第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 投影法

设曲面积分由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数在D_{xy}上具有连续偏导数，被积函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

将曲面积分转化成二重积分

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$x+y+2z=1$、$x+y+2z=2$所截的部分，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$

设D_{xy}为Σ在xOy面上的投影区域，则D_{xy}是曲线$x+y+2\sqrt{x^2+y^2}=1$、$x+y+2\sqrt{x^2+y^2}=2$所围区域

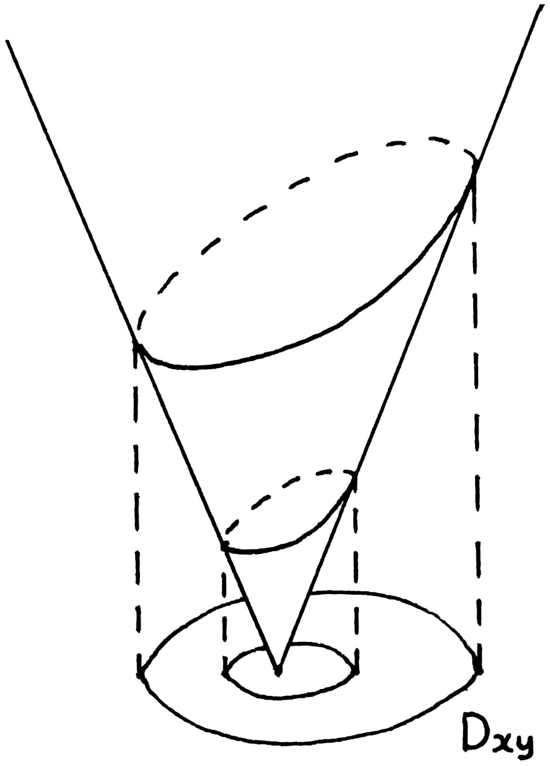
$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}\,rdrd\theta}{r}=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\,drd\theta\qquad D_{xy}=\{(r,\theta)|\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta+2}\le r\le\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta+2}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta+2}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta+2}}\sqrt{2}\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+\sin\theta+2}\,d\theta$$



第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$x+y+2z=1$、$x+y+2z=2$所截的部分，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{z}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+\sin\theta+2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+\sin\theta+2}d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+\sin\theta+2}d\theta \quad 记u=\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2}du+\int_{-\infty}^{0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2}du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{2}}{u^2+2u+3}du+\int_{-\infty}^{0}\frac{2\sqrt{2}}{u^2+2u+3}du$$

$$=\left[2\arctan\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty}+\left[2\arctan\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0}=2\pi$$

$\theta\in[0,2\pi]$，$u=\tan\frac{\theta}{2}$与$\theta=2\arctan u$不等价

$$\arctan u=\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\neq\frac{\theta}{2}$$

当$\theta\in[0,\ \pi]\Rightarrow\frac{\theta}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}\Rightarrow\arctan u=\frac{\theta}{2}\Rightarrow\theta=2\arctan u$

当$\theta\in[\pi,2\pi]\Rightarrow\frac{\theta}{2}\in[\frac{\pi}{2},\ \pi]\Rightarrow\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}-\pi\Rightarrow\arctan u=\frac{\theta}{2}-\pi\Rightarrow\theta=2\arctan u+2\pi$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 参数方程

设函数 $f(x, y, z)$ 连续，曲面 Σ 由参数方程 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，$z=z(u, v)$ 表示，D是uOv面上的有界闭区域，函数 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，$z=z(u, v)$ 在D上有一阶连续偏导数，雅可比式 $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 在D上不同时为0

则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\,dS=\iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

其中，$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

将曲面积分转化成二重积分

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 球面参数方程

$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

Σ是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

Σ：$x=R\sin\varphi\cos\theta$，$y=R\sin\varphi\sin\theta$，$z=R\cos\varphi$

$x_\theta=-R\sin\varphi\sin\theta$，$y_\theta=R\sin\varphi\cos\theta$，$z_\theta=0$，$x_\varphi=R\cos\varphi\cos\theta$，$y_\varphi=R\cos\varphi\sin\theta$，$y_\varphi=-R\sin\varphi$

$E=R^2\sin^2\varphi$，$F=0$，$G=R^2\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$

$dS=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta$

Σ是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

Σ：$x=\sqrt{R^2-z^2}\cos\theta$，$y=\sqrt{R^2-z^2}\sin\theta$，$z=z$

$x_\theta=-\sqrt{R^2-z^2}\sin\theta$，$y_\theta=\sqrt{R^2-z^2}\cos\theta$，$y_\theta=0$，$x_z=\dfrac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}\cos\theta$，$y_z=\dfrac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}\sin\theta$，$z_z=1$

$E=R^2-z^2$，$F=0$，$G=\dfrac{R^2}{R^2-z^2}\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=R$

$dS=Rd\theta dz$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 球面参数方程

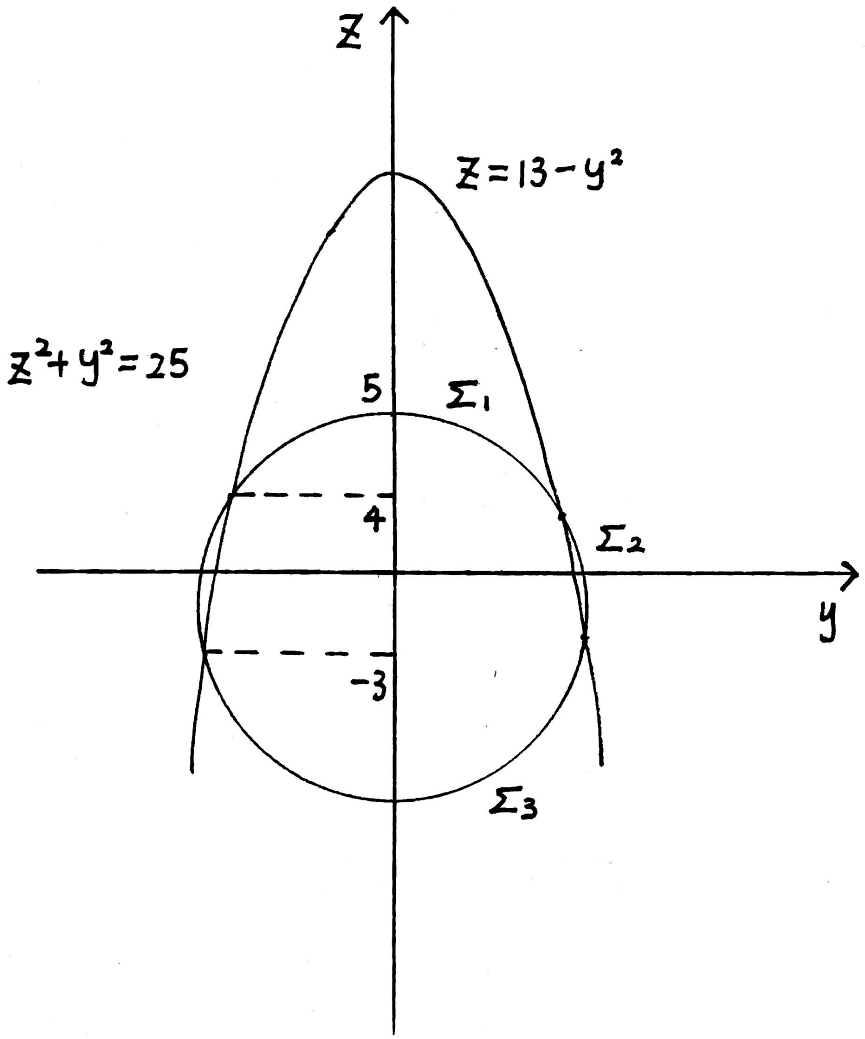
曲面$z=13-x^2-y^2$将球面$x^2+y^2+z^2=25$分成三个部分，求这三个部分曲面的面积之比

$$x=\sqrt{5^2-z^2}\cos\theta,\quad y=\sqrt{5^2-z^2}\sin\theta,\quad z=z$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} dS=\iint\limits_{D_{\theta z}^1} 5\,d\theta dz=\int_0^{2\pi}5\,d\theta\int_4^5 dz=10\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} dS=\iint\limits_{D_{\theta z}^2} 5\,d\theta dz=\int_0^{2\pi}5\,d\theta\int_{-3}^4 dz=70\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} dS=\iint\limits_{D_{\theta z}^3} 5\,d\theta dz=\int_0^{2\pi}5\,d\theta\int_{-5}^{-3} dz=20\pi$$



