积分第一中值定理

若$f(x)$在$[a，b]$上连续，$g(x)$在$[a，b]$上可积且$g(x)$在$[a，b]$上不变号，则存在$\xi\in[a，b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

作用：将$f(x)$从被积函数中分离出来

$$f(B)=f(A)+\int_A^B f'(x)dx \qquad f(B)-f(A)=\int_A^B f'(x)dx$$

1.产生出了积分符号　　2.产生出了$f'(x)$，与$f'(x)$产生了联系

第八讲：积分与不等式 > 积分中值定理 > 积分第一中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上具有连续的导数，证明：$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b |f'(x)|dx \ge \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$

由积分中值定理$\exists \xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

设$|f(c)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，$c\in[a,b]$

$|f(\xi)|+\int_a^b |f'(x)|dx \ge |f(c)| \quad \Leftrightarrow \int_a^b |f'(x)|dx \ge |f(c)|-|f(\xi)| \qquad f(B)-f(A)=\int_A^B f'(x)dx$

$$|f(c)|-|f(\xi)| \le |f(c)-f(\xi)| = \left|\int_\xi^c f'(x)dx\right| = \left|\int_m^M f'(x)dx\right| \le \int_m^M |f'(x)|dx \le \int_a^b |f'(x)|dx$$

其中$M=\max\{\xi,c\}$，$m=\min\{\xi,c\}$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明: $\int_0^1 |f(x)|dx \le \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|dx, \left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\}$

i.若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒 ≥ 0 或恒 $\le 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx = \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$

ii.若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有零点，设 $f(c)=0$，$c\in[0,1]$

$$|f(x)| = \left|f(c)+\int_c^x f'(x)dx\right| = \left|\int_m^M f'(x)dx\right| \le \int_m^M |f'(x)|dx \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

其中 $M=\max\{x，c\}$，$m=\min\{x，c\}$

$$\int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(x)|dx\right)dx = \int_0^1 |f'(x)|dx$$

$$f(B)=f(A)+\int_A^B f'(x)dx$$

第八讲：积分与不等式 > 积分中值定理 > 积分第一中值定理

设 $f(x)\in C[a,b]$，且单调递增，证明：$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

$g(x)$在$[a,b]$上不变号

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \geq 0$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx = f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = -f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{8} \qquad a\leq \xi_1 \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx = f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{8} \qquad \frac{a+b}{2}\leq \xi_2 \leq b$$

$$\xi_2 \geq \xi_1 \Rightarrow f(\xi_2)\geq f(\xi_1)$$

第八讲：积分与不等式 > 积分中值定理 > 积分第一中值定理

设 $f(x)\in C[a, b]$，且单调递增，证明：$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

$$\Leftrightarrow \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f(a+b-x)\right]dx \ge 0$$

令 $x=a+b-t$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)f(a+b-t)dt=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(a+b-x)dx$$

$$f(x)-f(a+b-x)\le 0 \Leftarrow x\le a+b-x$$

积分第二中值定理

1.若$g(x)$、$f(x)$在$[a，b]$上可积，且$f(x)$在$[a，b]$上单调，则存在$\xi\in[a，b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi}g(x)dx+f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$$

2.若$g(x)$、$f(x)$在$[a，b]$上可积，$f(x)$在$[a，b]$上单调递减且非负，则存在$\xi\in[a，b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^{\xi}g(x)dx$$

3.若$g(x)$、$f(x)$在$[a，b]$上可积，$f(x)$在$[a，b]$上单调递增且非负，则存在$\xi\in[a，b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$$

第八讲：积分与不等式 > 积分中值定理 > 积分第二中值定理

$0<a<b$，证明：$\left|\int_a^b \sin\left(nt-\frac{1}{t}\right)dt\right|<\frac{2}{n}$

设$y=nt-\frac{1}{t}$　设$t=g(y)$是其反函数　记$y_b=nb-\frac{1}{b}$，$y_a=na-\frac{1}{a}$

$$\int_a^b \sin\left(nt-\frac{1}{t}\right)dt=\int_{y_a}^{y_b}\sin y g'(y)dy=g'(y)|_{y=y_b}\int_{\xi}^{y_b}\sin ydy$$

$$\left|\int_a^b \sin\left(nt-\frac{1}{t}\right)dt\right|=\left|g'(y)|_{y=y_b}\int_{\xi}^{y_b}\sin ydy\right|=g'(y)|_{y=y_b}\cdot\left|\int_{\xi}^{y_b}\sin ydy\right|$$

