全国大学生数学竞赛 极限 第一讲

——预赛试题

说明：题目中凡是标明注，均是为了帮助同学理解添加的注释，解题过程中并不需要写出。

用初等数学的方法将所求 x_n 变形，再求极限。初等变形的方法有恒等变形（添项减项、平方差公式、半角公式）、

在求乘除式极限里，其因子可用等价因子代替，极限不变。最常用的等价关系，当 $x\to 0$ 时，

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，还有 $a^x-1\sim\ln a$ $(1+x)^n\sim 1+nx$ $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$

1. （2009 年预赛 小题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\dfrac{e}{x}\ln(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$ （注：exp 代表指数函数，即 $\exp\{x\}=e^x$）

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\}$$

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由 *L'Hospital* 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^x)}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)e$$

于是 原式 $=e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)e}$。

注：幂指函数求极限问题

2. （2010 年预赛 5 分小题）设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：将 x_n 恒等变形（用平方差公式）

$$x_n=(1-a)\cdot(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于 $|a|<1$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

注：由恒等变形将所求极限变形

3. （2010 年预赛 5 分小题）求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} e^{-1}\right]^{x}$（注：泰勒展开式 $\begin{matrix} \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^n}{n}+R_n(x) \\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\cdots+\frac{1}{nx^n}+R_n(\frac{1}{x}) \end{matrix}$）

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-1\right]\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

4. （2011 年预赛　6 分小题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$。

解：（注：将分式进行拆分，注意保证拆分后每项极限都存在）

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$$

其中第二部分极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$$

第一部分极限为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$ {注：通过提取因子 e^2，得到等价关系中的常数 1，由等价关系 $e^x-1\sim x$ 简化计算}

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$。

注：适当拆分，等价无穷小替换和洛必达法则

5. （2011 年预赛　6 分小题）设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2^2}.....\cos\frac{\theta}{2^n}$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

解：(I)（注：θ 取特殊值的情况）若 $\theta=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

(II) 若 $\theta\neq 0$, 则当 n 充分大，使得 $2^n>|\theta|$ 时，（注：保证 $\frac{\theta}{2^n}\to 0$）

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2^2}.....\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2^2}.....\cos\frac{\theta}{2^n}.\sin\frac{\theta}{2^n}.\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2^2}.....\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}.\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}.\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2^2}.....\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}.\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}.\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}$。（注：由$\frac{\theta}{2^n}\to 0$保证可用等价无穷小替换求解极限

$\sin x\sim x\,(x\to 0)$）

注：利用三角函数性质将所求极限简化

6. （2011 年预赛　16 分大题）设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a和λ为有限数，求证：

（1）如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$；

（2）如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$

证明：（1）由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$使得$|a_n|\le M$（注：数列有极限则必有界，用有界的目的是什么，同学们体会一下），且$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}$，当$n>N_1$时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\text{（注：此处为极限的定义）}$$

因为$\exists N_2>N_1$,使得当$n>N_2$时，有$\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$（注：为了限制前$N_1$项）。于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

（注：上面的绝对值可以拆解如下

$$\left|\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+...+a_n-na}{n}\right|=\left|\frac{\left(a_1-a\right)+\left(a_2-a\right)+...+\left(a_n-a\right)}{n}\right|$$
$$\le\left|\frac{a_1-a}{n}\right|+\left|\frac{a_2-a}{n}\right|+...+\left|\frac{a_n-a}{n}\right|$$

基于此拆解将数列分为两部分，前N_1项由界$M+|a|$来限制，其余的$n-N_1$项由定义来限制)。

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=a$

（2）对于$i=0,1,...,p-1$，令$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知$\{A_n^{(i)}\}$为$\{a_{n+p}-a_n\}$的子列（注：下角标相差$p$），由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$（注：收敛数列的子列和母列极限相同），有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^i+A_2^i+...+A_n^i}{n}=\lambda\text{（注：这是由结论（1）保证的）}$$

而 $A_1^i+A_2^i+\ldots+A_n^i=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$（注：将 $A_1^i,A_2^i,\ldots,A_n^i$ 用 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$ 展开，逐项相消，只剩首尾项）。所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$（注：由（1）知数列 $\{a_n\}$ 极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{np+i}}{n}=0$）可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$ 。从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}$$。（注：插项法-此处有修改）

故 $\forall m\in\mathbf{N},\exists n,p,i\in\mathbf{N},(0\le i\le p-1)$，使得 $m=(n+1)p+i$，且当 $m\to\infty$ 时 $n\to\infty$，所以 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$。

7. （2012 年预赛　6 分小题）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

解法一：（注：将 $n!$ 放大为 n^n）由不等式 $1\le(n!)^{\frac{1}{n^2}}\le(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=(n)^{\frac{1}{n}}$，又有

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n}=1$$

（注：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln n$ 的极限可由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln x$ 得，洛必达法则）故由极限存在准则 I（两边夹法则）可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$。

解法二：$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\ln n!}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln n!}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}}=e^0=1$（这种做法更简单，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则）

