更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

第二讲：函数连续

1.函数连续的证明
1.1函数连续的定义
1.2连续函数的和、差、积、商的连续性（四则运算）
1.3复合函数的连续性
1.4连续的充分必要条件左右连续
2.函数连续的性质
2.1最值性
2.2介值性

第二讲：函数连续 > 函数连续的证明 > 定义

函数$f(x)$在点x_0连续，证明:$|f(x)|$在点x_0连续

“$\varepsilon-\delta$”语言

对任意的$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

对任意的$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon$

$$||f(x)|-|f(x_0)||\le|f(x)-f(x_0)|$$

$$\Leftrightarrow|f(x)|-|f(x_0)|\le|f(x)-f(x_0)|\text{且}|f(x_0)|-|f(x)|\le|f(x)-f(x_0)|$$

$$|a|\le b\Leftrightarrow a\le b\text{且}-a\le b$$

第二讲：函数连续 > 函数连续的证明 > 四则运算的连续性

若$f(x)$，$g(x)$在点x_0连续，$M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，$m(x)=\min\{f(x), g(x)\}$

证明这两个函数在点x_0也连续

$$M(x)=\max\{f(x), g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$m(x)=\min\{f(x), g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

$f(x)$，$g(x)$在点x_0连续$\Rightarrow f(x)-g(x)$在点x_0连续$\Rightarrow |f(x)-g(x)|$在点x_0连续

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}, \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$在点$x_0$连续

四则运算的连续性定理

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续，则它们的和(差)$f\pm g$、积$f\cdot g$及商$\dfrac{f}{g}$(当$g(x_0)\neq 0$时)都在点x_0连续

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

第二讲：函数连续 > 函数连续的证明 > 四则运算的连续性

若$f(x)$，$g(x)$在点x_0连续，$M(x)=\max\{f(x), g(x)\}$，$m(x)=\min\{f(x), g(x)\}$

证明这两个函数在点x_0也连续

若$f_1(x)$，$f_2(x),\cdots$，$f_n(x)$在点x_0连续，$M_n(x)=\max\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_n(x)\}$

$m_n(x)=\min\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_n(x)\}$，证明这两个函数在点$x_0$也连续

$$\max\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_n(x)\}=\max\{\max\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_{n-1}(x)\}, f_n(x)\}$$

$$M_n(x)=\max\{M_{n-1}(x), f_n(x)\}$$

第二讲：函数连续 > 函数连续的证明 > 复合函数

$f(x)$在点x_0连续，证明$f(x)^{f(x)}$在点x_0也连续

复合函数的连续性定理

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$\overset{o}{U}(x_0)\subset D_{f\cdot g}$.若函数$u=g(x)$在$x=x_0$连续且$g(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[g(x)]$在$x=x_0$也连续

四则运算的连续性定理

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续，则它们的和(差)$f\pm g$、积$f\cdot g$及商$\frac{f}{g}$(当$g(x_0)\neq 0$时)都在点x_0连续

$$f(x)^{f(x)}=e^{\ln f(x)^{f(x)}}=e^{f(x)\ln f(x)}$$

$f(x)$在点x_0连续$\xrightarrow{\text{复合函数}}\ln f(x)$在点$x_0$连续$\xrightarrow{\text{四则运算}}f(x)\ln f(x)$在点$x_0$连续$\xrightarrow{\text{复合函数}}e^{f(x)\ln f(x)}$在点$x_0$连续即$f(x)^{f(x)}$在点$x_0$连续

第二讲：函数连续 > 函数连续的证明 > 左右连续

设函数$f(x)$在区间$(0,1)$上有定义，且$e^x f(x)$与$e^{-f(x)}$在区间$(0,1)$上都是单调增加的函数

证明：$f(x)$在$(0,1)$上连续

对任意的$x_0\in(0,1)$，$f(x)$在点x_0连续

$f(x)$是单调递减的函数　　复合函数的单调性

当$x>x_0$时，$f(x)\le f(x_0)$

$e^x f(x)$是单调增加的函数$\Rightarrow e^x f(x)\ge e^{x_0}f(x_0)\Rightarrow f(x)\ge e^{x_0-x}f(x_0)$

