zu betrachten, da der größte Gradient entlang der  $x$ -Achse zwangsläufig immer auf unterste Zeile mit der Cauchy-Randbedingung fällt. Eine Übersicht in welcher Spalte der größte Gradient vorliegt ist im Anhang in Tabelle A.5 gegeben. Die prozentuale Position der Spalte unterscheidet sich leicht von der gegebenen Auflösung, da bei Auflösungen  $n \leq 32$  die Auflösung nicht fein genug ist. Auf den ersten Blick ist gut zu erkennen, dass eine geringe Auflösung ( $n \leq 32$ ) des Gitters einen relativ ungenauen und „abgehackten“ Temperaturverlauf entspricht. Erst ab einer Auflösung  $n \geq 64$



**Abbildung 4.2.:** Temperaturverlauf entlang der Schnittachse mit dem größten Temperaturgradient (y-Achse).

kann der „stetige“ Temperaturverlauf überhaupt erkannt werden. Mathematisch lässt sich der so genannte Gitterfehler als relativer Fehler berechnen:

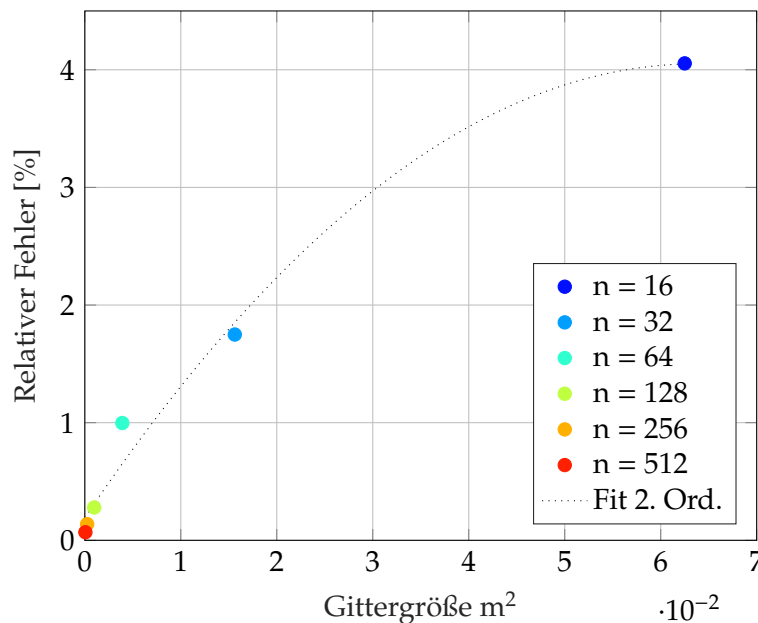
$$\delta_{\text{Rel}} = \frac{\|T_2 - T_1\|_{\infty}}{\|T_1\|_{\infty}} \cdot 100\% \quad (4.1)$$

Der relative Fehler ergibt sich aus dem maximalen Temperaturunterschied zwischen dem Temperaturfeld mit einer höheren Gitterauflösung  $T_2$  und dem Temperaturfeld mit einer niedrigeren Gitterauflösung  $T_1$ , geteilt durch den höchsten Temperaturwert von  $T_1$ . Der relative Fehler wird anschließend gegen die jeweilige Gittergröße der höheren Gitterauflösung  $T_2$  aufgetragen. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.3 dargestellt. Je höher die Auflösung des Gitters, desto kleiner wird der relative Fehler. Interessanterweise ist dabei zu erkennen, dass der relative Fehler quadratisch mit der Gittergröße steigt. Dies bestätigt die Annahme, dass der Fehler der stationären Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.6) proportional zu der Gittergröße  $O(h^2)$  ist.

Eine Darstellung dieser Ergebnisse mit weniger Kurven zur besseren Visualisierung ist in Abb. 4.4 gegeben. In der Abbildung ist erkennbar, dass sich eine Gitterauflösung von  $n = 64$  sich nur minimal zu dem Ergebnis mit einer Gitterauflösung von  $n = 128$  unterscheidet. Daher haben wir eine Gitterauflösung von  $n = 64$  für das Anwendungsbeispiel das Optimum festgelegt, da es bei geringem Aufwand ein ausreichend gutes Ergebnis liefert.

#### 4.2.2. Akzeptanz des Gitterfehlers

Mit der bisherigen Berechnung des relativen Fehlers lässt sich das Verhalten des Gitterfehlers gut darstellen. Die Berechnung gibt jedoch keine Aussage darüber an, wie „gut“ das Ergebnis im Vergleich zu der exakten analytischen Lösung ist. Zu diesem Zweck ist der relative Fehler



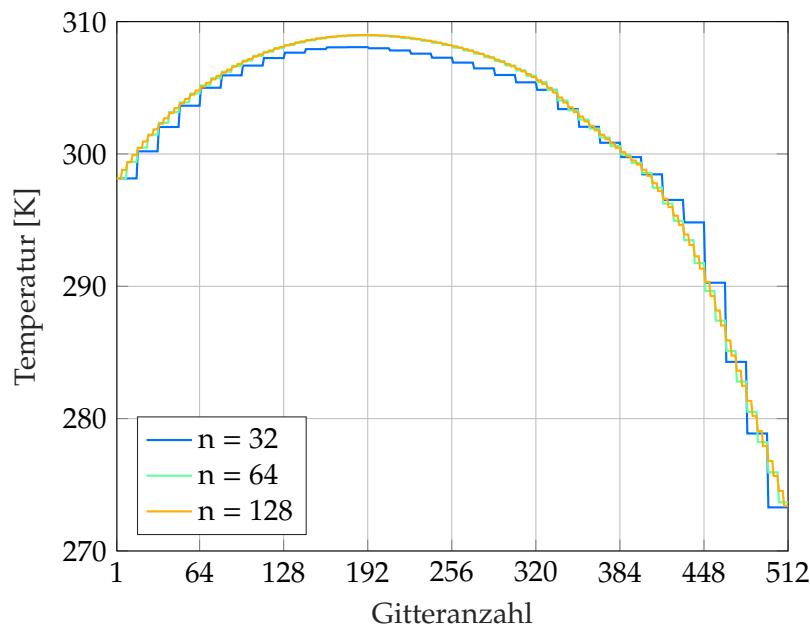
**Abbildung 4.3.:** Relativer Gitterfehler für verschiedene Auflösungen.

für verschiedene Auflösung anhand Gleichung 4.1 zu ermitteln.  $T_1$  stellt an dieser Stelle den Temperaturverlauf aus dem Gitter mit der höchsten Auflösung und  $T_X$  den Temperaturverlauf des zu untersuchenden Gitters dar. In dem Anwendungsbeispiel ist die höchste Auflösung auf  $n = 1024$  beschränkt, denn die Eingabemethode erfolgt anhand eines Bitmap-Bildes mit der Auflösung  $1024 \times 1024$  Pixeln. Ein Gitterelement hat bei dieser Auflösung eine Seitenlänge von  $0.3906 \text{ cm}$ , was einer sehr detaillierten Auflösung entspricht. Der Gitterfehler dieser Auflösung sei so klein, dass sich ihre stationäre Lösung der analytischen Lösung annähert. Die relative Fehler ist als Balkendiagramm in Abb. 4.5 dargelegt. Der relative Fehler der Auflösung  $n = 8$  beträgt  $5.18\%$  und sinkt mit zunehmender Auflösung. Dieser Fehler gibt eine Aussage darüber aus, wie hoch die stationäre Lösung der jeweiligen Gitterauflösung zu der „exakten“ Lösung maximal abweicht. Es bestätigt sich das Ergebnis der Gitteranalyse, wonach eine optimale Auflösung in Hinblick auf ein ausreichend „gutes“ Ergebnis und schneller Berechnung von  $n = 64$  nötig ist.

