级数

1、利用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

例 1（1）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-\frac{1}{n})^n \sin\frac{1}{3^n}$ 的敛散性

解：因为 $\sin\frac{1}{3^n} \sim \frac{1}{3^n}$，故原级数和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-\frac{1}{n})^n \frac{1}{3^n}$ 有相同的敛散性

$\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})^n \frac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n})^n = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0$，故原级数发散

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\left(a>0\right)$ 的敛散性。

记为 a_n

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

（2）讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{\frac{a^n n!}{n^n}}(a>0)$ 的敛散性。

解: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!}=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{a}{e}=\rho$

讨论① $a>e$ 时, $a_{n+1}>a_n$ (当 $n>N$) $a_n>a_1>0$ $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, $\sum a_n$ 发.

② $a<e$ 时, 取 $\rho\in(\frac{a}{e},1)$ 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho$ $(n>N)$

$a_{n+1}<\rho a_n<\rho^2 a_{n-1}<\cdots<\rho^{n-N+1}a_N$

$\Rightarrow a_n<\rho^{n-N}a_N\to 0$ $(n\to\infty)$.

比值判别 $\frac{a}{e}<1$

由比较判别法, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$ 收敛 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

2021-10-16

③ $a=e$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ 发散 ($n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$)

斯特林公式:

$\frac{n!e^n}{n^n}\sim\sqrt{2\pi n}\to\infty$

$a_n\to\infty$.

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

(5) 积分判别法: $f(x)$ 是在 $[1,+\infty)$ 上单调递减的正项连续函数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 具有相同的收敛性。

A

$x\in(n,n+1)$ $f(n+1)\le f(x)\le f(n)$

$A\to\infty$ $\int_1^A f(x)dx<+\infty$

① $f(n)=\int_n^{n+1}f(n)dx\ge\int_n^{n+1}f(x)dx$

$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\ge\int_1^{+\infty}f(x)dx$.

$x\in(n-1,n)$ $f(n)\le f(x)\le f(n-1)$

② $f(n)=\int_{n-1}^{n}f(n)dx\le\int_{n-1}^{n}f(x)dx$.

$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=2}^{\infty}f(n)+f(1)\le\int_1^{\infty}f(x)dx+f(1)$

2021-10-16

2、利用比值判别法、根值判别法判断级数的敛散性

注意：一些常见的极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{an+b}=1$ **（2）** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{|a|,|b|\}$

例 2（1）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\pi^n-3^n}$ 的敛散性

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{\pi^n-3^n}}=\frac{e}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{1-(\frac{3}{\pi})^n}}=\frac{e}{\pi}<1$，故原级数收敛

（2）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}=0<1$，故原级数收敛

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$ （$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$b>0,a_n>0$）

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{b}{a_n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a}$

当 $b<a$ 时，级数收敛；当 $b>a$ 时，级数发散；

3、利用等价无穷小替换判断级数的敛散性

方法：如果 $a_n\sim b_n$**，则** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **和** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ **有相同的敛散性**

例 3(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^\lambda})}{n}$ （$\lambda>0$）

解：因为 $\ln(1+\frac{1}{n^\lambda})\sim\frac{1}{n^\lambda}$，所以原级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 有相同的敛散性

由于 $\lambda+1>1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，即原级数收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$

解；$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\cdot n=1$所以原级数和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$有相同的敛散性，原级数发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

解；由于$\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}\sim\frac{1}{n^{p}}$，故原级数和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p}}$有相同的敛散性

当 $p>1$时，级数绝对收敛；当$0<p\le 1$时，级数条件收敛

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}-\ln n}$

解：因为$\frac{1}{n^{2}-\ln n}=\frac{1}{n^{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n^{2}}}$，而$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\ln n}{n^{2}})=1$

所以$\frac{1}{n^{2}-\ln n}\sim\frac{1}{n^{2}}$，故原级数收敛

4、利用比较判别法判断级数的敛散性

常用不等式$\ln n<n$

例 4（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\sqrt[3]{n}}$

解：因为$\ln n<n$，所以$\frac{1}{\ln\sqrt[3]{n}}=\frac{3}{\ln n}>\frac{3}{n}$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$发散，故原级数发散