$e^{x_0-x}f(x_0)\le f(x)\le f(x_0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

当$x<x_0$时，$f(x)\ge f(x_0)$

$e^x f(x)$是单调增加的函数$\Rightarrow e^x f(x)\le e^{x_0}f(x_0)\Rightarrow f(x)\le e^{x_0-x}f(x_0)$

$e^{x_0-x}f(x_0)\ge f(x)\ge f(x_0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流”
更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

最大值最小值定理

在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定取得它的最大值和最小值

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

函数$f(x)$在(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$在$(a,b)$上有最小值

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$使得当$x\in(a,x_1)$时，$f(x)\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$使得当$x\in(x_2,b)$时，$f(x)\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

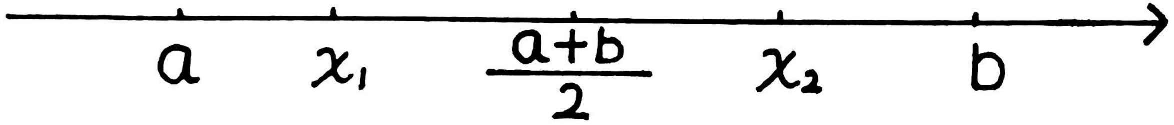
设$f(x)$在$[x_1,x_2]$上有最小值$f(x_0)$

$\dfrac{a+b}{2}\in[x_1,x_2]\Rightarrow f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ge f(x_0)\Rightarrow x\in(a,x_1)\cup(x_2,b)$时，$f(x)\ge f(x_0)$