### 4.3. Ergebnisvorstellung der instationären Lösung

Die instationäre Lösung basiert auf der im Abschnitt 3.2.2 hergeleiteten Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.17). Da es sich bei dem Anwendungsbeispiel um ein Problem der Wärmeleitung handelt, benötigt die Lösung des instationären Falles bis zum Erreichen des stationären Endzustands eine sehr lange Zeit. Da die Materialien Beton und Holz auch Isolatoren sind, verstärkt sich dieser Effekt.<sup>1</sup> Es ergibt daher durchaus Sinn, selber ein sinnvolles Abbruchkriterium festzulegen, um nicht bis in die Unendlichkeit zu rechnen. Es wurde entschieden, dass bei der Diskussion der instationären

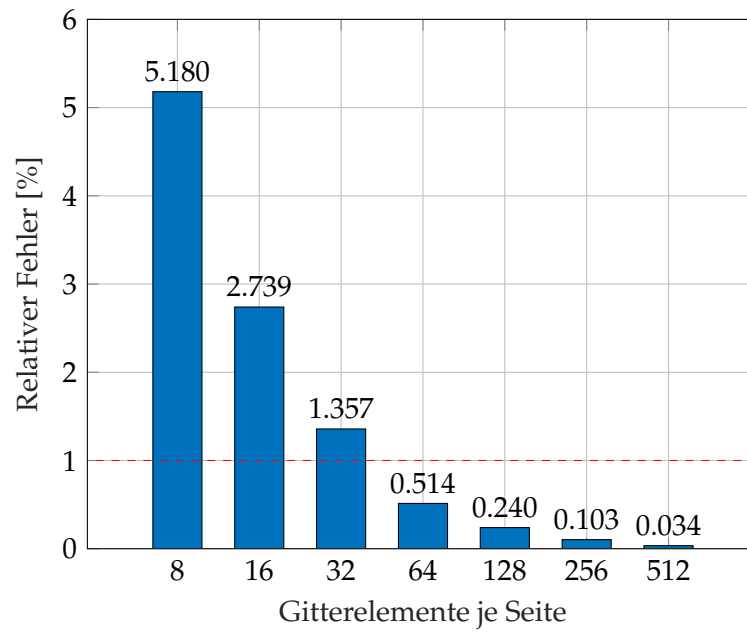
<sup>1</sup>In der GUI gibt es dennoch die Möglichkeit, Kupfer als Material auszuwählen. Kupfer zeichnet sich durch eine sehr gute Wärmeleitung aus. Man kann in der GUI sehr anschaulich den Effekt einer höheren Wärmeleitfähigkeit erkennen



**Abbildung 4.4.:** Temperaturverlauf entlang der Schnittachse für drei Gitterauflösung.

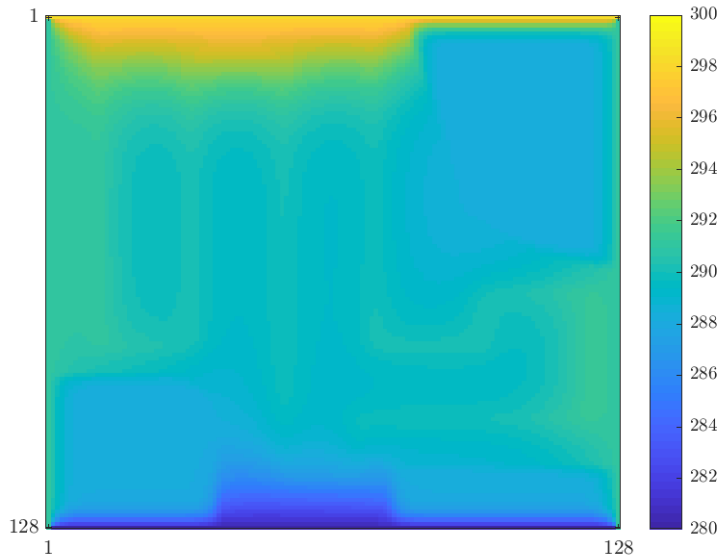
Lösung in diesem Text ausschließlich die ersten 24 h betrachten werden sollen, um eine gewisse Vergleichbarkeit herzustellen. Dieser Zeitraum wurde willkürlich festgelegt, beruht jedoch auf der Idee, dass die Temperaturverteilung an dem ersten Tag nach Anschalten der Heizung am interessantesten ist. Daher betrachten wir im folgenden für die instationäre Lösung ausschließlich die ersten 24 h nach dem Anschalten der Fußbodenheizung. Es sei darauf verwiesen, dass in der Präsentation ein anderes Abbruchskriterium vorgestellt wurde. Dort wurde das Abbruchskriterium so gewählt, bis mindestens 35% der Zellen aus Material 2 (ohne den Rand) eine Temperatur von  $T \geq 20^\circ\text{C}$  erreicht haben oder mindestens 1000 Iterationsschritte durchgeführt worden sind. Der Hintergrundgedanke hierfür ist, dem Kunden eine Aussage zu liefern, wie viel Zeit vergeht, bis der Boden eine angenehme Temperatur hat. In Abbildung 4.6 ist die Lösung des instationären Problems für eine Auflösung von  $n = 128$  bei einem Abbruch der Berechnung nach 24 h gegeben. Für weitere Auflösung wird in den Anhang verwiesen, siehe dazu Abb. A.3). Im Vergleich zur stationären Lösung (Abb. 4.1) ist gut zu erkennen, dass der stationäre Zustand noch nicht erreicht wurde. Das Temperaturprofil zeigt zudem, dass die elektrische Fußbodenheizung zunächst wenig Einfluss auf eine Erhöhung der Temperatur hat und die Randbedingungen einen größeren Einfluss haben. Dies kann man gut durch den gelben Bereich an der nördlichen Wand erkennen. Bei einer genaueren Betrachtung der instationären Lösung über mehrere Tage hinweg erkennt man, dass die nördliche Wand den größten Einfluss auf die Temperaturverteilung hat. Diese Wand hat eine konstante Temperatur von  $25^\circ\text{C}$ . Von dieser Wand aus „strömt“ Wärme sehr langsam südlich und sorgt so für das Temperaturprofil der stationären Lösung. Diesen Effekt kann man gut in der GUI betrachten, wenn man den Zeitschritt auf mehrere Stunden setzt und den impliziten Euler als Zeitdiskretisierungsverfahren verwendet.

Für die Berechnung stehen drei verschiedenen Methoden zur Verfügung. Dabei handelt es sich um den expliziten- und impliziten Euler sowie dem Crank-Nicolson-Verfahren. Diese wurden ebenfalls



**Abbildung 4.5.:** Relativer Gitterfehler im Vergleich zur der höchsten Auflösung von 1024 x 1024.

im Kapitel 3.2.2 eingeführt und vorgestellt. Für die verschiedenen Verfahren wird eine Stabilitäts- und Zeitschrittanalyse bei einer optimalen Gitterauflösung von  $n = 64$  durchgeführt.