$$0<g'(y)|_{y=y_b}<\frac{1}{n}$$

$$\left|\int_{\xi}^{y_b}\sin ydy\right|=|\cos\xi-\cos y_b|\le|\cos\xi|+|\cos y_b|\le 2$$

$$g'(y)=\frac{dt}{dy}=\left(\frac{dy}{dt}\right)^{-1}=\left(n+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}$$

$$g''(y)=\frac{d\frac{dt}{dy}}{dy}=\frac{d\frac{dt}{dy}}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=\frac{d\left(n+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}}{dt}\cdot\left(n+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}=\frac{2}{t^3}\left(n+\frac{1}{t^2}\right)^{-2}\cdot\left(n+\frac{1}{t^2}\right)^{-1}$$

设$x>0$，$c>0$，证明：$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2dt\right|\le\frac{1}{x}$

令$t^2=y\Rightarrow t=\sqrt{y}$

$$\int_x^{x+c}\sin t^2dt=\int_{x^2}^{(x+c)^2}\sin y\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2\sqrt{y}}\bigg|_{y=x^2}\int_{x^2}^{\xi}\sin ydy=\frac{1}{2x}\int_{x^2}^{\xi}\sin ydy\qquad x^2\le\xi\le(x+c)^2$$

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2dt\right|=\frac{1}{2x}\left|\int_{x^2}^{\xi}\sin ydy\right|=\frac{1}{2x}\left|\cos x^2-\cos\xi\right|\le\frac{1}{2x}\left(\left|\cos x^2\right|+\left|\cos\xi\right|\right)\le\frac{1}{x}$$

第八讲：积分与不等式 > 积分中值定理 > 积分第二中值定理

设$f(x)$在$[0,2\pi]$上具有一阶连续导数，且$f'(x)\geq 0$

求证：对任意的自然数n，有$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right|\leq \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\int_0^{2\pi}[f(x)-f(0)]\sin nxdx+\int_0^{2\pi} f(0)\sin nxdx$$

$$\int_0^{2\pi} f(0)\sin nxdx=f(0)\int_0^{2\pi}\sin nxdx=f(0)\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxd=\int_0^{2\pi}[f(x)-f(0)]\sin nxdx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=[f(x)-f(0)]\big|_{x=2\pi}\cdot\int_\xi^{2\pi}\sin nxdx=[f(2\pi)-f(0)]\cdot\int_\xi^{2\pi}\sin nxdx \qquad 0\leq\xi\leq 2\pi$$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx\right|=[f(2\pi)-f(0)]\cdot\left|\int_\xi^{2\pi}\sin nxdx\right|$$

$$\left|\int_\xi^{2\pi}\sin nxdx\right|=\left|\frac{\cos\xi n-\cos 2\pi n}{n}\right|\leq\frac{|\cos\xi n|+|\cos 2\pi n|}{n}\leq\frac{2}{n}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用分部积分法

设$f(x)$在$[0,2\pi]$上具有一阶连续导数，且$f'(x)\geq 0$

求证：对任意的自然数n，有$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right|\leq \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(x) d\cos nx=-\frac{1}{n}\left[f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot f'(x)dx\right]$$

$$=-\frac{1}{n}\left[f(2\pi)-f(0)-\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot f'(x)dx\right]$$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right|=\frac{1}{n}\left|f(2\pi)-f(0)-\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot f'(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\left|f(2\pi)-f(0)\right|+\frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot f'(x)dx\right|\leq\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left|\cos nx\cdot f'(x)\right|dx$$

$$\leq\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)dx=\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

第八讲：积分与不等式 > 利用分部积分法

设 $x>0$，$c>0$，证明：$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2dt\right|\le\frac{1}{x}$