※第 7 题说明：10 月 24 号课堂上讲的做法有问题，修改为上面做法。

8. （2012 年预赛　6 分小题）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$

解：因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\ (x\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0$。

注：通过放缩被积函数来简化被积函数的形式，从而能够将积分积出来。直接洛必达不太可行。

9. （2013 预赛　6 分小题）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$。

解：因为 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$（注：$\sin(x+2k\pi)=\sin x$，然后根式有理化），有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}$$

注：利用三角函数的周期性，将角度转化为无穷小的角度，才可在后面求极限用了两次等价无穷小的替换，$\ln(1+x)\sim x$ 和 $\sin x\sim x$）。

10. （2014 预赛　真题）设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$______________ 。

解：$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right)$（注：本题技巧拆项分解，分子加 1 减 1）

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1\text{。}$$

11. （2014 预赛　真题）已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$________________

解：由 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$，(注：已知极限两边取对数)。于是有 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha$（注：利用极限和无穷小的关系），其中 $\alpha\to0(x\to0)$，即有 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$，

从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+\alpha x}{x}-1=2$（注：无穷小等价替换 $e^x-1\sim x$）。

注：得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$ 后，用反证法推断亦可， $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{f(x)}{x}\right)$ 必为零（反证法，若不为零则前面极限结果不成立），等价无穷小替换 $\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0)$

12. （2014 年预赛　大题）设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b[f(x)]^n dx$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：先考虑特殊情形：$a=0,b=1$，下证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

首先$x_n\in[0,1]$，即$x_n\le 1$，只要证明$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1),\exists N,\forall n>N$时$1-\varepsilon<x_n$，由$f$在$[0,1]$严格单增，就是要证明$f^n(1-\varepsilon)<f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(x)dx$。

由$\forall c\in(0,1)$,有$\int_c^1 f^n(x)dx>f^n(c)(1-c)$(解释：函数$f$的单调性，左矩形最小)，现取$c=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，则$f(1-\varepsilon)<f(c)$，即$\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right)^n=0$，所以$\exists N,\forall n>N$时有

$$\left(\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right)^n<\frac{\varepsilon}{2}=1-c。$$

即$f^n(1-\varepsilon)<f^n(c)(1-c)\le\int_c^1 f^n(x)dx\le\int_0^1 f^n(x)dx=f^n(x_n)$，从而$1-\varepsilon<x_n$，由$\varepsilon$的任意性得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

再考虑一般情形．令$F(t)=f(a+t(b-a))$，（解释：因为f的定义域为$[a,b]$，所以有$a\le a+t(b-a)\le b$，解出来就是$0\le t\le 1$，从而前面特殊情况的结论就可以用在一般函数$F(x)$上）由f在$[a,b]$上非负连续，严格单增知F在$[0,1]$上非负连续，严格单增．从而$\exists t_n\in[0,1]$，使得$F^n(t^n)=\int_0^1 F^n(t)dt$，且$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$，即

$$f^n(a+t_n(b-a))=\int_0^1 f^n(a+t(b-a))dt$$

记$x_n=a+t_n(b-a)$，则有

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx，且\lim_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b$$

13. （2014年预赛　大题）设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$。（定积分定义和极限的结合）

解：令$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因$A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i^2/n^2}$（解释：当我们将$A_n$整理写成前面求和的形式，才会联想到定积分−乘积和式的极限，才会想到前面函数f的形式），故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$。记$x_i=\dfrac{i}{n}$，则$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)dx$（一段一段相加，矩形法，$f(x_i)$是常数），故

$$J_n=n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f(x_i)\right)dx。$$

由拉格朗日中值定理，存在$\zeta_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right)$使得$J_n = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-1}^{x_i} f'(\zeta_i)(x-x_i)dx$。记$m_i$和$M_i$分别是$f'(x)$在$\left[x_{i-1}, x_i\right]$上的最小值和最大值，则$m_i \le f'(\zeta_i) \le M_i$，故积分$\int_{x_i-1}^{x_i} f'(\zeta_i)(x-x_i)dx$介于$m_i\int_{x_i-1}^{x_i}(x-x_i)dx$和$M_i\int_{x_i-1}^{x_i}(x-x_i)dx$之间，所以存在$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$使得

$$\int_{x_i-1}^{x_i} f'(\zeta_i)(x-x_i)dx = \frac{-f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2}{2}$$

于是$J_n = -\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$。从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right) = \lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}[f(1)-f(0)] = \frac{1}{4}$$

注：当$n\to\infty$时，$\eta_i \to x_i$。

14. （2015 预赛　真题）极限$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right) = \underline{\frac{2}{\pi}}$。

解:（注：将 n 乘入括号中）由于$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \le \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$，而

$$\text{左边}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{右边}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

所以所求的极限是$\frac{2}{\pi}$。

（注：乘积和式的极限，很自然就联想到定积分，由极限存在准则 I 两边夹原理可得）

15. （2016 年预赛　5 分小题）若$f(x)$在点$x=a$可导，且$f(a)\ne 0$，则$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = $_____。