**Abbildung 4.6.:** Temperatur des Fußbodens nach 24 h für eine Auflösung von  $n = 128$ . Die Berechnung erfolgte mit einem Zeitschritt von 10 min und unter Verwendung des Crank-Nicolson-Verfahrens. Die Rechenzeit beträgt 20.03 s. Die Einheit der Colormap ist in Kelvin.

#### 4.3.1. Neumann-Stabilitätsanalyse

Für die drei in der instationären Lösung verwendeten Zeitdiskretisierungsverfahren kann die Stabilität des jeweiligen Verfahrens nicht immer garantiert werden. Bei einem zu großen Zeitschritt wird der abgeschätzte Wert  $y(t + \Delta t)$  zu ungenau. Die Funktion divergiert, oszilliert oder läuft gegen einen physikalisch unsinnigen Wert. Dieser Effekt ist besonders bei dem expliziten Euler-Verfahren zu beobachten. Aus diesem Grund wird die Neumann-Stabilitätsanalyse eingeführt.

Der Ausgangspunkt für die Analyse ist die instationäre Kontrollvolumengleichung (Gl. 3.17, siehe S. 14). Es gilt weiterhin die Annahme, dass die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  konstant sei und ebenfalls, dass die Gitter äquidistante Abstände haben. Zur Übersichtlichkeit wird auch  $\frac{\lambda \Delta t}{\rho c_p \Delta x \Delta y} := r$  definiert. Die Gleichung 3.17 wird unter Berücksichtigung von Gleichung 3.7 zu:

$$T_P^1(\gamma) = T_P^0 + \gamma \cdot r \left( -4T_P^1 + T_W^1 + T_E^1 + T_N^1 + T_S^1 \right) + (1 - \gamma) \cdot r \left( -4T_P^0 + T_W^0 + T_E^0 + T_N^0 + T_S^0 \right) \quad (4.2)$$

Für die Fehlerrechnung wird die weitere Annahme getroffen, dass die Randbedingungen periodisch sind und der Diskretisierungsfehler die Differentialgleichung an sich erfüllt. Der Fehler wird somit in Form einer Fourier-Reihe entwickelt:

$$E(j, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m(t) \cdot e^{ik_m j \Delta x} \quad (4.3)$$

Die Differentialgleichung (4.2) ist linear. Es reicht aus, aus der Fourier-Reihe nur den Fehleranteil der  $k_n$ -ten Wellenlänge zu betrachten:  $\epsilon_{jm} = V_m(t) \cdot e^{ik_m j \Delta x}$ . Durch Einsetzen und Umformen der

Gleichung 4.2 erhält man:

$$\begin{aligned} V_m(t + \Delta t) & \left( 1 - \gamma \cdot r(-4 + e^{-ik_m \Delta x} + e^{ik_m \Delta x} + e^{-nik_m \Delta x} + e^{nik_m \Delta x}) \right) = \\ V_m(t) & \left( 1 + (1 - \gamma) \cdot r(-4 + e^{-ik_m \Delta x} + e^{ik_m \Delta x} + e^{-nik_m \Delta x} + e^{nik_m \Delta x}) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$n$  ist hierbei die Anzahl der Gitterelemente entlang einer Achse. Die relative Fehlerverstärkung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} G_m(k_m) & := \frac{V_m(t + \Delta t)}{V_m(t)} = \frac{\left( 1 + (1 - \gamma) \cdot r(-4 + e^{-ik_m \Delta x} + e^{ik_m \Delta x} + e^{-nik_m \Delta x} + e^{nik_m \Delta x}) \right)}{\left( 1 - \gamma \cdot r(-4 + e^{-ik_m \Delta x} + e^{ik_m \Delta x} + e^{-nik_m \Delta x} + e^{nik_m \Delta x}) \right)} \\ & = \frac{1 + (1 - \gamma) \cdot r(2 \cos(k_m \Delta x) + 2 \cos(nk_m \Delta x) - 4)}{1 - \gamma \cdot r(2 \cos(k_m \Delta x) + 2 \cos(nk_m \Delta x) - 4)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Voraussetzung für ein Verfahren stabil lautet  $|G_m(k_m)| \leq 1$ . Somit gilt für die drei verwendeten Verfahren:

- explizites Euler-Verfahren:  $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} G_m(k_m) & = 1 + 4r\left(\frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x) - 1\right) \\ |G_m(k_m)| & \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\rho_p c_p \Delta x \Delta y}{4\lambda} \end{aligned}$$

Für eine Gitterauflösung von  $n = 64$  (Auflösung entsprechend der Gitteranalyse in Abschnitt 4.2.1) und für die Materialien aus dem Anwendungsbeispiel wird der Wert  $\Delta t$  berechnet. Für Holz beträgt der Term  $\frac{\rho_p c_p \Delta x^2}{4\lambda_p}|_{\text{Holz}} = 802 \text{ s}$  und für Beton  $\frac{\rho_p c_p \Delta x^2}{4\lambda_p}|_{\text{Beton}} = 19275 \text{ s}$  (Für Materialwerte siehe Tabelle A.2 im Anhang). Da  $\Delta t$  für jedes Gitterelement gelten soll, muss  $\Delta t \leq 802 \text{ s}$  sein.

In der Realität wird ein viel kleinerer Zeitschritt für den expliziten Euler benötigt. Für das Anwendungsbeispiel wird das Verfahren erst bei  $\Delta t \leq 150 \text{ s}$  stabil. Das dürfte daran liegen, dass die hergeleiteten Neumann-Stabilitätsanalyse nicht für Randelemente gilt. Wird einem Randelement eine Cauchy-Randbedingung zugewiesen, ändert sich der Fehler und es ist eine neue Stabilitätsbedingung zu bestimmen. Wird ein zu großer Zeitschritt (bspw.  $\Delta T = 15 \text{ min}$  bei  $n = 64$  für das explizite Euler gewählt, so kann auch im Programm beobachtet werden, wie zunächst Randelemente physikalisch unsinnige Temperaturen haben und sich der Fehler mit jeder Iteration dann nach „innen“ fortpflanzt.

- Crank-Nicolson Verfahren:  $\gamma = 0,5$

$$\begin{aligned} G_m(k_m) & = \frac{1 + 2r\left(\frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x) - 1\right)}{1 - 2r\left(\frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x) - 1\right)} \\ & = \frac{1 - 2r\left(1 - \frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) - \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x)\right)}{1 + 2r\left(1 - \frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) - \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x)\right)} \\ |G_m(k_m)| & \leq 1 \quad \forall r \quad \text{bzw.} \quad \forall \Delta t \end{aligned}$$

Für das Crank-Nicolson Verfahren kann  $\Delta t$  beliebig gewählt werden. Das Verfahren ist immer stabil.