令 $t^2=y\Rightarrow t=y^{\frac{1}{2}}$

$$\int_x^{x+c}\sin t^2dt=\int_{x^2}^{(x+c)^2}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\sin ydy=-\int_{x^2}^{(x+c)^2}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}d\cos y=-\left[\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos y\Big|_{x^2}^{(x+c)^2}-\int_{x^2}^{(x+c)^2}-\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}\cos ydy\right]$$

$$=\frac{\cos x^2}{2x}-\frac{\cos(x+c)^2}{2(x+c)}-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2}y^{-\frac{3}{2}}\cos ydy$$

$$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2dt\right|\le\left|\frac{\cos x^2}{2x}\right|+\left|\frac{\cos(x+c)^2}{2(x+c)}\right|+\left|\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2}y^{-\frac{3}{2}}\cos ydy\right|$$

$$\le\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+c)}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2}\left|y^{-\frac{3}{2}}\cos y\right|dy\le\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+c)}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+c)^2}y^{-\frac{3}{2}}dy=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+c)}+\frac{1}{4}\left[-2y^{-\frac{1}{2}}\right]_{x^2}^{(x+c)^2}$$

$$=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+c)}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+c)}=\frac{1}{x}$$

第八讲：积分与不等式 > 构造辅助函数利用函数单调性

设$f(x)\in C[a,b]$，且单调递增，证明：$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

构造函数 $G(t)=\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx \quad t\in[a,b]$

$$G'(t)=tf(t)-\left(\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx+\frac{a+t}{2}f(t)\right)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)dx\ge 0$$

$$f(x)\le f(t) \quad x\in[a,t]\Rightarrow \int_a^t f(x)dx\le\int_a^t f(t)dx=(t-a)f(t)$$

$$G(b)\ge G(a)=0$$

第八讲：积分与不等式 > 构造辅助函数利用函数单调性

设$f(x)$在$[0,1]$是非负、单调递减的连续函数，且$0<a<b<1$

证明：$\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b}\int_a^b f(x)dx$

$$\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^a f(x)dx - \frac{a}{b}\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

构造函数 $G(t)=\int_0^a f(x)dx - \frac{a}{t}\int_a^t f(x)dx \qquad t\in[a，b]$

$$G'(t)=\frac{a}{t^2}\left(\int_a^t f(x)dx - tf(t)\right)$$

第八讲：积分与不等式 > 构造辅助函数利用函数单调性

设$f(x)$在$[0,1]$是非负、单调递减的连续函数，且$0<a<b<1$

证明：$\int_0^a f(x)dx \ge \frac{a}{b}\int_a^b f(x)dx$

$$\int_0^a f(x)dx \ge \frac{a}{b}\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)dx - a\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

构造函数 $G(t) = t\int_0^a f(x)dx - a\int_a^t f(x)dx \qquad t\in[a,\ b]$

$$G'(t) = \int_0^a f(x)dx - af(t) \ge af(a) - af(t) \ge 0$$

$$G(b) \ge G(a) = a\int_0^a f(x)dx \ge 0$$

有时候不要急于构造辅助函数
必要时我们可以对不等式做一些等价处理
然后再构造辅助函数

如果积分区域 D 关于 $x=y$ 这条直线对称

则 $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy=\iint\limits_{D} f(y, x)\,dxdy$

设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\geq 0$，$\int_a^b f(x)dx=1$，$k\in R$，证明：$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2\leq 1$

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2=\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)\left(\int_a^b f(y)\cos kydy\right)=\iint_D f(x)f(y)\cos kx\cos kydxdy\quad D=\{(x,y)|a\leq x,\ y\leq b\}$$

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2=\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)\left(\int_a^b f(x)\sin kydy\right)=\iint_D f(x)f(y)\sin kx\sin kydxdy$$

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2&=\iint_D f(x)f(y)\cos kx\cos kydxdy+\iint_D f(x)f(y)\sin kx\sin kydxdy\\&=\iint_D f(x)f(y)\left(\cos kx\cos ky+\sin kx\sin ky\right)dxdy\\&=\iint_D f(x)f(y)\cos\left(kx-ky\right)dxdy\\&\leq\iint_D f(x)f(y)dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(y)dy\right)=1\end{aligned}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用二重积分

设函数 $f(x)\in C[a, b]$，不恒为零，满足 $0\le f(x)\le M$

证明：$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2+\dfrac{M^2(b-a)^4}{12}\ge\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\,dxdy \qquad D=\{(x, y)\mid a\le x, y\le b\}$$

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\sin x\sin y\,dxdy \qquad \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\cos x\cos y\,dxdy$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2=\iint_D f(x)f(y)\left(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y\right)dxdy$$

$$=\iint_D f(x)f(y)\left[1-\cos(x-y)\right]dxdy$$

$$\le\iint_D M^2\frac{(x-y)^2}{2}\,dxdy=\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

$$|\sin t|\le|t| \qquad t\in R$$

$$1-\cos(x-y)=2\sin^2\frac{x-y}{2}\le 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{2}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用二重积分