又$x\in[x_1,x_2]$时，$f(x)\ge f(x_0)$

故$x\in(a,b)$时，$f(x)\ge f(x_0)$

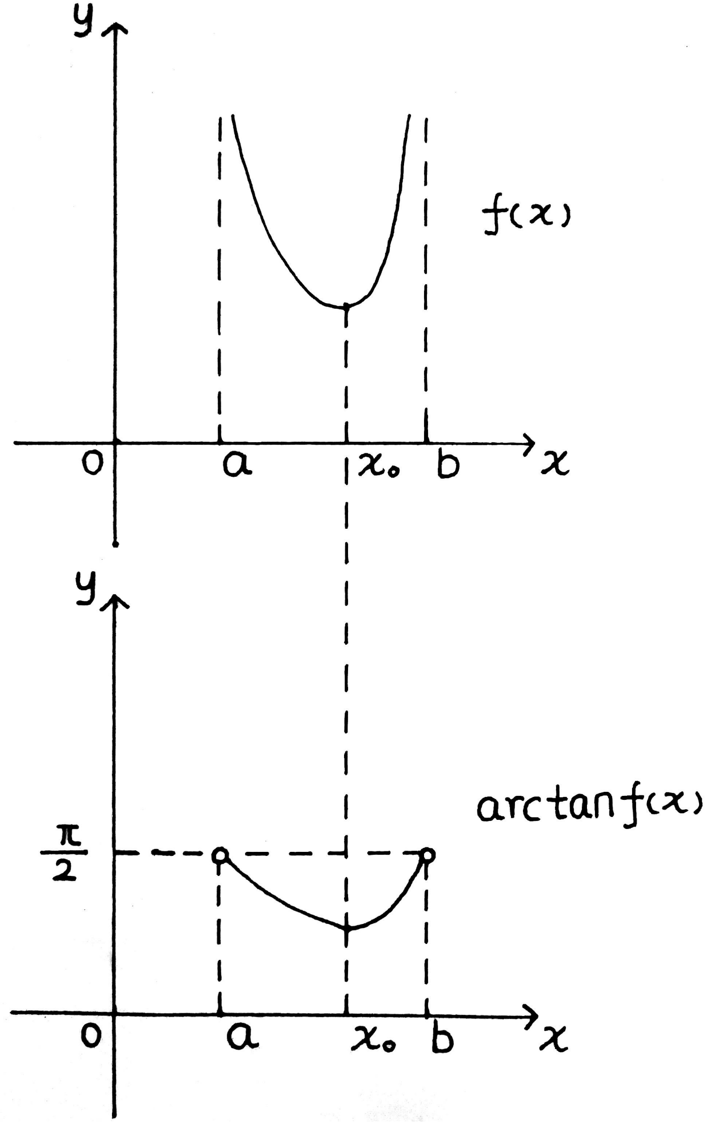
故$f(x_0)$是$f(x)$在(a,b)上的最小值



更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺"大学生数学竞赛学习交流"
更多视频请在B站或微信公众号关注"夜雨教你数学竞赛"

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

函数$f(x)$在$(a，b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$在$(a，b)$上有最小值



将函数值域的无界区间转化成有界区间

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & x=a\\ \arctan f(x) & x\in(a，b)\\ \dfrac{\pi}{2} & x=b\end{cases}$$

$g(x)$在$[a，b]$上连续

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

函数$f(x)$在(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$在$(a,b)$上有最小值

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x=a \\ \arctan f(x) & x\in(a,b) \\ \dfrac{\pi}{2} & x=b \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\arctan f(x)=\dfrac{\pi}{2}=g(a)$且$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\lim\limits_{x\to b^-}\arctan f(x)=\dfrac{\pi}{2}=g(b)$

$\Rightarrow g(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow$设$g(x_0)$是$g(x)$在$[a,b]$上的最小值

当$x\in(a,b)$时，$g(x)=\arctan f(x)<\dfrac{\pi}{2}=g(a)=g(b)\Rightarrow x_0\in(a,b)$

$g(x_0)\le g(x)\quad x\in(a,b)\Rightarrow \arctan f(x_0)\le \arctan f(x)\quad x\in(a,b)\Rightarrow f(x_0)\le f(x)\quad x\in(a,b)$

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$有最小值

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_1<0$使得当$x<x_1$时，$f(x)\geq f(0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists x_2>0$使得当$x>x_2$时，$f(x)\geq f(0)$

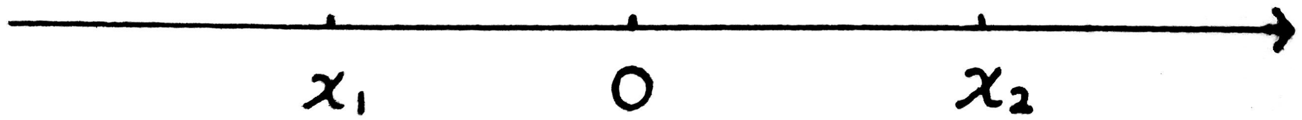
设$f(x)$在$[x_1, x_2]$上有最小值$f(x_0)$

$0\in[x_1, x_2]\Rightarrow f(0)\geq f(x_0)\Rightarrow$ 当$x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2,+\infty)$时，$f(x)\geq f(x_0)$

又$x\in[x_1, x_2]$时，$f(x)\geq f(x_0)$

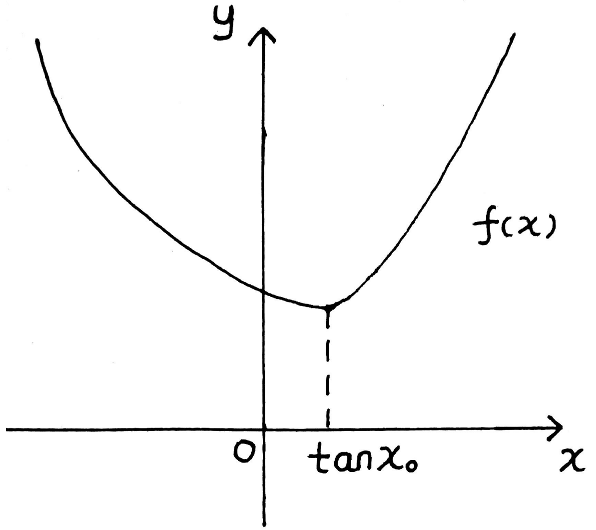
故$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f(x)\geq f(x_0)$