- implizites Euler-Verfahren:  $\gamma = 1$

$$G_m(k_m) = \frac{1}{1 - 4r\left(\frac{1}{2} \cos(k_m \Delta x) + \frac{1}{2} \cos(nk_m \Delta x) - 1\right)}$$

$$|G_m(k_m)| \leq 1 \quad \forall r \quad \text{bzw.} \quad \forall \Delta t$$

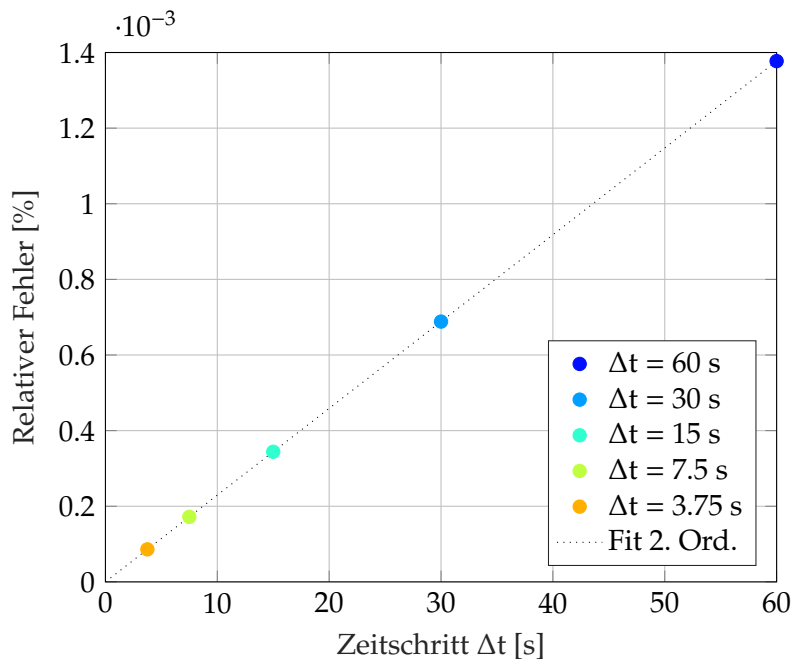
Für das implizite Euler-Verfahren kann  $\Delta t$  beliebig gewählt werden. Das Verfahren ist immer stabil.

Es sollte trotzdem klar zwischen der Stabilität des Verfahrens und dem Fehler durch die zeitliche Diskretisierung unterschieden werden. Obwohl es keine Anforderung an den Zeitschritt hinsichtlich der Stabilität bei dem impliziten Euler-Verfahren und dem Verfahren nach Crank-Nicolson gibt, so entsteht dennoch ein Fehler durch die zeitliche Diskretisierung. Dieser Fehler ist bei dem impliziten Euler-Verfahren von 1. Ordnung, bei dem Verfahren nach Crank-Nicolson von 2. Ordnung. Dieser Fehler wird bei jedem neuen Zeitschritt „mitgeschleppt“, weswegen er auf keinen Fall ausgeblendet werden sollte.

#### 4.3.2. Zeitschrittanalyse

Nachdem der Gitterfehler und die Stabilität der Zeitdiskretisierungsverfahren untersucht wurden, wird nun detailliert das Verhalten des Zeitdiskretisierungsfehlers betrachtet. In diesem Fall werden die Lösungen für mehrere Zeitschritte für jedes der drei vorgestellten Zeitdiskretisierungsverfahren verglichen und der relative Fehler bei einer Halbierung des Zeitschrittes ermittelt. Dafür wird mit einer ähnliche Berechnungsmethode wie im Abschnitt 4.2.1 vorgegangen. Für jedes Zeitdiskretisierungsverfahren wird das Temperaturfeld des Fußbodens 24 Stunden lang simuliert. Es wird der größte Temperaturgradient entlang einer Schnittachse des Temperaturfeldes bestimmt und anschließend der relative Fehler des halbierten Zeitschrittes anhand Gleichung (4.1) berechnet.

Die Wahl des größten Zeitschritts beruht auf der Stabilitätsanalyse (siehe Abschnitt 4.3.1). Bei dem expliziten Euler-Verfahren soll  $\Delta t < 150 \text{ s}$  aufgrund der eingesetzten Randbedingungen betragen. Für die Fehleranalyse wird eine anfängliche Schrittweite von  $\Delta t = 120 \text{ s}$  gewählt. Der Stabilitätsanalyse zufolge können die Zeitschritte sowohl beim impliziten Euler-Verfahren als auch beim Crank-Nicolson-Verfahren beliebig gewählt werden. Die Schrittweite bei der Fehleranalyse wird daher mit  $\Delta t = 3600 \text{ s}$  so gewählt, um ein ausreichend gutes Ergebnis bei möglichst geringem Rechenaufwand zu erhalten. Der Zeitschritt fängt demzufolge mit: a)  $\Delta t_{\text{expl. Euler}} = 120 \text{ s}$  für das explizite Euler-Verfahren, b)  $\Delta t_{\text{Crank-Nicolson}} = 3600 \text{ s}$  für das Crank-Nicolson-Verfahren, und c)  $\Delta t_{\text{impl. Euler}} = 3600 \text{ s}$  für das implizite Euler-Verfahren an. Diese Zeitschritte werden bei der Simulation fünfmal hintereinander halbiert, sodass letztendlich sechs verschiedene Zeitschritten verglichen werden können. Ein Übersicht zu den verwendeten Zeitschritten ist mit Tabelle 4.1 gegeben. Im Bezug auf Gleichung 4.1 ist  $T_2$  der Temperaturverlauf des betrachteten Zeitschrittes und  $T_1$  der Temperaturverlauf des nächst größeren Zeitschrittes. Die Ergebnisse der relativen Fehler werden jeweils in a) Abb. 4.7 für das explizite Euler-Verfahren, b) Abb. 4.8 für das implizite Euler-Verfahren, und c) Abb. 4.9 für das Crank-Nicolson-Verfahren dargestellt. In den eben erwähnten

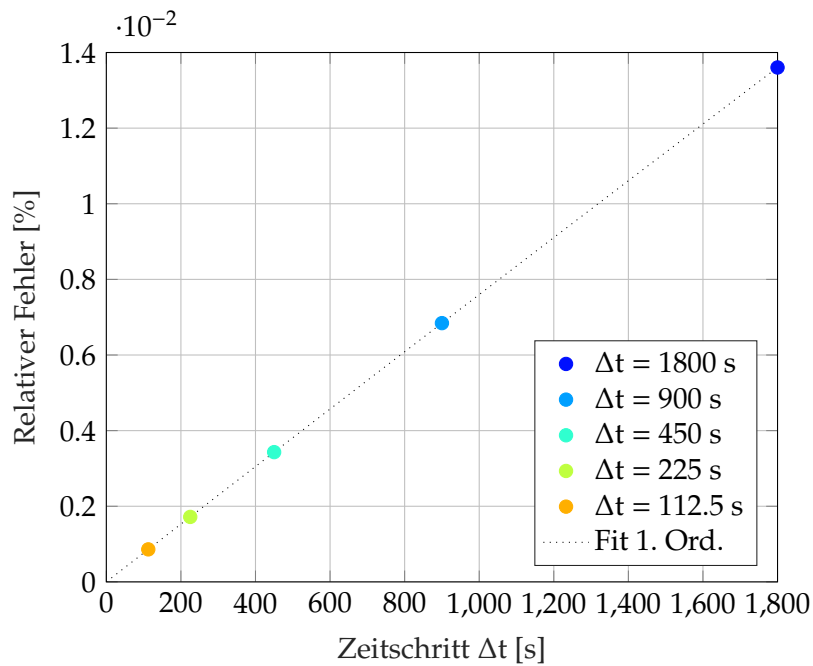


**Abbildung 4.7.:** Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für explizite Euler-Verfahren.

Abbildungen ist gut zu erkennen, dass der relative Fehler des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens linear mit der Schrittweite steigt. Bei dem Crank-Nicolson-Verfahren wächst der relative Fehler dagegen erwartungsgemäß quadratisch mit der Schrittweite an.

