第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设L是球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$的交线，从x轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算$\int_L xyz(dx-dy)$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (1-y)^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow 2y^2-2y+z^2=0$$

$$\Rightarrow 2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow (2y-1)^2+\left(\sqrt{2}z\right)^2=1$$

令$\begin{cases} 2y-1=\cos\theta \\ \sqrt{2}z=\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+1) \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$$\int_L xyz(dx-dy)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cdot\frac{1}{2}(\cos\theta+1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\left[d\frac{1}{2}(1-\cos\theta)-d\frac{1}{2}(\cos\theta+1)\right]$$

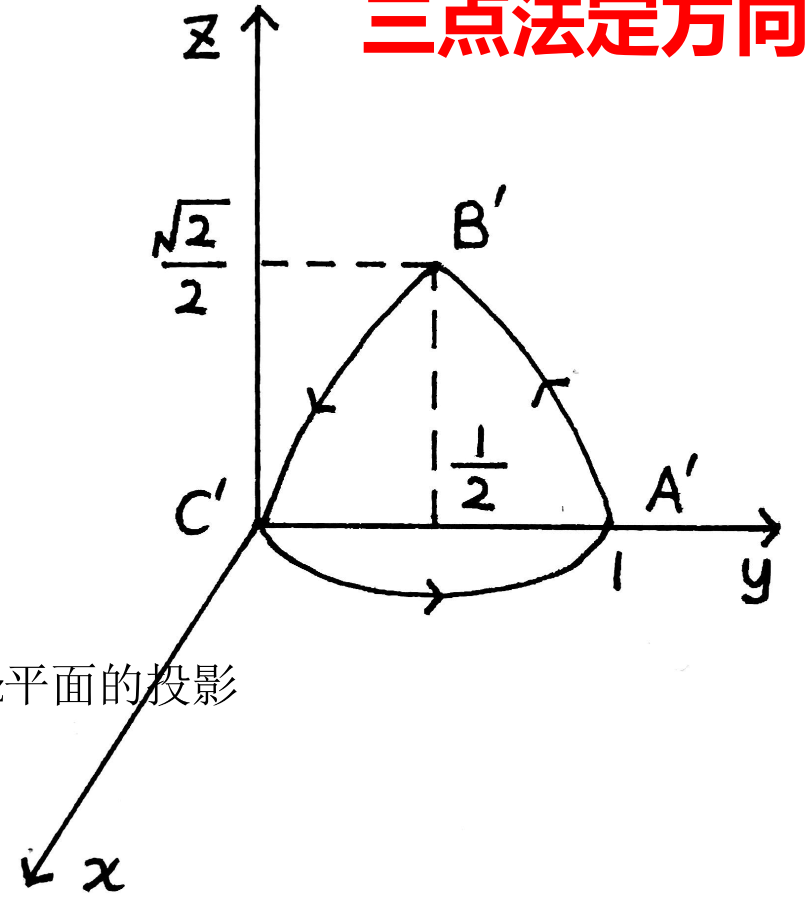
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)\sin^2\theta d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot 4\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设L是球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$的交线，从x轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算$\int_L xyz(dx-dy)$

三点法定方向



$x=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$，$y=\frac{1}{2}(\cos\theta+1)$，$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$

$\theta=0或2\pi\Rightarrow A(0,1,0)$

$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow B(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\theta=\pi\Rightarrow C(1,0,0)$

$\theta:0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to 2\pi$对应于$A\to B\to C\to A$

$A'(0,1,0)$，$B'(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$C'(0,0,0)$是$A(0,1,0)$，$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$C(1,0,0)$在yOz平面的投影

从x轴的正半轴往负半轴方向看，$A'\to B'\to C'\to A'$与$A\to B\to C\to A$方向一致

回路$A'\to B'\to C'\to A'$从x轴的正半轴往负半轴方向看是逆时针的

回路$A\to B\to C\to A$从x轴的正半轴往负半轴方向看是逆时针的

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设L是球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$的交线，计算$\int_L (x^3+y^3+z^3)ds$

$$x=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)，\quad y=\frac{1}{2}(\cos\theta+1)，\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}d\theta=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}d\theta$$

$$\int_L (x^3+y^3+z^3)ds=\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\right]^3+\left[\frac{1}{2}(\cos\theta+1)\right]^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^3\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)+\frac{1}{8}(1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta)+\frac{2\sqrt{2}}{8}\sin^3\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+3\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin^3\theta)d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{3}{2}\right)d\theta=\frac{5}{4}\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

a，b，c > 0，设L为球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$与平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$的交线，从z轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算$\int_L (mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$

令$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{bmatrix} \Rightarrow u^2+v^2+w^2=1,\ u+v+w=1 \Rightarrow u^2+v^2+(1-u-v)^2=1 \Rightarrow u^2+v^2-u-v+uv=0$

令$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+A \\ t+B \end{bmatrix} \Rightarrow s^2+t^2+st+(2A-1+B)s+(2B-1+A)t+A^2+B^2-A-B+AB=0$

$$\begin{cases} 2A-1+B=0 \\ 2B-1+A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow s^2+t^2+st=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(s+\frac{1}{2}t\right)^2+\frac{3}{4}t^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \left[\sqrt{3}\left(s+\frac{1}{2}t\right)\right]^2+\left(\frac{3}{2}t\right)^2=1$$

令$\begin{cases} \sqrt{3}\left(s+\frac{1}{2}t\right)=\cos\theta \\ \frac{3}{2}t=\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right) \\ t=\frac{2}{3}\sin\theta \end{cases}$

$$x=au=a\left(s+\frac{1}{3}\right)=\frac{a}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+1\right)$$

$$y=bv=b\left(t+\frac{1}{3}\right)=\frac{b}{3}(2\sin\theta+1)$$

$$z=cw=c(1-u-v)=c\left(\frac{1}{3}-s-t\right)=\frac{c}{3}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

a，b，c > 0，设L为球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的交线，从z轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算 $\int_L (mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$

$$dx+dy+dz=\left(\frac{dx}{d\theta}+\frac{dy}{d\theta}+\frac{dz}{d\theta}\right)d\theta=\left[\frac{a}{3}\left(-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)+\frac{b}{3}(2\cos\theta)+\frac{c}{3}\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}(c-a)}{3}\sin\theta+\frac{2b-a-c}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$\int_L (mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[m\cdot\frac{a}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+1\right)+n\cdot\frac{b}{3}(2\sin\theta+1)+l\cdot\frac{c}{3}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)\right]\left(\frac{\sqrt{3}(c-a)}{3}\sin\theta+\frac{2b-a-c}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2bn-am-cl}{3}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}am-\sqrt{3}cl}{3}\cos\theta+\frac{am+bn+cl}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}(c-a)}{3}\sin\theta+\frac{2b-a-c}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2bn-am-cl}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}(c-a)}{3}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}am-\sqrt{3}cl}{3}\cdot\frac{2b-a-c}{3}\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\left(\frac{2bn-am-cl}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}(c-a)}{3}+\frac{\sqrt{3}am-\sqrt{3}cl}{3}\cdot\frac{2b-a-c}{3}\right)\pi \qquad \frac{\sqrt{3}\pi}{9}[2b(c-a)n+2a(b-c)m+2c(a-b)l]$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

a，b，c > 0，设L为球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$与平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$的交线，从z轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算$\int_L (mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$

三点法定方向

$x=\frac{a}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+1\right)\quad y=\frac{b}{3}(2\sin\theta+1)\quad z=\frac{c}{3}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)$

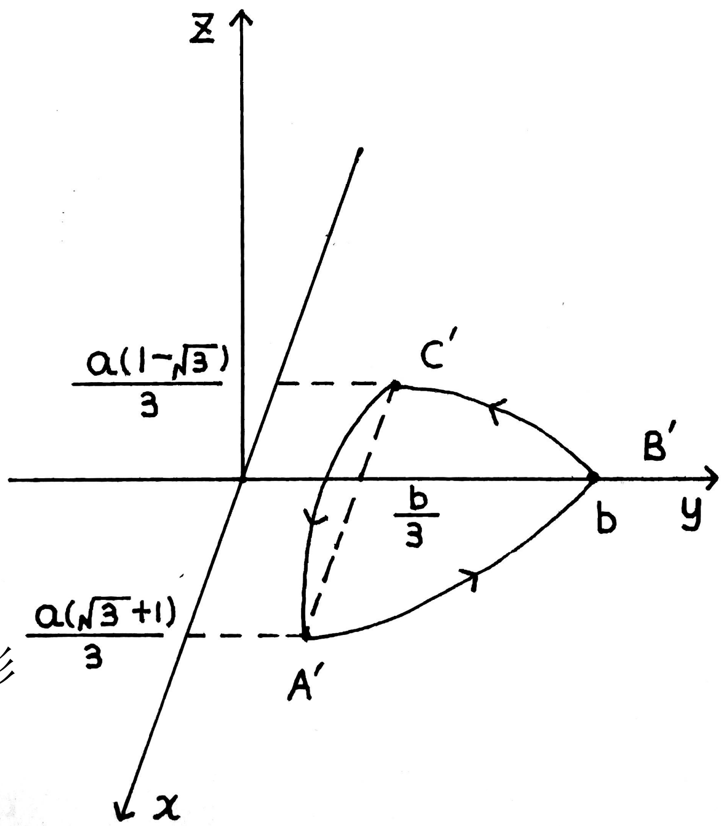
$\theta=0$或$2\pi\Rightarrow A\left(\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{3},\frac{b}{3},\frac{c\left(1-\sqrt{3}\right)}{3}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow B(0,b,0)$

$\theta=\pi\Rightarrow C\left(\frac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{3},\frac{b}{3},\frac{c\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}\right)\quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to2\pi$对应于$A\to B\to C\to A$

$A'\left(\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{3},\frac{b}{3},0\right)$，$B'(0,b,0)$，$C'\left(\frac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{3},\frac{b}{3},0\right)$

是$A\left(\frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{3},\frac{b}{3},\frac{c\left(1-\sqrt{3}\right)}{3}\right)$，$B(0,b,0)$，$C\left(\frac{a\left(1-\sqrt{3}\right)}{3},\frac{b}{3},\frac{c\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}\right)$在xOy平面的投影



从z轴的正半轴往负半轴方向看，$A'\to B'\to C'\to A'$与$A\to B\to C\to A$方向一致

回路$A'\to B'\to C'\to A'$从z轴的正半轴往负半轴方向看是逆时针的

回路$A\to B\to C\to A$从z轴的正半轴往负半轴方向看是逆时针的

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设L是球面$x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$与平面$x+\frac{y}{2}+z=1$的交线，计算$\int_L\sqrt{9x^2+9z^2-4x-4z+y}ds$

$$x=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+1\right)\quad y=\frac{2}{3}(2\sin\theta+1)\quad z=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}d\theta=\sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)\right]^2+\left[\frac{2}{3}(2\cos\theta)\right]^2+\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)\right]^2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)^2+(4\cos\theta)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right)^2}\,d\theta=\frac{1}{3}\sqrt{6\sin^2\theta+18\cos^2\theta}d\theta$$

$$x^2+z^2=\frac{1}{9}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+1\right)^2+\frac{1}{9}\left(1-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\right)^2=\frac{1}{9}\left(2\sin^2\theta+6\cos^2\theta+2-4\sin\theta\right)$$

$$-4x-4z+y=\frac{-4}{3}(2-2\sin\theta)+\frac{2}{3}(2\sin\theta+1)=4\sin\theta-2\Rightarrow\sqrt{9x^2+9z^2-4x-4z+y}=\sqrt{2\sin^2\theta+6\cos^2\theta}$$

$$\sqrt{3x^2+3z^2-x-z}ds=\sqrt{2\sin^2\theta+6\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{6\sin^2\theta+18\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin^2\theta+3\cos^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow\int_L\sqrt{9x^2+9z^2-4x-4z+y}ds=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta+3\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分 $I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$ （第九届初赛）

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x+z=1\Rightarrow x^2+y^2+(1-x)^2=1\Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2=1\Rightarrow \text{令}\begin{cases}2x-1=\cos\theta\\ \sqrt{2}y=\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\end{cases}\Rightarrow z=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

$$ydx+zdy+xdz=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cdot\frac{1}{2}(-\sin\theta)+\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\right]d\theta$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\int_0^\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta=\frac{2-\sqrt{2}\pi}{4}$$

第十二讲：曲线积分 > 参数方程

设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分

$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$ （第九届初赛）

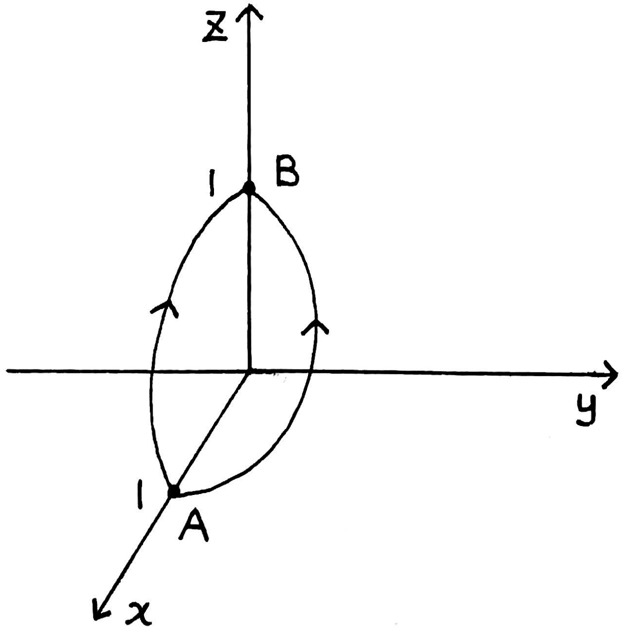
$x=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\quad z=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$A(1,0,0)\Rightarrow\theta=0$或$2\pi$

$B(0,0,1)\Rightarrow\theta=\pi$

从A到B $\Rightarrow\theta$从0到π或从2π到π

$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0\Rightarrow\sin\theta\ge 0\Rightarrow\theta$从0到$\pi$



