一、高阶线性微分方程的一般理论

n 阶线性方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)。$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，称为 n 阶齐线性微分方程；

当 $f(x)\not\equiv 0$ 时，称为 n 阶非齐线性微分方程；

当 $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 均为常数时，称为常系数方程；

二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)。 \qquad (1)$$

当 $\boldsymbol{f(x) \equiv 0}$ 时，方程称为齐次方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0。 \qquad (2)$$

通常称 (2) 为 (1) 的相对应的齐次方程。

我们讨论二阶线性方程的一般理论，所得结论可自然推广至 n 阶线性方程中。

1. 二阶齐次线性微分方程的性质和解的结构

(1) 叠加原理

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

的解，则它们的线性组合

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程 (2) 的解。

证 令 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，代入方程(2)中，得

$$(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))''+p(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))'$$

$$+q(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))$$

$$=(c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x))+p(x)(c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x))$$

$$+q(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))$$

$$=c_1(y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x))$$

$$+c_2(y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x))$$

$$=0+0=0,$$

即 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 为方程(2)的解。

在什么情况下，叠加所得可以成为方程 (2) 的通解?

(3) 二阶齐线性微分方程解的结构

定理 1 若 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

的两个线性无关的解，则

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

是方程 (2) 的通解。

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$$

$\Rightarrow$ $y_1(x)$、$y_2(x)$线性无关

定理 2

若 $h(x)+p(x)+q(x)=0$，则方程

$$h(x)y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

必有一解 $y=e^x$。

由函数 e^x 的特点：$e^x=(e^x)'=(e^x)''=\cdots$，即可得证。

问题：

如果已知 $y_1(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个解，

如何求出方程的一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解 $y_2(x)$？

该问题的解决归功于数学家刘维尔。

如果已知 $y_1(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个非零解。

若 $y_2(x)$ 是方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的解： $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = c(x)$, 则

$$y_2(x) = c(x)y_1(x),$$

$\boxed{\text{关键是求出 } c(x)}$

代入方程中，得

$$\underline{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}c(x) + (2y_1' + p(x)y_1)c'(x) + y_1c''(x) = 0。$$

因为 y_1 是方程的解，故得

$\boxed{\textbf{怎么做?}}$

$$(2y_1' + p(x)y_1)c'(x) + y_1c''(x) = 0。$$

$\boxed{\textbf{关于 } z \textbf{ 的一阶线性方程}}$

令 $z = c'(x)$，则有

$$y_1z' + (2y_1' + p(x)y_1)z = 0。$$

即 $$z' + \frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1} z = 0。$$

关于 z 的一阶线性方程

故有 $$z = c'(x) = e^{-\int \frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1} \mathrm{d}x} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分，得

$$c(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x,$$

与 $y_1(x)$ 线性无关的解

$$y_2(x) = c(x)y_1(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2} \mathrm{d}x。$$

从而，方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)。$$

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = c\,e^{-\int p(x)dx}$$

$$e^{-\int \frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1}dx} = e^{-\int \frac{2y_1' dx}{y_1}} \cdot e^{-\int p(x)dx} = e^{-2\int \frac{dy_1}{y_1}} e^{-\int p(x)dx}$$

$$= e^{-2\ln|y_1|} e^{-\int p(x)dx} = \cancel{e}^{\cancel{\ln}\frac{1}{y_1^2}} e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

刘维尔公式

若 $y_1(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零解，

则

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^{\ 2}}\mathrm{d}x$$

是方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的解，且

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

为原方程的通解。

例　求方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解。

解　因为系数满足：$1-2+1=0$，所以，方程有解

$$y_1(x) = e^x。$$

由刘维尔公式

$$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{-\int(-2)\,\mathrm{d}x}}{(e^x)^2}\,\mathrm{d}x = xe^x,$$

故原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2xe^x = e^x(C_1 + C_2x)。$$

2. 二阶非齐线性微分方程解的结构

(1) 解的性质

性质 1 若 $y^*(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的一个特解，而 $y_1(x)$ 是其对应的齐方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个特解，则

$$y = y_1(x) + y^*(x)$$

是原方程的一个特解。

性质 2　若 $y_1(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

的一个特解，而 $y_2(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的一个特解，则

$$y = y_1(x) + y_2(x)$$

是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的一个特解。

性质 3 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的任意两个特解，则

$$y = y_1(x) - y_2(x)$$

是其对应的齐方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个特解。

定理 3 若 $y^*(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

的一个特解，而 $\bar{y}(x)$ 是其对应的齐方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

的通解，则

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

是方程 (1) 的通解。

由性质1 以及通解的概念立即可以得知该定理成立。

在这一节中所讲述的理论均可推广到 n 阶线性微分方程中去。