第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 柱面参数方程

Σ是柱面$x^2+y^2=R^2$

Σ：$x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$z=z$

$x_\theta=-R\sin\theta$，$y_\theta=R\cos\theta$，$y_\theta=0$，$x_z=0$，$y_z=0$，$z_z=1$

$E=R^2$，$F=0$，$G=1\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=R$

$dS=Rd\theta dz$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 柱面参数方程

Σ是柱面$x^2+y^2=1$被曲面$z=(x-1)^2+(y-1)^2$及平面$z=0$所截的部分，求Σ的面积

$$0\le z\le (x-1)^2+(y-1)\Rightarrow 0\le z\le 3-2(\cos\theta+\sin\theta)$$

Σ：$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$z=z$

$$D_{\theta z}=\{(\theta,\ z)|0\le z\le 3-2(\cos\theta+\sin\theta),0\le\theta<2\pi\}$$

$$\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D_{\theta z}}d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{3-2(\cos\theta+\sin\theta)}dz=\int_0^{2\pi}[3-2(\cos\theta+\sin\theta)]d\theta=6\pi$$

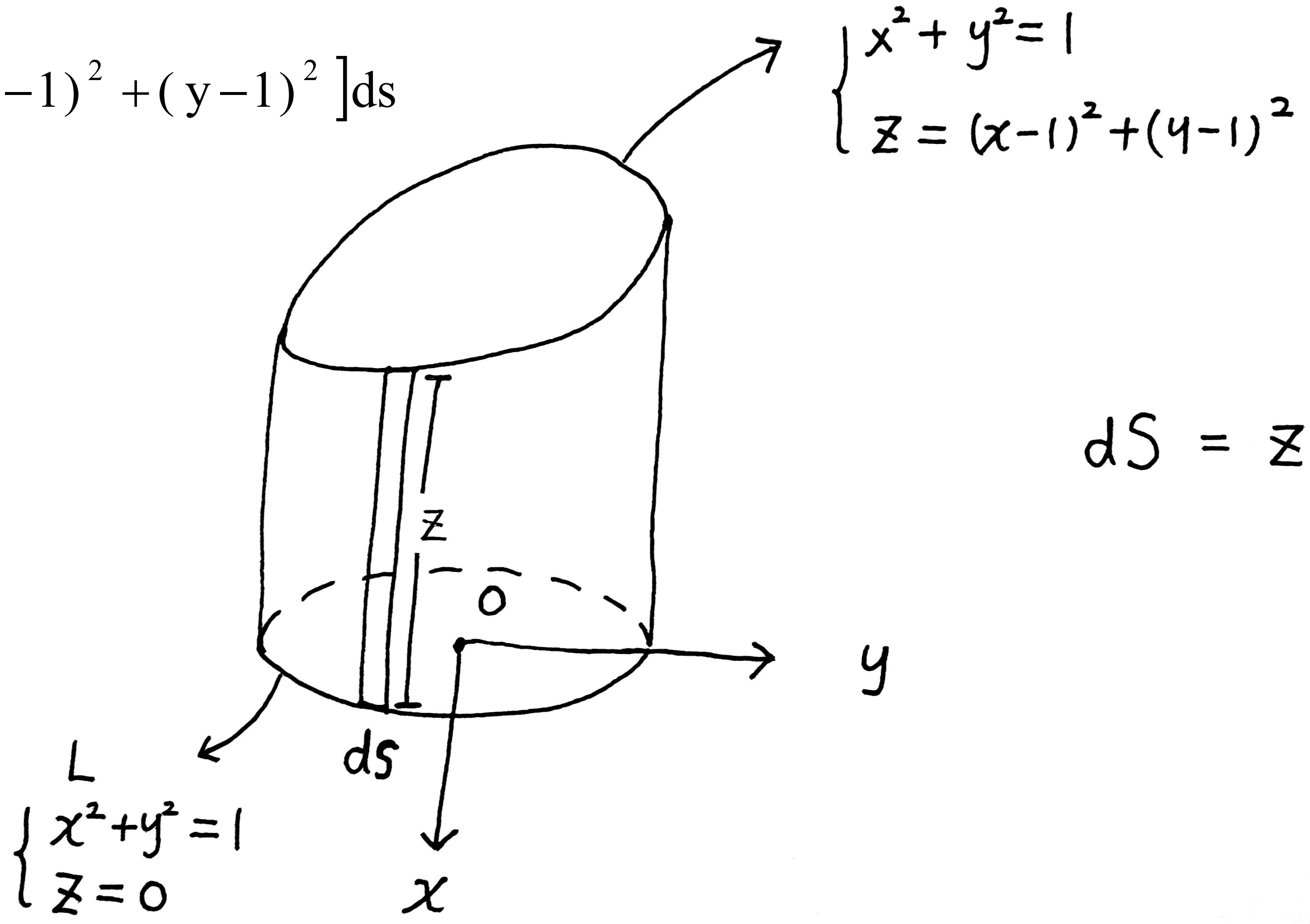
第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 柱面参数方程

Σ是柱面$x^2+y^2=1$被曲面$z=(x-1)^2+(y-1)^2$及平面$z=0$所截的部分，求Σ的面积

L是圆：$x^2+y^2=1$，$z=0$

$$\int_L z\,ds=\int_L[(x-1)^2+(y-1)^2]ds=\int_L[(x-1)^2+(y-1)^2]ds$$

$$=\int_0^{2\pi}[3-2(\cos\theta+\sin\theta)]d\theta=6\pi$$



$dS = z\,ds$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 其他参数方程

Σ是圆锥面$z=a\sqrt{x^2+y^2}$

Σ：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=ar$

$x_\theta=-r\sin\theta$，$y_\theta=r\cos\theta$，$y_\theta=0$，$x_r=\cos\theta$，$y_r=\sin\theta$，$z_r=a$

$E=r^2$，$F=0$，$G=a^2+1\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=r\sqrt{a^2+1}$

$dS=r\sqrt{a^2+1}d\theta dr$

Σ是抛物面$z=a\left(x^2+y^2\right)$

Σ：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=ar^2$

$x_\theta=-r\sin\theta$，$y_\theta=r\cos\theta$，$y_\theta=0$，$x_r=\cos\theta$，$y_r=\sin\theta$，$z_r=2ar$

$E=r^2$，$F=0$，$G=4a^2r^2+1\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=r\sqrt{4a^2r^2+1}$

$dS=r\sqrt{4a^2r^2+1}d\theta dr$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

设曲面Σ的方程为$F(x, y, z)=0$，变换$\begin{cases} x=x(u, v, w) \\ y=y(u, v, w) \\ z=z(u, v, w) \end{cases}$将$O-xyz$空间中的Σ一一对应的变为$O-uvw$空间中的Σ′

$F(x, y, z)$在Σ具有连续一阶偏导数，$x=x(u, v, w)$，$y=y(u, v, w)$，$z=z(u, v, w)$在Σ′上具有一阶连续偏导数

且$(F_x^2+F_y^2+F_z^2)|_{\Sigma}\neq 0$，$\left.\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|_{\Sigma'}\neq 0$，若$f(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS=\iint_{\Sigma} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\left\| J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}\right\|^{-1} dS_{uvw}，其中J=\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$$

$$dS=|J|\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\left\| J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}\right\|^{-1} dS_{uvw}$$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

作正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$，p是正交矩阵，则$dS = dS_{uvw}$

作平移变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，则$dS = dS_{uvw}$

$$dS = |J|\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\left\| J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \right\|^{-1} dS_{uvw}，\quad J = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$$

$$设P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow J = P^T \Rightarrow |J| = \left|P^T\right| = 1$$

$$\left\| J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \right\|^2 = \left(J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \right)^T \cdot J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = [F_x \quad F_y \quad F_z] J^T \cdot J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = [F_x \quad F_y \quad F_z]\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

$$\left\| J\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \right\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \Rightarrow dS = dS_{uvw}$$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

设函数$f(x)$连续，a，b，c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$ （第三届初赛）

$\exists$以$\begin{bmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{bmatrix}$为第一行的正交矩阵P

设$P=\begin{bmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$作正交变换$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Rightarrow ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}u$

$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS=\iint\limits_{\Sigma'} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)dS$ $\Sigma'=\{(u,v,w)|u^2+v^2+w^2=1\}$

$=\iint\limits_{D_{\theta u}} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)d\theta du$ Σ'：$u=u$，$v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta$，$w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta,-1\le u\le 1,0\le\theta<2\pi$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$ $D_{\theta u}=\{(\theta,u)|-1\le u\le 1,0\le\theta<2\pi\}$

$=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

设函数$f(x)$连续，a，b，c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$　(第三届初赛)

当$b^2+c^2\neq 0$，$P=\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{-\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{ac}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} \\ 0 & \dfrac{-c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{bmatrix}$