Der Betrag des relativen Fehlers ist in den gewählten Zeitschritten relativ gering. Der größte Fehler ist bei dem expliziten Euler-Verfahren ungefähr  $1.4 \cdot 10^{-3} \%$ , bei dem impliziten Euler-Verfahren ist dieser  $1.4 \cdot 10^{-2} \%$  und bei dem Crank-Nicolson-Verfahren  $2.7 \cdot 10^{-4} \%$ . Sie sind daher alle insgesamt vernachlässigbar klein.

Für die Wahl des Zeitdiskretisierungsverfahren einschließlich des optimalen Zeitschrittes ist jedoch die Rechenzeit der Simulation ebenfalls zu berücksichtigen. Die Tabelle 4.2 stellt die Rechenzeit für alle drei Zeitdiskretisierungsverfahren dar. Als schnellstes Verfahren stellt sich das explizite Euler-Verfahren heraus, obwohl die Schrittweite viel kleiner als in anderer Methode gewählt werden muss. Sofern die maximal *erlaubte* Schrittweite für diese Methode bekannt ist, stellt das explizite Euler-Verfahren also die optimale Methode dar. Sowohl das implizite Euler- als auch das Crank-Nicolson-Verfahren haben den Vorteil, dass sie keine Probleme bzgl. der Stabilität besitzen. Sie weisen dennoch einen größeren Rechenaufwand auf. Bei einem Zeitschritt, der 30 Mal so groß ist wie bei der Schrittweite des expliziten Euler-Verfahrens (vgl. Tabelle 4.1 und 4.2), wird die Rechenzeit des impliziten Euler-Verfahrens fast verdoppelt (0.63 s für das explizite Euler Verfahren mit  $\Delta t = 120$  s zu 1 s für das implizite Euler Verfahren mit  $\Delta t = 3600$  s). Dies ist darauf zurückzuführen, dass für jeden Rechenschritt eine deutlich komplexere Berechnung durchgeführt werden muss. Für jeden Iterationsschritt muss der unbekannte Wert  $\frac{\partial T(t+\Delta t)}{\partial t}$  zusätzlich gelöst werden. Da der Aufwand mit der abnehmender Schrittweite signifikant zunimmt, ist für einen kleinen Zeitschritt eine deutlich längere Rechenleistung pro Iteration erforderlich. Das Crank-Nicolson-Verfahren weist einen geringfügig kleineren Rechenaufwand auf. Zwischen diesen beiden

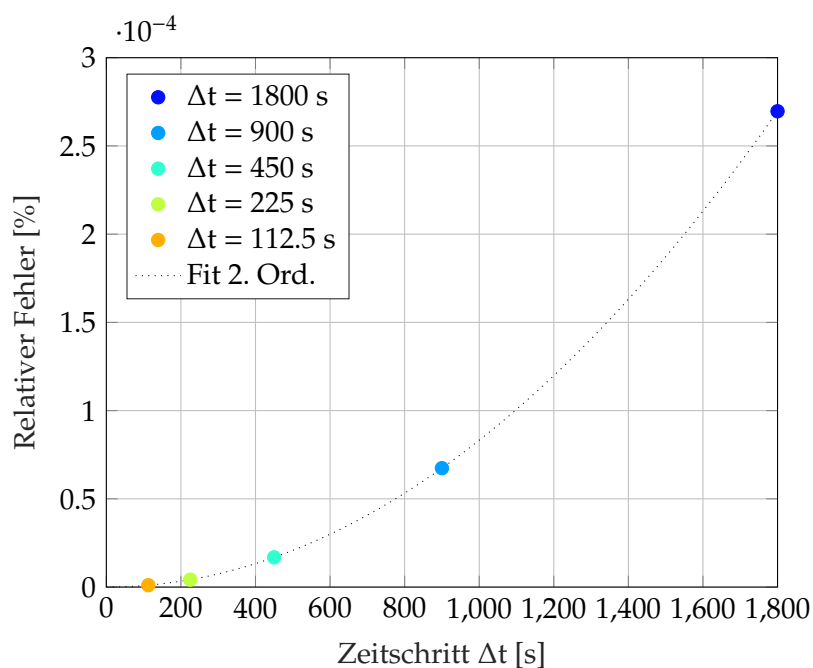


**Abbildung 4.8.:** Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für implizite Euler-Verfahren.

Verfahren stellt sich das Crank-Nicolson-Verfahren als die bessere Wahl heraus. Alle drei Verfahren benötigen dennoch nicht extrem viel Zeit für die Berechnung in diesem Anwendungsfall. Das Plotten in MATLAB benötigt deutlich länger als die Berechnung des Temperaturfeldes. Es bleibt auch anzumerken, dass sich diese Analyse ausschließlich auf das vorgestellte Anwendungsbeispiel bezieht. Wird in der GUI bspw. die Größe des Raumes oder die Materialien geändert, so gelten die hier vorgestellten Empfehlungen unter Umständen nicht. Es wurde keine Abbildung für den größten Gradienten im Temperaturfeld für die verschiedenen Zeitdiskretisierungsverfahren – anders als bei der Gitteranalyse – da das Temperaturprofil bei allen Zeitschritten so ähnlich ist, dass in einem Plot nur eine Linie zu erkennen wäre. Dies wird durch die geringen relativen Fehler bestätigt.

**Tabelle 4.1.:** Zeitschrittanalyse für das Anwendungsbeispiel bei einer Gitterauflösung von  $n = 64$  für die verschiedenen Verfahren.

	Zeitschritt $\Delta t$ [s]					
expl. Euler	120	60	30	15	7.5	3.75
impl. Euler	3600	1800	900	450	225	112.5
Crank-Nicolson	3600	1800	900	450	225	112.5
Schrittindex	1.	2.	3.	4.	5.	6.



**Abbildung 4.9.:** Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für das Crank-Nicolson-Verfahren.

**Tabelle 4.2.:** Benötigte Rechenzeit für das Anwendungsbeispiel bei einer Gitterauflösung von  $n = 64$  bis 24 h für die verschiedenen Verfahren.

	Rechenzeit $t$ pro Durchlauf [s]					
expl. Euler	0.63	0.97	1.22	2.20	3.66	7.52
impl. Euler	1.00	1.63	2.05	3.48	8.63	12.52
Crank-Nicolson	0.81	1.08	1.77	3.25	6.30	12.98
Schrittindex	1.	2.	3.	4.	5.	6.

## 5. Fazit

Dem „Ingenieurbüro“ ist es gelungen, ein flexibles Programm zu schreiben um den Kunden bei dem Bau seines Wunsch-Badezimmers Empfehlungen auszusprechen.