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^{4}}dx$

分析：判断被积函数的单调性，求出被积函数在积分区间内的最值

解：因为$\frac{\sqrt{x}}{1+x^4} \le \sqrt{x}$，所以$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx \le \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故原级数收敛

5、利用级数的性质判断级数的敛散性

方法：（1）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中有一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 发散

例 5（1）$\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2+(-1)^n}{3^n} + 2^{(-1)^n - n}]$（2）$\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{\sin na}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}]$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+a}{n^2}$ ($k>0$)

6、利用泰勒公式判断级数的敛散性

(1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

(2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$

(3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

(4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

(5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

(6) $(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots$

$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

(7) $(1-x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \qquad (-1 < x < 1)$$

方法：利用泰勒公式展开找和原级数等价无穷小的级数讨论

例 6（1）$\sum_{n=1}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p$

分析：关键是利用泰勒公式展开找和原级数等价无穷小的级数，因为

$$e-(1+\frac{1}{n})^n = e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e - e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\dots} = e(1-e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\dots})$$

$$= -e(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\dots)+\dots = \frac{e}{2n}-\frac{e}{3n^2}+\dots+\dots$$

$$[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p = \frac{e^p}{2^p n^p}(1-\frac{2}{3n}+\dots)^p$$

由于$[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p \sim \frac{e^p}{2^p n^p}$，故原级数和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$有相同的敛散性

当 $p>1$时，级数收敛；当 $p\le 1$时，级数发散（注意 $p=1$的情况）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(1+\frac{\ln n}{n})^p$ （ $p>0$ ）

分析：因为$(1+\frac{\ln n}{n})^p = 1 - p\cdot\frac{\ln n}{n} + \frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{(\ln n)^2}{n^2} - \dots$

故$\frac{1}{n^p}(1+\frac{\ln n}{n})^p = \frac{1}{n^p} - p\cdot\frac{\ln n}{n^{p+1}} + \frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{(\ln n)^2}{n^{p+2}} - \dots$

即$\frac{1}{n^p}(1+\frac{\ln n}{n})^p \sim \frac{1}{n^p}$，原级数和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$有相同的敛散性

当 $p>1$时，原级数收敛；当$0<p\le 1$时，级数发散

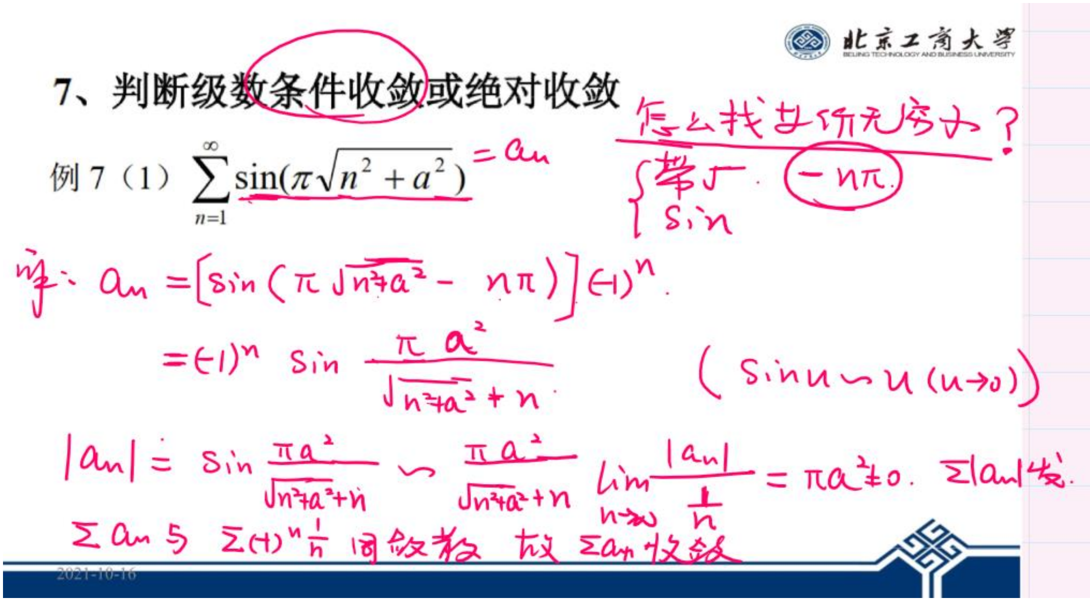
7、判断级数条件收敛或绝对收敛

例 7（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$

解：因为$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)=(-1)^n\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