当$b^2+c^2=0$，$P=E$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

计算积分$I=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$ （第十一届初赛）

设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1\Rightarrow\Sigma$：$x=\cos\phi\sin\theta$，$y=\sin\phi\sin\theta$，$z=\cos\theta,0\le\theta\le\pi,0\le\phi<2\pi$

$$dS=\sin\theta d\theta d\phi\Rightarrow\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta=\iint_{\Sigma}e^{x-y}dS$$

作正交变换$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 其中$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$

$\iint_{\Sigma}e^{x-y}dS=\iint_{\Sigma'}e^{\sqrt{2}u}dS$ Σ′是球面$u^2+v^2+w^2=1$

$=\iint_{D_{u\varphi}}e^{\sqrt{2}u}dud\varphi$ Σ′：$u=u$，$v=\sqrt{1-u^2}\cos\varphi$，$w=\sqrt{1-u^2}\sin\varphi,-1\le u\le1,0\le\varphi<2\pi$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}u}du=2\pi\cdot\frac{e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi\left(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}\right)$$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 换元法

$\iint\limits_{\Sigma} e^{x-y}dS$

作正交变换 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 设 $P = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [1 \quad -1 \quad 0] \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad -1 \quad 0]$

$\Rightarrow [1 \quad 1 \quad 0] \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad -1 \quad 0]$

$\Rightarrow [0 \quad 0 \quad 1] \Rightarrow \gamma = [0 \quad 0 \quad 1]$

Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$，计算$\iint\limits_{\Sigma} e^{x+y+z}dS$

作正交变换 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 设 $P = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [1 \quad -1 \quad 0] \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad -1 \quad 0]$

$\Rightarrow [1 \quad 1 \quad 1] \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \quad 1 \quad 1]$

$\Rightarrow [a \quad b \quad c]\cdot[1 \quad -1 \quad 0] = 0$ 且 $[a \quad b \quad c]\cdot[1 \quad 1 \quad 1] = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \xrightarrow{令a=1} [a \quad b \quad c] = [1 \quad 1 \quad -2]$

$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}[1 \quad 1 \quad -2]$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 分面投影法

若曲面Σ由方程$z=z(x,y)$所表示，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数

被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$

当曲面Σ的法向量与z轴正向的夹角为锐角时，上式右端取“+”号

当曲面Σ的法向量与z轴正向的夹角为钝角时，上式右端取“−”号

曲面Σ由方程$x=x(y,z)$所表示

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$

曲面Σ由方程$y=y(z,x)$所表示

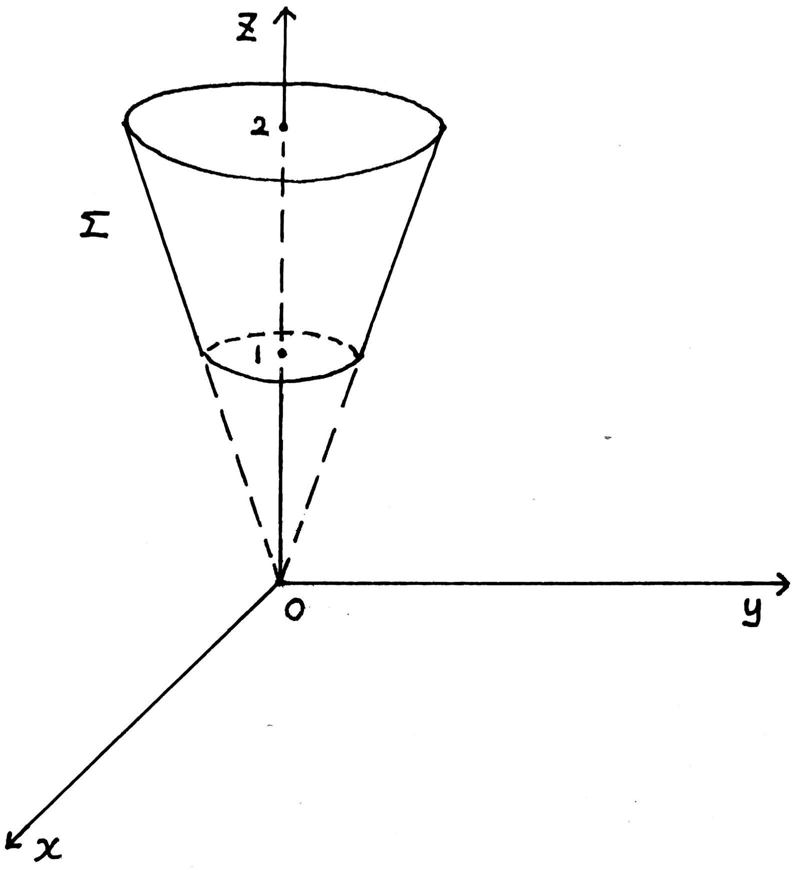
$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz=\pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(z,x),z)dzdx$$

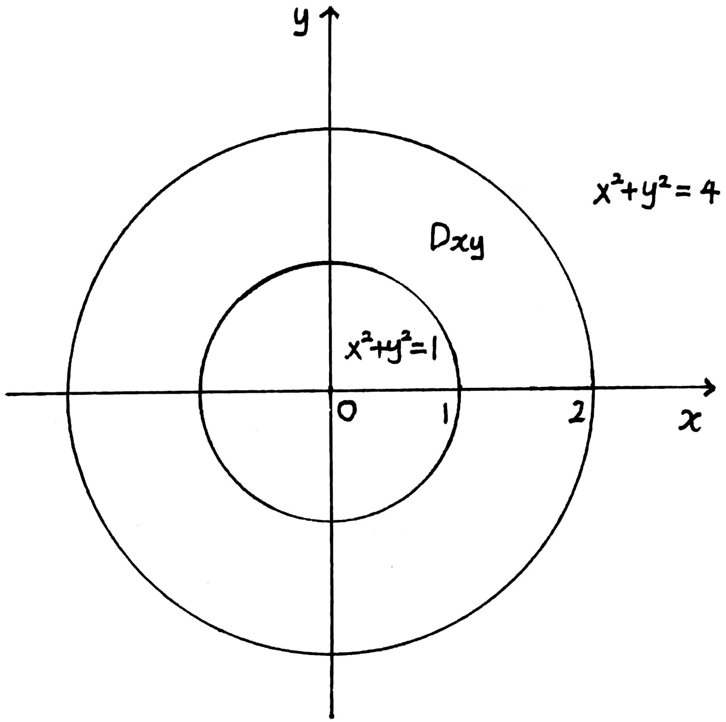
$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

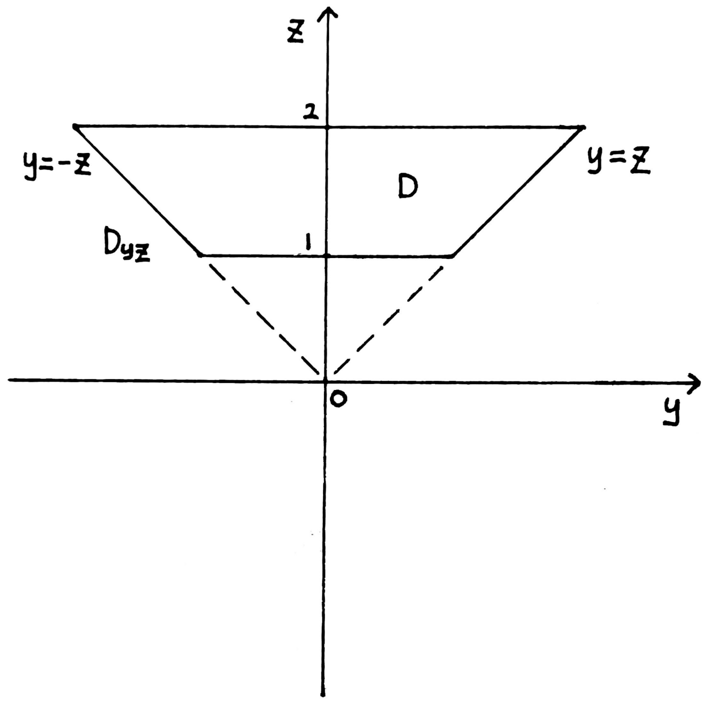
$$=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(z,x),z)dzdx\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 分面投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$、$z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$







