第十五讲：函数项级数 > 幂级数

阿贝尔定理

如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$当$x=x_0$时收敛，则适合不等式$|x|<|x_0|$的一切x使这幂级数绝对收敛

反之，如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$当$x=x_0$时发散，则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切x使这幂级数发散

i.$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$仅当$x=0$时收敛,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$仅当$x=0$时收敛

ii.$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$收敛,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$在$(-\infty,+\infty)$收敛

iii.$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-R，R)$收敛,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$在$(-R，R)$收敛

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$发散,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$在$(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$发散

当$x=R$或$-R$时$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$可能收敛可能发散

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \qquad R=\begin{cases}\frac{1}{\rho} & \rho\neq 0\\ +\infty & \rho=0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow R=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\text{收敛},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散}\Rightarrow\text{收敛域}[-1,1)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n+1}}{n}$的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n+1}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n}\quad 记t=x^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1+n}}{\frac{2^n}{n}}=2\Rightarrow R=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}发散\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n}收敛域[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le t<\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x^2<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n+1}}{n}收敛域(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{n}$的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\quad 记t=x^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow R=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}发散\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}收敛域[-1,1)$$

$$-1\le t<1\Leftrightarrow -1\le x^3<1\Leftrightarrow -1\le x<1$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{n}收敛域[-1,1)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2+1}\quad 记t=e^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}=1\Rightarrow R=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}收敛\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2+1}收敛域[-1,1]$$

$$-1\le t\le 1\Leftrightarrow -1\le e^{-x}\le 1\Leftrightarrow 0\le x$$

$$\Rightarrow 收敛域[0,+\infty)$$

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$的收敛域

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$分别在$(-R_1, R_1)$、$(-R_2, R_2)$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$在$(-R, R)$内收敛，$R=\min\{R_1, R_2\}$

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$分别在$I_1$、$I_2$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$在$I$内收敛，$I=I_1\cap I_2$

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$在$x=x_0$处收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$在$x=x_0$处亦收敛

$$\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x_0^n=\sum_{n=0}^{N}a_n x_0^n+\sum_{n=0}^{N}b_n x_0^n$$

$\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n x_0^n$、$\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}b_n x_0^n$存在

故$\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x_0^n$即$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x_0^n$收敛

错误结论

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别是$R_1$、$R_2$

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径是$R$，$R=\min\{R_1, R_2\}$

例如

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$的收敛半径是1

$\sum_{n=0}^{\infty}(1-1)x^n$的收敛半径是$+\infty$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}x^n$、…、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(p)}x^n$分别在$(-R_1, R_1)$、$(-R_2, R_2)$、…、$(-R_p, R_p)$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(p)})x^n$在$(-R, R)$内收敛，$R=\min\{R_1, R_2, \cdots, R_p\}$

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}x^n$、…、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(p)}x^n$分别在$I_1$、$I_2$、…、$I_p$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(p)})x^n$在$I$内收敛，$I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_p$

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}x^n$、…、$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(p)}x^n$在$x=x_0$处收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(p)})x^n$在$x=x_0$处亦收敛

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

$r_n \equiv n(\bmod 3), 0 < r_n \le 3$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^{r_n}\right]^n}{n}x^n$的收敛域

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

$$\frac{2}{1}x+0x^2+0x^3+\frac{2^4}{4}x^4+0x^5+0x^6+\frac{2^7}{7}x^7+0x^8+0x^9+\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{1}x+\frac{2^4}{4}x^4+\frac{2^7}{7}x^7+\cdots\cdots$$

收敛半径、收敛域、和函数一样

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

$r_n \equiv n(\mathrm{mod}3), 0 < r_n \le 3$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^{r_n}\right]^n}{n}x^n$的收敛域

$$\frac{2}{1}x+\frac{4^2}{2}x^2+\frac{2^3}{3}x^3+\frac{2^4}{4}x^4+\frac{4^5}{5}x^5+\frac{2^6}{6}x^6+\frac{2^7}{7}x^7+\frac{4^8}{8}x^8+\frac{2^9}{9}x^9+\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{1}x+0x^2+0x^3+\frac{2^4}{4}x^4+0x^5+0x^6+\frac{2^7}{7}x^7+0x^8+0x^9+\cdots\cdots$$

$$0x+\frac{4^2}{2}x^2+0x^3+0x^4+\frac{4^5}{5}x^5+0x^6+0x^7+\frac{4^8}{8}x^8+0x^9+\cdots\cdots$$

$$0x+0x^2+\frac{2^3}{3}x^3+0x^4+0x^5+\frac{2^6}{6}x^6+0x^7+0x^8+\frac{2^9}{9}x^9+\cdots\cdots$$