$f(x)$、$g(x)$在$[a，b]$上连续，且$f(x)$在$[a，b]$上单调递增，$g(x)$在$[a，b]$上单调递减 积分变量的地位一样

证明:$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$ $D=\{(x，y)|a\le x，y\le b\}$关于$y=x$对称

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(y)dy\right)=\iint_D f(x)g(y)dxdy=\iint_D f(y)g(x)dxdy$$

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx=\left(\int_a^b 1dy\right)\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)=\iint_D f(x)g(x)dxdy=\iint_D f(y)g(y)dxdy$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)-(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\iint_D f(x)g(y)dxdy+\iint_D f(y)g(x)dxdy\right)-\frac{1}{2}\left(\iint_D f(x)g(x)dxdy+\iint_D f(y)g(y)dxdy\right)$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)g(x)-f(y)g(y)]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]dxdy\ge 0$$

$f(x)-f(y)$与$x-y$符号相同

$g(y)-g(x)$与$x-y$符号相同

第八讲：积分与不等式 > 利用二重积分

$f(x)$、$g(x)$在$[a，b]$上连续，且$f(x)$在$[a，b]$上单调递增，$g(x)$在$[a，b]$上单调递减

证明：$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(y)dy\right)=\iint_D f(x)g(y)dxdy=\iint_D f(y)g(x)dxdy$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\left(\int_a^b f(y)dy\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\iint_D f(y)g(x)dxdy$$

第八讲：积分与不等式 > 利用二重积分

证明：若 $g(x)$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\left(\int_a^b f(y)g(y)dy\right) = \iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)dxdy$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(y)dy\right) = \iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy = \iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy + \iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy\right) - \iint_D f(x)f(y)g(x)g(y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x) - 2f(x)f(y)g(x)g(y)\right]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[f(x)g(y) - f(y)g(x)\right]^2 dxdy \ge 0$$

积分形式的柯西不等式

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理

消去积分符号后展开

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{b\text{换成}x} \int_a^x f(x)dx \quad \text{令 } G(x)=\int_a^x f(x)dx$$

将关于旧函数$f(x)$的条件与结论全部换成关于新函数$G(x)$的条件与结论

这样积分积分符号就消去了

将$G(x)$泰勒展开，根据条件得到不等式

展开后积分

将$f(x)$泰勒展开，根据条件得到不等式，然后积分

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 消积分符号后展开

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于0，且其导数 $f'(x)$ 连续，$f(a)=f(b)=0$

证明：存在点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f'(\xi)>\dfrac{1}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ $\qquad F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x)$

设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx \quad x\in[a,b]$ 无形中产生积分符号

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}F''(\xi_1) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi_1) \Rightarrow f'(\xi_1)=\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$$

$$F(a)=F(b)+(a-b)F'(b)+\frac{(a-b)^2}{2}F''(\xi_2) \Rightarrow 0=\int_a^b f(x)dx+\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi_2) \Rightarrow f'(\xi_2)=\frac{-2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$$

i.若 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\neq 0$ $\quad \dfrac{1}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)dx<\left|\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right|=\max\{f'(\xi_1),\ f'(\xi_2)\}$

ii.若 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$

假设 $f'(x)\leq 0 \quad x\in[a,b]$

又 $f'(x)\not\equiv 0 \quad x\in[a,b]$(否则 $f(x)\equiv C \quad x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\equiv f(a)=0 \quad x\in[a,b]$ 矛盾！)

故 $f(b)<f(a)$ 矛盾！故 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f'(\xi)>0$

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 消积分符号后展开

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$

证明：对任意的 $x\in(0,1)$，有 $\left|\int_0^x f(x)dx\right|\le\frac{1}{8}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