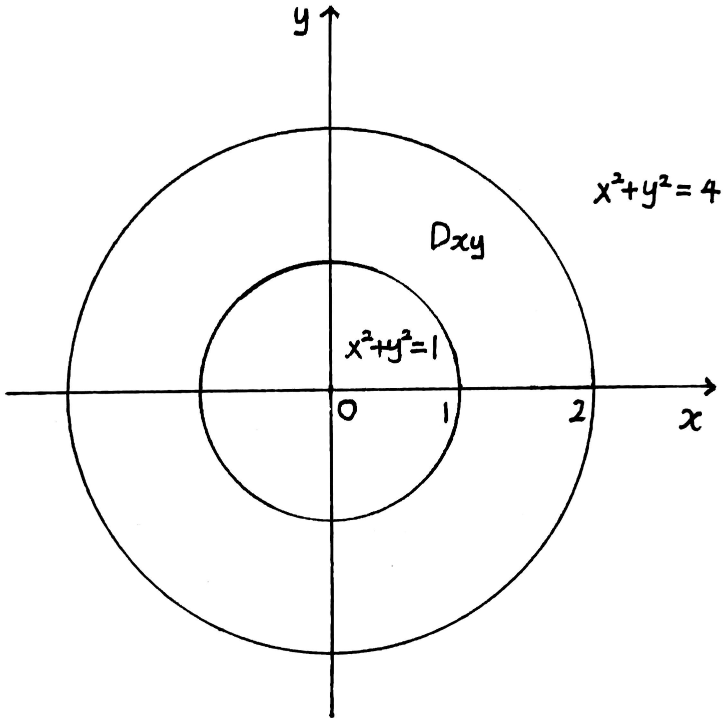
第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 分面投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$、$z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} z|xy|dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} z|xy|dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,|xy|dxdy \quad D_{xy}=\{(x,\ y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}} r|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|\cdot rdrd\theta=-\iint\limits_{D_{xy}} r^4|\cos\theta\sin\theta|drd\theta \quad D_{xy}=\{(r,\ \theta)|1\le r\le 2,0\le r<2\pi\}$$

$$=-\int_1^2 r^4dr\cdot\int_0^{2\pi}|\cos\theta\sin\theta|d\theta=-\frac{31}{5}\cdot 2=-\frac{62}{5}$$



曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$、$z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$

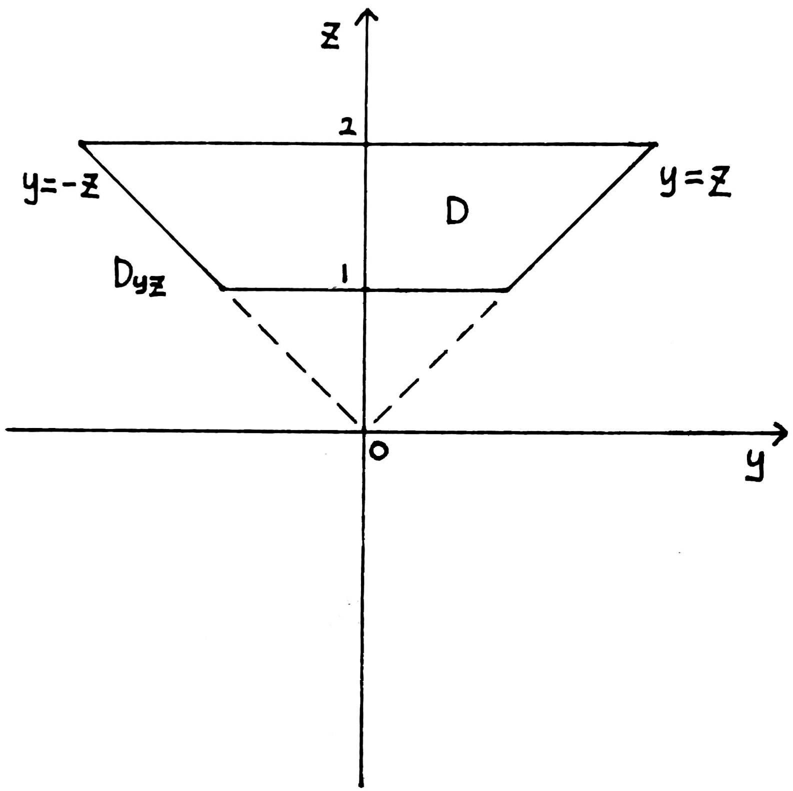
$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz=\iint\limits_{\Sigma_1} x|yz|dydz+\iint\limits_{\Sigma_2} x|yz|dydz$ 设yOz平面将Σ分成Σ_1、Σ_2，Σ_1满足$x\geq 0$，Σ_2满足$x\leq 0$

$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z^2-y^2}\,|yz|dydz-\iint\limits_{D_{yz}}-\sqrt{z^2-y^2}\,|yz|dydz$ $D_{yz}=\{(y,z)|-z\leq y\leq z, 1\leq z\leq 2\}$

$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z^2-y^2}\,|yz|dydz=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z^2-y^2}\,|y|zdydz$

$=4\iint\limits_{D}\sqrt{z^2-y^2}\,yzdydz$ $D=\{(y,z)|0\leq y\leq z, 1\leq z\leq 2\}$

$$=4\int_1^2 dz\int_0^z\sqrt{z^2-y^2}\,yzdy=4\int_1^2\left[\frac{z(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{-3}\right]_0^z dz=\frac{4}{3}\int_1^2 z^4dz=\frac{124}{15}$$



第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

设$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是曲面Σ所在侧的单位法向量，则

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

若曲面Σ由方程$z=z(x,y)$所表示，$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$

$dydz=\cos\alpha dS$，$dzdx=\cos\beta dS$，$dxdy=\cos\gamma dS$

$$dydz=\cos\alpha dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=-z_x dxdy$$

$$dzdx=\cos\beta dS=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma dS=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=-z_y dxdy$$

$$Pdydx+Qdzdx+Rdxdy=\left[P(-z_x)+Q(-z_y)+R\right]dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

若曲面Σ由方程$z=z(x,y)$所表示，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)(-z_x)+Q(x,y,z)(-z_y)+R(x,y,z)]dxdy$$

$$=\pm\iint_{D_{xy}}[P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)+R(x,y,z(x,y))]dxdy$$

当曲面Σ的法向量与z轴正向的夹角为锐角时，上式右端取“+”号

当曲面Σ的法向量与z轴正向的夹角为钝角时，上式右端取“−”号

$$Pdydx+Qdzdx+Rdxdy=[P(-z_x)+Q(-z_y)+R]dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

Σ：$F(x, y, z)=0$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}\left[P\cdot\frac{F_x}{F_z}+Q\cdot\frac{F_y}{F_z}+R\right]dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P\cdot\frac{F_x}{F_z}+Q\cdot\frac{F_y}{F_z}+R\right]dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}\left[P+Q\cdot\frac{F_y}{F_x}+R\cdot\frac{F_z}{F_x}\right]dydz=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P+Q\cdot\frac{F_y}{F_x}+R\cdot\frac{F_z}{F_x}\right]dydz$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}\left[P\cdot\frac{F_x}{F_y}+Q+R\cdot\frac{F_z}{F_y}\right]dzdx=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P\cdot\frac{F_x}{F_y}+Q+R\cdot\frac{F_z}{F_y}\right]dzdx$$

Σ：$z=z(x, y)$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}[P(-z_x)+Q(-z_y)+R]dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}[P(-z_x)+Q(-z_y)+R]dxdy$$

Σ：$x=x(y, z)$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}[P+Q(-x_y)+R(-x_z)]dydz=\pm\iint_{D_{yz}}[P+Q(-x_y)+R(-x_z)]dydz$$

Σ：$y=y(z, x)$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}[P(-y_x)+Q+R(-y_z)]dzdx=\pm\iint_{D_{zx}}[P(-y_x)+Q+R(-y_z)]dzdx$$