$\frac{2}{1}x+\frac{2^4}{4}x^4+\frac{2^7}{7}x^7+\cdots\cdots$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{3n-2}x^{3n-2}$ 收敛域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\frac{4^2}{2}x^2+\frac{4^5}{5}x^5+\frac{4^8}{8}x^8+\cdots\cdots$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n-1}}{3n-1}x^{3n-1}$ 收敛域$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 原级数在$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$收敛

$\frac{2^3}{3}x^3+\frac{2^6}{6}x^6+\frac{2^9}{9}x^9+\cdots\cdots$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3n}x^{3n}$ 收敛域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

$r_n \equiv n(\bmod 3), 0 < r_n \le 3$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3+(-1)^{r_n}\right]^n}{n}x^n$的收敛域

当$x=\frac{1}{4}$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{3n-2}x^{3n-2}$收敛$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3n}x^{3n}$收敛$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n-1}}{3n-1}x^{3n-1}$发散 $(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n-1}}{3n-1}x^{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1})$

$\Rightarrow$当$x=\frac{1}{4}$时原级数发散

$\Rightarrow |x|>\frac{1}{4}$时原级数发散

$\Rightarrow$原级数收敛域$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

原级数在$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$收敛

$r_n \equiv n(\bmod p), 0 < r_n \le p$，$p$是大于1的正整数，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(r_n x)^n$的收敛域

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数 $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$ 的收敛域

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$$

$$\frac{x}{1}+0x^2+\frac{x^3}{3}+0x^4+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+0x^{2n}+\cdots$$

$$0x-\frac{x^2}{2}+0x^3-\frac{x^4}{5}+\cdots+0x^{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 收敛域 $(-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{3n-1}$ 收敛域 $(-1,1)$ 原级数在 $(-1,1)$ 收敛

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 收敛域与收敛半径

求级数 $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$ 的收敛域

当 $x=-1$ 时原级数 $=-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{3n-1}-\cdots$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3n-1}\right)$ 同敛散

$\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3n-1}\sim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3n-1}\right)$ 发散

当 $x=1$ 时原级数 $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{3n-1}+\cdots$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{3n-1}\right)$ 同敛散

$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{3n-1}\sim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{3n-1}\right)$ 发散

$\Rightarrow$ 当 $|x|>1$ 时原级数发散

$\Rightarrow$ 原级数收敛域 $(-1,1)$

原级数在 $(-1,1)$ 收敛

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数

方法一

幂级数的运算

1.幂级数加减法　2.幂级数乘法

方法二

积分、求导

$f(x)$不易展开为x的幂级数，但$f'(x)$或$\int f(x)dx$易展开

方法三

计算x^n的系数$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

方法四

利用欧拉公式

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数

常用的展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^3}{(2n-1)!}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha+1-i}{i}\right)x^n$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$分别在$(-R_1，R_1)$、$(-R_2，R_2)$内收敛

则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$在$(-R，R)$内成立，$R=\min\{R_1，R_2\}$

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$分别在$I_1$、$I_2$内收敛

则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$在$I$内成立，$I=I_1\cap I_2$

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$在$x=x_0$处收敛，则当$x=x_0$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$成立

$$\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x_0^n=\sum_{n=0}^{N}a_nx_0^n+\sum_{n=0}^{N}b_nx_0^n$$

$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx_0^n$、$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}b_nx_0^n$存在

故$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x_0^n$存在且$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}(a_n+b_n)x_0^n=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx_0^n+\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}b_nx_0^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x_0^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx_0^n$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x^n$、…、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} x^n$分别在$(-R_1, R_1)$、$(-R_2, R_2)$、…、$(-R_p, R_p)$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(p)})x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x^n+\cdots+\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} x^n$在$(-R, R)$内成立，$R=\min\{R_1, R_2,\cdots, R_p\}$