因为$\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$，故原级数和$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$有相同的敛散性，故原级数条件收敛

注意：常用公式$\sin(n\pi+a)=(-1)^n\sin a$



（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\left(\sqrt{n^2+3}\ \ \pi\right)$

解：因为$\tan(\sqrt{n^2+3}\pi)=\tan(\sqrt{n^2+3}\pi-n\pi)=\tan\frac{3\pi}{\sqrt{n^2+3}+n}$

因为$\tan\frac{3\pi}{\sqrt{n^2+3}+n}\sim\frac{3\pi}{\sqrt{n^2+3}+n}$，故原级数和$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3\pi}{\sqrt{n^2+3}+n}$有相同的敛散性，故原级数条件收敛

注意：常用公式$\tan(n\pi+a)=\tan a$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e>1$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$也发散

注意：能用$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$**判断**$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$**发散，则**$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$**一定发散**

8、求级数的收敛域和收敛半径

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot f(n,x)$**的收敛域**

方法（1）求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}\cdot f(n+1,x)|}{|a_n\cdot f(n,x)|}=h(x)$**（或**$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n\cdot f(n,x)|}=h(x)$**）**

（2）令$h(x)<1$**，求出** x **的范围**

（3）再把 x **的范围的端点值代入原级数判断收敛否，最终确定收敛域和收敛半径** R

例

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n\,|\sin x|^{2n}}{n}}=2\,|\sin x|^2$

当 $2\,|\sin x|^2<1$，即 $-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}+2n\pi$ 时级数收敛；

当 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}$、$x=2n\pi-\dfrac{\pi}{4}$、$x=2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$、$x=2n\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ 时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，该级数条件收敛

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}\cdot\dfrac{n^x}{e^x}=1$，所以 $\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}\sim\dfrac{e^x}{n^x}$

故原级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^x}{n^x}$ 有相同的敛散性。当 $x>1$，级数收敛；当 $x\le 1$，级数收敛

注意：也可找和原级数有相同敛散性的级数，并且判断该级数的收敛域，此收敛域为原级数的收敛域。

9、求幂级数的和函数

方法（1）先求幂级数的收敛域

（2）令其和函数为 $s(x)$

（3）利用逐项积分或逐项求导求 $s'(x)$ **或** $\int s(x)dx$

（4）最后确定 $s(x)$

注意下列公式的应用

（1） $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$

（2） $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sin x$

（3）$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$

例 10（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)|x|^{2n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n+1)|x|^{2n}}=0$，原级数的收敛域为 R

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}+2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}$$

$$=(1+2x^2)e^{x^2}\text{（}x\in R\text{）}$$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$

解：因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|^n}{n+1}\cdot\frac{n}{(n-1)|x|^{n-1}}=|x|$ 当$|x|<1$，即$-1<x<1$时原级数的收敛

当$x=\pm1$时，级数发散

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，对 x 求导得

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$， 则 $f(x)=-\ln(1-x)-x+c$

因为 $f(0)=0$，所以$c=0$，即 $f(x)=-\ln(1-x)-x$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{x}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}+1$$

10、借助幂级数求数项级数的和

方法：把级数中含有 A^{an} 的形式设为 x^{an} 或 x^n，利用求幂级数的和函数的方法处理

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

令 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$，则 $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{3n}=\frac{x^{3}}{1-x^{3}}$