第十二讲：曲线积分 > 化定积分

设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分
$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$ （第九届初赛）

$$\begin{cases} xdx+ydy+zdz=0 \\ dx+dz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=-dz \\ dy=\dfrac{x-z}{y}dz \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow (1-z)^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow y^2=2z-2z^2 \Rightarrow y=\sqrt{2z-2z^2}$$

$$ydx+zdy+xdz=\left(-y+z\cdot\frac{x-z}{y}+x\right)dz=\left(-y+z\cdot\frac{1-z-z}{y}+1-z\right)dz=\left(\frac{z-2z^2-y^2}{y}+1-z\right)dz=\left(\frac{-z}{\sqrt{2z-2z^2}}+1-z\right)dz$$

$$\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\int_0^1\left(\frac{-z}{\sqrt{2z-2z^2}}+1-z\right)dz=\int_0^1\left(\frac{-z+\frac{1}{2}}{\sqrt{2z-2z^2}}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2z-2z^2}}+1-z\right)dz=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2z-2z^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin(2z-1)+z-\frac{1}{2}z^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$\int_0^1\frac{-z+\frac{1}{2}}{\sqrt{2z-2z^2}}dz=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2z-2z^2}}d\left(2z-2z^2\right)$$

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2z-2z^2}}dz=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}dz=\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-(2z-1)^2}}dz=\int_0^1\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{1-(2z-1)^2}}d(2z-1)$$

第十二讲：曲线积分 > 化定积分

设曲线Γ为曲线$z^2=x^2+y^2,\sqrt{2}z=x+y+1$，$y\le x$上从点$A(\frac{-1}{4},\frac{-1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$到点$B(\sqrt{2}+1,0,\sqrt{2}+1)$的一段，求曲线积分

$$I=\int_\Gamma (y-x)xdx+(y-x)ydy+(y-x)zdz$$

$$\begin{cases} zdz=xdx+ydy \\ \sqrt{2}dz=dx+dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=\dfrac{z-\sqrt{2}y}{x-y}dz \\ dy=\dfrac{z-\sqrt{2}x}{y-x}dz \end{cases}$$

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}dx^2+\frac{1}{2}dy^2=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}dz^2=zdz$$

$$(y-x)(xdx+ydy+zdz)=2z(y-x)dz$$

$$(y-x)(xdx+ydy+zdz)=(y-x)\left(x\cdot\frac{z-\sqrt{2}y}{x-y}+y\cdot\frac{z-\sqrt{2}x}{y-x}+z\right)dz=\left[-x\left(z-\sqrt{2}y\right)+y\left(z-\sqrt{2}x\right)+z(y-x)\right]dz=2z(y-x)dz$$

$$(y-x)^2=x^2+y^2-2xy=2\left(x^2+y^2\right)-(x+y)^2=2z^2-\left(\sqrt{2}z-1\right)^2=2\sqrt{2}z-1\Rightarrow y-x=-\sqrt{2\sqrt{2}z-1}$$

$$\int_\Gamma (y-x)xdx+(y-x)ydy+(y-x)zdz=\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{1+\sqrt{2}}-2z\sqrt{2\sqrt{2}z-1}dz$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{1+\sqrt{2}}-2z\sqrt{2\sqrt{2}z-1}dz=\int_0^{1+\sqrt{2}}-2\cdot\frac{t^2+1}{2\sqrt{2}}\cdot t\cdot\frac{2t}{2\sqrt{2}}dt \quad 令\sqrt{2\sqrt{2}z-1}=t\Rightarrow z=\frac{t^2+1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\int_0^{1+\sqrt{2}}-2\cdot\frac{t^2+1}{2\sqrt{2}}\cdot t\cdot\frac{2t}{2\sqrt{2}}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{1+\sqrt{2}}\left(t^4+t^2\right)dt$$

第十二讲：曲线积分 > 化定积分

设曲线Γ为曲线$z=2x^2+y^2$，$z=x$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$上从点$A(0,0,0)$到点$B(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$的一段，计算该弧长

$$\begin{cases} dz=4xdx+2dy \\ dz=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dz \\ dy=\dfrac{1-4x}{2y}dz \end{cases}$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1-4x}{2y}\right)^2+1^2}\,dz=\sqrt{2+\frac{(1-4z)^2}{4(z-2z^2)}}\,dz=\sqrt{\frac{1}{4(z-2z^2)}}\,dz=\frac{1}{2\sqrt{z-2z^2}}dz$$

$$\int_\Gamma ds=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{z-2z^2}}dz=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(4z-1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

设平面曲线L的方程为$\varphi(x, y)=0$，变换$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \end{cases}$将xOy平面上的曲线L一对一地变为uOv平面上的曲线L′，其中$\varphi(x, y)$在L上具有一阶连续偏导数，$x(u, v)$，$y(u, v)$在L′上具有一阶连续偏导数，且$(\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)|_L \neq 0, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}|_{L'} \neq 0$，$f(x, y)$在L上连续，则

$$\int_L f(x, y)ds=\int_{L'} f(x(u, v), y(u, v))\frac{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2' \\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|}ds_{uv}，其中J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$$

$$ds=\frac{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}{\left\|J^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2' \\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|}ds_{uv}$$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

作正交变换$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$，p是正交矩阵，则$ds = ds_{uv}$

$$ds = \frac{\sqrt{{\varphi_1'}^2 + {\varphi_2'}^2}}{\left\| J^{-1}\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right\|} ds_{uv} \qquad J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

设$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow J^{-1} = P^{-1} = P^T$

$$\left\| J^{-1}\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| P^T\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right\|^2 = \left(P^T\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right)^T \left(P^T\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix}^T PP^T \begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} = {\varphi_1'}^2 + {\varphi_2'}^2$$

$$\Rightarrow \left\| J^{-1}\begin{bmatrix} \varphi_2' \\ -\varphi_1' \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{{\varphi_1'}^2 + {\varphi_2'}^2} \Rightarrow ds = ds_{uv}$$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

设空间曲线Γ的方程为$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \phi(x,y,z)=0\end{cases}$，变换$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$将$O-xyz$空间中的曲线Γ一对一地变为$O-uvw$空间中的曲线Γ′

其中$\varphi(x,y,z)$，$\phi(x,y,z)$在Γ上具有一阶连续偏导数，$x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$在Γ′上具有一阶连续偏导数

记$G(x,y,z)=\mathrm{grad}\varphi(x,y,z)\times\mathrm{grad}\phi(x,y,z)$，如果$G(x,y,z)|_{\Gamma}\neq 0$，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big|_{\Gamma'}\neq 0$，$f(x,y,z)$在上连续，则

$$\int_{\Gamma}f(x,y,z)ds=\int_{\Gamma'}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\|G(x,y,z)\|}{\|J^{-1}G(x,y,z)^{T}\|}ds_{uvw}，\quad 其中J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{bmatrix}$$

$$ds=\frac{\|G(x,y,z)\|}{\|J^{-1}G(x,y,z)^{T}\|}ds_{uvw}$$

作正交变换$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=p\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$，p是正交矩阵，则$ds=ds_{uvw}$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

a，b，c互不相等且$a+b+c=0,\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1$，设L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$ax+by+cz=1$的交线

计算$\int_L (x+y+z)^{2n}\,ds$

作正交变换$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$　设$P=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [a \quad b \quad c] \Rightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}[a \quad b \quad c]$$

$$\Rightarrow [1 \quad 1 \quad 1] \Rightarrow \beta=\frac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\Rightarrow [A \quad B \quad C]\cdot[a \quad b \quad c]=0 \text{且} [A \quad B \quad C]\cdot[1 \quad 1 \quad 1]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Aa+Bb+Cc=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{a-c}{b-a}C \\ B=\dfrac{b-c}{a-b}C \end{cases} \xrightarrow{\text{令}C=a-b} \begin{cases} A=c-a \\ B=b-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}[c-a \quad b-c \quad a-b]$$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

a，b，c互不相等且$a+b+c=0,\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1$，设L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$ax+by+cz=1$的交线

计算$\int_L (x+y+z)^{2n}\,ds$

作正交变换$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a/J & b/J & c/J \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ (b-c)/k & (c-a)/k & (a-b)/k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 其中$k=\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$，$J=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

L'：$u^2+v^2+w^2=1$，$u=1/J$

$\int_L (x+y+z)^{2n}\,ds=\int_{L'}\left(\sqrt{3}v\right)^{2n}ds$ L'：$u=1/J$，$v=\dfrac{\sqrt{J^2-1}}{J}\cos\theta$，$w=\dfrac{\sqrt{J^2-1}}{J}\sin\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{J^2-1}}{J}\cos\theta\right)^{2n}\frac{\sqrt{J^2-1}}{J}d\theta=\int_0^{2\pi}3^n\left(\frac{\sqrt{J^2-1}}{J}\right)^{2n+1}\cos^{2n}\theta d\theta=3^n\left(\frac{\sqrt{J^2-1}}{J}\right)^{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 换元法

设L为平面有向向光滑曲线，起点为A，终点为B，变换$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$将xOy平面上的曲线L和点A，B一对一地变为uOv平面上的曲线L′和点A′，B′且L′的起点为A′，终点为B′，其中$x(u,v)$，$y(u,v)$在L′上具有一阶连续偏导数$\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{L'}\neq 0$，$P=P(x,y)$，$Q=Q(x,y)$在L上连续，则$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L'}\left(P\dfrac{\partial x}{\partial u}+Q\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(P\dfrac{\partial x}{\partial v}+Q\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)dv$

$$Pdx+Qdy=\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

任取L上的三个点A，B，C，在变换$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$下，A变为A′，B变为B′，C变为C′，L变为L′

若有向弧段ABC的方向与L一致，则有向弧段A′B′C′的方向与L′一致

若有向弧段ABC的方向与L相反，则有向弧段A′B′C′的方向与L′相反

如果L为闭曲线

若回路$A\to B\to C\to A$的方向与L一致，则回路$A'\to B'\to C'\to A'$的方向与L′一致

若回路$A\to B\to C\to A$的方向与L相反，则回路$A'\to B'\to C'\to A'$的方向与L′相反

第十二讲：曲线积分 > 换元法

设Γ为空间有向向光滑曲线，起点为A，终点为B，变换$\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases}$将$O-xyz$平面上的曲线$\Gamma$和点A，B一对一地变为$O-uvw$平面上的曲线$\Gamma'$和点$A'$，$B'$，且$\Gamma'$的起点为$A'$，终点为$B'$，其中$x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$在$\Gamma$上具有一阶连续偏导数，$\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Gamma'}\neq 0$，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$在$\Gamma$上连续，则

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Gamma'}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}+R\frac{\partial z}{\partial u}\right)du+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}R\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv+\left(P\frac{\partial x}{\partial w}+Q\frac{\partial y}{\partial w}R\frac{\partial z}{\partial w}\right)dw$$

任取Γ上的三个点A，B，C，在变换$\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases}$下，A变为$A'$，B变为$B'$，C变为$C'$，$\Gamma$变为$\Gamma'$

若有向弧段ABC的方向与Γ一致，则有向弧段$A'B'C'$的方向与Γ'一致

若有向弧段ABC的方向与Γ相反，则有向弧段$A'B'C'$的方向与Γ'相反

如果Γ为闭曲线

若回路$A\to B\to C\to A$的方向与Γ一致，则回路$A'\to B'\to C'\to A'$的方向与Γ'一致

若回路$A\to B\to C\to A$的方向与Γ相反，则回路$A'\to B'\to C'\to A'$的方向与Γ'相反

第十二讲：曲线积分 > 换元法

a，b，c > 0，设L为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的交线，从z轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算 $\int_L(mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$

作变换 $\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x/a\\y/b\\z/c\end{bmatrix}\Rightarrow L'$：$u^2+v^2+w^2=1$，$u+v+w=1$ 从w轴的正半轴往负半轴方向看L'是逆时针的

$$\int_L(mx+ny+lz)(dx+dy+dz)=\int_{L'}(mau+nbv+lcw)(adu+bdv+cdw)$$

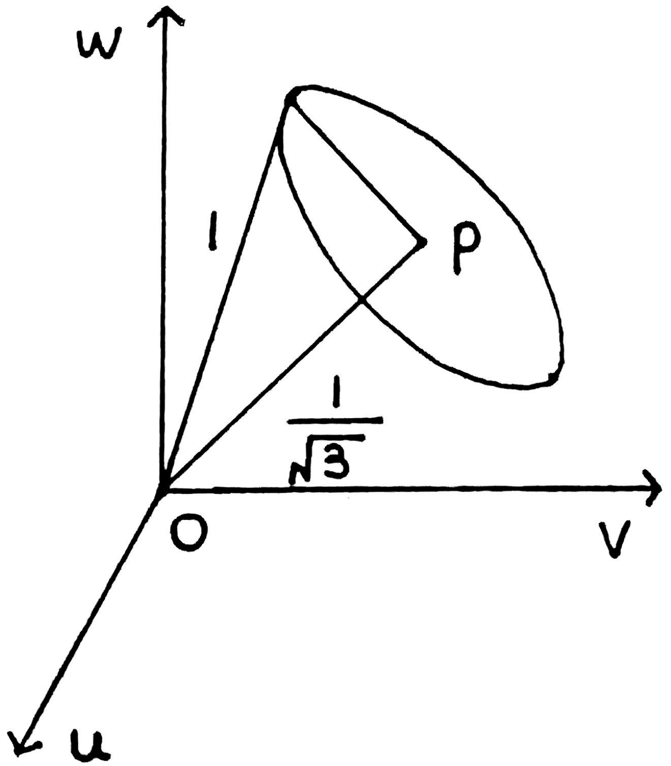
设Σ是平面 $u+v+w=1$ 被球面 $u^2+v^2+w^2=1$ 所截的部分，取上侧

$$\int_{L'}(mau+nbv+lcw)(adu+bdv+cdw)$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dvdw & dwdv & dudv\\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w}\\ a(mau+nbv+lcw) & b(mau+nbv+lcw) & c(mau+nbv+lcw)\end{vmatrix}$$

$$=\iint_\Sigma bc(n-l)dvdw+ac(l-m)dwdv+ab(m-n)dudv=\iint_\Sigma\frac{bc(n-l)+ac(l-m)+ab(m-n)}{\sqrt{3}}dS$$

$$=\frac{bc(n-l)+ac(l-m)+ab(m-n)}{\sqrt{3}}S=\frac{bc(n-l)+ac(l-m)+ab(m-n)}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\pi$$