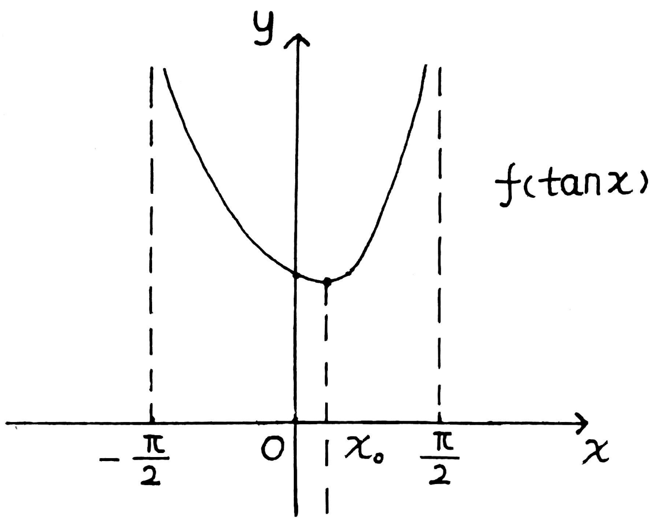
故$f(x_0)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最小值



第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$有最小值



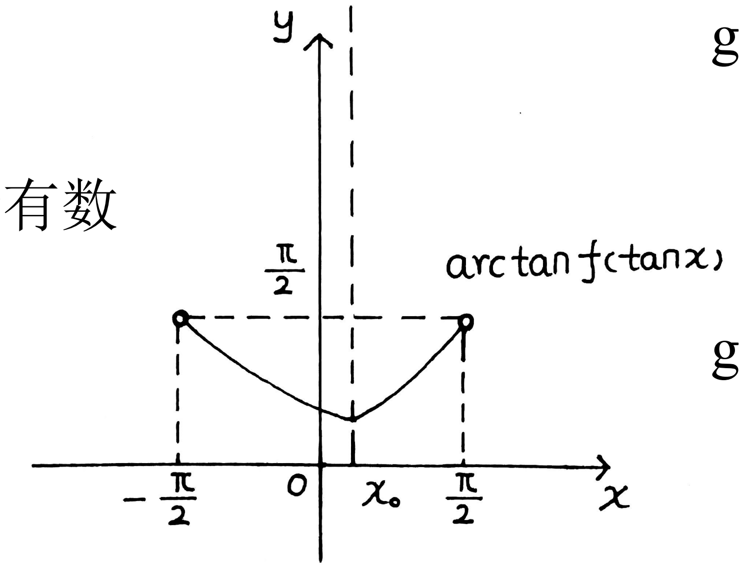


将函数值域的无界区间转化成有界区间

将函数定义域的无界区间转化成有界区间

x跑遍$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$的所有数

$\tan x$跑遍$(-\infty,+\infty)$的所有数



$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x=-\dfrac{\pi}{2} \\ \arctan f(\tan x) & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}) \\ \dfrac{\pi}{2} & x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$g(x)$在$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上连续