Sowohl die Lösung für den stationären und instationären Fall liefert bei geringem Rechenaufwand solide Ergebnisse. Anhand geeigneter Analysen für die Auflösung und die Zeitschrittanalyse konnten optimale Parameter für das Programm gefunden werden. Die Betrachtung des instationären Falles zeigt dennoch, dass es sehr lange dauert, bis der Boden angenehm temperiert ist. Es sollte unbedingt die Wahl der Materialien überdacht werden. Insbesondere Holz hat einen ausgesprochen Isolator-Charakter. Aus ingenieurstechnischer Sicht ist dem Besitzer des Badezimmers zu empfehlen, Materialien mit einer deutlich höheren Leitfähigkeit und geringerer Wärmekapazität über seinen Heizungselementen zu verlegen, um schneller in den Genuss eines warmen Badezimmers zu kommen. Holz ist auch keine gute Wahl, da die Wärmeleitfähigkeit von der Richtung im Material abhängig ist. Auch raten wir dem Kunden eindringlich, die südliche Wand besser zu isolieren. Dann könnte die Temperatur der Randelemente als konstant angenommen und die Randbedingung durch eine Dirichlet-Randbedingung ersetzt werden. Es wäre auch denkbar, die Fußbodenheizung großflächiger zu verlegen oder ein Modell mit noch größerer Heizleistung einzusetzen. Auch sollte abgewogen werden, ob die Fußbodenheizung allein für eine leichte Erwärmung des Bodens konzipiert werden sollte und der Kunde zusätzliche Heizelemente im Badezimmer anbringt.

Für ein zukünftige Version des Programmes sollte auch bedacht werden, dass eine Heizung normalerweise auch geregelt ist. In der aktuellen Version heizt die elektrische Fußbodenheizung konstant mit voller Leistung. Dies ist einerseits eine enorme Ressourcenverschwendung und andererseits nicht realitätsnah. Der vorliegende Quellcode kann jedoch leicht um einen Regler ergänzt werden. Dafür müsste man nur eine Zeitabhängigkeit der Heizleistung definieren und die Berechnung der einzelnen Zeitschritte in eine Schleife auslagern, die bei jeder Berechnung die Heizleistung abfragt. Ebenfalls sollte untersucht werden, wie viel Wärme durch Strahlung und freie Konvektion von dem Fußboden „nach oben“ in den Raum abgegeben wird. Dies könnte jedoch leicht im Quellterm  $\vec{S}$  ergänzt werden. Auch wurden die Materialwerte für den betrachteten Temperaturbereich als konstant angenommen. Dies entspricht auch nicht der Wirklichkeit, ist dennoch eine übliche Annahme im ingenieurstechnischen Bereich. Die große Schwierigkeit ist hierbei oftmals, eine geeignete Korrelation für die Temperaturabhängigkeit zu finden. Diese Problem stellte sich auch bei der Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$ , welcher in der Cauchy-Randbedingung genutzt wurde. Hierbei wurde aus Mangel an einer geeigneten Korrelation auf ein gut gemeinter Mittelwert aus verschiedenen Anwendungsfällen, welche auf einer Website gefunden wurden [6], zurückgegriffen. Auch sollte bedacht werden, dass temperaturabhängige

Materialwerte zu einem nicht linearen Gleichungssystem führen würden. Dieses ist erheblich schwerer zu lösen und es bedarf in der Regel einer Iteration. Wir würden daher die Annahme von temperaturunabhängigen Materialwerten mittels einer eingehenden Literaturrecherche verifizieren.

Dennoch können die Lösungen des stationären und instationären Falles nur bedingt als Abbild der Wirklichkeit dienen. Grund dafür sind verschiedene Annahmen, die zur Vereinfachung getroffen wurden. Die wahrscheinlich größte Auswirkung hat die Annahme, dass es sich bei dem Problem um eine 2D-Problemstellung handelt – dies ist jedoch nicht der Fall. Somit werden die Energie Zu- und Abflüsse in den Boden hinein und aus dem Boden in die Luft *nicht* berücksichtigt. Das ist insbesondere deshalb tragisch, da eine Fußbodenheizung neben dem Wohlbefinden durch angenehm warme Füße auch für Komfort in dem Raum selbst – also für eine warme Luft sorgen soll. Während der Bereich „unter“ der obersten Fußbodenschicht mathematisch relativ einfach als Festkörper mit einer weiteren Randbedingung darstellbar wäre, stellt die sich aufwärmende Luft eine Herausforderung dar. Für die korrekte Berechnung des konvektiven Wärmetransports durch die Luft ist eine vollständige Beschreibung der Luftströmung erforderlich. Zur Lösung dieses Problems könnte man in Zukunft eine Zusammenarbeit von Studierenden des Projekts „Wärmeleitung“ und „Wirbelströmung“ vorschlagen. Weiterhin ist eine konstante Wandtemperatur an allen drei Wänden unrealistisch. Vor allem an den Randelementen in den Ecken des Raumes kommt es durch die Vorgabe von einer festen Temperatur an allen Randelementen einer Wand zu Unstetigkeiten im Temperaturfeld. Dieser Effekt wird bei kleinen Gitterauflösungen verstärkt.

Auch aus der Perspektive der verwendeten numerischen Verfahren ist es natürlich zu Fehlern gekommen – diese sind bei numerischen Verfahren unvermeidbar. Man könnte Verfahren höherer Ordnung verwenden, um Integrale und Ableitungen zu approximieren. Dies würde jedoch auch einem erhöhten Rechenaufwand entsprechen und es konnte dennoch in den verschiedenen Analysen gezeigt werden, dass die relativen Fehler sehr gering sind und so bei günstiger Wahl der Parameter einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf das Ergebnis haben.

Das Programm ist dennoch eine gute Möglichkeit, dem Kunden schnell eine erste Vorstellung für seine Fußbodenheizung im Badezimmer zu geben. Die GUI ermöglicht darüber hinaus eine komfortable und grafische Bedienung, sodass in kurzer Zeit verschiedene Szenarien mit verschiedenen Grundrissen, Materialien oder Randbedingungen durchgespielt werden können.

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Grundriss des Badezimmers . . . . .	1
3.1. Abbildung des Gitters und Darstellung der Kompassnotation mit den verwendeten Indizes . . . . .	11
4.1. Ergebnis der stationären Lösung für das Anwendungsbeispiel bei einer Gittergröße von $128 \times 128$ Finiten-Volumen-Elementen. . . . .	16
4.2. Temperaturverlauf entlang der Schnittachse mit dem größtem Temperaturgradient (y-Achse). . . . .	17
4.3. Relativer Gitterfehler für verschiedene Auflösungen. . . . .	18
4.4. Temperaturverlauf entlang der Schnittachse für drei Gitterauflösung. . . . .	19
4.5. Relativer Gitterfehler im Vergleich zur der höchsten Auflösung von $1024 \times 1024$ . . . . .	20
4.6. Temperatur des Fußbodens nach 24 h für eine Auflösung von $n = 128$ . . . . .	21
4.7. Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für explizite Euler-Verfahren. . . . .	24
4.8. Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für implizite Euler-Verfahren. . . . .	25
4.9. Relativer Fehler zu dem Zeitschritt für das Crank-Nicolson-Verfahren. . . . .	26
A.1. Skizze Badezimmer . . . . .	31
A.2. Temperatur des Fußbodens im Falle der stationären Lösung für verschiedene Auflösungen. . . . .	33
A.3. Temperatur des Fußbodens nach 24 h für verschiedene Auflösungen. . . . .	34