第十二讲：曲线积分 > 换元法

a，b，c > 0，设L为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的交线，从z轴的正半轴往负半轴方向看L是逆时针的

计算 $\int_L (mx+ny+lz)(dx+dy+dz)$

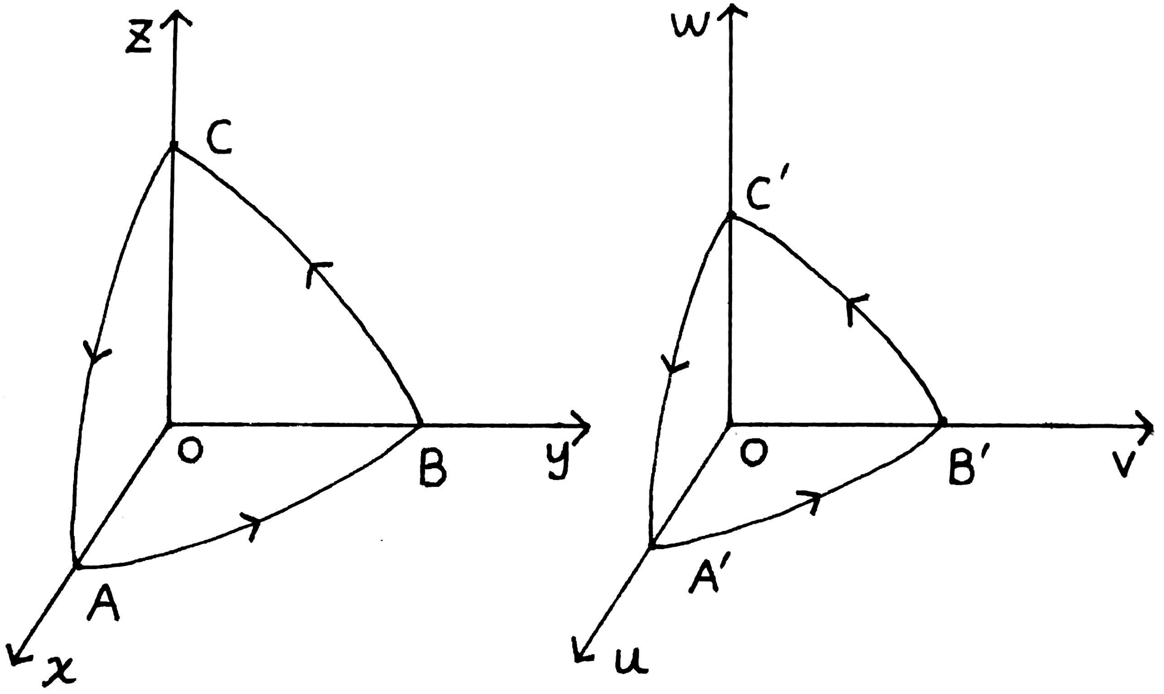
取 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$

$\Rightarrow A'(1,0,0)$，$B'(0,1,0)$，$C'(0,0,1)$

回路 $A\to B\to C\to A$ 的方向与L一致，则回路 $A'\to B'\to C'\to A'$ 的方向与 L' 一致

$\Rightarrow$ 从w轴的正半轴往负半轴方向看 L' 是逆时针的

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{bmatrix}$$



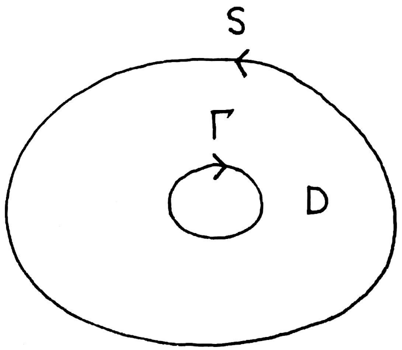
第十二讲：曲线积分 > 格林公式

设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数P(x，y)及Q(x，y)在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_L Pdx+Qdy$$，其中L是D的所有正向的边界曲线

D为单连通区域或复连通区域，格林公式都成立

设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围的部分都属于D,则称D为单连通区域，否则称为复连通区域

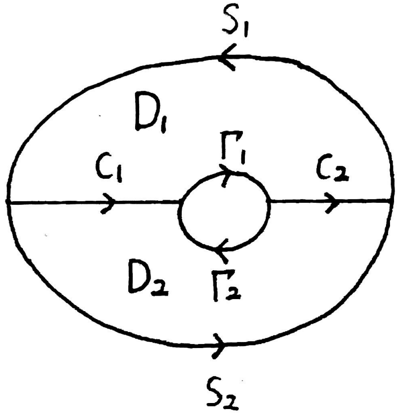


作辅助路径C_1、C_2将D分成D_1、D_2，将S分成S_1、S_2，将Γ分成Γ_1、Γ_2

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\int_{S_1+C_1+\Gamma_1+C_2}Pdx+Qdy+\int_{S_2-C_2+\Gamma_2-C_1}Pdx+Qdy$$

$$=\left(\int_{S_1}+\int_{C_1}+\int_{\Gamma_1}+\int_{C_2}\right)Pdx+Qdy+\left(\int_{S_2}+\int_{-C_1}+\int_{\Gamma_2}+\int_{-C_2}\right)Pdx+Qdy$$



$D=D_1+D_2$
$S=S_1+S_2$
$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$

$$=\left[\left(\int_{S_1}+\int_{S_2}\right)+\left(\int_{C_1}+\int_{-C_1}\right)+\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}\right)+\left(\int_{C_2}+\int_{-C_2}\right)\right]Pdx+Qdy$$

$$=\int_S Pdx+Qdy+\int_\Gamma Pdx+Qdy=\int_{S+\Gamma}Pdx+Qdy$$

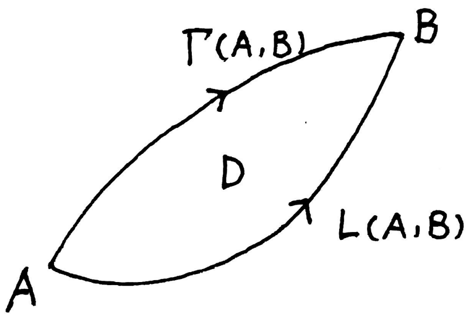
第十二讲：曲线积分 > 格林公式

当$\int_{L(A,B)}Pdx+Qdy$不易直接求时，可以作辅助路径$\Gamma(A,B)$构成闭曲线，从而可利用格林公式，进而避开对原曲线积分的直接计算

$$\int_{L(A,B)}Pdx+Qdy=\int_{\Gamma(A,B)}Pdx+Qdy+\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

其中$L(A,B)-\Gamma(A,B)$构成逆时针闭曲线，D是$L(A,B)$和$\Gamma(A,B)$所围区域，且D内无奇点

$$\Leftarrow\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L(A,B)-\Gamma(A,B)}Pdx+Qdy=\int_{L(A,B)}Pdx+Qdy+\int_{-\Gamma(A,B)}Pdx+Qdy=\int_{L(A,B)}Pdx+Qdy-\int_{\Gamma(A,B)}Pdx+Qdy$$



第十二讲：曲线积分 > 格林公式

求$\int_L (xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy$ 其中L为自原点至点A(2,2)的圆弧$y=\sqrt{4x-x^2}$

补有向线段Γ_1：从O(0,0)到M(2,0) 向线段Γ_2：从M(2,0)到A(2,2)

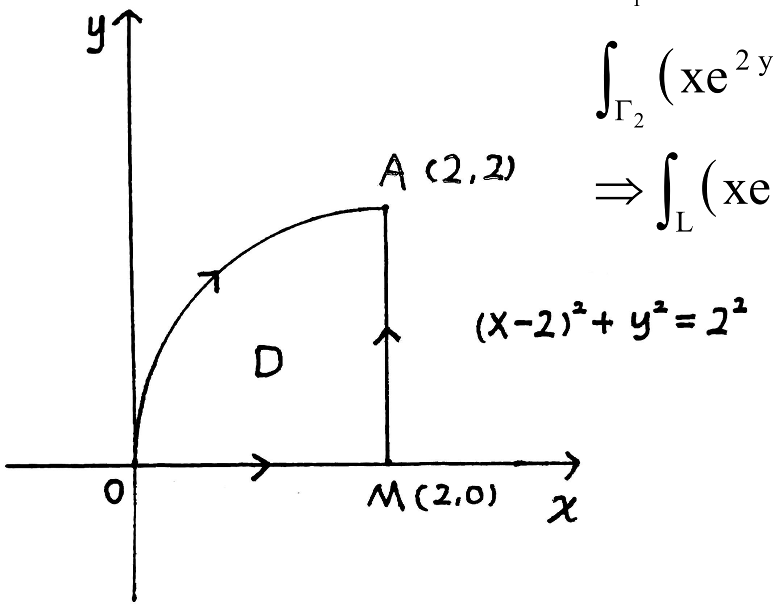
设D为L、Γ_1、Γ_2所围的区域

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2-L}(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=\iint_D[2xe^{2y}-(2xe^{2y}+1)]dxdy=-\iint_D dxdy=-\pi$$

$$\int_{\Gamma_1}(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=\int_{\Gamma_1}xdx=\int_0^2 xdx=2$$

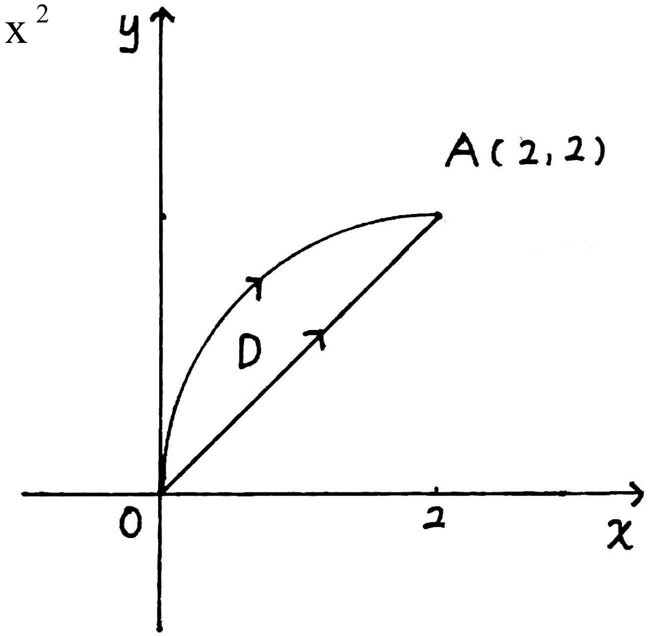
$$\int_{\Gamma_2}(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=\int_{\Gamma_1}(4e^{2y}-y)dy=\int_0^2(4e^{2y}-y)dy=2e^4-4$$

$$\Rightarrow\int_L(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=2e^4-2+\pi$$



第十二讲：曲线积分 > 格林公式

求$\int_L (xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy$ 其中L为自原点至点A(2,2)的圆弧$y=\sqrt{4x-x^2}$



补有向线段Γ：从O(0,0)到A(2,2)

设D为L、Γ所围的区域

$$\int_{\Gamma-L}(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=\iint_D[2xe^{2y}-(2xe^{2y}+1)]dxdy=-\iint_D dxdy=-(\pi-2)$$

$$\int_{\Gamma}(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=\int_{\Gamma}(xe^{2x}+x)dx+(x^2e^{2x}-x)dx=\int_{\Gamma}(x+x^2)e^{2x}dx=\int_0^2(x+x^2)e^{2x}dx=2e^4$$

$$\Rightarrow \int_L(xe^{2y}+y)dx+(x^2e^{2y}-y)dy=2e^4+\pi-2$$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

若函数$P(x, y)$、$Q(x, y)$在单连通域G上有连续的偏导数，则以下三个条件等价：

(1) $L(A, B)\subset G$，曲线积分$\int_{L(A, B)} Pdx+Qdy$与路径无关

(2) 在G内存在一个函数$U(x, y)$使得$dU=Pdx+Qdy$.