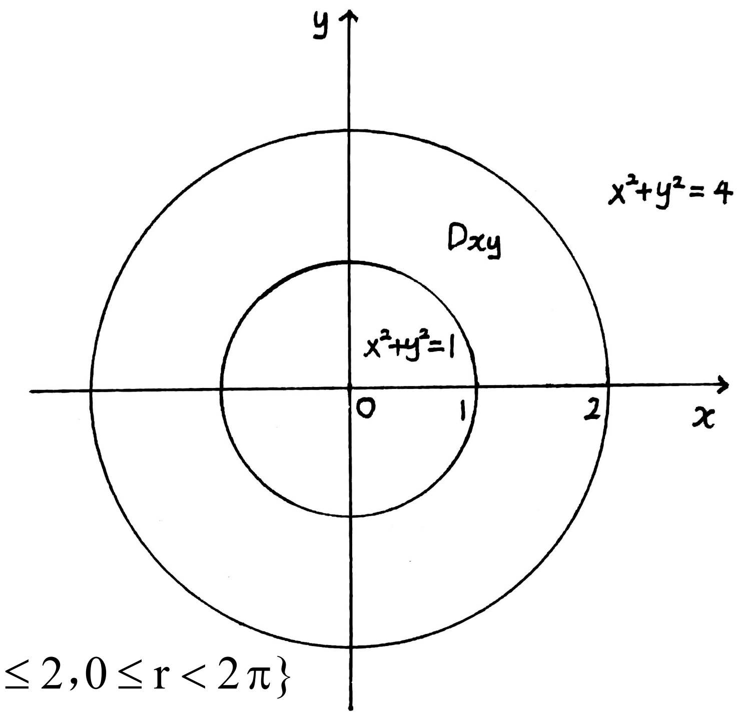
第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$、$z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$

$$x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy=[x|yz|(-z_x)+y|zx|(-z_y)+z|xy|]dxdy$$

$$=\left[x|yz|\left(-\frac{x}{z}\right)+y|zx|\left(-\frac{y}{z}\right)+z|xy|\right]dxdy=(-x^2|y|-y^2|x|+z|xy|)dxdy$$

$$=\left(-x^2|y|-y^2|x|+\sqrt{x^2+y^2}|xy|\right)dxdy$$



$$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy=\iint\limits_{\Sigma}\left(-x^2|y|-y^2|x|+\sqrt{x^2+y^2}|xy|\right)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(-x^2|y|-y^2|x|+\sqrt{x^2+y^2}|xy|\right)dxdy \quad D_{xy}=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left((r\cos\theta)^2|r\sin\theta|+(r\sin\theta)^2|r\cos\theta|-r|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|\right)rdrd\theta \quad D_{xy}=\{(r,\theta)|1\le r\le 2,0\le r<2\pi\}$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(\cos^2\theta|\sin\theta|+\sin^2\theta|\cos\theta|-|\cos\theta\sin\theta|)r^4drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta|\sin\theta|+\sin^2\theta|\cos\theta|-|\cos\theta\sin\theta|)d\theta\cdot\int_1^2 r^4dr=\frac{62}{15}$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$x+y+2z=1$、$x+y+2z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{z}dydz+\frac{y}{z}dzdx-dxdy$

$$\frac{x}{z}dydz+\frac{y}{z}dzdx-dxdy=\left[\frac{x}{z}(-z_x)+\frac{y}{z}(-z_y)-1\right]dxdy=\left[\frac{x}{z}\left(-\frac{x}{z}\right)+\frac{y}{z}\left(-\frac{y}{z}\right)-1\right]dxdy=-\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}+1\right)dxdy=-2dxdy$$

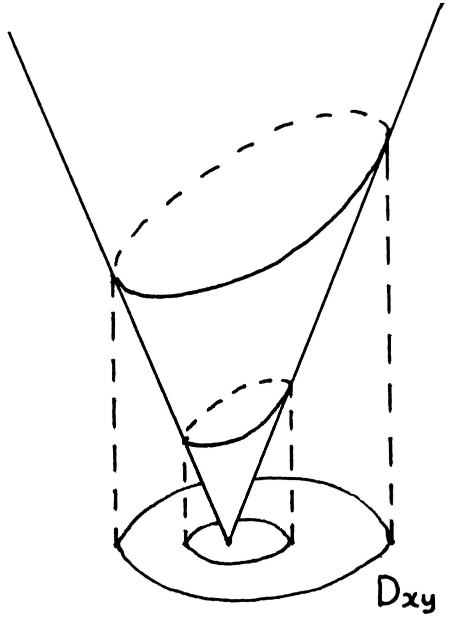
$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{z}dydz+\frac{y}{z}dzdx-dxdy=\iint\limits_{\Sigma}-2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}-2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy$$

设D_{xy}为Σ在xOy面上的投影区域，则D_{xy}是曲线$x+y+2\sqrt{x^2+y^2}=1$、$x+y+2\sqrt{x^2+y^2}=2$所围区域

$$\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}2rdrd\theta \quad D_{xy}=\{(r,\theta)|\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta+2}\le r\le\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta+2}\}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta+2}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta+2}}2rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{3}{(\cos\theta+\sin\theta+2)^2}d\theta$$



第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 合一投影法

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$x+y+2z=1$、$x+y+2z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{z}dydz+\frac{y}{z}dzdx-dxdy$

$$\int_0^{2\pi}\frac{3}{(\cos\theta+\sin\theta+2)^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{3}{(\cos\theta+\sin\theta+2)^2}d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{3}{(\cos\theta+\sin\theta+2)^2}d\theta \quad 记u=\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{6}{1+u^2}}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2\right)^2}du+\int_{-\infty}^{0}\frac{\frac{6}{1+u^2}}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+2\right)^2}du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{6\left(1+u^2\right)}{\left(u^2+2u+3\right)^2}du+\int_{-\infty}^{0}\frac{6\left(1+u^2\right)}{\left(u^2+2u+3\right)^2}du=3\sqrt{2}\pi$$

$$\int\frac{6\left(1+u^2\right)}{\left(u^2+2u+3\right)^2}du=\int 6\cdot\frac{1+u^2}{\left(u^2+2u+3\right)^2}du=\int 6\cdot\frac{u^2+2u+3-2(u+1)}{\left(u^2+2u+3\right)^2}du$$

$$=\int\left\{\frac{6}{u^2+2u+3}-\frac{12(u+1)}{\left(u^2+2u+3\right)^2}\right\}du=\int\left\{\frac{6}{u^2+2u+3}-\frac{12(u+1)}{\left[(u+1)^2+1\right]^2}\right\}du=3\sqrt{2}\arctan\frac{u+1}{\sqrt{2}}+\frac{6}{(u+1)^2+1}+C$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 利用两类积分的关系

设$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是曲面$\Sigma$所在侧的单位法向量，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

若曲面Σ由方程$F(x,y,z)=0$所表示，$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\right)$

若曲面Σ由方程$x=x(y,z)$所表示，$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}},\frac{-x_y}{\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}},\frac{-x_z}{\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}}\right)$

若曲面Σ由方程$y=y(z,x)$所表示，$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{-y_x}{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}},\frac{1}{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}},\frac{-x_z}{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}}\right)$

若曲面Σ由方程$z=z(x,y)$所表示，$e=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 利用两类积分的关系

曲面Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$

记$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

$$\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\right)=(x,y,z)$$

(x,y,z)是Σ所在侧的单位法向量

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(x\cdot x+y\cdot y+z\cdot z)dS=\iint\limits_{\Sigma}1dS=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 换元法

设Σ：$F(x,y,z)=0$为有向光滑曲面，变换$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w)\\z=z(u,v,w)\end{cases}$将$O-xyz$空间中的Σ一一对应的变为$O-uvw$空间中的$\Sigma'$

$x=x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$，$z=z(u,v,w)$在Σ'上具有一阶连续偏导数，且$\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Sigma'}\neq 0$,（即$J|_{\Sigma'}\neq 0$），如果

$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma'}\begin{vmatrix}P&Q&R\\x_v&y_v&z_v\\x_w&y_w&z_w\end{vmatrix}dvdw+\begin{vmatrix}x_u&y_u&z_u\\P&Q&R\\x_w&y_w&z_w\end{vmatrix}dwdu+\begin{vmatrix}x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\\P&Q&R\end{vmatrix}dudv$$

在上任取三点A，B，C，且Σ上有向回路$A\to B\to C\to A$的方向与Σ对应测的法向量成右手法则，在变换$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w)\\z=z(u,v,w)\end{cases}$

下，A，B，C分别变为A'，B'，C'，则Σ'上有向回路$A'\to B'\to C'\to A'$的方向与对应侧的法向量成右手法则，由此确定的对应侧

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 换元法

曲面Σ表示椭球面$x^2+y^2+z^2+yz+xz+xy=1$满足$x+y\geq 0$，$y+z\geq 0$，$x+z\geq 0$的一部分，方向取外侧

计算$\iint\limits_{\Sigma} dydz+dxdz+dxdy$

$$x^2+y^2+z^2+yz+xz+xy=1\Rightarrow (x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2=2$$

令$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} v+w-u \\ u+w-v \\ u+v-w \end{bmatrix}$

Σ'是球面$u^2+v^2+w^2=2$满足u，v，$w\geq 0$的一部分，方向取外侧

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}dvdw+\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}dwdu+\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}dudv$$

$$=\iint\limits_{\Sigma'} dvdw+dwdu+dudv$$

$$\iint\limits_{\Sigma'} dudv=\iint\limits_{D_{uv}} dudv=\frac{\pi}{2}\quad D_{uv}=\{(u,\ v)|u^2+v^2\leq 2\text{且}u,\ v\geq 0\}$$

