模块一

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

【分析】

方法一：$0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\le\dfrac{1}{n}\to 0\,(n\to\infty)$

方法二：$a_n>0$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\to e^{-1}<1\Rightarrow a_n\downarrow(n>N)$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]\Rightarrow a=\frac{a}{e}\Rightarrow a=0$$

2. 若$x_1=a,\,y_1=b\,(0<a<b)$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，

证明：$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛且极限相等.

【分析】

$x_2=\sqrt{x_1y_1}=\sqrt{ab}>a=x_1$，$x_2=\sqrt{x_1y_1}<\dfrac{x_1+y_1}{2}=\dfrac{a+b}{2}<b=y_1$

$\Rightarrow x_1<x_2<y_2<y_1$

设$x_k<x_{k+1}<y_{k+1}<y_k$

可证明$x_{k+1}<x_{k+2}<y_{k+2}<y_{k+1}$，得$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是单调有界数列，极限存在。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，有

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{2}\Rightarrow B=\frac{A+B}{2}\Rightarrow A=B$$

3. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$__________.（2017 年）

【分析】

方法一：$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\to 1\,(n\to\infty)$$

方法二：$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$

$$\sqrt{n^2+n}=n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$=n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)=n+\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}+o(\frac{1}{n})$$

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8n}+o(\frac{1}{n})\right)$$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8n}+o(\frac{1}{n})\right)\to 1\,(n\to\infty)$$

4. 设$\alpha\in(0\,,1)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=$__________.（2018 年）

【分析】

方法一：原极限$=\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\cdot[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1]=\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{n}$

$$=\alpha\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$$

方法二：$(1+x)^\alpha=1+\alpha\cdot x+o(x)$

$$(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha[(1+\frac{1}{n})^\alpha-1]$$

$$=n^\alpha[1+\alpha\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})-1]=\alpha\cdot\frac{1}{n^{1-\alpha}}+n^\alpha\cdot o(\frac{1}{n})\to 0\,(n\to\infty)$$

方法三：令$f(x)=x^\alpha$，由拉格朗日中值定理得

$$(n+1)^\alpha-n^\alpha=f(n+1)-f(n)=f'(\xi)\,(n<\xi<n+1)$$

$$=\alpha\cdot\xi^{\alpha-1}=\alpha\cdot\frac{1}{\xi^{1-a}}\to 0\,(\xi\to\infty)$$

5. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.（2012 年）

【分析】由积分中值定理得

$$\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=(x+1-x)\frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}\,(x<\xi<x+1)$$

原极限$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\cdot\dfrac{\sin\xi}{\sqrt{\xi+\cos\xi}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\xi}}\sin\xi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\xi}\cos\xi}}=0$

$$\left(0\leftarrow\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}}<\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\xi}}<\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\to 0\right)$$

模块二

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，在 (a,b) 内三阶可导且

$f(a)=f'(a)=0,\ f(b)=0$，

证明：对一切 $x\in[a,b]$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

【分析】

记 $k(x)=\dfrac{f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$，$x\in(a,b)$，

令 $F(t)=f(t)-k(x)(t-a)^2(t-b),\ t\in[a,b]$

有 $F(a)=F(b)=F(x)=0$，$F'(a)=0$

由罗尔定理得 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$F'''(\xi)=0$，即 $f'''(\xi)-3!k(x)=0$，

$f(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$，$x\in(a,b)$

当 $x=a,b$ 时显然成立。

模块三

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})-\int_0^1 f(x)dx\right]=\dfrac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right].$

【分析】

$$I_n=n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f(x)dx\right]$$

$$=n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx\right]$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(\frac{k}{n})-f(x)\right]dx$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(\eta_k)dx$$ （η_k 在 x 与 $\frac{k}{n}$ 之间）

$$=n\sum_{k=1}^{n}\left[f'(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$$ （ξ_k 在 $\frac{k-1}{n}$ 与 $\frac{k}{n}$ 之间）（介值定理）

$$=n\cdot\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)$$

$$\to\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$$

2. 设 $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{\pi}{4}-A_n)$.（2014 年）

【分析】$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ $\qquad$ $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，

有 $n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=n\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right]$

$$\to-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{4}$$

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{n^2+k}=$ ________.（2015 年）

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n}\pi)=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{n^2+n}\le n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{n^2+k}\le n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n}\pi)$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{n^2+k}=\int_0^1\sin(x\pi)dx=\frac{2}{\pi}$$

4. 已知 $u(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，$u(0)=0$，证明：

$$\int_0^1 u^2(x)dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 u'^2(x)dx.$$

【分析】$u(x)=u(x)-u(0)=\int_0^x u'(t)dt$

$$u^2(x)=\left[\int_0^x u'(t)dt\right]^2\le\left[\int_0^x|u'(t)|dt\right]^2$$

$$\le \int_0^x 1^2 dt \int_0^x u'^2(t)dt \le x\int_0^1 u'^2(t)dt \ (0\le x\le 1)$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx \le \int_0^1 \left[x\int_0^1 u'^2(t)dt \right] dx = \int_0^1 u'^2(t)dt \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2(t)dt$$

模块四

1. 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$.（2013 年）

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}+\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}\right]dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$\left(\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\right]dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^3}{8}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$（2019 年）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\left.\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$$

3. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x\,(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.（2019 考研一、三）

【分析】

$$A=\int_0^{+\infty}|e^{-x}\sin x|dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin xdx=\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^{-n\pi}$$

（$\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\frac{1+e^{-\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

4. 证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$不是绝对收敛.（2013 年）

【分析】

即证明$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$发散

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\ge\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx$$

$$=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{(n+1)\pi},$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$发散，故$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$发散.