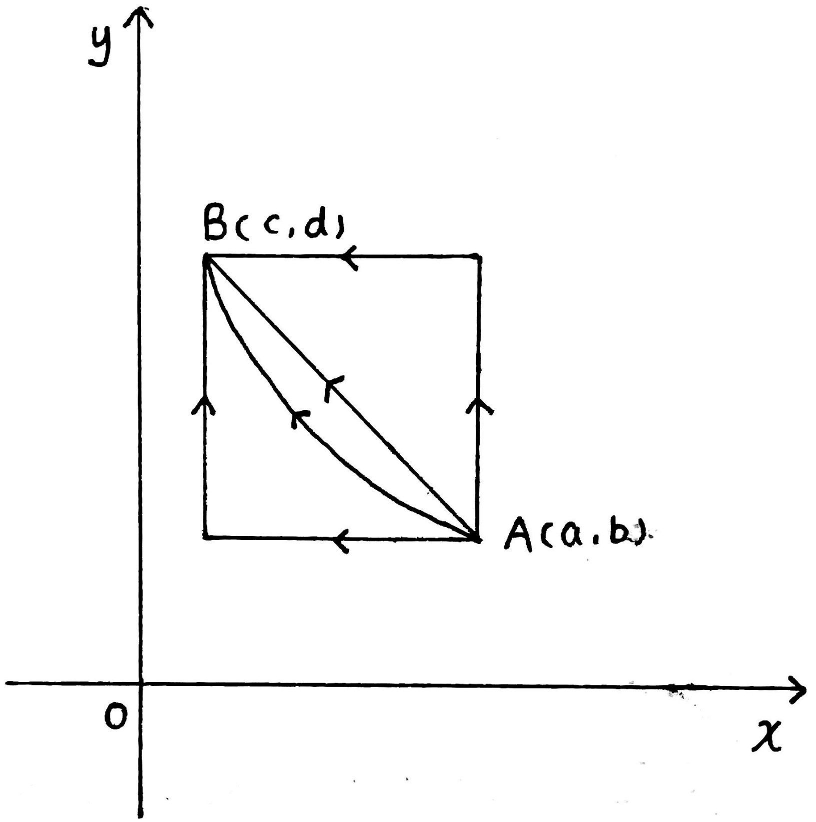
(3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在G内处处成立

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(1)

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L是上半平面内有向分段光滑曲线，其起点为A(a，b)，终点为B(c，d)

记$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)dy$ 当$ab=cd$时，求积分值



$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

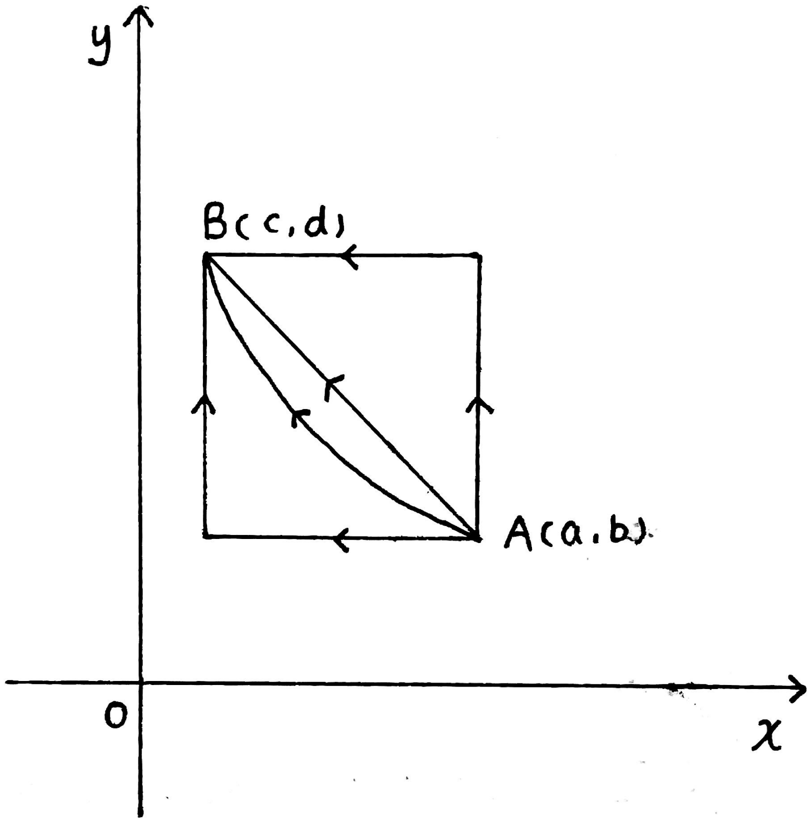
所以积分与路径无关，可以选择上半平面任意一条曲线作为积分路径

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(1)

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L是上半平面内有向分段光滑曲线，其起点为A(a，b)，终点为B(c，d)

记$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)dy$ 当$ab=cd$时，求积分值



设Γ为$xy=ab$自点A到点B的一段，以Γ作为积分路径

$$I=\int_\Gamma \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)dy$$

$$=\int_\Gamma \frac{1+\left(\frac{ab}{x}\right)^2 f(ab)}{\frac{ab}{x}}dx+\frac{x}{\left(\frac{ab}{x}\right)^2}\left[\left(\frac{ab}{x}\right)^2 f(ab)-1\right]d\left(\frac{ab}{x}\right)$$

$$=\int_\Gamma \frac{2x}{ab}dx=\int_a^c \frac{2x}{ab}dx=\left[\frac{x^2}{ab}\right]_a^c=\frac{c^2}{ab}-\frac{a^2}{ab}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

曲线积分路径无关类问题 (1)→(3)

已知$f(x)$可微且$f(0)=\dfrac{1}{2}$，确定$f(x)$使$I=\int_{(A)}^{(B)}\left(e^{x}+f(x)\right)ydx-f(x)dy$与路径无关

记$P=\left(e^{x}+f(x)\right)y$，$Q=-f(x)$

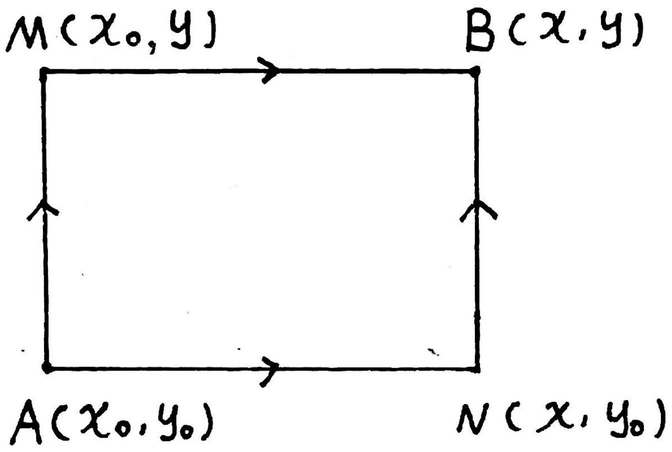
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow e^{x}+f(x)=-f'(x)\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}+e^{-x}$$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

已知在G内存在一个函数$U(x,y)$使得$dU=Pdx+Qdy$，如何求$U(x,y)$？

方法一：折线积分法



$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_{AM} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{MB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_{AM} Q(x_0,y)dy+\int_{MB} P(x,y_0)dx$$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_{AN} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{NB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_{AN} P(x,y_0)dx+\int_{NB} Q(x_0,y)dy$$

方法二：凑全微分法

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(2)

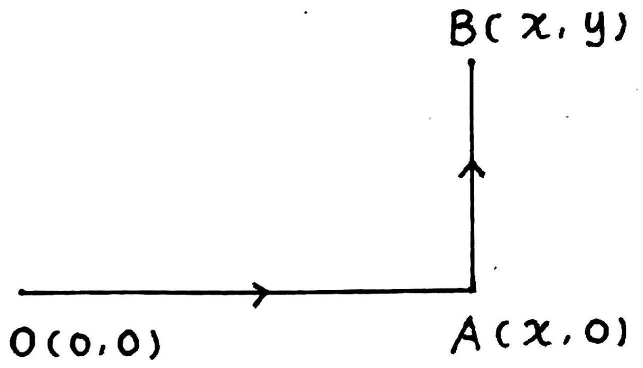
证明在整个xOy平面内，$(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]$是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

记$P=(x^2y+xy^2)(y^2+2xy)$，$Q=(x^2y+xy^2)(x^2+2xy)$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(x^2+2xy)(y^2+2xy)+(x^2y+xy^2)(2y+2x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2xy+y^2)(x^2+2xy)+(x^2y+xy^2)(2x+2y)$$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在整个xOy平面内成立



$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]$$

$$=\int_{OA}(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]+\int_{AB}(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]$$

$$=0+\int_{AB}(x^2y+xy^2)(x^2+2xy)dy=\int_0^y(x^2y+xy^2)(x^2+2xy)dy$$

$$=\int_0^y(x^2y+xy^2)d(x^2y+xy^2)=\left[\frac{1}{2}(x^2y+xy^2)^2\right]_0^y=\frac{1}{2}(x^2y+xy^2)^2$$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(2)

证明在整个xOy平面内，$(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]$是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

$$(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=y^2dx+2xydx+x^2dy+2xydy=y^2dx+ydx^2+x^2dy+xdy^2$$

$$=d(xy^2)+d(x^2y)=d(xy^2+x^2y)$$

$$(x^2y+xy^2)[(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy]=(x^2y+xy^2)d(xy^2+x^2y)=d\left[\frac{1}{2}(xy^2+x^2y)^2\right]$$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(2)

$AC-B^2>0$，证明$\dfrac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$在右半平面内是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

记$P=\dfrac{-y}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$，$Q=\dfrac{x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{Cy^2-Ax^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{Cy^2-Ax^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=x^2\left[A+2B\frac{y}{x}+C\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\neq 0$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在右半平面内成立

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

曲线积分路径无关类问题 (3)→(2)

$AC-B^2>0$，证明 $\dfrac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ 在右半平面内是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

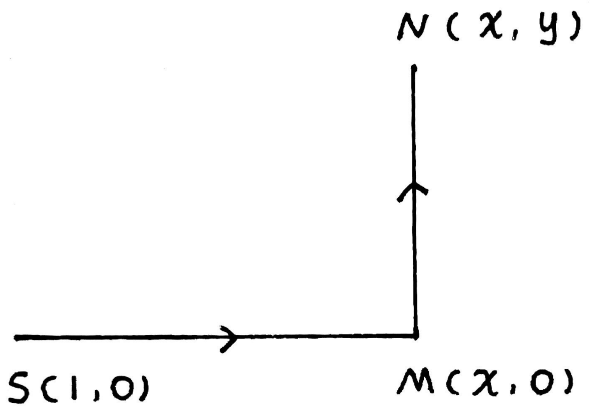
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$=\int_{SM}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}+\int_{MN}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$=0+\int_{MN}\frac{xdy}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\int_0^y\frac{xdy}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$=\int_0^y\frac{d\frac{y}{x}}{A+2B\frac{y}{x}+C\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\frac{y}{x}+B}{\sqrt{AC-B^2}}\right]_0^y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\frac{y}{x}+B}{\sqrt{AC-B^2}}-\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}$$



曲线积分路径无关类问题 (3)→(2)

$AC-B^2>0$，证明$\dfrac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$在右半平面内是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{x^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{1}{A+2B\dfrac{y}{x}+C\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=d\left(\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\dfrac{y}{x}+B}{\sqrt{AC-B^2}}\right)$$

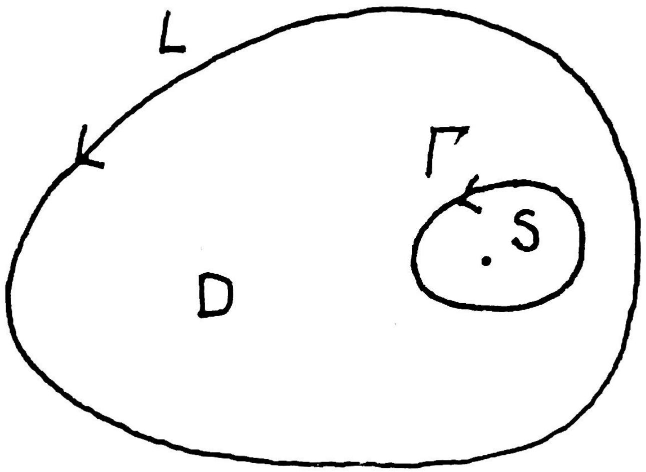
第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

奇点问题：闭曲线L所包围的区域内部有奇点S，此时我们不能直接利用格林公式，我们可以作辅助路径去掉奇点

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\Gamma Pdx+Qdy+\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

其中L和Γ是逆时针，D是L和Γ所围区域，S是奇点

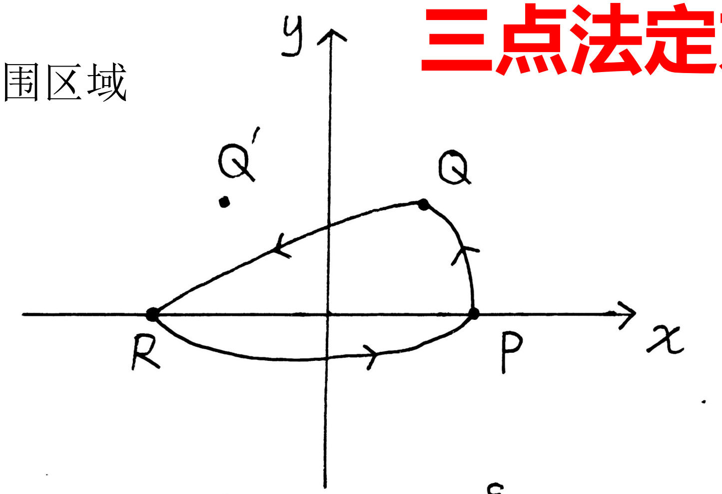
$$\Leftarrow\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L-\Gamma}Pdx+Qdy=\int_L Pdx+Qdy+\int_{-\Gamma}Pdx+Qdy=\int_L Pdx+Qdy-\int_\Gamma Pdx+Qdy$$



第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

设L是逆时针圆$x^2+y^2=a^2$，求$\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ $(A>0,\ AC-B^2>0)$

三点法定方向



取适当小的$\varepsilon>0$，使得逆时针椭圆Γ：$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\varepsilon^2$位于L内，记D是L、$\Gamma$所围区域

$$\int_{L-\Gamma}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\varepsilon^2\Rightarrow A\left(x+\frac{B}{A}y\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)y^2=\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\left[\sqrt{A}\left(x+\frac{B}{A}y\right)\right]^2+\left(\sqrt{C-\frac{B^2}{A}}y\right)^2=\varepsilon^2\Rightarrow\sqrt{A}\left(x+\frac{B}{A}y\right)=\varepsilon\cos\theta,\sqrt{C-\frac{B^2}{A}}y=\varepsilon\sin\theta$$

$$\Rightarrow x=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}\sqrt{AC-B^2}}\left(\sqrt{AC-B^2}\cos\theta-B\sin\theta\right),\quad y=\frac{\sqrt{A}\varepsilon}{\sqrt{AC-B^2}}\sin\theta$$

$$\Rightarrow xdy-ydx=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{AC-B^2}}d\theta$$

$$\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Gamma xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{AC-B^2}}d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

$\theta=0$或2π　$P\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}},0\right)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$　$Q\left(\frac{-B\varepsilon}{\sqrt{A}\sqrt{AC-B^2}},\frac{\sqrt{A}\varepsilon}{\sqrt{AC-B^2}}\right)$

$\theta=\pi$　$R\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{A}},0\right)$