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$、…、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p x^n$分别在$I_1$、$I_2$、…、$I_p$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots+a_n^{(p)})x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x^n+\cdots+\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} x^n$在$I$内成立，$I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_p$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

$p^2 \neq 4q$且$q \neq 0$，将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+px+q}$展开成x的幂级数

设α、β是$x^2+px+q=0$的两根(虚根或实根)

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$$

$$\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}=\frac{1}{-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}}-\frac{1}{-\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\beta}}=\frac{1}{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n-\frac{1}{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\beta^{n+1}}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right]x^n$$

若α、β是虚数设$\alpha=re^{i\theta}$、$\beta=re^{-i\theta}$

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\beta^{n+1}}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right]x^n=\frac{1}{2ri\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{(n+1)i\theta}}{r^{n+1}}-\frac{e^{-(n+1)i\theta}}{r^{n+1}}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2ri\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i\sin(n+1)\theta}{r^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{r^{n+2}\sin\theta}x^n$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

α、β是$x^2+px+q=0$的两个虚根

设$\alpha=re^{i\theta}$、$\beta=re^{-i\theta}$

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{r^{n+1}\sin\theta}x^n$$

将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$展开成x的幂级数

将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$展开成x的幂级数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

$a>b>c$，将函数$f(x)=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$展开成x的幂级数

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}=\frac{1}{(x+a)(x+b)}\cdot\frac{1}{x+c}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\cdot\frac{1}{x+c}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}\cdot\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x+b}\cdot\frac{1}{x+c}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+c}\right)-\frac{1}{c-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}\right)\right]$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$分别在$(-R_1, R_1)$、$(-R_2, R_2)$内收敛

则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$在$(-R, R)$内成立，$R=\min\{R_1, R_2\}$

$$\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^n$$

$n-i\geq q$且$i\geq p\Rightarrow p\leq i\leq n-q$

s，t是整数

$$\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{n+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{n+t}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{n+s+t}$$

m是正整数，s，t是整数

$$\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{mn+t}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{mn+s+t}$$

$$\Leftarrow\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{mn+t}=x^{s+t}\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{mn}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{mn}=x^{s+t}\sum_{n=p}^{\infty}a_nt^n\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nt^n\quad(\text{记}t=x^m)$$

$$=x^{s+t}\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)t^n=x^{s+t}\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{mn}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{mn+s+t}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

将函数$f(x)=\dfrac{-x\ln(1-x)}{(1-x)^2}$展开成$x$的幂级数

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\frac{-x\ln(1-x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_{n-i}\right)x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-i}\right)x^n$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

将函数$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$展开成 x 的幂级数

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$$

$$\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1}=\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}\right)\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i}b_{n-i}\right)x^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)x^{n}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法一

将函数$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{1-x^{2}}$展开成麦克劳林级数

$$e^{x}+e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n}}{n!}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{1-x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{i}b_{n-i}\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{(2i)!}\right)x^{2n}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法二

将函数$f(x)=\arctan x$展开成麦克劳林级数

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)$$

$$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法二

将函数$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$展开成麦克劳林级数

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{-\frac{1}{2}+1-i}{i}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{-\frac{1}{2}+1-i}{i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-2i}{2i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{-(2i-1)}{2i}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法二

将函数$f(x)=\arcsin x$展开成麦克劳林级数

$$f'(x)==\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{-\frac{1}{2}+1-i}{i}(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{-\frac{1}{2}+1-i}{i}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法二

将函数$f(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$展开成麦克劳林级数

$$\int f(x)dx=\int\frac{2x}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{1-x^2}+C=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}+C$$

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n})'=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法二

将函数$f(x)=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$展开成麦克劳林级数

将函数$f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$展开成麦克劳林级数

$$\int f(x)dx=\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$(\arctan x)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{2i+1}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{2(n-i)+1}\right)x^{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\right)x^{2n+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{2i+1}\right)(x^{2n+2})'=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\right)x^{2n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{2i+1}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{2(n-i)+1}=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2(n-i)+1}=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2(n-i)+1}\right)\cdot\frac{1}{2n+2}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2n+2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2(n-i)+1}\right)=\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法三

m是正整数，将函数$f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^m}$展开成麦克劳林级数

$$f^{(n)}(x)=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}(1-x)^{-(m+n)}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}x^n$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法三