解：$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$。（注：泰勒公式，再取对数取指数，无穷小等价替换）

16. （2016 年预赛　5 分小题）若 $f(1)=0$， $f'(1)$ 存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}$。

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$（注：将 $\sin^2 x+\cos x$ 看做整体，利用条件 $f(1)=0$ 和 $f'(1)$ 存在，补项法构造函数在 $x=1$ 处导数）

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}f'(1)$$

17. （2016 年预赛　14 分大题）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数， $f(0)=0$， $f(1)=1$，

证明： $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)dx-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)=-\dfrac{1}{2}$。

证明：将区间 $[0,1]$ n 等分，设分点 $x_k=\dfrac{k}{n}$，则 $\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta x_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-f(x_k)\right)dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}(x-x_k)dx\right)$$ （注：ξ_k 位于 x_k 和 x_{k-1} 之间，当 $n\to\infty$ 时，$\xi_k\to x$）

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)dx\right)$$（注：拉中值定理）η_k 位于 x_k 和 x_{k-1} 之间

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\left(-\frac{1}{2}\left(x_k-x_{k-1}\right)^2\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f'(\eta_k)\left(x_k-x_{k-1}\right)\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}。$$

18. （2017 年预赛　小题）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$。

解：由于 $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$　（注：利用 $\sin(\pi-x)=\sin x$）

$=\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\to 1$。（注：根式有理化）（本题做法利用周期性，引入变量n，然后利用有理化，将n变到分母上，可求极限）

19. （2017 年预赛真题）设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$______。

解：（注：利用泰勒公式展开，如果直接利用洛必达法则是否可行？）$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$。有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=3$。

20. （2018 年预赛　6 分小题）设 $\alpha\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^\alpha-n^\alpha\right)=$______。

解：由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha<\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则 $(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)<n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$，于是有 $0<(n+1)^\alpha-n^\alpha<\frac{1}{n^{1-\alpha}}$，应用极限存在准则 I（两边夹定理），$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^\alpha-n^\alpha=0$。

注：利用初等函数 x^α 的单调性进行放缩，提取了 n^α 之后想到的

21. （2018 年预赛　6 分小题）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$______。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right]$（注：逐次插项，无穷小等价替换）

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-\sqrt{\cos 2x+1-1}\right)}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x+1-1}\right)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3。$$

22. （2019 年预赛　6 分小题）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos 3x}\right)-\sin x}{\arcsin\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=$______。

解：$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos 3x}\right)-\sin x}{\arcsin\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)+\sqrt[3]{1-\cos 3x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)}{4\left(x^2/2\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\left(x^2/2\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}$$

（注：本题不断拆分之后可用无穷小等价替换）

23. Stolz 定理，常用来计算数列极限。

例. 求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$。

解：用 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=1。$$

24. 补充由级数求极限的问题：求下列极限$\lim_{n\to\infty}x_n$，其中

（1） $x_n=\dfrac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}$；

（2） $x_n=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot\cdots\cdot(n+10)}{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$.

解：（1）因为当$n\to\infty$时， $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{5^{n+1}\cdot(n+1)!(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}\cdot5^n n!}=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{1+1/n}\right)^n\to\dfrac{5}{2e}<1$，故正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，从而一般项（通项）$x_n\to0$。

（2）因为当$n\to\infty$时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{n+11}{3n+2}\to\dfrac{1}{3}<1$，故正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，从而一般项（通项）$x_n\to0$。

注：上面小题是利用收敛级数的通项（一般项）趋于零求解极限。

25. 补充由级数求极限的问题：求$\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$。

解：因为级数$\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$收敛，因此当$n\to\infty$时，其余项$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\to0$，而

$$0\le\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le R_{n-1}\to0$$

故原极限为零。

注：上面这道题用到了收敛级数的余项趋于零的结论。

26. 递推形式的极限，有些数列常常是利用递推的形式给出，如果用某种方法证明了递推数列的极限存在，则在递推式公式里取极限，得到极限值 A 满足的方程，解此方程可求极限值 A。证明数列的极限存在，常用方法有极限存在准则——单调有界数列必有极限、数学归纳法和常用不等式等。

例. 设 $x_0 = 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{2-x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解：证明数列为单调有界数列。首先证明有界性，已知 $x_0 = 0 < 1$。设 $x_n < 1$,则 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2-x_n} < 1$。根据数学归纳原理,数列 $\{x_n\}$ 有上界 1。其次，证明单调性,计算得 $x_1 = \dfrac{1}{2} > x_0$。设 $x_n > x_{n-1}$，则由

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2-x_n} - \frac{1}{2-x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(2-x_n)(2-x_{n-1})} > 0$$

同理,数列 $\{x_n\}$ 单调增加。根据极限存在准则 II,数列 $\{x_n\}$ 有极限 x^*。在递归关系中取极限,得 $x^* = \dfrac{1}{2-x^*}$。解方程得 $x^* = 1$。

评述——由递归关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 定义的数列称为一阶递归数列。在用迭代法求方程的近似根时,一般是求递归数列的极限。