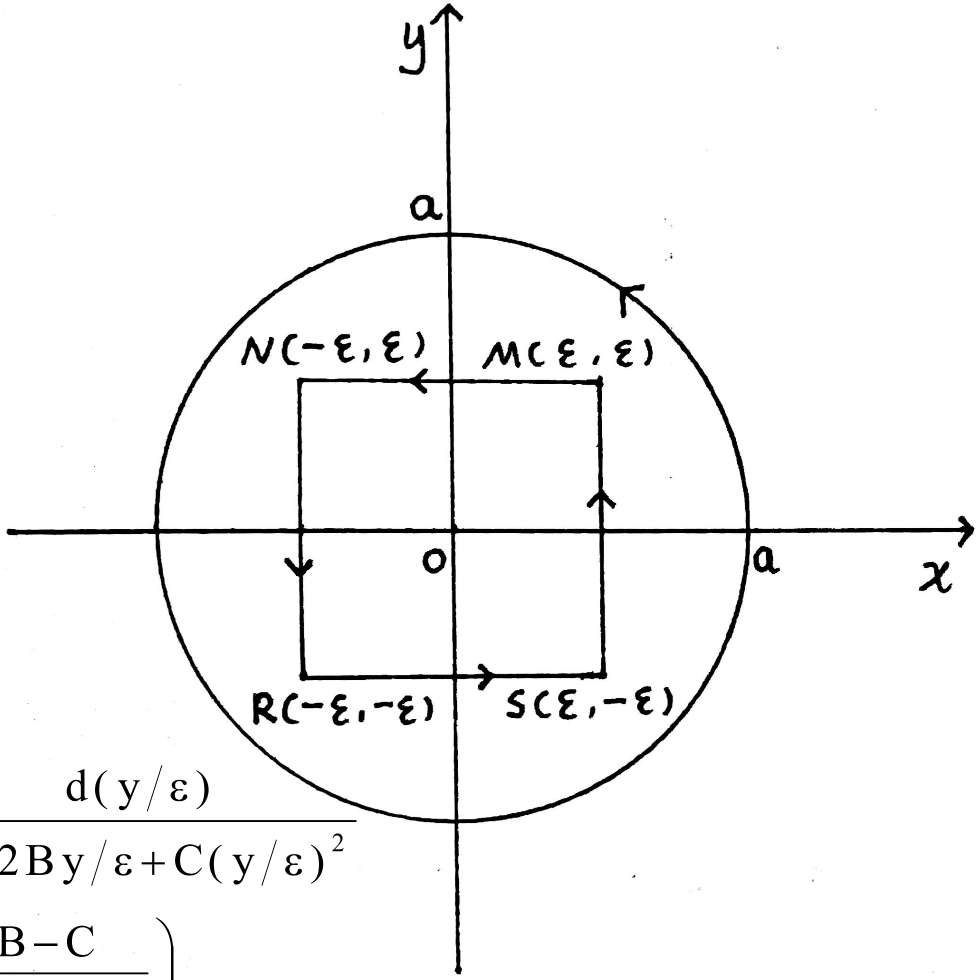
$\theta:0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to2\pi$

对应于$P\to Q\to R\to P$是逆时针的

所以从0到2π积分

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线

设L是逆时针圆$x^2+y^2=a^2$，求$\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ $(A>0，AC-B$



取适当小的$\varepsilon>0$，使得逆时针矩形Γ位于L内，记D是L、Γ所围区域

$$\int_{L-\Gamma}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$\int_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\left(\int_{SM}+\int_{MN}+\int_{NR}+\int_{RS}\right)\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$\int_{SM}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\int_{SM}\frac{\varepsilon dy}{A\varepsilon^2+2B\varepsilon y+Cy^2}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\varepsilon dy}{A\varepsilon^2+2B\varepsilon y+Cy^2}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d(y/\varepsilon)}{A+2By/\varepsilon+C(y/\varepsilon)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C(y/\varepsilon)+B}{\sqrt{AC-B^2}}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\arctan\frac{B+C}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-C}{\sqrt{AC-B^2}}\right)$$

$$\int_{NR}=\int_{SM}=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\arctan\frac{B+C}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-C}{\sqrt{AC-B^2}}\right)\quad \int_{MN}=\int_{RS}=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\arctan\frac{B+A}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-A}{\sqrt{AC-B^2}}\right)$$

$$\int_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\arctan\frac{B+C}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-C}{\sqrt{AC-B^2}}+\arctan\frac{B+A}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-A}{\sqrt{AC-B^2}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

设L是逆时针圆$x^2+y^2=a^2$，求$\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ $(A>0，AC-B^2>0)$

视A、C为常数，B为变量

设$f(B)=\arctan\frac{B+C}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-C}{\sqrt{AC-B^2}}+\arctan\frac{B+A}{\sqrt{AC-B^2}}-\arctan\frac{B-A}{\sqrt{AC-B^2}}$

$$f'(B)=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\left(\frac{A+B}{A+2B+C}-\frac{A-B}{A-2B+C}+\frac{C+B}{A+2B+C}-\frac{C-B}{A-2B+C}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\cdot\frac{(A+B)(A-2B+C)-(A-B)(A+2B+C)+(C+B)(A-2B+C)-(C-B)(A+2B+C)}{(A+2B+C)(A-2B+C)}$$

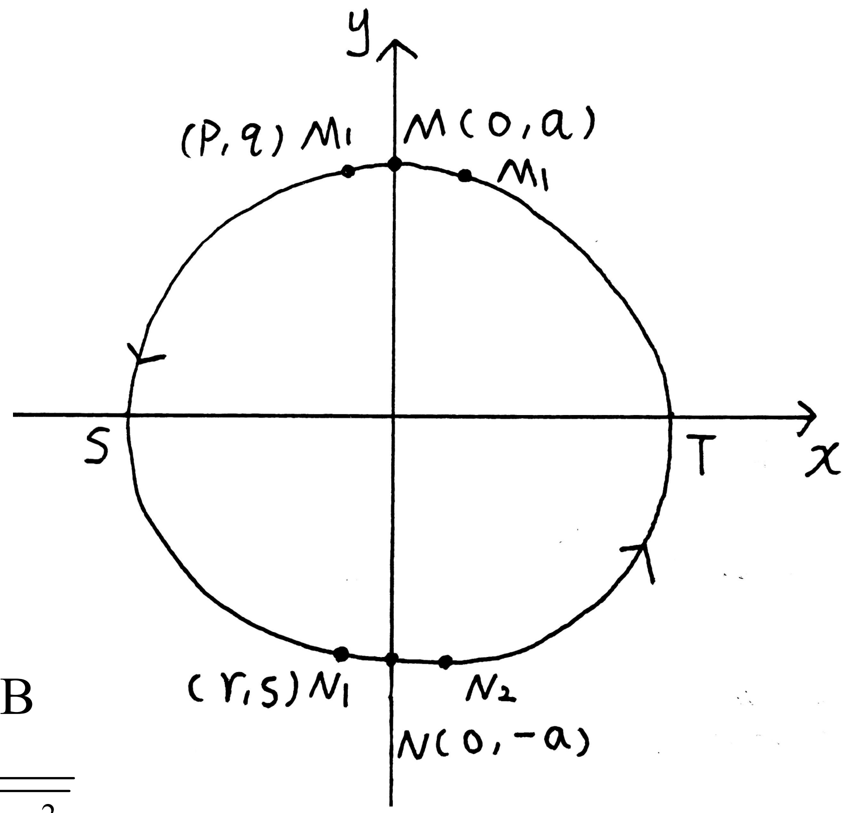
$$=\frac{2}{\sqrt{AC-B^2}}\cdot\frac{(A+2B+C)(A-2B+C)-(A-2B+C)(A+2B+C)}{(A+2B+C)(A-2B+C)}=0$$

$$f(0)=\arctan\sqrt{\frac{C}{A}}-\arctan\left(-\sqrt{\frac{C}{A}}\right)+\arctan\sqrt{\frac{A}{C}}-\arctan\left(-\sqrt{\frac{A}{C}}\right)=2\left(\arctan\sqrt{\frac{C}{A}}+\arctan\sqrt{\frac{A}{C}}\right)=\pi$$

$\Rightarrow f(B)\equiv\pi$

第十二讲：曲线积分 > 格林公式 > 曲线积分路径无关类问题

设L是逆时针圆$x^2+y^2=a^2$，求$\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ $(A>0,\ AC-B^2>0)$



$$\int_L \frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\int_{MSN}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}+\int_{NTM}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$\int_{MSN}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\lim_{\substack{M_1(p,q)\to M(0,a)\\ N_1(r,s)\to N(0,-a)}}\int_{M_1SN_1}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

$$=\lim_{\substack{M_1(p,q)\to M(0,a)\\ N_1(r,s)\to N(0,-a)}}\int_{M_1SN_1} d\left(\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\frac{y}{x}+B}{\sqrt{AC-B^2}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{M_1(p,q)\to M(0,a)\\ N_1(r,s)\to N(0,-a)}}\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\frac{s}{r}+B}{\sqrt{AC-B^2}}-\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{C\frac{q}{p}+B}{\sqrt{AC-B^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

同理可得$\int_{NTM}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$

第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分段光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ符合右手规则，函数P(x，y，z)、Q(x，y，z)、R(x，y，z)在曲面Σ(连同边界Γ)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

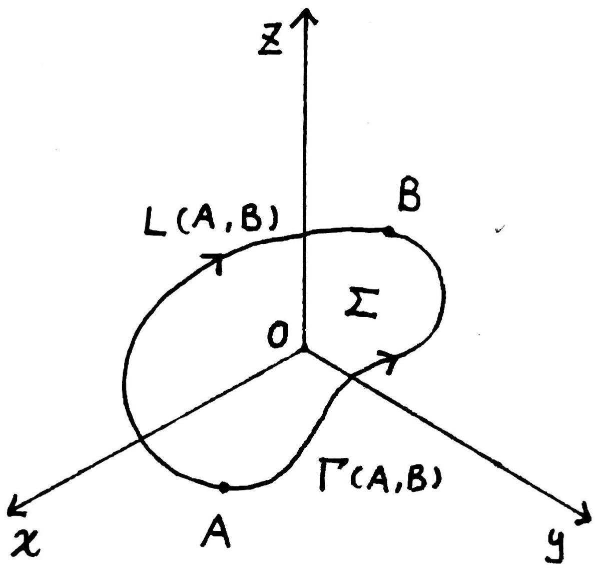
第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式

当$\oint_{L(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz$不易直接求时，可以作辅助路径$\Gamma(A,B)$与$L(A,B)$构成空间闭曲线，从而可利用斯托克斯公式，进而避开对原曲线积分的直接计算

$$\oint_{L(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz+\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$L(A,B)-\Gamma(A,B)$构成逆时针或顺时针闭曲线，Σ与$\Gamma(A,B)-L(A,B)$符合右手规则，Σ内无奇点

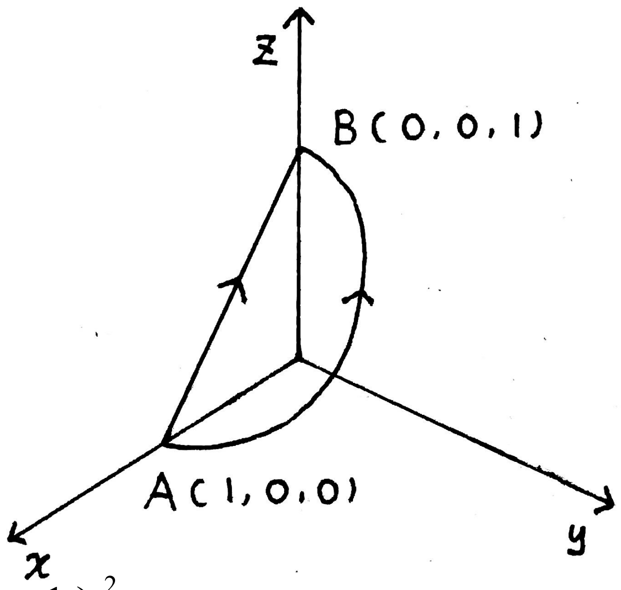
$$\Leftarrow \oint_{L(A,B)-\Gamma(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$



第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式

设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分

$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$ （第九届初赛）



记L为A到B的直线段，则L：$x=t$，$y=0$，$z=1-t$ $0\leq t\leq 1$

设Σ为平面$x+z=1$被L、Γ所围的部分，取上侧

$$\int_{\Gamma-L} ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy$$

Γ在xOy的投影方程为$x^2+y^2+(1-x)^2=1\Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

$$\iint_\Sigma dxdy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\pi=\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \quad \iint_\Sigma dydz=\iint_\Sigma dxdy=\frac{\sqrt{2}\pi}{8},\iint_\Sigma dzdx=0$$

$$\int_L ydx+zdy+xdz=\int_1^0 td(1-t)=\int_1^0 -tdt=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}\Rightarrow \int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

曲线积分路径无关类问题

若函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在单连通域G上有连续的偏导数，则以下三个条件等价：

(1) $L(A,B)\subset G$，空间曲线积分$\int_{L(A,B)}Pdx+Qdy+Rdz$与路径无关

(2) 在G内存在一个函数$U(x,y,z)$使得$dU=Pdx+Qdy+Rdz$

(3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$在G内处处成立

第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式 > 曲线积分路径无关类问题

已知在G内存在一个函数U(x，y，z)使得dU＝Pdx＋Qdy＋Rdz，如何求U(x，y，z)?