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

求出$f^{(n)}(0)\to$求出$f(x)$的麦克劳林展开式

求$f^{(n)}(0)$的方法就是求麦克劳林展开式的方法

将函数$f(x)=\arctan x$展开成麦克劳林级数

将函数$f(x)=\arcsin x$展开成麦克劳林级数

$p^2\neq 4q$且$q\neq 0$，将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+px+q}$展开成x的幂级数

$a>b>c$，将函数$f(x)=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$展开成x的幂级数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法四

$a^2+b^2\neq 0$，将函数$f(x)=e^{ax}\cos bx$展开成麦克劳林级数

$e^{i(bx)}=\cos bx+i\sin bx \quad e^{i(-bx)}=\cos bx-i\sin bx$

$\cos bx=\frac{1}{2}\left(e^{i(bx)}+e^{i(-bx)}\right)$

$e^{ax}\cos bx=\frac{1}{2}e^{ax}\left(e^{i(bx)}+e^{i(-bx)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{(a+bi)x}+e^{(a-bi)x}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(a+bi)x]^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(a-bi)x]^n}{n!}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+bi)^n+(a-bi)^n}{n!}x^n$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\left(e^{i(n\alpha)}+e^{i(-n\alpha)}\right)}{n!}x^n$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\cos n\alpha x}{n!}x^n$

$\exists\alpha\in R$使得$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}e^{i\alpha}$

$a-bi=\sqrt{a^2+b^2}e^{i(-\alpha)}$

$\sqrt{a^2+b^2}$是$a+bi$的模，α是$a+bi$的辐角

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法四

$a^2+b^2\neq 0$，将函数$f(x)=e^{ax}\sin bx$展开成麦克劳林级数

$$e^{ax}\sin bx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin n\alpha x}{n!}x^n \quad \alpha\text{是}a+bi\text{的辐角}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数 > 方法四

$a^2+b^2\neq 0$，将函数$f(x)=e^{ax}\cos bx$展开成麦克劳林级数

令$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$

将函数$f(x)=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$展开成麦克劳林级数

$a^2+b^2\neq 0$，将函数$f(x)=e^{ax}\sin bx$展开成麦克劳林级数

令$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$

将函数$f(x)=e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$展开成麦克劳林级数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 函数展开成幂级数

将函数$f(x)$展开成$x-a$的幂级数

换元令$x-a=t$

$\Rightarrow x=t+a$，$f(x)=f(t-a)$

将函数$f(t-a)$展开成t的幂级数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数

方法一

求导法

1.常见级数通过求导化成目标级数

2.目标级数通过求导化成常见级数　(换元、提出或乘以一个 x^m)

3.发现 $S(x)$，$S'(x)$，$S''(x)$，$S'''(x)$,⋯之间的关系，列出等式然后解微分方程

方法二

幂级数的运算

1.幂级数的加减法

2.幂级数的乘法

方法三

欧拉公式

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n}$ 的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n}=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3})'''\Rightarrow s(x)=(\frac{x^{3}}{1-x})'''$$

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n+1}$ 的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n}$$

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n-1}$ 的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n-1}=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^{n}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{2^n}x^{4n}$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{2^n}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^{4n}}x^{4n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2}}\right)^{4n}\quad \text{记}t=\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)t^{4n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)t^{4n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{4n+3}\right)'''=\left(\frac{t^3}{1-t^4}\right)'''$$

$$s(t)=\left(\frac{t^3}{1-t^4}\right)'''$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{(-2)^n}x^{4n}$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{(-2)^n}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{(-1)^n}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2}}\right)^{4n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)(4n+2)(4n+3)\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2}}\right)^{4n}\qquad 记t=\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)(4n+2)(4n+3)t^{4n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)(4n+2)(4n+3)t^{4n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n+3}\right)'''$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n+3}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}(-t^4)^n=\frac{t^3}{1+t^4}$$

$$s(t)=\left(\frac{t^3}{1+t^4}\right)'''$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)x^{n}$的和函数