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 最值性

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & x=-\dfrac{\pi}{2}\\ \arctan f(\tan x) & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\\ \dfrac{\pi}{2} & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}\arctan f(\tan x)=\frac{\pi}{2}=g(-\frac{\pi}{2})\text{且}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\arctan f(\tan x)=\frac{\pi}{2}=g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow g(x)\text{在}[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{上连续}\Rightarrow\text{设}g(x_0)\text{是}g(x)\text{在}[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\text{上的最小值}$$

$$\text{当}x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\text{时，}\ g(x)=\arctan f(\tan x)<\frac{\pi}{2}=g(-\frac{\pi}{2})=g(\frac{\pi}{2})\Rightarrow x_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$g(x_0)\le g(x)\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow\arctan f(\tan x_0)\le\arctan f(\tan x)\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f(\tan x_0)\le f(\tan x)\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(\tan x_0)\le f(x)\quad x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow f(x)\text{在}\tan x_0\text{处取得最小值}$$

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

零点定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$

零点定理推论

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)\le 0$，那么在闭区间$[a,b]$上至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$

零点定理推论

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$在闭区间$[a,b]$上无零点，那么在闭区间$[a,b]$上有$f(x)$恒>0或恒<0

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

无穷区间的零点定理

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

那么在$(-\infty,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$

不妨设$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0\Rightarrow\exists x_1$使得当$x\le x_1$时，$f(x)<0\Rightarrow f(x_1)<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0\Rightarrow\exists x_2$使得当$x\ge x_2$时，$f(x)>0\Rightarrow f(x_2)>0$

记$m=\min\{x_1,\ x_2\}$，$M=\max\{x_1,\ x_2\}$

在$(m,\ M)$内至少有一点ξ，使$f(\xi)=0$

无穷区间的零点定理

设函数$f(x)$在$(-\infty,\ b]$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot f(b)<0$

那么在$(-\infty,\ b)$至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$

无穷区间的零点定理

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，且$f(a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

那么在$(a,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

介值定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，且$f(a)=A$及$f(b)=B \quad (A\neq B)$

那么对于A与B之间任意一个数C，在开区间$(a，b)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

介值定理推论

设函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，$f(a)=A$及$f(b)=B$

若$\min\{A，B\}\le C\le\max\{A，B\}$，则在闭区间$[a，b]$内至少有一点$\xi$，使得$f(\xi)=C$

介值定理推论

设函数$f(x)$在闭区间$[a，b]$上连续，M和m是$f(x)$在闭区间$[a，b]$上的最大值和最小值

若$m\le C\le M$，则在闭区间$[a，b]$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

无穷区间的介值定理

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$ $(A\neq B)$

那么对于A与B之间任意一个数C，在$(-\infty,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

设$G(x)=f(x)-C$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} G(x)=A-C$，$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=B-C$

$\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=(A-C)(B-C)<0$

$\Rightarrow$ 在$(-\infty,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$G(\xi)=0$

$\Rightarrow$ 在$(-\infty,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

无穷区间的介值定理

设函数$f(x)$在$(-\infty,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ $(A\neq f(b))$

那么对于A与$f(b)$之间任意一个数C，在$(-\infty,b)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

无穷区间的介值定理

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$ $(B\neq f(a))$

那么对于$f(a)$与B之间任意一个数C，在$(a,+\infty)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

$f(x)$在$[a，b]$上连续，x_1，$x_2,\cdots$，$x_n\in[a，b]$，n是大于1的正整数，λ_1，$\lambda_2,\cdots$，$\lambda_n\in(0,1)$

且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，证明：存在$\xi\in[a，b]$，使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\lambda_n f(x_n)$

$f(x)$在$[a，b]$上连续，故$f(x)$在$[a，b]$上有最大值M和最小值m

$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)m\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\lambda_n f(x_n)\le(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)M$

$\Rightarrow m\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\lambda_n f(x_n)\le M$

$\Rightarrow$存在$\xi\in[a，b]$，使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\lambda_n f(x_n)$

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$，n是大于1的正整数，证明存在$\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$，使得$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$

即证明$g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$有零点　　差的形式

$$f(1)-f(0)=0$$

$$f(1)-f(0)=f(\frac{n}{n})-f(0)=\sum_{k=1}^{n}\left[f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})\right]=\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k-1}{n}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}g(\frac{k-1}{n})=0$$