方法一：折线积分法

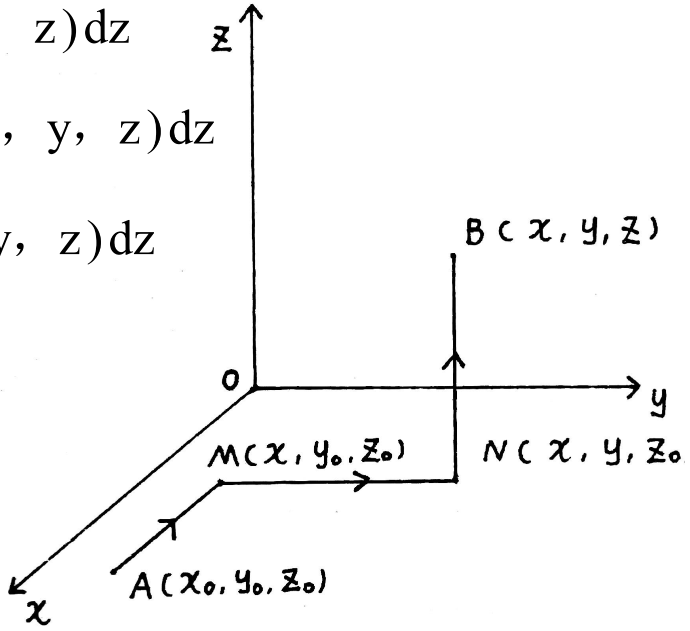
$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

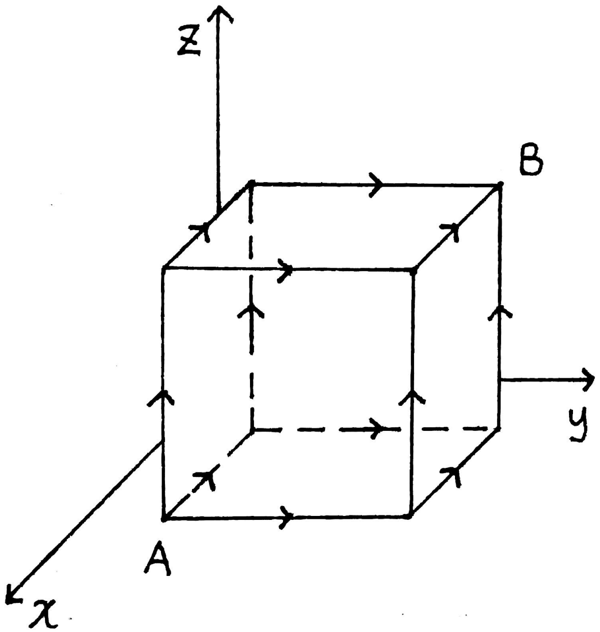
$$=\left(\int_{AM}+\int_{MN}+\int_{NB}\right)P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{AM}P(x,y,z)dx+\int_{MN}Q(x,y,z)dy++\int_{NB}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{AM}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{MN}Q(x,y,z_0)dy++\int_{NB}R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$





方法二：凑全微分法

第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式 > 曲线积分路径无关类问题

证明在整个空间内，$xy^2z^2dx+x^2yz^2dy+x^2y^2zdz$是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

记$P=xy^2z^2$，$Q=x^2yz^2$，$R=x^2y^2z$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyz^2=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2yz=\frac{\partial R}{\partial y}\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=2y^2xz=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}xy^2z^2dx+x^2yz^2dy+x^2y^2zdz$$

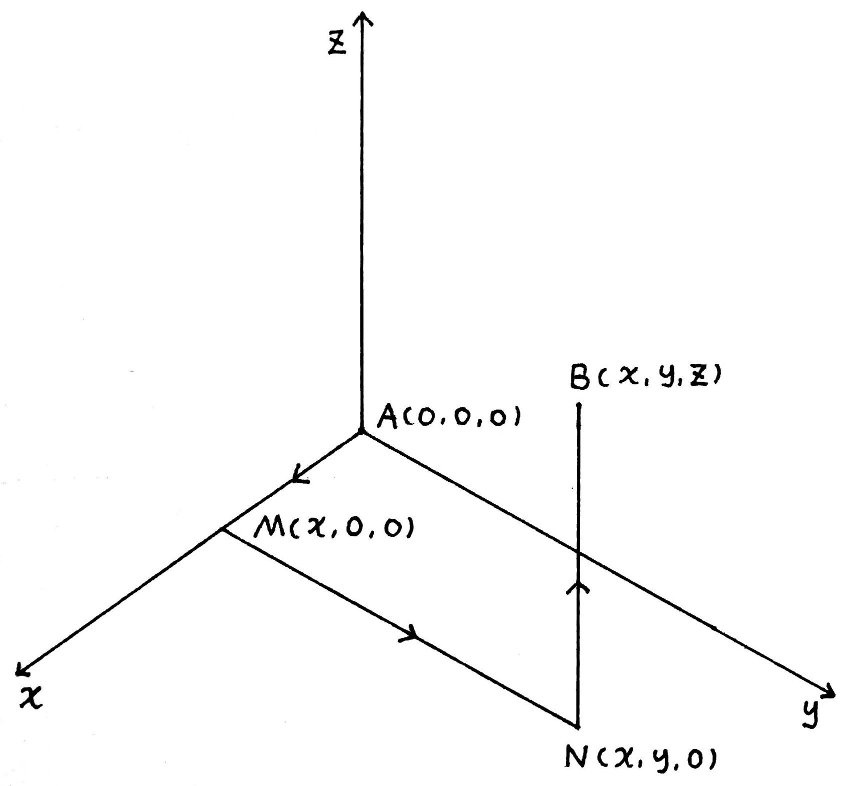
$$=\left(\int_{AM}+\int_{MN}+\int_{NB}\right)xy^2z^2dx+x^2yz^2dy+x^2y^2zdz$$

$$=\int_{AM}xy^2z^2dx+\int_{MN}x^2yz^2dy++\int_{NB}x^2y^2zdz$$

$$=0+0+\int_{NB}x^2y^2zdz$$

$$=\int_0^z x^2y^2zdz$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2y^2z^2\right]_0^z=\frac{1}{2}x^2y^2z^2$$



第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式 > 曲线积分路径无关类问题

证明在整个空间内，$xy^2z^2dx+x^2yz^2dy+x^2y^2zdz$是某个函数的全微分，并求出这样一个函数

$$xy^2z^2dx+x^2yz^2dy+x^2y^2zdz=\frac{1}{2}y^2z^2dx^2+\frac{1}{2}x^2z^2dy^2+\frac{1}{2}x^2y^2dz^2=d\left(\frac{1}{2}x^2y^2z^2\right)$$

证明在整个空间内$(yz+xz+xy)[(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz]$是某个函数的全微分

并求出这样一个函数

第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式 > 曲线积分路径无关类问题

设$du=\dfrac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求$u(x,y,z)$

$$u(x,y,z)=\int_{(1,0,0)}^{(x,y,z)}\frac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

不能以（0，0，0）为起点

$$=\left(\int_{AM}+\int_{MN}+\int_{NB}\right)\frac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

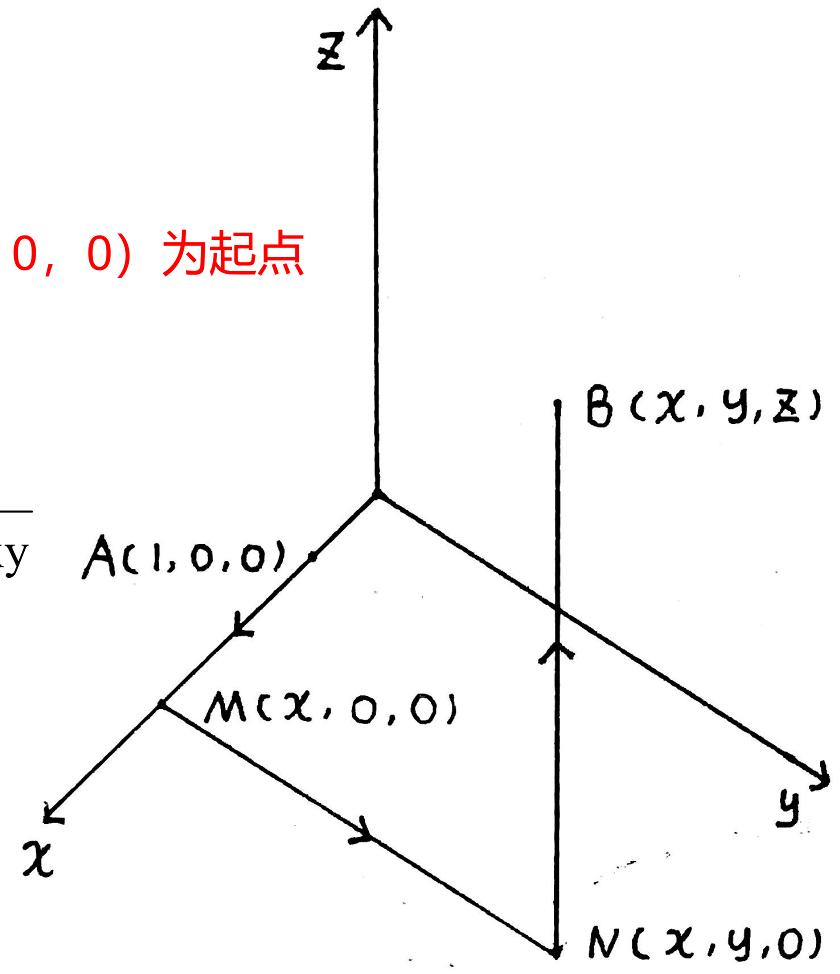
$$=\int_{AM}\frac{(x+y-z)dx}{x^2+y^2+z^2+2xy}+\int_{MN}\frac{(x+y-z)dy}{x^2+y^2+z^2+2xy}++\int_{NB}\frac{(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

$$=\int_{AM}\frac{dx}{x}+\int_{MN}\frac{(x+y)dy}{x^2+y^2+2xy}+\int_{NB}\frac{(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

$$=\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_0^y\frac{dy}{x+y}+\int_0^z\left[\frac{x+y}{(x+y)^2+z^2}+\frac{z}{(x+y)^2+z^2}\right]dz$$

$$=[\ln|x|]_1^x+[\ln|x+y|]_0^y+\left[\arctan\frac{z}{x+y}\right]_0^z+\left[\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]\right]_0^z$$

$$=\ln|x|+\ln|x+y|-\ln|x|+\arctan\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]-\ln|x+y|=\arctan\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]$$



第十二讲：曲线积分 > 斯托克斯公式 > 曲线积分路径无关类问题

设$du=\dfrac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求$u(x,\ y,\ z)$

$$\frac{(x+y-z)(dx+dy)+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}=\frac{(x+y-z)d(x+y)+(x+y+z)dz}{(x+y)^2+z^2},\quad \text{记}s=x+y$$

$$=\frac{(s-z)ds+(s+z)dz}{s^2+z^2}=\frac{sds-zds+sdz+zdz}{s^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}ds^2-zds+sdz+\frac{1}{2}dz^2}{s^2+z^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}d(s^2+z^2)+sdz-zds}{s^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}d(s^2+z^2)}{s^2+z^2}+\frac{sdz-zds}{s^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z}{s}\right)^2}=d\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+z^2)\right]+\frac{d\left(\frac{z}{s}\right)}{1+\left(\frac{z}{s}\right)^2}$$

$$=d\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+z^2)\right]+d\left[\arctan\left(\frac{z}{s}\right)\right]=d\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+z^2)+\arctan\left(\frac{z}{s}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\ln(s^2+z^2)+\arctan\left(\frac{z}{s}\right)=\frac{1}{2}\ln[(x+y)^2+z^2]+\arctan\frac{z}{x+y}$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

对弧长的曲线积分的概念

$\int_L f(x,y)ds$ 其中L是曲线$F(x,y)=0$

把$f(x,y)$看作xOy平面上点(x,y)的密度，ds是弧长元素

把$\int_L f(x,y)ds$看作xOy平面上一个曲线构件的质量

对弧长的曲线积分的概念

$\int_L f(x,y,z)ds$ 其中L是曲线$F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$

把$f(x,y,z)$看作O-xyz空间上点(x,y,z)的密度，ds是弧长元素

把$\int_L f(x,y,z)ds$看作O-xyz空间上一个曲线构件的质量

判断平面积分曲线对称性的依据：
曲线的对称
$F(x,y)=0$表示一条曲线
若$F(x,y)=F(-x,-y)$或$F(x,y)=-F(-x,-y)$
则曲线关于原点对称
若$F(x,y)=F(x,-y)$或$F(x,y)=-F(x,-y)$
则曲线关于x轴对称
若$F(x,y)=F(-x,y)$或$F(x,y)=-F(-x,y)$
则曲线关于y轴对称
若$F(x,y)=F(y,x)$或$F(x,y)=-F(y,x)$
则曲线关于直线$y=x$对称

第十二讲：曲线积分 > 对称性

判断空间积分曲线对称性的依据：
空间曲线一般表示两平面的交线：$F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$
曲面的对称
$F(x,y,z)=0$表示一个曲面
若$F(x,y,z)=F(-x,-y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,-y,-z)$
则曲面关于原点对称
若$F(x,y,z)=F(-x,-y,z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,-y,z)$
则曲面关于z轴对称
若$F(x,y,z)=F(-x,y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,y,-z)$
则曲面关于y轴对称
若$F(x,y,z)=F(x,-y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(x,-y,-z)$
则曲面关于x轴对称

若$F(x,y,z)=F(x,y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(x,y,-z)$
则曲面关于xOy平面对称
若$F(x,y,z)=F(x,-y,z)$或$F(x,y,z)=-F(x,-y,z)$
则曲面关于zOx平面对称
若$F(x,y,z)=F(-x,y,z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,y,z)$
则曲面关于yOz平面对称
若$F(x,y,z)=F(x,z,y)$或$F(x,y,z)=-F(x,z,y)$
则曲面关于y=z平面对称
若$F(x,y,z)=F(z,y,x)$或$F(x,y,z)=-F(z,y,x)$
则曲面关于z=x平面对称
若$F(x,y,z)=F(y,x,z)$或$F(x,y,z)=-F(y,x,z)$
则曲面关于x=y平面对称

第十二讲：曲线积分 > 对称性

判断被积函数对称性依据：

函数的对称

把$f(x,y)$视为xOy平面上的密度

则密度函数关于原点对称

若$f(x,y)=f(y,x)$

若$f(x,y)=f(x,-y)$或者说$f(x,y)$是关于y的偶函数

则密度函数关于x轴对称

若$f(x,y)=f(-x,y)$或者说$f(x,y)$是关于x的偶函数

则密度函数关于y轴对称

若$f(x,y)=f(y,x)$

则密度函数关于直线$y=x$对称

若$f(x,y)=-f(-x,-y)$

则密度函数关于原点互为相反数

若$f(x,y)=-f(x,-y)$或者说$f(x,y)$是关于y的奇函数

则密度函数关于x轴互为相反数

若$f(x,y)=-f(-x,y)$或者说$f(x,y)$是关于x的奇函数

则密度函数关于y轴互为相反数

若$f(x,y)=-f(y,x)$

则密度函数关于直线$y=x$互为相反数

第十二讲：曲线积分 > 对称性

判断被积函数对称性依据：

函数的对称

把f(x,y,z)视为O-xyz空间上的点密度

若f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)
则密度函数关于原点对称
若f(x,y,z)=f(x,-y,-z)
则密度函数关于x轴对称
若f(x,y,z)=f(-x,y,-z)
则密度函数关于y轴对称
若f(x,y,z)=f(-x,-y,z)
则密度函数关于z轴对称
若f(x,y,z)=f(x,y,-z)或者说f(x,y,z)是关于z的偶函数
则密度函数关于xOy平面对称
若f(x,y,z)=f(x,-y,z)或者说f(x,y,z)是关于y的偶函数
则密度函数关于zOx平面对称
若f(x,y,z)=f(-x,y,z)或者说f(x,y,z)是关于x的偶函数
则密度函数关于yOz平面对称
若f(x,y,z)=f(x,z,y)
则密度函数关于y=z平面对称
若f(x,y,z)=f(z,y,x)
则密度函数关于z=x平面对称
若f(x,y,z)=f(y,x,z)
则密度函数关于x=y平面对称