$x^{n}=\left(\sqrt[5]{x}\right)^{5n}=t^{5n}$ 记$\sqrt[5]{x}=t$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)t^{5n}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)x^n$的和函数

当$x\ge 0$时

$$x^n=(\sqrt[4]{x})^{4n}=t^{4n} \quad 记\sqrt[4]{x}=t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)t^{4n}$$

当$x<0$时

$$x^n=(-1)^n(-x)^n=(-1)^n(\sqrt[4]{-x})^{4n}=(-1)^n t^{4n} \quad 记\sqrt[4]{-x}=t$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)(-1)^n t^{4n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)(4n+2)(4n+3)(-1)^n t^{4n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n+3}\right)'''$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n+3}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{4n}=t^3\sum_{n=0}^{\infty}(-t^4)^n=\frac{t^3}{1+t^4}$$

$$s(t)=\left(\frac{t^3}{1+t^4}\right)'''$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 1

求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{n!}$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n}}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\right)'=(xe^{x})'$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 2

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$的和函数

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)'''=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

$$s'''(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$s(0)=s'(0)=s''(0)=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 2

求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)}$的和函数

$$\left(x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\sin x$$

$$(x^3 s(x))'=x\sin x$$

$$s(0)=\frac{1}{3}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 2

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!(2n+3)}$的和函数

当$x \geq 0$

$$x^n=\left(\sqrt{x}\right)^{2n}=t^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)}=t^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+3}}{(2n+1)!(2n+3)}$$

当$x<0$

$$x^n=(-1)^n(-x)^n=(-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}=(-1)^n t^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!(2n+3)}=t^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+3}}{(2n+1)!(2n+3)}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 2

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$的和函数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

$$\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)'\right]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

$$[xs'(x)]'=\frac{1}{1-x}$$

$$s(x)=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx$$

$$[xs'(x)]'=\frac{1}{1-x}$$

$$\int_0^x[xs'(x)]'dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$$

$$xs'(x)=-\ln(1-x)$$

$$s'(x)=\frac{-\ln(1-x)}{x}$$

$$\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx$$

$$s(x)=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 2

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$的和函数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$$

$$\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\right)'\right]'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

$$\left\{x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\right)'\right]'\right\}'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

$$\{x[xs'(x)]'\}'=\frac{1}{1-x}$$

$$x[xs'(x)]'=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$[xs'(x)]'=\frac{-\ln(1-x)}{x}$$

$$xs'(x)=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx$$

$$s'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx$$

$$s(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{x}\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}dx\right)dx$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$的和函数

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right)^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)x^{4n-4}}{(4n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{[4(n-1)]!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

$$s^{(4)}(x)=s(x)$$

$$s(0)=1,\quad s'(0)=s''(0)=s'''(0)=0$$

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$的和函数

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)'=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2(n-1)+1}}{[2(n-1)+1]!!}=1+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

$$s'(x)=1+xs(x)$$

$$s(0)=0$$

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$的和函数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

设$a_0=4$，$a_1=1$，$a_{n-2}=n(n-1)a_n\ (n\geq 2)$，求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的和函数

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$s''(x)=s(x)$$

$$s(0)=4,\quad s'(0)=1$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

设$a_0=4$，$a_1=1$，$a_{n-2}=n(n-1)a_n\ (n\ge 2)$，求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数

$$a_{n-2}x^{n-2}=n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$a_{n-2}x^{n-2}=(a_nx^n)''$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(a_nx^n)''=(\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n)''$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)''$$

$$s''(x)=s(x)$$

$$s(0)=4，\ s'(0)=1$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

设$u_0=0$，$u_1=1$，$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}\,(n=1,2,\cdots)$，求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n!}x^n$的和函数

记$v_n=\dfrac{u_n}{n!}\Rightarrow u_n=n!v_n$

$(n+1)!v_{n+1}=n!v_n+(n-1)!v_{n-1}$

$n(n+1)v_{n+1}=nv_n+v_{n-1}$

设$v_0=0$，$v_1=1$，$n(n+1)v_{n+1}=nv_n+v_{n-1}\,(n=1,2,\cdots)$，求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_nx^n$的和函数