# Tabellenverzeichnis

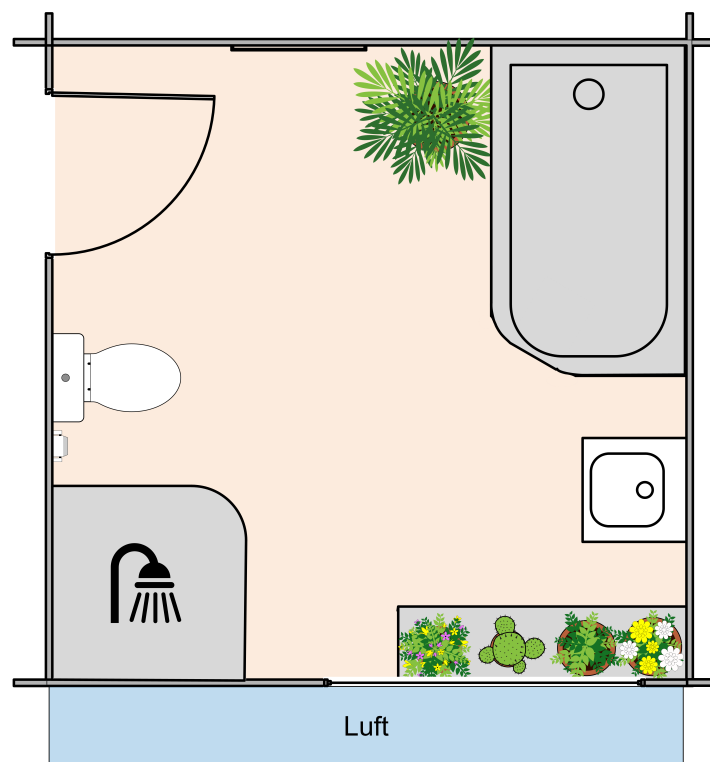
4.1. Zeitschrittanalyse für das Anwendungsbeispiel bei einer Gitterauflösung von $n = 64$ für die verschiedenen Verfahren. . . . .	25
4.2. Benötigte Rechenzeit für das Anwendungsbeispiel bei einer Gitterauflösung von $n = 64$ bis 24 h für die verschiedenen Verfahren. . . . .	26
A.1. Materialeigenschaften der in der GUI hinterlegten Materialien. . . . .	32
A.2. Übersicht der verschiedenen Randbedingungen. . . . .	32
A.3. Benötigte Rechenzeit für das Crank-Nicolson-Verfahren mit einer Schrittweite von 600 s für 24 h. . . . .	34
A.4. Zusammenfassung der Standardbedingungen für das Anwendungsbeispiel. . . . .	35
A.5. Zusammenfassung der Spaltenindices für die Spalte des Temperaturmatrix mit dem größten Gradienten entlang der y-Achse. . . . .	35



# A. Anhang

Skizze des Badezimmergrundrisses, wie vom Kunden übermittelt. Ausgehend von dieser Darstellung wird eine ingenieurstechnische Betrachtungsweise entwickelt und das Problem mit numerischen Methoden gelöst.

## A.1. Grundriss



**Abbildung A.1.:** Skizze des Badezimmers

## A.2. Materialeigenschaften

**Tabelle A.1.:** Materialeigenschaften der in der GUI hinterlegten Materialien.

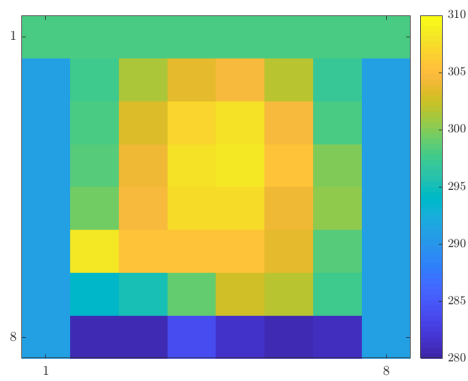
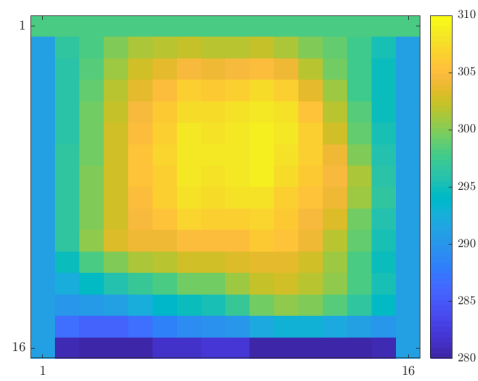
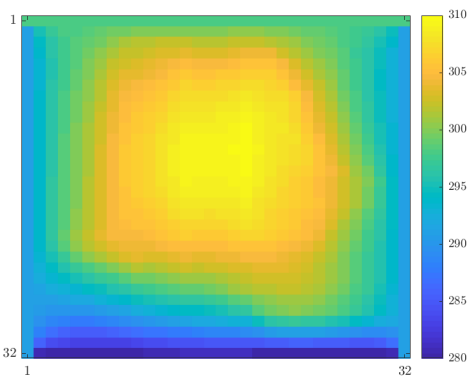
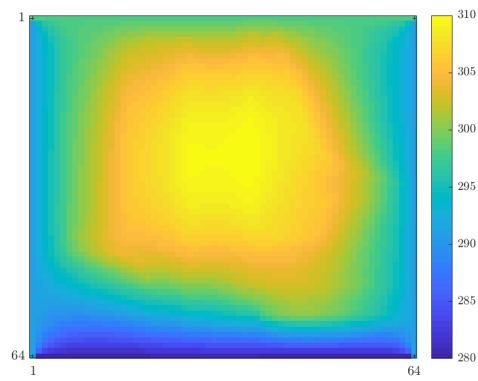
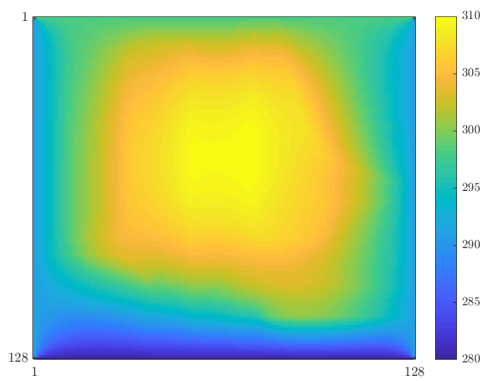
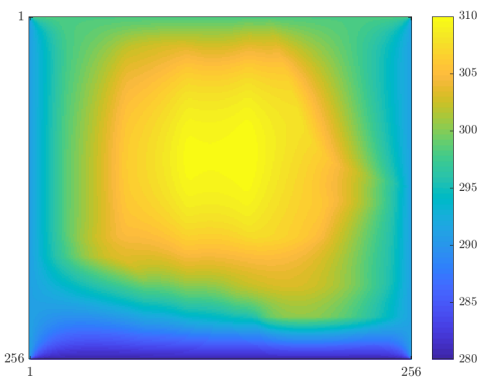
	Dichte [kg m <sup>-3</sup> ]	Wärmekapazität [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Wärmeleitfähigkeit [W K <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> ]
Wood	740	1300	1.17
Concrete	2243	880	0.1
Beech	700	2390	0.16
Marble	2785	1075	2.1
Granit	2600	280	3
Concrete, Lightweight	950	657	0.21
PVC	1500	850	0.23
Copper	8920	385	380
Laminat	200	500	0.5