若f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)
则密度函数关于原点互为相反数
若f(x,y,z)=f(x,-y,-z)
则密度函数关于x轴互为相反数
若f(x,y,z)=f(-x,y,-z)
则密度函数关于y轴互为相反数
若f(x,y,z)=f(-x,-y,z)
则密度函数关于z轴互为相反数
若f(x,y,z)=-f(x,y,-z)或者说f(x,y,z)是关于z的奇函数
则密度函数关于xOy平面互为相反数
若f(x,y,z)=-f(x,-y,z)或者说f(x,y,z)是关于y的奇函数
则密度函数关于zOx平面互为相反数
若f(x,y,z)=-f(-x,y,z)或者说f(x,y,z)是关于x的奇函数
则密度函数关于yOz平面互为相反数
若f(x,y,z)=-f(x,z,y)
则密度函数关于y=z平面互为相反数
若f(x,y,z)=-f(z,y,x)
则密度函数关于z=x平面互为相反数
若f(x,y,z)=-f(y,x,z)
则密度函数关于x=y平面互为相反数

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若平面积分曲线L关于原点对称，设L被原点分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(-x,-y)$时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds=2\int_{L_2} f(x,y)ds$

（2）当$f(x,y)=-f(-x,-y)$时，$\int_L f(x,y)ds=0$

若平面积分曲线L关于x轴对称，设L被x轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(x,-y)$时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds=2\int_{L_2} f(x,y)ds$

（2）当$f(x,y)=-f(x,-y)$时，$\int_L f(x,y)ds=0$

若平面积分曲线L关于y轴对称，设L被y轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(-x,y)$时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds=2\int_{L_2} f(x,y)ds$

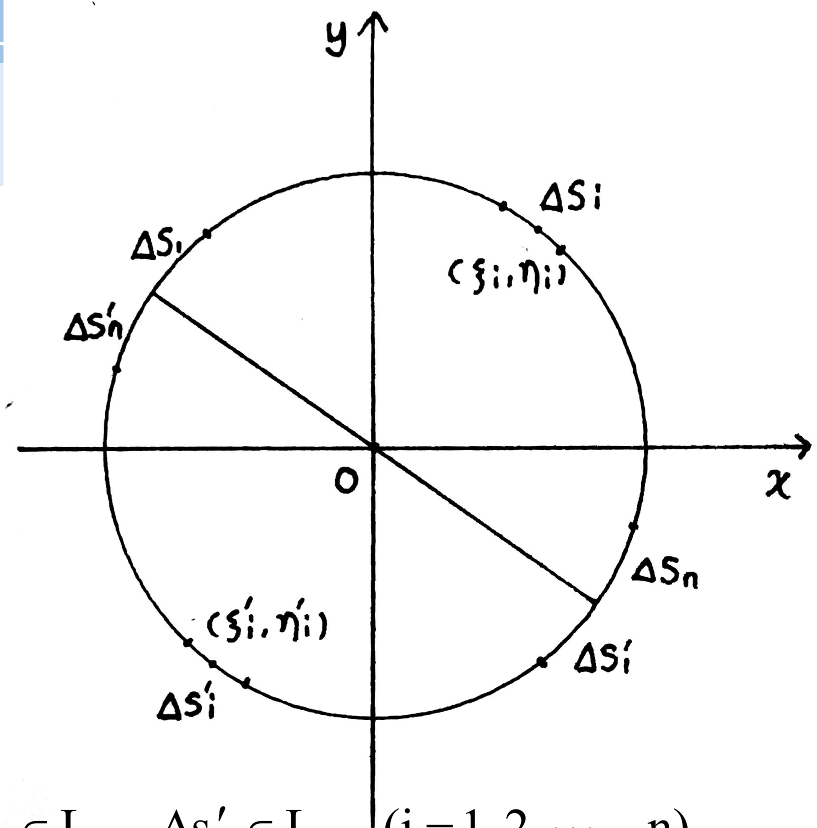
（2）当$f(x,y)=-f(-x,y)$时，$\int_L f(x,y)ds=0$

若平面积分曲线L关于直线$y=x$对称，设L被直线$y=x$分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(y,x)$时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds=2\int_{L_2} f(x,y)ds$

（2）当$f(x,y)=-f(y,x)$时，$\int_L f(x,y)ds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性



若平面积分曲线L关于原点对称，设L被原点分成L_1、L_2两部分，则

当$f(x,y)=f(-x,-y)$时，$\int_L f(x,y)ds=2\int_{L_1} f(x,y)ds=2\int_{L_2} f(x,y)ds$

将L关于原点对称地分成2n个小弧段Δs_i、$\Delta s_i'$，Δs_i与$\Delta s_i'$关于原点对称且$\Delta s_i\in L_1$，$\Delta s_i'\in L_2$ $(i=1,2,\cdots,n)$

取点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$ 设点(ξ_i',η_i')是点(ξ_i,η_i)关于原点的对称点，则点$(\xi_i',\eta_i')\in\Delta s_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$\int_{L_1} f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ λ，λ'分别是Σ_1，Σ_2的各个小弧段的直径的最大值

$=\lim\limits_{\lambda'\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i',\eta_i')\Delta s_i'$ $\lambda=\lambda'$ $(\xi_i',\eta_i')=(-\xi_i,-\eta_i)$ $\Delta s_i=\Delta s_i'$

$=\int_{L_2} f(x,y)ds$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间积分曲线L关于原点对称，设L被原点分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

若空间积分曲线L关于z轴对称，设L被z轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

若空间积分曲线L关于y轴对称，设L被y轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

若空间积分曲线L关于x轴对称，设L被x轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,-y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,-y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间积分曲线L关于xoy平面对称，设L被xoy平面分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

若空间积分曲线L关于zox平面对称，设L被zox平面分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,-y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,-y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

若空间积分曲线L关于yoz平面对称，设L被yoz平面分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=2\int_{L_1} f(x,y,z)ds=2\int_{L_2} f(x,y,z)ds$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$时，$\int_L f(x,y,z)ds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间积分曲线L关于平面$x=y$对称，设L被平面$x=y$分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(y, x, z)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=2\int_{L_1} f(x, y, z)ds=2\int_{L_2} f(x, y, z)ds$

（2）当$f(x, y, z)=-f(y, x, z)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=0$

若空间积分曲线L关于平面$y=z$对称，设L被平面$y=z$分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(x, z, y)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=2\int_{L_1} f(x, y, z)ds=2\int_{L_2} f(x, y, z)ds$

（2）当$f(x, y, z)=-f(x, z, y)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=0$

若空间积分曲线L关于平面$z=x$对称，设L被平面$z=x$分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(z, y, x)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=2\int_{L_1} f(x, y, z)ds=2\int_{L_2} f(x, y, z)ds$

（2）当$f(x, y, z)=-f(z, y, x)$时，$\int_L f(x, y, z)ds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

m,n是正整数，a,b,c是正数，L是$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$与$x+y+z=0$的交线，计算$\int_L x^m y^n z^{m+n+1}ds$

记$F_1(x,y,z)=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1$，$F_2(x,y,z)=x+y+z$

$F_1(-x,-y,-z)=F_1(x,y,z)$，$F_2(-x,-y,-z)=F_2(x,y,z)$

$\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$关于原点对称$\Rightarrow L$关于原点对称

记$f(x,y,z)=x^m y^n z^{m+n+1}\Rightarrow f(-x,-y,-z)=(-1)^{2m+2n+1}f(x,y,z)=-f(x,y,z)$

$\Rightarrow \int_L x^m y^n z^{m+n+1}ds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

平面积分曲线L关于$y=x$对称，则$\int_L f(x, y)ds=\int_L f(y, x)ds$

记$G(x, y)=f(x, y)-f(y, x)\Rightarrow G(x, y)=-G(y, x)$

又L关于直线$y=x$对称

$\Rightarrow\int_L G(x, y)ds=0\Rightarrow\int_L f(x, y)ds=\int_L f(y, x)ds$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

空间积分曲线L关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称

则$\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(y,x,z)ds=\int_L f(y,z,x)ds=\int_L f(z,y,x)ds=\int_L f(z,x,y)ds=\int_L f(x,z,y)ds$

记$G(x,y,z)=f(x,y,z)-f(y,x,z)\Rightarrow G(x,y,z)=-G(y,x,z)$

又L关于平面$y=x$对称

$\Rightarrow\int_L G(x,y,z)ds=0\Rightarrow\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(y,x,z)ds$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

L为闭曲线$x^2+xy+y^2=1$，计算$\dfrac{\int_L (2x^2+xy)ds}{\int_L ds}$

设$F(x,y)=x^2+xy+y^2-1$

$F(x,y)=F(y,x)\Rightarrow F(x,y)=0$关于直线$y=x$对称

$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$

取$f(x,y)=2x^2+xy\Rightarrow\int_L (2x^2+xy)ds=\int_L (2y^2+xy)ds$

$$\int_L (2x^2+xy)ds=\frac{1}{2}\int_L (2x^2+xy+2y^2+xy)ds=\frac{1}{2}\int_L 2ds=\int_L ds$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

L是$x^2+xy+y^2=1$与$x+y+z=1$的交线，计算$\int_L (x-y)xyzds$

记$F_1(x,y,z)=x^2+xy+y^2-1$，$F_2(x,y,z)=x+y+z-1$

$F_1(x,y,z)=F_1(y,x,z)$，$F_2(x,y,z)=F_2(y,x,z)$

$\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$关于平面$x=y$对称$\Rightarrow L$关于平面$x=y$对称

$\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(y,x,z)ds$

取$f(x,y,z)=(x-y)xyz$

$\int_L (x-y)xyzds=\int_L (y-x)xyzds=-\int_L (x-y)xyzds\Rightarrow\int_L (x-y)xyzds=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

L是$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=0$的交线，计算$\int_L (ax^2+by^2+cz^2)ds$

记$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，$F_2(x,y,z)=x+y+z$

$F_1(x,y,z)=F_1(y,x,z)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$x=y$对称

$F_1(x,y,z)=F_1(x,z,y)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$y=z$对称

$F_1(x,y,z)=F_1(z,y,x)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$z=x$对称

同理$F_2(x,y,z)=0$关于平面$x=y$、$y=z$、$z=x$对称

$\Rightarrow$ L关于平面$x=y$、$y=z$、$z=x$对称

$$\Rightarrow \int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(y,z,x)ds=\int_L f(z,x,y)ds$$

取$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$

$$\Rightarrow \int_L (ax^2+by^2+cz^2)ds=\int_L (ay^2+bz^2+cx^2)ds=\int_L (az^2+bx^2+cy^2)ds$$

$$\int_L (ax^2+by^2+cz^2)ds=\frac{1}{3}\int_L (a+b+c)(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{1}{3}(a+b+c)\int_L ds=\frac{1}{3}(a+b+c)\cdot 2\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

L是$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=1$的交线，计算$\int_L (x^3+2xy^2)ds$

L关于平面$x=y$、$y=z$、$z=x$对称

$$\Rightarrow \int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(x,z,y)ds=\int_L f(y,z,x)ds=\int_L f(y,x,z)ds=\int_L f(z,x,y)ds=\int_L f(z,y,x)ds$$

取$f(x,y,z)=x^3+2xy^2$

$$\Rightarrow \int_L (x^3+2xy^2)ds=\int_L (x^3+2xz^2)ds=\int_L (y^3+2yz^2)ds=\int_L (y^3+2yx^2)ds=\int_L (z^3+2zx^2)ds=\int_L (z^3+2zy^2)ds$$

$$\int_L (x^3+2xy^2)ds=\frac{1}{6}\int_L [2x(x^2+y^2+z^2)+2y(x^2+y^2+z^2)+2z(x^2+y^2+z^2)]ds=\frac{1}{6}\int_L 2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\frac{1}{6}\int_L 2\cdot 1\cdot 1ds=\frac{1}{3}\int_L ds=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若平面有向积分曲线L关于原点对称，设L被分成关于原点对称的L_1、L_2两部分，则