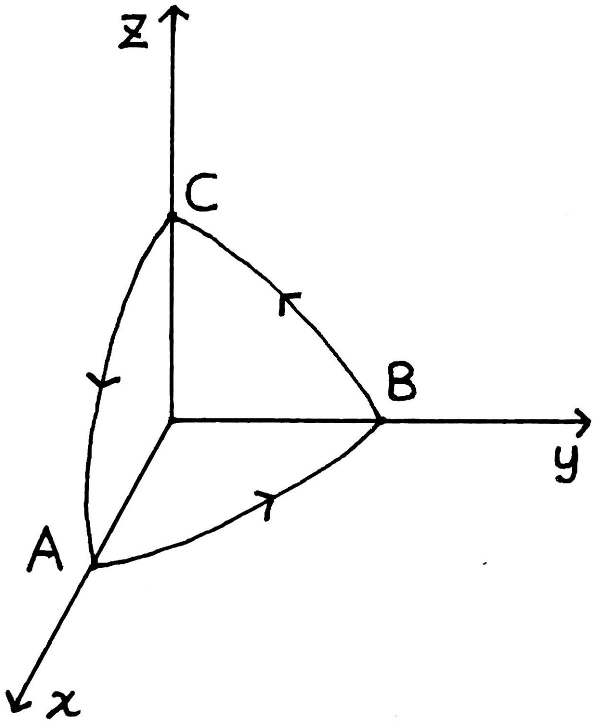
第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 换元法

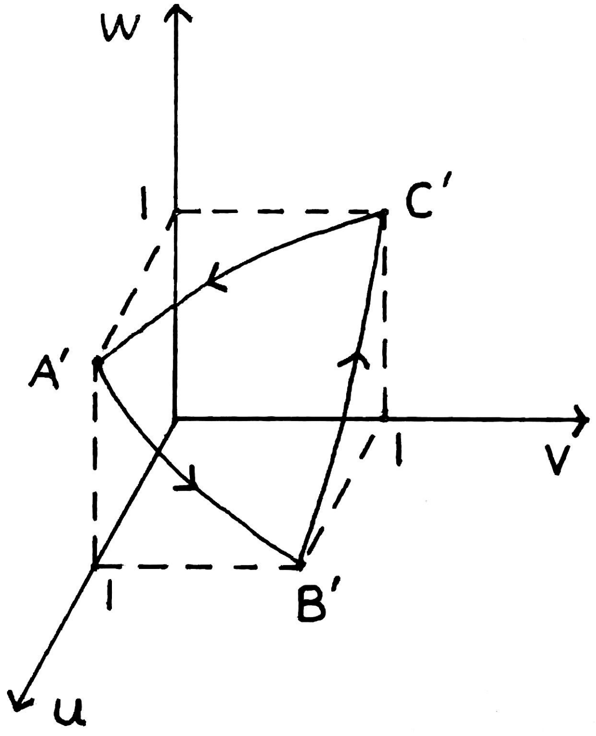
曲面Σ表示椭球面$x^2+y^2+z^2+yz+xz+xy=1$满足$x+y\ge 0$，$y+z\ge 0$，$x+z\ge 0$的一部分，方向取外侧

计算$\iint\limits_{\Sigma} dydz+dxdz+dxdy$

在曲面Σ上取三点$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$

$A(1,0,0)\Rightarrow A'(1,0,1)\quad B(0,1,0)\Rightarrow B'(1,1,0)\quad C(0,0,1)\Rightarrow C'(0,1,1)$





第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 高斯公式

当曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$不易直接求出，**可作**辅助曲面$\Sigma'$与$\Sigma$构成闭曲面，**从而可利用高斯公式**，进而避开对原曲面积分的直接计算

曲面Σ'与Σ构成闭曲面，Ω是曲面Σ'与Σ所围空间区域，曲面Σ'与Σ的方向是Ω的边界曲面的外侧，Ω内无奇点

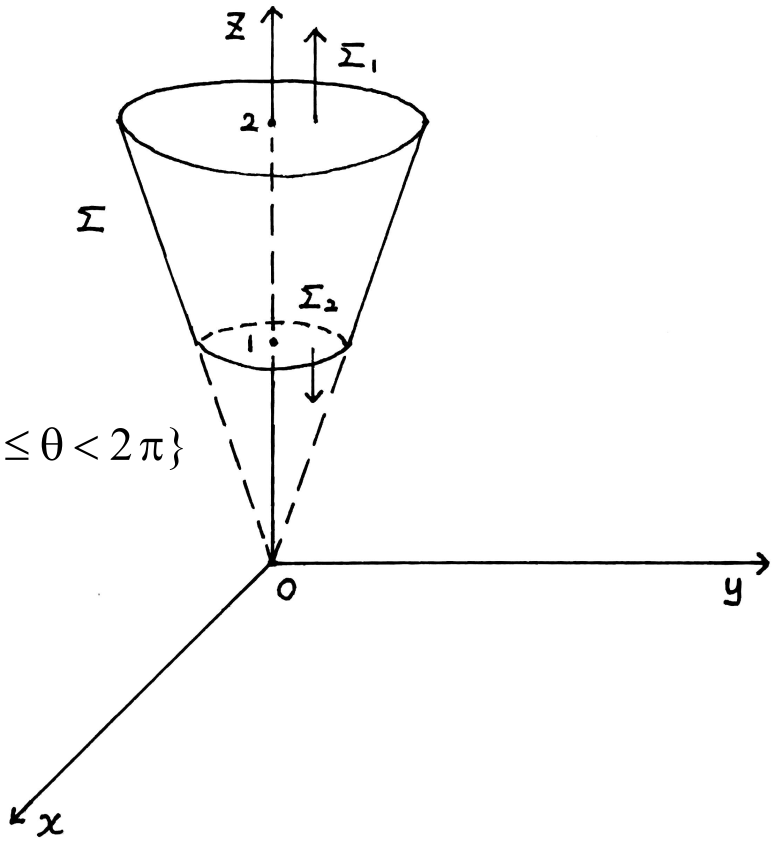
$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma'} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy+\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)dv$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 高斯公式

曲面Σ是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$、$z=2$所截的部分，方向取外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$

补充平面Σ_1：$z=2\ \ (x^2+y^2\le 4)$ 取上侧，Σ_2：$z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$ 取下侧



$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(|yz|+|zx|+|xy|)dxdydz \quad \Omega\text{是}\Sigma、\Sigma_1、\Sigma_2\text{所围区域}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(|r\sin\theta\cdot z|+|r\cos\theta\cdot z|+|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|)\cdot rdrd\theta dz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(r^2|\sin\theta|z+r^2|\cos\theta|z+r^3|\cos\theta\sin\theta|\right)drd\theta dz \quad \Omega=\{(r,\ \theta,\ z)|r\le z,1\le z\le 2,0\le\theta<2\pi\}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 dz\int_0^z\left(r^2|\sin\theta|z+r^2|\cos\theta|z+r^3|\cos\theta\sin\theta|\right)dr=\frac{589}{30}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1} z|xy|dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} 2|xy|dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} 2|r\cos\theta\cdot r\sin\theta|rdrd\theta=\iint\limits_{D_{xy}} 2r^3|\cos\theta\sin\theta|drd\theta=\int_0^{2\pi}|\cos\theta\sin\theta|d\theta\cdot\int_0^2 2r^3dr=16$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} x|yz|dydz+y|zx|dzdx+z|xy|dxdy=-\frac{1}{2}$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 高斯公式

a，b，$c>0$，Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2ax}{(ax^2+by^2+cz^2)^3}=\frac{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{2}}(ax^2+by^2+cz^2-3ax^2)}{(ax^2+by^2+cz^2)^3}$$

$$=\frac{ax^2+by^2+cz^2-3ax^2}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{ax^2+by^2+cz^2-3by^2}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{5}{2}}}\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{ax^2+by^2+cz^2-3cz^2}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 高斯公式

a，b，c > 0，Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

补充曲面Σ_1：$ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon$，取内侧 （这里的$\varepsilon>0$足够的小使得$\Sigma_1$在Σ的内部）

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}0\,dv=0\quad \Omega为\Sigma、\Sigma_1所围区域$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=-\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iiint\limits_{\Omega_1}3\,dv\quad \Omega为\Sigma_1所围区域$$

$$=-3\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iiint\limits_{\Omega_1}dv=-3\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{abc}}\frac{4\pi}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}=-\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(ax^2+by^2+cz^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 高斯公式

a，b，c > 0，Σ是半球面$x^2+y^2+z^2=1$，$z\ge 0$，取上侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