$F'(x)=f(x)\qquad F''(x)=f'(x)$

设 $F(x)=\int_0^x f(x)dx\quad x\in[0,1]$

无形中产生积分符号

$$F(1)=F(x)+(1-x)F'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}F''(\xi_1)\quad\Rightarrow 0=F(x)+(1-x)f(x)+\frac{(1-x)^2}{2}f'(\xi_1)\qquad\cdots\cdots(1)$$

$$F(0)=F(x)-xF'(x)+\frac{x^2}{2}F''(\xi_2)\quad\Rightarrow 0=F(x)-xf(x)+\frac{x^2}{2}f'(\xi_2)\qquad\cdots\cdots(2)$$

$$x\cdot(1)+(1-x)\cdot(2)\quad\Rightarrow 0=F(x)+\frac{x(1-x)^2}{2}f'(\xi_1)+\frac{x^2(1-x)}{2}f'(\xi_2)$$

$$|F(x)|\le\frac{x(1-x)^2}{2}|f'(\xi_1)|+\frac{x^2(1-x)}{2}|f'(\xi_2)|\le\frac{x(1-x)^2+x^2(1-x)}{2}M$$

$$=\frac{M}{2}x(1-x)\le\frac{M}{2}\frac{[(1-x)+x]^2}{4}=\frac{M}{8}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 消积分符号后展开

设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$f''(x)\le 0$，证明：$\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\le \dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

设 $f(c)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\quad c\in[a,b]$

$$f(c)=f(x)+(c-x)f'(x)+\frac{(c-x)^2}{2}f''(\xi)\le f(x)+(c-x)f'(x)$$

$$\int_a^b f(c)dx\le\int_a^b f(x)dx+\int_a^b (c-x)f'(x)dx$$

$$\int_a^b (c-x)f'(x)dx=\int_a^b (c-x)df(x)=(c-x)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b -f(x)dx$$

$$=(c-b)f(b)-(c-a)f(a)+\int_a^b f(x)dx$$

$$\le\int_a^b f(x)dx$$

$$(b-a)f(c)\le 2\int_a^b f(x)dx$$

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 消积分符号后展开

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导函数，且$f(0)=f(1)=0$，求证：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

设$F(x)=\int_0^x f(x)dx \quad x\in[0,1]$ 无形中产生积分符号 $F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x)$

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2}F''(\xi_1) \qquad \Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}f'(\xi_1)$$

$$F(x)=F(1)+(x-1)F'(1)+\frac{(x-1)^2}{2}F''(\xi_2) \quad \Rightarrow F(x)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{(x-1)^2}{2}f'(\xi_2)$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{x^2}{2}f'(\xi_1)-\frac{(x-1)^2}{2}f'(\xi_2)$$

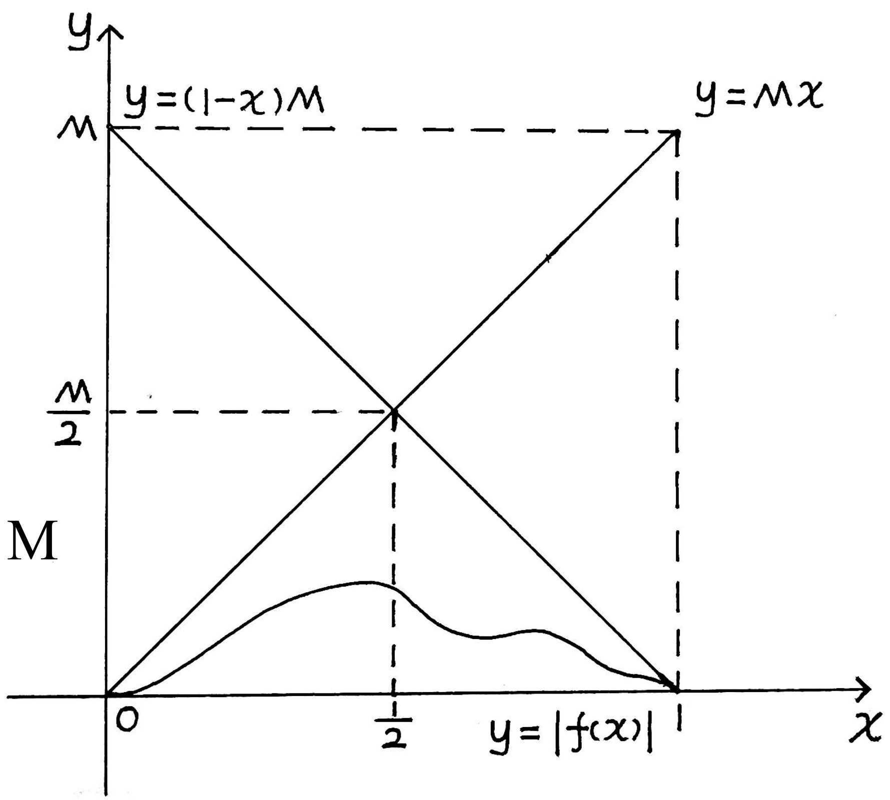
$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{x^2}{2}|f'(\xi_1)|+\frac{(x-1)^2}{2}|f'(\xi_2)| \le \frac{x^2+(x-1)^2}{2}M \qquad M=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)| \qquad 取x=\frac{1}{2}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 展开后积分