模块五

1. 设$z=z(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足方程

$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中$a,b,c$都是常数，

$b^2-ac=0,c\ne 0$，作变换$u=x+\alpha y,v=x+\beta y$，

问如何选择常数α,β，能使代换后的方程有最简单的形式？

【分析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入方程，有

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

由于 $b^2-ac=0, c\neq 0$，因此方程 $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$ 有解 $\alpha=-\frac{b}{c}$。

将 $\alpha=-\frac{b}{c}$ 代入 $a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta$，有 $a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0$，

如果取 $\alpha=-\frac{b}{c}$， $\beta\neq\alpha$，有 $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$，

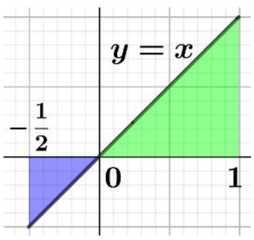
$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0$， $a+2b\beta+c\beta^2\neq 0$

原方程经代换后可化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

模块六

1. 设 $A=\int_0^1 e^{-t^2}dt$， $B=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}dt$，求积分 $I=2\int_{-\frac{1}{2}}^1 dx\int_0^x e^{-y^2}dy$.

【分析】



$$I=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y^2}dy+2\int_{-\frac{1}{2}}^0 dx\int_0^x e^{-y^2}dy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y^2}dy-2\int_{-\frac{1}{2}}^0 dx\int_x^0 e^{-y^2}dy$$

$$=2\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-y^2}dx-2\int_{-\frac{1}{2}}^0 dy\int_{-\frac{1}{2}}^y e^{-y^2}dx$$

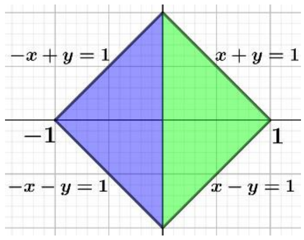
$$=2\int_0^1(1-y)e^{-y^2}dy-2\int_{-\frac{1}{2}}^0\left(y+\frac{1}{2}\right)e^{-y^2}dy$$

$$=2\int_0^1 e^{-y^2}dy+e^{-y^2}\Big|_0^1+e^{-y^2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^0-\int_{-\frac{1}{2}}^0 e^{-y^2}dy$$

$$=2\int_0^1 e^{-y^2}dy+e^{-1}-1+(1-e^{-\frac{1}{4}})-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t^2}dt$$

$$=2A-B+e^{-1}-e^{-\frac{1}{4}}$$

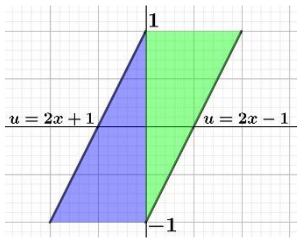
2. 证明：$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$.



【分析】$\iint\limits_D f(x+y)dxdy$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{x+1}f(x+y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{-x+1}f(x+y)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1}^{2x+1}f(u)du+\int_0^1 dx\int_{2x-1}^{1}f(u)du$$



$$=\int_{-1}^{-1}du\int_{\frac{u-1}{2}}^{0}f(u)dx+\int_{-1}^{1}du\int_0^{\frac{u+1}{2}}f(u)dx$$

$$=\int_{-1}^{-1}\frac{1-u}{2}f(u)du+\int_{-1}^{1}\frac{1+u}{2}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{-1}f(u)du$$

模块七

1. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e+\frac{e}{2n}\right]$ 的敛散性.

【分析】

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e+\frac{e}{2n}\right|=\left|\frac{11e}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\sim\frac{11e}{24n^2},$$

因此原级数绝对收敛.

2. 已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，

证明：$\lim_{n\to\infty}\left(|a_1b_n|+|a_2b_{n-1}|+\cdots+|a_nb_1|\right)=0$.

【分析】

设$|a_n|<A,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=B$，

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1$，$n>N_1$，$|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2B}$，

$\exists N_2$，$n>N_2$，$\sum_{k=n}^{\infty}|b_k|<\dfrac{\varepsilon}{2A}$

当$n>N_1+N_2$时，$|a_1b_n|+|a_2b_{n-1}|+\cdots+|a_nb_1|=$

$$|a_1b_n|+|a_2b_{n-1}|+\cdots+|a_{n-N_2}b_{N_2+1}|+|a_{n-N_2+1}b_{N_2}|+\cdots+|a_nb_1|$$

$$\le A\left(|b_n|+|b_{n-1}|+\cdots+|b_{N_2+1}|\right)+\frac{\varepsilon}{2B}\left(|b_{N_2}|+\cdots+|b_1|\right)$$

$$=A\sum_{k=N_2+1}^{n}|b_k|+\frac{\varepsilon}{2B}\sum_{k=1}^{N_2}|b_k|\le A\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2B}B=\varepsilon$$

3. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.（2013 年）

记$a_k=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k}\ (k=1,2,3,\cdots)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right]$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\int_1^2\frac{1}{2}dx+\int_2^3\frac{1}{3}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{n}dx$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx=1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n$$

$0<\frac{a_n}{n+2}\le\frac{1+\ln n}{n+2}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to}S_n=\lim_{n\to}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)=1$$

4. 求 $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n+1}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式.

【分析】

令 $t=\frac{x+1}{2}$， $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$=-t\ln(1-t)+\ln(1-t)+t$$

$$=-\frac{x+1}{2}\ln\frac{1-x}{2}+\ln\frac{1-x}{2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)+\frac{x}{2}(1+\ln 2)+\frac{1-x}{2}\ln(1-x)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)+\frac{x}{2}(1+\ln 2)-\frac{1-x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)+\frac{x}{2}(1+\ln 2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\ln 2)+\frac{\ln 2}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2n(n-1)}$$