假设$g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$无零点

$g(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]$恒>0或恒$<0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k-1}{n})>0$或$<0$矛盾！

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in [0,1]$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$[0,1]$上严格单调

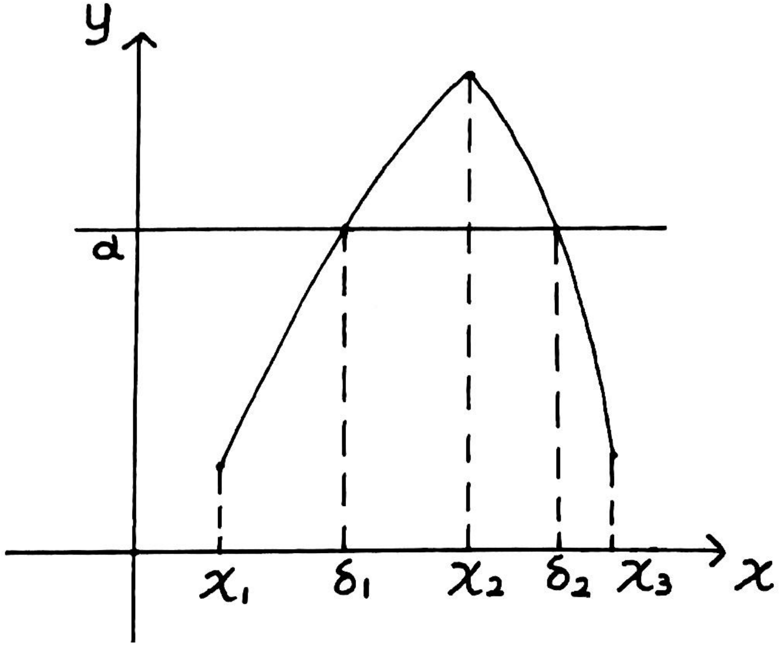
我们首先证明不存在$x_1<x_2<x_3 \in [0,1]$，使得$f(x_1)<f(x_2)$且$f(x_3)<f(x_2)$

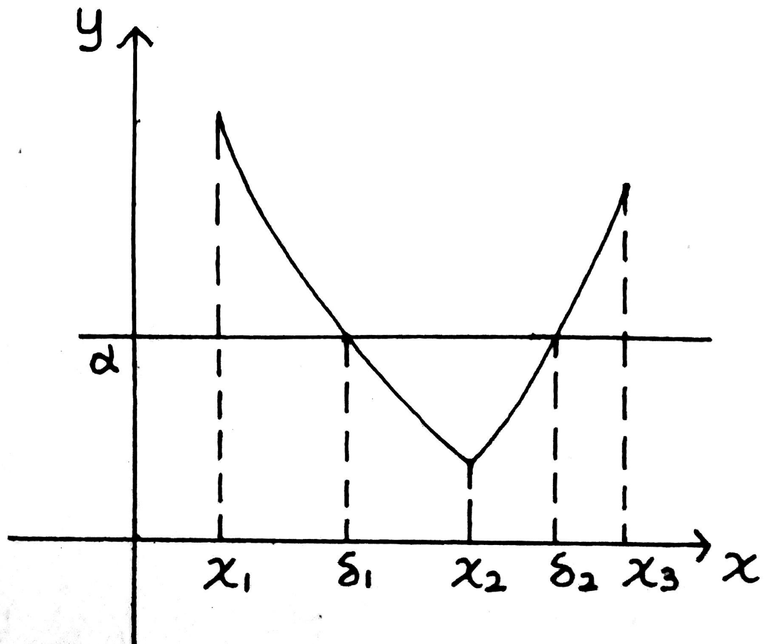
假设存在$x_1<x_2<x_3 \in [0,1]$，使得$f(x_1)<f(x_2)$且$f(x_3)<f(x_2)$