## A.3. Randbedingungen

**Tabelle A.2.:** Übersicht der verschiedenen Randbedingungen.

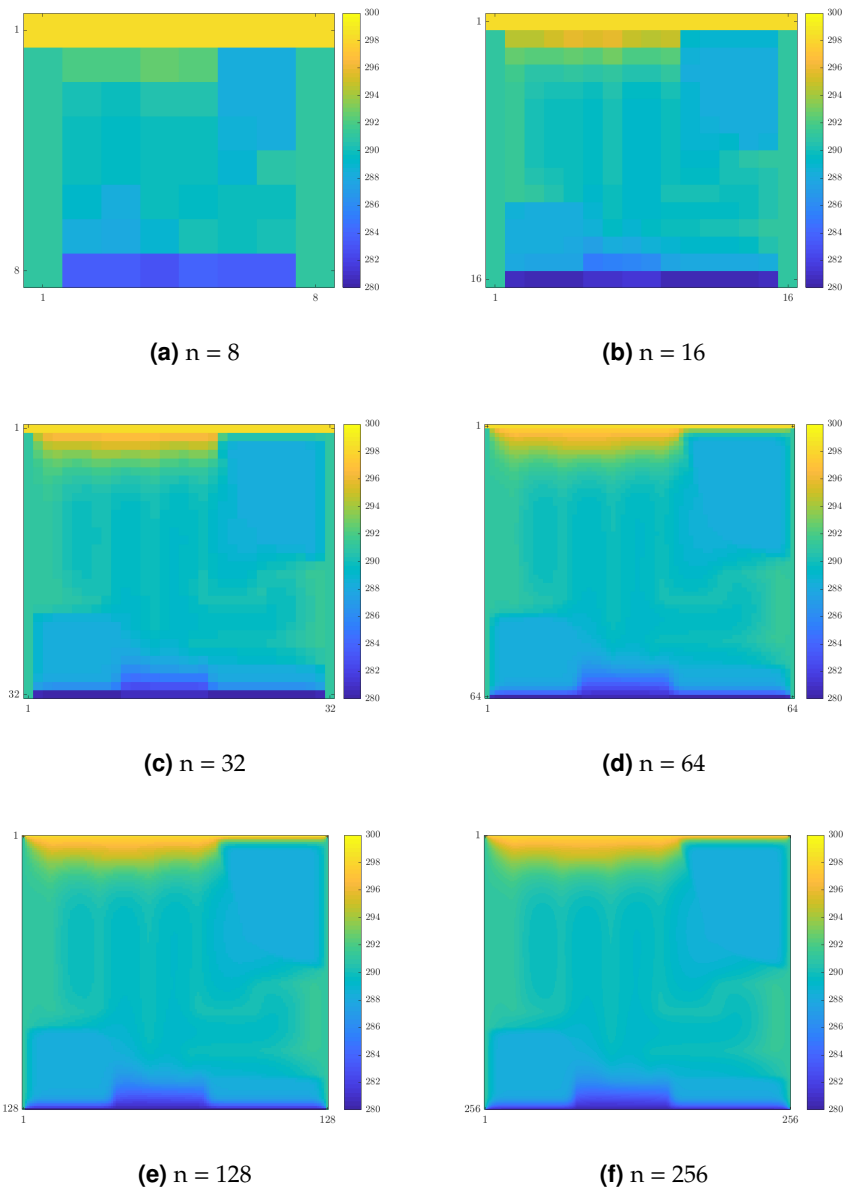
Randbedingung	Beschreibung	Funktion
1. Art: Dirichlet	Konstanter Randwert	$T_{Rand} = konst.$
2. Art: Neumann	Konstanter Fluss über eine Berandung	$\vec{q}_{Rand} \cdot \vec{v} = konst.$
3. Art: Cauchy	Zusammenhang zwischen Randwert und Fluss über eine Berandung	$\vec{q}_{Rand} \cdot \vec{v} = \alpha(T_{Rand} - T_{\infty})$

## A.4. Ergebnisse der stationären Lösung

(a)  $n = 8$ (b)  $n = 16$ (c)  $n = 32$ (d)  $n = 64$ (e)  $n = 128$ (f)  $n = 256$ 

**Abbildung A.2.:** Temperatur des Fußbodens im Falle der stationären Lösung für verschiedene Auflösungen. Die Einheit der Colormap ist in Kelvin.

## A.5. Exemplarische Ergebnisse der instationären Lösung



**Abbildung A.3.:** Temperatur des Fußbodens nach 24 h für verschiedene Auflösungen. Die Berechnung erfolgte mit einem Zeitschritt von 600 s und unter Verwendung des Crank-Nicolson-Verfahrens. Die Einheit der Colormap ist in Kelvin.

**Tabelle A.3.:** Benötigte Rechenzeit für das Crank-Nicolson-Verfahren mit einer Schrittweite von 600 s für 24 h. Die grafischen Ergebnisse sind Abb. A.3 zu entnehmen.

Auflösung	8	16	32	64	128	256
Rechenzeit [s]	1.38	1.83	3.19	5.39	20.03	89.78

## A.6. Zusammenfassung Anwendungsbeispiel

**Tabelle A.4.:** Zusammenfassung der Standardbedingungen für das Anwendungsbeispiel.

Raumlänge	4 m
Leistung der Heizung	$100 \text{ W m}^{-2}$
Material 1	Beton
Material 2	Holz
Lufttemperatur draußen	$7^\circ\text{C}$
Temperatur nördliche Wand	$25^\circ\text{C}$
Temperatur westliche Wand	$18^\circ\text{C}$
Temperatur östliche Wand	$18^\circ\text{C}$
Wärmeübergangskoeffizient (Cauchy-RB)	$5 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Bodentemperatur zu Beginn	$15^\circ\text{C}$

## A.7. Größter Gradient entlang y-Achse

**Tabelle A.5.:** Zusammenfassung der Spaltenindices für die Spalte des Temperaturmatrix mit dem größten Gradienten entlang der y-Achse.

Spaltenindex mit dem größten Gradienten	Auflösung	Prozentuale Position
5	8	63%
10	16	63%
20	32	63%
37	64	58%
73	128	57%
146	256	57%
291	512	57%

# Quellenverzeichnis

- [1] LLC MatWeb. *MatWeb*. 2018. URL: <http://www.matweb.com/search/MaterialGroupSearch.aspx> (besucht am 28. 10. 2018).
- [2] Wikipedia Org. *Fußbodenheizung*. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fu%C3%9Fbodenheizung#Elektro-Heizungen> (besucht am 28. 10. 2018).
- [3] Joseph Fourier. *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. Chez Firmin Didot, pere et fils, 1822.
- [4] H.D. Baehr und K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung*. Engineering online library. Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 4. URL: <https://books.google.de/books?id=-VLm0dx1tMsC>.
- [5] A. Schmalen. *Projekt Wärmeleitung–Mindestanforderungen*. 2018, S. 1–3.
- [6] Anton Schweizer. *Wärmeübergangskoeffizienten - Gase - Luft -*. 2018. URL: [https://www.schweizer-fn.de/stoff/wuebergang\\_gase/wuebergang\\_gase.php](https://www.schweizer-fn.de/stoff/wuebergang_gase/wuebergang_gase.php) (besucht am 14. 10. 2018).