设函数f(x)在[0,1]上有一阶连续导函数，且$f(0)=f(1)=0$，求证：$\int_0^1 |f(x)|dx \le \frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

设$F(x)=\int_0^x |f(x)|dx$

$(|f(x)|)'$不一定存在即$F''(x)$不一定存在



$$f(x)=f(0)+xf'(\xi_1) \quad \Rightarrow |f(x)|=|xf'(\xi_1)|\le xM$$

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(\xi_2) \Rightarrow |f(x)|=|(x-1)f'(\xi_2)|\le(1-x)M$$

$$|f(x)|\le \min\{xM,(1-x)M\}$$

$$\int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 \min\{xM,(1-x)M\}dx=\frac{M}{4}$$

$$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} xMdx+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)Mdx=\frac{M}{4}$$

第八讲：积分与不等式 > 利用泰勒中值定理 > 展开后积分

$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\varphi''(x)\le 0$，证明：$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi(f(x))dx \le \varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$

令 $x_0=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$\varphi(x)=\varphi(x_0)+(x-x_0)\varphi'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}\varphi''(\xi)$ $\qquad$ $f(x)$替换x

$$\varphi(f(x))=\varphi(x_0)+(f(x)-x_0)\varphi'(x_0)+\frac{(f(x)-x_0)^2}{2}\varphi''(\xi)\le\varphi(x_0)+(f(x)-x_0)\varphi'(x_0)$$

$$\int_a^b \varphi(f(x))dx\le\int_a^b \varphi(x_0)dx+\int_a^b (f(x)-x_0)\varphi'(x_0)dx$$

$$\int_a^b \varphi(f(x))dx\le(b-a)\varphi(x_0)$$

$$\int_a^b (f(x)-x_0)\varphi'(x_0)dx=\varphi'(x_0)\int_a^b f(x)dx-\varphi'(x_0)(b-a)x_0=0$$

$f(x)$在$[a, b]$上连续，$\varphi''(x)\le 0$，证明：$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi(f(x))dx \le \varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$

积分形式的琴生不等式

取$\varphi(x)=\ln x$，$a=0$，$b=1$

证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \ln f(x)dx$　（第十届初赛）

取$f(x)=x^n$，$a=0$，$b=1$

$\varphi''(x)\le 0$，证明：$\displaystyle\int_0^1 \varphi(x^n)dx \le \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$

从条件中发现简单的不等式，然后对其积分

第八讲：积分与不等式 > 对简单不等式积分

设函数$f(x)$在$[-\frac{1}{a}, a]$上非负可积$(a>0)$且$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)dx=0$

证明：$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)dx \le \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx$

想到了非常简单
想不到无从下手

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\ge 0 \quad x\in[-\frac{1}{a}, a]$$

$$f(x)+\left(a-\frac{1}{a}\right)xf(x)-x^2f(x)\ge 0$$

$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx+\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)dx-\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2f(x)dx\ge 0$$

第八讲：积分与不等式 > 对简单不等式积分

设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$，证明：$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{4}{3}$

$$(f(x)-1)\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{3}\right)\ge 0\Rightarrow\frac{4}{3}-\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{3}f(x)\ge 0$$

$$\frac{4}{3}-\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx-\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx\ge 0$$

$$\frac{4}{3}\ge\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx\ge 2\sqrt{\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx}$$

基本不等式$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2\ge\frac{4}{3}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$$

第八讲：积分与不等式 > 利用积分的定义

$f(x)$在$[a，b]$上连续，$\varphi''(x)\le 0$

证明：$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx \le \varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$

把$[a，b]$等分成n个小区间，记$x_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$ $k=1,\cdots，n$，则x_k是第k个小区间的右端点

$$\int_a^b \varphi(f(x))dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(f(x_k))$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(f(x_k))\le\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(f(x_k))\le\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx\le\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$