则存在α使得$f(x_1)<\alpha<f(x_2)$且$f(x_3)<\alpha<f(x_2)$

由介值定理存在$\delta_1 \in (x_1, x_2)$，$\delta_2 \in (x_2, x_3)$使得$f(\delta_1)=\alpha$，$f(\delta_2)=\alpha$矛盾！

我们同样可以证明不存在$x_1<x_2<x_3 \in [0,1]$，使得$f(x_1)>f(x_2)$且$f(x_3)>f(x_2)$





第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in [0,1]$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$[0,1]$上严格单调

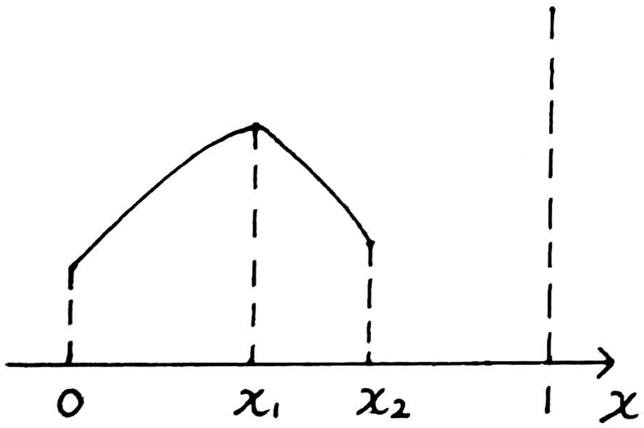
回到原题，我们不妨设$f(0)<f(1)$，我们来证明对任意的$x_1<x_2\in[0,1]$，都有$f(x_1)<f(x_2)$

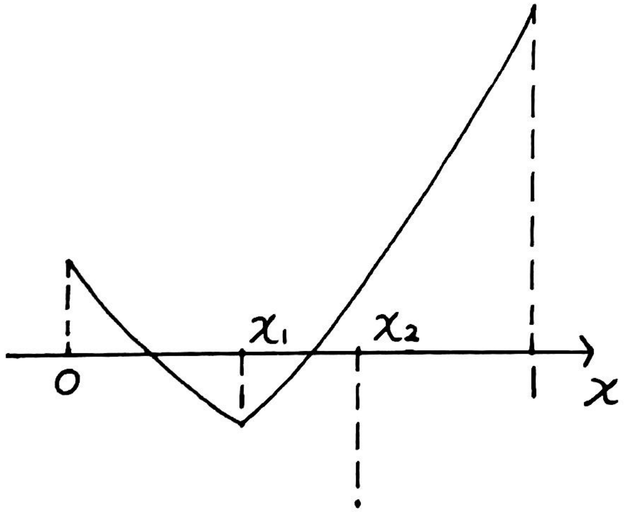
假设存在$x_1<x_2\in[0,1]$，$f(x_1)>f(x_2)$

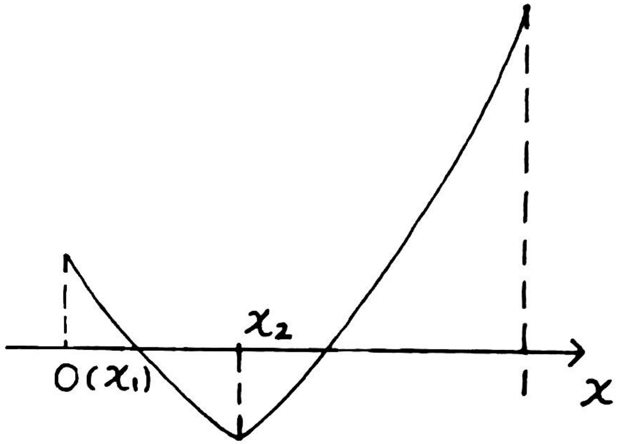
i.若$f(0)<f(x_1) \Rightarrow 0<x_1<x_2$，$f(0)<f(x_1)$且$f(x_2)<f(x_1)$矛盾！

ii.若$f(0)>f(x_1) \Rightarrow 0<x_1<1$，$f(0)>f(x_1)$且$f(1)>f(x_1)$矛盾！

iii.若$f(0)=f(x_1) \Rightarrow 0=x_1 \Rightarrow 0<x_2<1$，$f(0)>f(x_2)$且$f(1)>f(x_2)$矛盾！