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n\Big)''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)v_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)v_{n-1}+v_{n-2}]x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)v_{n-1}x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}v_{n-2}x^{n-2}$$

$$=\Big(\sum_{n=2}^{\infty}v_{n-1}x^{n-1}\Big)'+\sum_{n=2}^{\infty}v_{n-2}x^{n-2}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n\Big)'+\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^n=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n\Big)'+\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n$$

$s''(x)=s'(x)+s(x)$

$s(0)=0$，$s'(0)=1$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

设$v_0=0$，$v_1=1$，$n(n+1)v_{n+1}=nv_n+v_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$，求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_nx^n$的和函数

$$n(n+1)v_{n+1}x^{n-1}=nv_nx^{n-1}+v_{n-1}x^{n-1}$$

$$(v_{n+1}x^{n+1})''=(v_nx^n)'+v_{n-1}x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}x^{n+1})''=\sum_{n=1}^{\infty}(v_nx^n)'+\sum_{n=1}^{\infty}v_{n-1}x^{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(v_nx^n)''=\sum_{n=1}^{\infty}(v_nx^n)'+\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_nx^n)''=\sum_{n=1}^{\infty}(v_nx^n)'+\sum_{n=1}^{\infty}v_nx^n$$

$$s''(x)=s'(x)+s(x)$$

$$s(0)=0,\quad s'(0)=1$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法一 > 3

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$的和函数

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!2nx^{2n}}{(2n-1)!!}$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!2nx^{2n-1}}{(2n-1)!!}$$

$$=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}\right)'$$

$$=1+x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!x^{2n-1}}{(2n-1)!!}\right)'$$

$$=1+x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)'$$

$$s'(x)=1+x[xs(x)]' \quad s(0)=0\Rightarrow s(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}$的和函数

$$\frac{n^m}{n!}=A_m\frac{1}{(n-m)!}+\cdots+A_1\frac{1}{(n-1)!}\Leftrightarrow n^m=\sum_{k=1}^{m}A_k\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

m是正整数，存在常数$A_k\ (k=1,\cdots,\ m)$使得$\frac{n^m}{n!}=A_m\frac{1}{(n-m)!}+\cdots+A_1\frac{1}{(n-1)!}$成立

$\Leftrightarrow$ m是正整数，存在常数$A_k\ (k=1,\cdots,\ m)$使得$n^m=\sum_{k=1}^{m}A_k\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$成立

当$m=1$时，$\sum_{k=1}^{m}A_k\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)=nA_1$　取$A_1=1$

假设$1\le m\le s(s\ge 1)$成立

$$\prod_{i=0}^{s}(n-i)=\sum_{k=1}^{s+1}B_kn^k\quad B_{s+1}=1$$

$$n^{s+1}-\prod_{i=0}^{s}(n-i)=-\sum_{k=1}^{s}B_kn^k\Rightarrow m=s+1\text{成立}\Rightarrow 1\le m\le s+1\text{成立}$$

故对任意的正整数m成立

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}$ 的和函数

$$\frac{n^3}{n!}=A_3\frac{1}{(n-3)!}+A_2\frac{1}{(n-2)!}+A_1\frac{1}{(n-1)!}$$

$$n^3=A_3n(n-1)(n-2)+A_2n(n-1)+A_1n$$

$$n^3-n(n-1)(n-2)=3n^2-2n$$

$$3n^2-2n-3n(n-1)=n$$

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$$

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-3)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}+1+x+4x^2$$

$$=x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}+3x^2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+1+x+4x^2$$

$$=x^3e^x+3x^2\left(e^x-1\right)+x\left(e^x-1-x\right)+1+x+4x^2$$

$$=\left(x^3+3x^2+x\right)e^x+1$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$的和函数

$$n^3 = A_3(n+1)(n+2)(n+3) + A_2(n+1)(n+2) + A_1(n+1) + A_0$$

$$n^3 - (n+1)(n+2)(n+3) = -6n^2 - 11n - 6$$

$$-6n^2 - 11n - 6 - [-6(n+1)(n+2)] = 7n + 6$$

$$7n + 6 - 7(n+1) = -1$$

$$n^3 = (n+1)(n+2)(n+3) - 6(n+1)(n+2) + 7(n+1) - 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n - 7\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}\right)''' - 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' - 7\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \left(\frac{x^3}{1-x}\right)''' - 6\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' - 7\left(\frac{x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