补充曲面Σ_1：$ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon\ (z\ge 0)$，取内侧 （这里的$\varepsilon>0$足够的小使得$\Sigma_1$在Σ的内部）

平面Σ_2：$z=0\ (\varepsilon\le ax^2+by^2$且$x^2+y^2\le 1)$，取下侧

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}0\,dv=0\quad \Omega\text{为}\Sigma、\Sigma_1、\Sigma_2\text{所围区域}$$

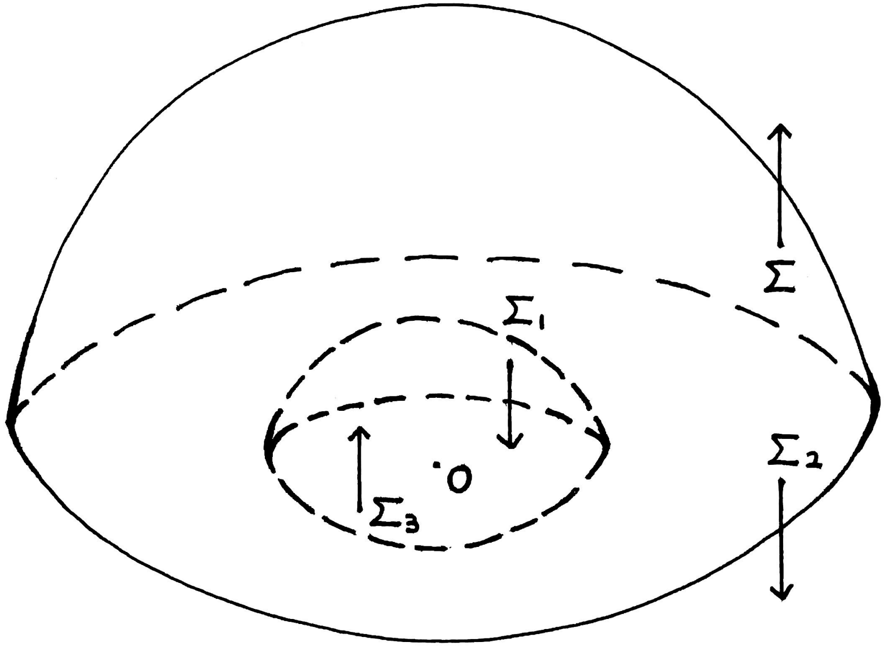
$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$ 补充平面Σ_3：$z=0\ (ax^2+by^2\le\varepsilon)$，取上侧

$$=\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_3}xdydz+ydzdx+zdxdy-\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iint\limits_{\Sigma_3}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=-\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iiint\limits_{\Omega_1}3\,dv-0\quad \Omega_1\text{为}\Sigma_1、\Sigma_3\text{所围区域}$$

$$=-3\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\iiint\limits_{\Omega_1}dv=-3\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{abc}}\frac{4\pi}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{2\pi}{\sqrt{abc}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=0\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{abc}}$$



对面积的曲面积分的概念

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)dS$ 其中Σ是曲面$F(x,\ y,\ z)=0$

把$f(x,\ y,\ z)$看作$O-xyz$空间上点$(x,\ y,\ z)$的密度，dS是面积元素

把$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz$看作$O-xyz$空间上一个空间曲面的质量

判断积分曲面对称性的依据：

曲面的对称

$F(x,y,z)=0$表示一个曲面

若$F(x,y,z)=F(-x,-y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,-y,-z)$
则曲面关于原点对称

若$F(x,y,z)=F(x,-y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(x,-y,-z)$
则曲面关于x轴对称

若$F(x,y,z)=F(-x,y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,y,-z)$
则曲面关于y轴对称

若$F(x,y,z)=F(-x,-y,z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,-y,z)$
则曲面关于z轴对称

若$F(x,y,z)=F(x,y,-z)$或$F(x,y,z)=-F(x,y,-z)$
则曲面关于xOy平面对称

若$F(x,y,z)=F(x,-y,z)$或$F(x,y,z)=-F(x,-y,z)$
则曲面关于xOz平面对称

若$F(x,y,z)=F(-x,y,z)$或$F(x,y,z)=-F(-x,y,z)$
则曲面关于yOz平面对称

若$F(x,y,z)=F(x,z,y)$或$F(x,y,z)=-F(x,z,y)$
则曲面关于y=z平面对称

若$F(x,y,z)=F(z,y,x)$或$F(x,y,z)=-F(z,y,x)$
则曲面关于z=x平面对称

若$F(x,y,z)=F(y,x,z)$或$F(x,y,z)=-F(y,x,z)$
则曲面关于x=y平面对称

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

判断被积函数对称性依据：

函数的对称

把$f(x,y,z)$视为三维空间上的点密度

若$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$
则密度函数关于原点对称
若$f(x,y,z)=f(x,-y,-z)$
则密度函数关于x轴对称
若$f(x,y,z)=f(-x,y,-z)$
则密度函数关于y轴对称
若$f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$
则密度函数关于z轴对称
若$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$或者说$f(x,y,z)$是关于z的偶函数
则密度函数关于xOy平面对称
若$f(x,y,z)=f(x,-y,z)$或者说$f(x,y,z)$是关于y的偶函数
则密度函数关于xOz平面对称
若$f(x,y,z)=f(-x,y,z)$或者说$f(x,y,z)$是关于x的偶函数
则密度函数关于yOz平面对称
若$f(x,y,z)=f(x,z,y)$
则密度函数关于y=z平面对称
若$f(x,y,z)=f(z,y,x)$
则密度函数关于z=x平面对称
若$f(x,y,z)=f(y,x,z)$
则密度函数关于x=y平面对称

若$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$
则密度函数关于原点互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(x,-y,-z)$
则密度函数关于x轴互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(-x,y,-z)$
则密度函数关于y轴互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(-x,-y,z)$
则密度函数关于z轴互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$或者说$f(x,y,z)$是关于z的奇函数
则密度函数关于xOy平面互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(x,-y,z)$或者说$f(x,y,z)$是关于y的奇函数
则密度函数关于xOz平面互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$或者说$f(x,y,z)$是关于x的奇函数
则密度函数关于yOz平面互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(x,z,y)$
则密度函数关于y=z平面互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(z,y,x)$
则密度函数关于z=x平面互为相反数
若$f(x,y,z)=-f(y,x,z)$
则密度函数关于x=y平面互为相反数

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

若积分曲面Σ关于原点对称，设Σ被分成关于原点对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

若积分曲面Σ关于z轴对称，设Σ被分成关于z轴对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

若积分曲面Σ关于y轴对称，设Σ被分成关于y轴对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

若积分曲面Σ关于x轴对称，设Σ被分成关于x轴对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

若积分曲面Σ关于xOy平面对称，设Σ被xOy平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

若积分曲面Σ关于zOx平面对称，设Σ被zOx平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,-y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,-y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

若积分曲面Σ关于yOz平面对称，设Σ被yOz平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

若积分曲面Σ关于$x=y$平面对称，设Σ被$x=y$平面平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(y, x, z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS$

（2）当$f(x, y, z)=-f(y, x, z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=0$

若积分曲面Σ关于$z=x$平面对称，设Σ被$z=x$平面平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(z, y, x)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS$

（2）当$f(x, y, z)=-f(z, y, x)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=0$

若积分曲面Σ关于$y=z$平面对称，设Σ被$y=z$平面平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(x, z, y)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS$

（2）当$f(x, y, z)=-f(x, z, y)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS=0$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

若积分曲面Σ关于原点对称，设Σ被分成关于原点对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=2\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

（2）当$f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=0$

将Σ关于原点对称地分成2n个闭区域ΔS_i、$\Delta S_i'$，ΔS_i与$\Delta S_i'$关于原点对称且$\Delta S_i\in\Sigma_1$，$\Delta S_i'\in\Sigma_2$ $(i=1,2,\cdots,n)$

取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$ 设点$(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')$是点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$关于原点的对称点，则点$(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')\in\Delta S_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

λ，λ'分别是Σ_1，Σ_2的各个小闭区域的直径的最大值

$$=\lim_{\lambda'\to0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')\Delta S_i'$$

$\lambda=\lambda'$ $(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')=(-\xi_i,-\eta_i,-\zeta_i)$ $\Delta S_i=\Delta S_i'$

$$=\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

Σ是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$

作平移变换$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma'=u^2+v^2+w^2=1$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma'}[(u+a)^2+(v+b)^2+(w+c)^2]dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma'}(u^2+v^2+w^2+2au+2bv+2cw+a^2+b^2+c^2)dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma'}(1+a^2+b^2+c^2)dS+\iint\limits_{\Sigma'}2audS+\iint\limits_{\Sigma'}2bvdS+\iint\limits_{\Sigma'}2cwdS$$

$$=4\pi(1+a^2+b^2+c^2)$$

第十一讲：曲面积分 > 对面积的曲面积分 > 对称性

积分曲面Σ关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称

则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,z,x)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(z,y,x)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(z,x,y)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(x,z,y)dS$