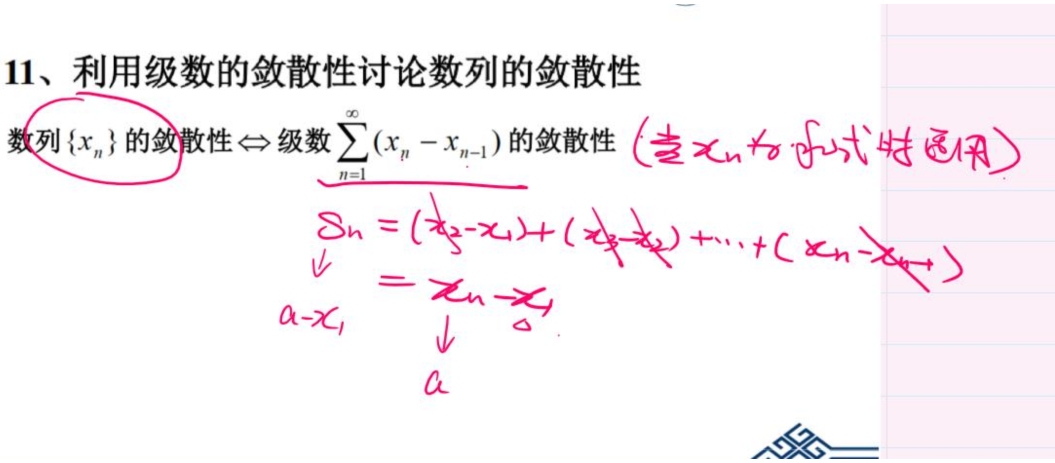
两边积分得 $g(x)=\int\frac{x^{3}}{1-x^{3}}dx=-x-\frac{\ln(1-x)}{3}+\frac{\ln(x^{2}+x+1)}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

当 $x=0$ 时，$c=-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

当 $x=\sqrt[3]{-1}=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3n+1}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-1$

11、利用级数的敛散性讨论数列的敛散性

数列 $\{x_n\}$ 的敛散性 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 的敛散性



例 11 判断数列 $\{x_n\}$ 是否收敛

（1）$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$

解：因为 $x_n-x_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$$=\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=-\frac{1}{\sqrt{n}(2n+2\sqrt{n(n-1)}-1)}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(2n+2\sqrt{n(n-1)}-1)}$ 收敛，故数列 $\{x_n\}$ 收敛

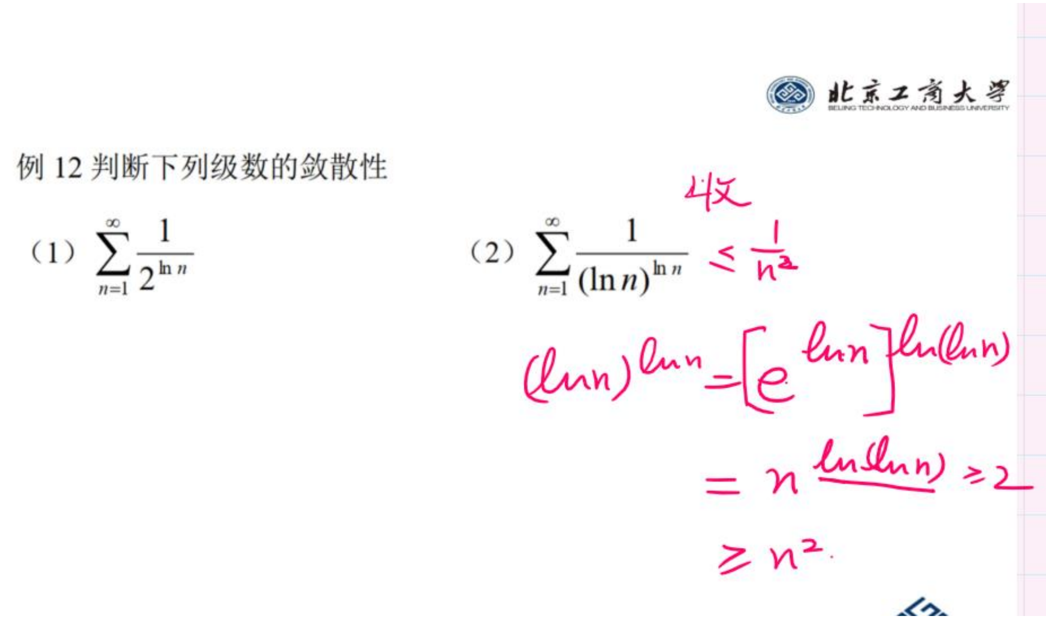
（2） $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{(\ln n)^2}{2}$ （练习）

12、把级数转化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的形式处理

常用公式：（1） $a=e^{\ln a}$ **（2）** $e^{a\ln n}=n^a$

例 12 判断下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$



① 定义求 S_n. 裂项. x^n

② 构造幂级数 11.