p是正整数，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+p)}$的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+p)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)x^n=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+p}x^n$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{p}x^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+p}x^{n+p}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

p、q是正整数，且$q<p$，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+q)(n+p)}$的和函数

$$\frac{1}{n(n+q)(n+p)}=\frac{1}{n(n+q)}\frac{1}{n+p}=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+q}\right)\frac{1}{n+p}=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+q}\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{q}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)-\frac{1}{p-q}\left(\frac{1}{n+q}-\frac{1}{n+p}\right)\right]=\frac{1}{pq}\frac{1}{n}-\frac{1}{q(p-q)}\frac{1}{n+q}+\frac{1}{p(p-q)}\frac{1}{n+p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+q)(n+p)}=\frac{1}{pq}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{q(p-q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+q}+\frac{1}{p(p-q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+p}$$

$$=\frac{1}{pq}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{x^{-q}}{q(p-q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+q}}{n+q}+\frac{x^{-p}}{p(p-q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+p}}{n+p}$$

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=\frac{x}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数

求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$的和函数

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n}}{n!}x^{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n}}{n!}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 1

求级数$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$的和函数

收敛域$(-1,1)$

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$$

$$\frac{x}{1}+0x^2+\frac{x^3}{3}+0x^4+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+0x^{2n}+\cdots$$

$$0x-\frac{x^2}{2}+0x^3-\frac{x^4}{5}+\cdots+0x^{2n-1}-\frac{x^{2n}}{3n-1}+\cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 收敛域$(-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{3n-1}$ 收敛域$(-1,1)$

当$x\in(-1,1)$原级数$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{3n-1}$ $s(x)=s_1(x)+s_2(x)$

$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$s_1(x)=\int_0^x s_1'(x)dx+s_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

令$x^2=t^3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{3n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{t^{3n}}{3n-1}=-t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n-1}}{3n-1}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n-1}}{3n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}t^{3n-2}=\frac{t}{1-t^3}\qquad s_3'(t)=\frac{t}{1-t^3}$$

$$s_3(t)=\int_0^t s_3'(t)dt+s_3(0)=\int_0^t\frac{t}{1-t^3}dt$$

$$=\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{3}\ln(1-t)-\sqrt{3}\left(\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$分别在$(-R_1,R_1)$、$(-R_2,R_2)$内收敛

则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$在$(-R,R)$内成立，$R=\min\{R_1,R_2\}$

r，s，t是整数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{n+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{n+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{n+t}\ (s+t=r)$$

m是正整数，r，s，t是整数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_ib_{n-i}\right)x^{mn+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_nx^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_nx^{mn+t}\ (s+t=r)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

求级数$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n}$的和函数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_{i}b_{n-i}\right)x^{n+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_{n}x^{n+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_{n}x^{n+t}\ (s+t=r)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}1\cdot 1\right)x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-i}\right)x^n$的和函数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_i b_{n-i}\right)x^{n+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^{n+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_n x^{n+t}\ (s+t=r)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-i}\right)x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}i\cdot\frac{1}{n-i}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)x^n$的和函数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_i b_{n-i}\right)x^{n+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^{n+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_n x^{n+t}\ (s+t=r)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n-i}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}\right)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{ni}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i}$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\right)x^{2n}$的和函数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_i b_{n-i}\right)x^{mn+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_n x^{mn+t}\quad(s+t=r)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2(n-1-i)+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2(n-1-i)+1}\right)$$

$$=2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2(n-1-i)+1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2(n-1-i)+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2(n-1-i)+1}\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{1}{2(n-i)+1}\right)x^{2n+2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\right)x^{2n}=\frac{1}{4}\ln^2\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\right)x^{n}$的和函数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法二 > 2