记$G(x,y,z)=f(x,y,z)-f(y,x,z)\Rightarrow G(x,y,z)=-G(y,x,z)$

又Σ关于平面$y=x$对称$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} G(x,y,z)dS=0\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS$

Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$，计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^4+2x^2y^2)dS$

Σ关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma}f(x, y, z)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(y, z, x)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(z, x, y)dS$

取$f(x, y, z)=x^4+2x^2y^2 \Rightarrow \iint\limits_{\Sigma}(x^4+2x^2y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}(y^4+2y^2z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}(z^4+2y^2z^2)dS$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma}(x^4+2x^2y^2)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^4+2x^2y^2+y^4+2y^2z^2+z^4+2y^2z^2)dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)^2\,dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{4\pi}{3}$$

设$g(t)$在$[a, b]$上连续，且$g(t)>0$，Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$，证明：$\iint\limits_{\Sigma}\frac{g(x)}{g(y)}dS\geq\frac{4\pi}{3}$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

若有向积分曲面Σ关于原点对称，设Σ被分成关于原点对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(-x,-y,-z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dzdx=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy=0$$

（2）当$f(x, y, z)=-f(-x,-y,-z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dydz=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dydz$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dzdx=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dzdx=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dzdx$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dxdy=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

若有向积分曲面Σ关于原点对称，设Σ被分成关于原点对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

当$f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=0$

将Σ关于原点对称地分成2n个闭区域ΔS_i、$\Delta S_i'$，ΔS_i与$\Delta S_i'$关于原点对称且$\Delta S_i\in\Sigma_1$，$\Delta S_i'\in\Sigma_2$ $(i=1,2,\cdots,n)$

取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$ 设点$(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')$是点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$关于原点的对称点，则点$(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')\in\Delta S_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$ λ，λ′分别是Σ_1，Σ_2的各个小闭区域的直径的最大值

$$=\lim_{\lambda'\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')(\Delta S_i)_{xy} \qquad \lambda=\lambda' \quad (\xi_i',\eta_i',\zeta_i')=(-\xi_i,-\eta_i,-\zeta_i)$$

$$=-\lim_{\lambda'\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i',\eta_i',\zeta_i')(\Delta S_i')_{xy} \qquad (\Delta S_i)_{xy}=-(\Delta S_i')_{xy}$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

若有向积分曲面Σ关于z轴对称，设Σ被分成关于z轴对称的Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x, y, z)=f(-x,-y, z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dxdy=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dzdx=0$$

（2）当$f(x, y, z)=-f(-x,-y, z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dydz=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dydz$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dzdx=2\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dzdx=2\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dzdx$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

若有向积分曲面Σ关于xOy平面对称，设Σ被xOy平面分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,y,-z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dydz=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dydz$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dzdx=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dzdx=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dzdx$$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dxdy=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=0$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dzdx=0$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

若有向积分曲面Σ关于平面$x=y$对称，设Σ被平面$x=y$分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(y,x,z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dxdy=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dxdy$$

（2）当$f(x,y,z)=-f(y,x,z)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy=0$$

若有向积分曲面Σ关于平面$z=x$对称，设Σ被平面$z=x$分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(z,y,x)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dzdx=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dzdx=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dzdx$$

（2）当$f(x,y,z)=-f(z,y,x)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dzdx=0$$

若有向积分曲面Σ关于平面$y=z$对称，设Σ被平面$y=z$分成Σ_1、Σ_2两部分，则

（1）当$f(x,y,z)=f(x,z,y)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dydz=2\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)dydz$$

（2）当$f(x,y,z)=-f(x,z,y)$时，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=0$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

a，b，c > 0，Σ是半球面$x^2+y^2+z^2=1$，$z\ge 0$，取上侧，计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

设Σ'：$x^2+y^2+z^2=1$，$z\le 0$，取下侧

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{abc}}$$

记$f_1(x,y,z)=\dfrac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dydz=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dydz\Leftarrow f_1(x,y,z)=f_1(x,y,-z)$$

记$f_2(x,y,z)=\dfrac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dzdx\Leftarrow f_2(x,y,z)=f_2(x,y,-z)$$

记$f_3(x,y,z)=\dfrac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\Leftarrow f_3(x,y,z)=-f_3(x,y,-z)$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

有向积分曲面Σ关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dydz=\iint_\Sigma f(y,x,z)dzdx=\iint_\Sigma f(z,x,y)dxdy=\iint_\Sigma f(x,z,y)dydz=\iint_\Sigma f(y,z,x)dzdx=\iint_\Sigma f(z,y,x)dxdy$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dzdx=\iint_\Sigma f(x,z,y)dxdy=\iint_\Sigma f(z,x,y)dydz=\iint_\Sigma f(z,y,x)dzdx=\iint_\Sigma f(y,z,x)dxdy=\iint_\Sigma f(y,x,z)dydz$$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dxdy=\iint_\Sigma f(z,y,x)dydz=\iint_\Sigma f(z,x,y)dzdx=\iint_\Sigma f(y,x,z)dxdy=\iint_\Sigma f(y,z,x)dydz=\iint_\Sigma f(x,z,y)dzdx$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

有向积分曲面Σ关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dydz=\iint_{\Sigma} f(y, x, z)dzdx$$

将Σ关于平面$y=x$对称地分成$2n$个闭区域ΔS_i、$\Delta S_i'$，ΔS_i与$\Delta S_i'$关于平面$y=x$对称且$\Delta S_i\in\Sigma_1$，$\Delta S_i'\in\Sigma_2$ $(i=1,2,\cdots, n)$

取点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in\Delta S_i$ 设点$(\xi_i', \eta_i', \zeta_i')$是点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$关于平面$y=x$的对称点，则点$(\xi_i', \eta_i', \zeta_i')\in\Delta S_i'$ $(i=1,2,\cdots, n)$

$$\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

λ，λ'分别是Σ_1，Σ_2的各个小闭区域的直径的最大值

$$=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x, y, z)\big|_{(x, y, z)=(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)}(\Delta S_i)_{xy} \qquad \lambda=\lambda'$$

$$=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(y, x, z)\big|_{(x, y, z)=(\eta_i, \xi_i, \zeta_i)}(\Delta S_i)_{xy}$$

$$=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(y, x, z)\big|_{(x, y, z)=(\xi_i', \eta_i', \zeta_i')}(\Delta S_i)_{xy} \qquad (\xi_i', \eta_i', \zeta_i')=(\eta_i, \xi_i, \zeta_i)$$

$$=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(y, x, z)\big|_{(x, y, z)=(\xi_i', \eta_i', \zeta_i')}(\Delta S_i')_{xy} \qquad (\Delta S_i')_{xy}=(\Delta S_i)_{xy}$$

$$=\iint_{\Sigma_2} f(y, x, z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dxdy=\iint_{\Sigma_2} f(y, x, z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dxdy=\iint_{\Sigma_1} f(y, x, z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dxdy=\iint_{\Sigma} f(y, x, z)dxdy$$

第十一讲：曲面积分 > 对坐标的曲面积分 > 对称性

Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，$h(x,y,z)=\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)+g(x)+g(y)+g(z)+f(x)+f(y)+f(z)$，计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}dydz+\frac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}dzdx+\frac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}dxdy$$

记$F(x,y,z)=\dfrac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}$

$$\iint_{\Sigma}F(x,y,z)dydz=\iint_{\Sigma}F(z,x,y)dxdy\Rightarrow\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}dzdx=\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(z)+g(x)+f(y)}{h(z,x,y)}dzdx=\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(z)+g(x)+f(y)}{h(x,y,z)}dzdx$$

$$\iint_{\Sigma}F(x,y,z)dydz=\iint_{\Sigma}F(y,z,x)dxdy\Rightarrow\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(x)+g(y)+f(z)}{h(x,y,z)}dzdx=\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(y)+g(z)+f(x)}{h(y,z,x)}dzdx=\iint_{\Sigma}\frac{\varphi(y)+g(z)+f(x)}{h(x,y,z)}dzdx$$

$$\text{原积分}=\iint_{\Sigma}dxdy=\iint_{\Sigma_1}dxdy+\iint_{\Sigma_2}dxdy=0\quad(\Sigma_1:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge0,\ \text{上侧}\quad \Sigma_2:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\le0,\ \text{下侧})$$

Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)}{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}dydz+\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)}{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}dzdx+\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)}{\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)}dxdy$$