北京工商大学
BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

一、试求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ 的和。

$a=\tan x \quad b=\tan y$

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{a-b}{1+ab}$

$\arctan\frac{a-b}{1+ab}=\arctan \underset{x}{\underset{\parallel}{a}}-\arctan \underset{y}{\underset{\parallel}{b}}$

解：$\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{1}{n(n+1)+1}=\frac{1/n(n+1)}{1+1/n(n+1)}$

$=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}\Rightarrow\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$

$S_n=\arctan 1-\arctan\frac{1}{n+1}\to\frac{\pi}{4}$

2021-10-16

六: 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 。用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数 .

证： 由 $f(x)=f(x+2)$ 知 f 为以 2 为周期的周期函数，其 $Fourier$ 系数分别为：

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx \quad , \quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx \text{ ,} \quad \text{.............................4'}$$

由 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x dx\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})dt\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)dt\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t dt\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t dt
\end{aligned}$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$ 。 ....6'

同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$

联立 $\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$，得 $a_n=b_n=0 \quad (n=1,2\cdots)$ . ...2'

而 f 可导，其 $Fourier$ 级数处处收敛于 $f(x)$，所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 为常数。 ....2'

北京工商大学

三、（满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛

$f(\frac{1}{n})\to\square$

证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=|\frac{1}{2}f''(0)|\in[0,+\infty)$.

当 $|\frac{1}{2}f''(0)|>0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

当 $=0$ 时 …… 收敛

北京工商大学

四、（本题 14 分）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

$\frac{\delta}{2}<\delta\leftarrow\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}$

$=\frac{1}{a_{n+1}}\left[\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{b_n}\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}}\right]$ $\Leftrightarrow$

证(1) 设 $\delta=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$.

$\frac{\delta}{2}\cdot a_{n+1}<\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 　设 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

$G_n(x)=\sum(\cdot)$

2021-10-16

$\frac{\delta}{2}S_{n+1}\le\frac{a_1}{b_1}-\underbrace{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}_{\ge 0}\le\frac{a_1}{b_1}\Rightarrow S_{n+1}$ 有界 $\Rightarrow\sum a_n$ 收敛.

(2) 往证 $a_n \geq A b_n$、

由已知 ……<0 可知，∃N，当 $n>N$ 时 $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$

$$a_{n+1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot a_n \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N$$

$$= \frac{a_N}{b_N} \cdot b_{n+1}$$

由比较判别法得证，

五、求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

$x<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \to \infty \quad \frac{a_1}{1-q}$$

$x \to 1$

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt$$

$$= \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_{n-1}^{n} + \cdots\right) x^{t^2} dt$$

$$= \int_0^1 x^{t^2} dt + \int_1^2 x^{t^2} dt + \int_2^3 x^{t^2} dt$$

$$\geq x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + \cdots + x^{n^2} + \cdots$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = 1 + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + \cdots$$

$$\leq \boxed{1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt} ?$$

$\square \leq x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + \cdots + x^{(n-1)^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$.

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{\ln x^{t^2}} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt. \quad x \to 1^-$$

$$= \int_0^{+\infty} \boxed{e^{-t^2}}(\ln \tfrac{1}{x}) dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$$

$$\overset{s = t\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}{=} \left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds\right) \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1-x}{x}\right)}} \qquad \frac{1-x}{x} \to 0$$

$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}. \qquad \ln\left(1+\frac{1-x}{x}\right) \sim \frac{1-x}{x} \sim 1-x \quad (x \to 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (x \to 1^-)$$