（2）当$f(x, y)=f(-x,-y)$时，

$$\int_L f(x, y)dx=0$$

$$\int_L f(x, y)dy=0$$

（2）当$f(x, y)=-f(-x,-y)$时，

$$\int_L f(x, y)dx=2\int_{L_1} f(x, y)dx=2\int_{L_2} f(x, y)dx$$

$$\int_L f(x, y)dy=2\int_{L_1} f(x, y)dy=2\int_{L_2} f(x, y)dy$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若平面有向积分曲线L关于x轴对称，设L被x轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(x,-y)$时，

$$\int_L f(x,y)dx=0$$

$$\int_L f(x,y)dy=2\int_{L_1} f(x,y)dy=2\int_{L_2} f(x,y)dy$$

（2）当$f(x,y)=-f(x,-y)$时，

$$\int_L f(x,y)dx=2\int_{L_1} f(x,y)dx=2\int_{L_2} f(x,y)dx$$

$$\int_L f(x,y)dy=0$$

若平面有向积分曲线L关于y轴对称，设L被y轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y)=f(-x,y)$时，

$$\int_L f(x,y)dx=2\int_{L_1} f(x,y)dx=2\int_{L_2} f(x,y)dx$$

$$\int_L f(x,y)dy=0$$

（2）当$f(x,y)=-f(-x,y)$时，

$$\int_L f(x,y)dx=0$$

$$\int_L f(x,y)dy=2\int_{L_1} f(x,y)dy=2\int_{L_2} f(x,y)dy$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间有向积分曲线L关于原点对称，设L被分成关于原点对称的L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(-x,-y,-z)$时，

$$\int_L f(x, y, z)dx=0$$

$$\int_L f(x, y, z)dy=0$$

$$\int_L f(x, y, z)dz=0$$

（2）当$f(x, y, z)=-f(-x,-y,-z)$时，

$$\int_L f(x, y, z)dx=2\int_{L_1} f(x, y, z)dx=2\int_{L_2} f(x, y, z)dx$$

$$\int_L f(x, y, z)dy=2\int_{L_1} f(x, y, z)dy=2\int_{L_2} f(x, y, z)dy$$

$$\int_L f(x, y, z)dz=2\int_{L_1} f(x, y, z)dz=2\int_{L_2} f(x, y, z)dz$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间有向积分曲线L关于z轴对称，设L被z轴分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$时，

$$\int_L f(x,y,z)dx=0$$

$$\int_L f(x,y,z)dy=0$$

$$\int_L f(x,y,z)dz=2\int_{L_1} f(x,y,z)dz=2\int_{L_2} f(x,y,z)dz$$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$时，

$$\int_L f(x,y,z)dx=2\int_{L_1} f(x,y,z)dx=2\int_{L_2} f(x,y,z)dx$$

$$\int_L f(x,y,z)dy=2\int_{L_1} f(x,y,z)dy=2\int_{L_2} f(x,y,z)dy$$

$$\int_L f(x,y,z)dz=0$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

若空间有向积分曲线L关于xOy平面对称，设L被xOy平面分成L_1、L_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$时，

$$\int_L f(x,y,z)dx=0$$

$$\int_L f(x,y,z)dy=0$$

$$\int_L f(x,y,z)dz=2\int_{L_1} f(x,y,z)dz=2\int_{L_2} f(x,y,z)dz$$

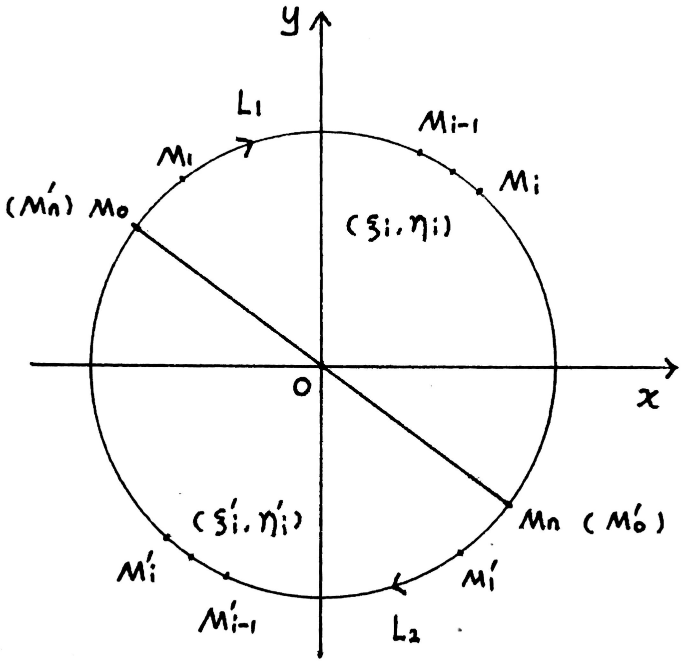
（2）当$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$时，

$$\int_L f(x,y,z)dx=2\int_{L_1} f(x,y,z)dx=2\int_{L_2} f(x,y,z)dx$$

$$\int_L f(x,y,z)dy=2\int_{L_1} f(x,y,z)dy=2\int_{L_2} f(x,y,z)dy$$

$$\int_L f(x,y,z)dz=0$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性



若平面有向积分曲线L关于原点对称，设L被分成关于原点对称的L_1、L_2两部分，则当$f(x, y)=f(-x,-y)$时，$\int_L f(x, y)dx=0$

在L_1上沿L_1的方向插入一点列$M_0(x_0, y_0)$、$M_1(x_1, y_1)$、…、$M_n(x_n, y_n)$，M_0是起点，M_n是终点

在L_2上沿L_2的方向插入一点列$M_0'(x_0', y_0')$、$M_1'(x_1', y_1')$、…、$M_n'(x_n', y_n')$，M_0'是起点，M_n'是终点

M_i与M_i'关于原点对称　$M_0=M_n'$，$M_0'=M_n$　$i=0,1,\cdots, n$

取点$(\xi_i, \eta_i)\in$弧段$M_{i-1}M_i$　设点(ξ_i', η_i')是点(ξ_i, η_i)关于原点的对称点，则点$(\xi_i', \eta_i')\in$弧段$M_{i-1}'M_i'$　$i=1,\cdots, n$

设$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$　$\Delta x_i'=x_i'-x_{i-1}'$　$i=1,\cdots, n$

$\int_{L_1} f(x, y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$　　λ，λ'分别是Σ_1，Σ_2的各个小弧段弧长的最大值

$=-\lim\limits_{\lambda'\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i', \eta_i')\Delta x_i'$　　$\lambda=\lambda'$　$(\xi_i', \eta_i')=(-\xi_i,-\eta_i)$　$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=-x_i'-(-x_{i-1}')=x_{i-1}'-x_i'=-\Delta x_i'$

$=-\int_{L_2} f(x, y)dx$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

m，n是正整数，a，b，c是正数，L是$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$与$x+y+z=0$的交线，计算$\int_L x^m y^n z^{m+n}dx$

记$F_1(x,y,z)=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1$，$F_2(x,y,z)=x+y+z$

$F_1(-x,-y,-z)=F_1(x,y,z)$，$F_2(-x,-y,-z)=F_2(x,y,z)$

$\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$关于原点对称$\Rightarrow$ L关于原点对称

记$f(x,y,z)=x^m y^n z^{m+n+1}\Rightarrow f(-x,-y,-z)=(-1)^{2m+2n+1}f(x,y,z)=-f(x,y,z)$

$\Rightarrow \int_L x^m y^n z^{m+n+1}dx=0$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

平面积分曲线L关于$y=x$对称，则

$$\int_L f(x, y)dx = -\int_L f(y, x)dy$$

$$\int_L f(x, y)dy = -\int_L f(y, x)dx$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

平面积分曲线L关于$y=x$对称，则$\int_L f(x,y)dx=-\int_L f(y,x)dy$

在L上沿L的方向关于直线$y=x$对称地插入一点列$M_0(x_0,y_0)M_1(x_1,y_1)\cdots M_n(x_n,y_n)M'_n(x_n,y_n)\cdots M'_1(x_1,y_1)M'_0(x_0,y_0)$

M_i与M'_i关于原点对称　M'_0是起点，M'_n是终点，M_n，M'_n是中点　$i=0,1,\cdots,n$

弧段$M_{i-1}M_i\subset L_1$，弧段$M'_{i-1}M'_i\subset L_2$　$i=1,\cdots,n$

取点$(\xi_i,\eta_i)\in$弧段$M_{i-1}M_i$　设点(ξ'_i,η'_i)是点(ξ_i,η_i)关于原点的对称点，则点$(\xi'_i,\eta'_i)\in$弧段$M'_{i-1}M'_i$　$i=1,\cdots,n$

设$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$　$\Delta y'_i=y'_{i-1}-y'_i$　$i=1,\cdots,n$

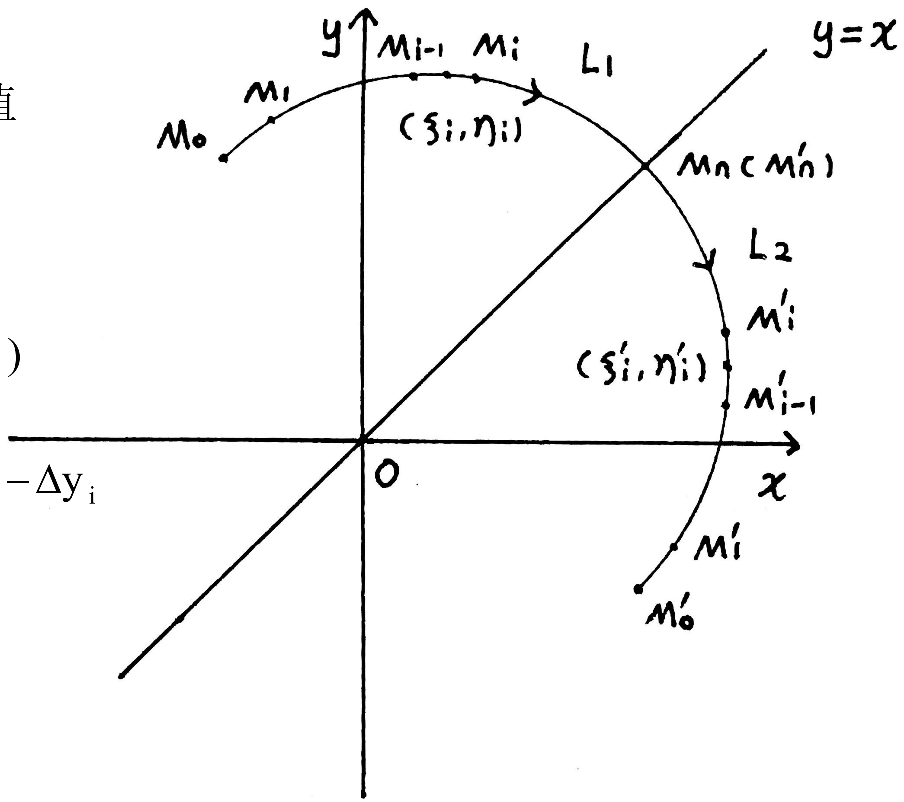
$\int_{L_1} f(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$　　λ，λ'分别是Σ_1，Σ_2的各个小弧段弧长的最大值

$=\lim\limits_{\lambda'\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x,y)|_{(x,y)=(\xi_i,\eta_i)}\Delta x_i$　　$\lambda=\lambda'$

$=\lim\limits_{\lambda'\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(y,x)|_{(x,y)=(\eta_i,\xi_i)}\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda'\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(y,x)|_{(x,y)=(\xi'_i,\eta'_i)}\Delta x_i$　　$(\xi'_i,\eta'_i)=(\eta_i,\xi_i)$

$=-\lim\limits_{\lambda'\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(y,x)|_{(x,y)=(\xi'_i,\eta'_i)}\Delta y_i$　　$(x'_i,y'_i)=(y_i,x_i)$　$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=y'_i-y'_{i-1}=-\Delta y_i$

$=-\int_{L_2} f(y,x)dy$



同理$\int_{L_2} f(x,y)dx=-\int_{L_1} f(y,x)dy\Rightarrow\int_L f(x,y)dx=-\int_L f(y,x)dy$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

空间积分曲线L关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称，则

$$\int_L f(x,y,z)dx=-\int_L f(y,x,z)dy=\int_L f(z,x,y)dz=-\int_L f(x,z,y)dx=\int_L f(y,z,x)dy=-\int_L f(z,y,x)dz$$

$$\int_L f(x,y,z)dy=-\int_L f(x,z,y)dz=\int_L f(z,x,y)dx=-\int_L f(z,y,x)dy=\int_L f(y,z,x)dz=-\int_L f(y,x,z)dx$$

$$\int_L f(x,y,z)dz=-\int_L f(z,y,x)dx=\int_L f(z,x,y)dy=-\int_L f(y,x,z)dz=\int_L f(y,z,x)dx=-\int_L f(x,z,y)dy$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

曲线L是圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$上从点$A(0,1)$到$B(1,0)$的一段（在直线$x+y=1$下方的部分）

计算$\int_L (y-1)^2\left(x^2+1\right)dx+2y(x-1)^2dy$

L关于$y=x$对称$\Rightarrow \int_L f(x,\ y)dx=-\int_L f(y,\ x)dy$

取$f(x,\ y)=(y-1)^2\left(x^2+1\right)\Rightarrow \int_L (y-1)^2\left(x^2+1\right)dx=-\int_L (x-1)^2\left(y^2+1\right)dy$

$$\int_L (y-1)^2\left(x^2+1\right)dx+2y(x-1)^2dy=\int_L (x-1)^2\left(2y-y^2-1\right)dy=-\int_L (x-1)^2(y-1)^2dy$$

$$=-\int_1^0\left[1-(y-1)^2\right](y-1)^2dy=\int_0^1\left[(y-1)^2-(y-1)^4\right]dy=\frac{2}{15}$$

第十二讲：曲线积分 > 对称性

L是$x^2+y^2+z^2+yz+xz+xy=1$与$x+y+z=0$的交线，从z轴正方向往下看是逆时针

计算$\int_L (x^2+yz)dx-(x^2+xy)dy-(x^2+xz)dz$

记$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+yz+xz+xy-1$，$F_2(x,y,z)=x+y+z$

$F_1(x,y,z)=F_1(y,x,z)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$x=y$对称

$F_1(x,y,z)=F_1(x,z,y)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$y=z$对称

$F_1(x,y,z)=F_1(z,y,x)\Rightarrow F_1(x,y,z)=0$关于平面$z=x$对称

同理$F_2(x,y,z)=0$关于平面$x=y$、$y=z$、$z=x$对称

$\Rightarrow$ L关于平面$x=y$、$y=z$、$z=x$对称

$\int_L f_1(x,y,z)dy=-\int_L f_1(y,x,z)dx$

取$f_1(x,y,z)=-(x^2+xy)\Rightarrow \int_L -(x^2+xy)dy=-\int_L -(y^2+xy)dx=\int_L (y^2+xy)dx$

$\int_L f_2(x,y,z)dz=-\int_L f_2(z,y,x)dx$

取$f_1(x,y,z)=-(x^2+xz)\Rightarrow \int_L -(x^2+xz)dz=-\int_L -(z^2+xz)dx=\int_L (z^2+xz)dx$

$\int_L (x^2+yz)dx-(x^2+xy)dy-(x^2+xz)dz=\int_L (x^2+yz+y^2+xy+z^2+xz)dz=\int_L dz=0$