第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

函数$f(x)$在$(0,1)$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in (0,1)$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$(0,1)$上严格单调

假设函数$f(x)$在$(0,1)$上不严格单调

则存在$x_1 < x_2 \in (0,1)$，使得$f(x_1)<f(x_2)$且存在$x_3 < x_4 \in (0,1)$，使得$f(x_3)>f(x_4)$

记$m=\min\{x_1, x_2\}$，$M=\max\{x_3, x_4\} \Rightarrow [m, M] \subset (0,1)$

函数$f(x)$在$[m, M]$上严格单调

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in [m, M]$

$x_1 < x_2$，$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$函数$f(x)$在$[m, M]$上严格单调递增

$x_3 < x_4$，$f(x_3)>f(x_4) \Rightarrow$函数$f(x)$在$[m, M]$上严格单调递减 矛盾！

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in (-\infty,+\infty)$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺"大学生数学竞赛学习交流" 更多视频请在B站或微信公众号关注"夜雨教你数学竞赛"

函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in [0,1]$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$[0,1]$上严格单调

函数$f(x)$在$(0,1)$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in (0,1)$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$(0,1)$上严格单调

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且不存在$x_1 \neq x_2 \in (-\infty,+\infty)$，使得$f(x_1)=f(x_2)$

证明函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调

函数$f(x)$在一区间连续，且在该区间上各点的函数值都不相等，则函数$f(x)$在该区间上严格单调

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内连续，且存在两两互异的点x_1，x_2，x_3，$x_4\in(0,1)$，使得

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta$$

证明：对任意的$\lambda\in(\alpha,\beta)$，存在互异的点x_5，$x_6\in(0,1)$，$\lambda=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$

将x_5、x_6分离开

$$\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}\Leftrightarrow f(x_5)-f(x_6)=\lambda(x_5-x_6)\Leftrightarrow f(x_5)-\lambda x_5=f(x_6)-\lambda x_6$$

$G(x)=f(x)-\lambda x$在$(0,1)$内不是严格单调

更多优质数学竞赛资料请关注我的微店店铺“大学生数学竞赛学习交流” 更多视频请在B站或微信公众号关注“夜雨教你数学竞赛”

第二讲：函数连续 > 函数连续的性质 > 介值性

设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内连续，且存在两两互异的点x_1，x_2，x_3，$x_4\in(0,1)$，使得

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta$$

证明：对任意的$\lambda\in(\alpha,\beta)$，存在互异的点x_5，$x_6\in(0,1)$，$\lambda=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$

设$G(x)=f(x)-\lambda x \quad x\in(0,1)$

假设$G(x)$在区间$(0,1)$内严格单调

$G(x_1)-G(x_2)=f(x_1)-f(x_2)-\lambda(x_1-x_2)=(\alpha-\lambda)(x_1-x_2)$

$\alpha-\lambda<0\Rightarrow G(x)$在区间$(0,1)$内严格单调递减

$G(x_3)-G(x_4)=f(x_3)-f(x_4)-\lambda(x_3-x_4)=(\beta-\lambda)(x_3-x_4)$

$\beta-\lambda>0\Rightarrow G(x)$在区间$(0,1)$内严格单调递增　矛盾！

故$G(x)$在区间$(0,1)$内不是严格单调

存在互异的点x_5，$x_6\in(0,1)$使得$G(x_5)=G(x_6)\Rightarrow\lambda=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$