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}\right)x^{3n}$ 的和函数

$$\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_i b_{n-i}\right)x^{mn+r}=\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_n x^{mn+t}\quad(s+t=r)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3(n-1-i)+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3i+1}+\frac{1}{3(n-1-i)+1}\right)$$

$$=3\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}\cdot\frac{1}{3(n-1-i)+1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}=\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}\cdot\frac{1}{3(n-1-i)+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}\right)x^{3n}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{3i+1}\cdot\frac{1}{3(n-1-i)+1}\right)x^{3n}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3i+1}\cdot\frac{1}{3(n-i)+1}\right)x^{3n}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n+1}\right)^2$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法三

$\alpha \in R$且满足$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \cos n\alpha}{n!}x^n$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \cos n\alpha}{n!}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \left(e^{i(n\alpha)}+e^{i(-n\alpha)}\right)}{n!}x^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(xe^{i\alpha}\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(xe^{i(-n\alpha)}\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[x(a+bi)]^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[x(a-bi)]^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x(a+bi)}+e^{x(a-bi)}\right) = \frac{1}{2}e^{ax}\left(e^{i(bx)}+e^{i(-bx)}\right) = e^{ax}\cos bx$$

$$xe^{i\alpha}\sqrt{a^2+b^2} = x(\cos\alpha + i\sin\alpha)\sqrt{a^2+b^2} = x(a+bi)$$

$$xe^{i(-n\alpha)}\sqrt{a^2+b^2} = x(\cos\alpha - i\sin\alpha)\sqrt{a^2+b^2} = x(a-bi)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法三

$\alpha\in R$且满足$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\cos n\alpha x}{n!}x^n$的和函数

令$a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$取$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}x}{n!}x^n$的和函数

$\alpha\in R$且满足$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\cos n\alpha x}{n!}x^n$的和函数

令$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$取$\alpha=\theta$

求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta x}{n!}x^n$的和函数

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法三

$\alpha\in R$且满足$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$， 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin n\alpha}{n!}x^n$的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin n\alpha}{n!}x^n=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\left(e^{i(n\alpha)}-e^{i(-n\alpha)}\right)}{n!}x^n$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(xe^{i\alpha}\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{n!}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(xe^{i(-n\alpha)}\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[x(a+bi)]^n}{n!}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[x(a-bi)]^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{x(a+bi)}-e^{x(a-bi)}\right)=\frac{1}{2i}e^{ax}\left(e^{i(bx)}-e^{i(-bx)}\right)=e^{ax}\sin bx$$

$$xe^{i\alpha}\sqrt{a^2+b^2}=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)\sqrt{a^2+b^2}=x(a+bi)$$

$$xe^{i(-n\alpha)}\sqrt{a^2+b^2}=x(\cos\alpha-i\sin\alpha)\sqrt{a^2+b^2}=x(a-bi)$$

第十五讲：函数项级数 > 幂级数 > 和函数 > 方法三

$\alpha\in R$且满足$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin n\alpha x}{n!}x^n$的和函数

令$a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$取$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}x}{n!}x^n$的和函数

$\alpha\in R$且满足$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\sin n\alpha x}{n!}x^n$的和函数

令$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$取$\alpha=\theta$

求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta x}{n!}x^n$的和函数

第十五讲：函数项级数 > 傅里叶级数

$f(x)$是周期为2π的周期函数

三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是$f(x)$的傅里叶级数

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots)\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$

收敛定理设$f(x)$是周期为2π的周期函数，如果它满足：

1.在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点

2.在一个周期内至多只有有限个极值点

则$f(x)$的傅里叶级数收敛，并且

当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$

当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$

第十五讲：函数项级数 > 傅里叶级数

$f(x)$是周期为2π的周期函数

三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是$f(x)$的傅里叶级数

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$ $\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$

当$f(x)$是奇函数$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0(n=0,1,\cdots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

当$f(x)$是偶函数$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

第十五讲：函数项级数 > 傅里叶级数

$f(x)$是周期为$2s$的周期函数

三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{s}+b_n\sin\frac{n\pi x}{s}\right)$是$f(x)$的傅里叶级数

其中$a_n=\frac{1}{s}\int_{-s}^{s}f(x)\cos\frac{n\pi x}{s}dx\quad(n=0,1,\cdots)$ $\quad b_n=\frac{1}{s}\int_{-s}^{s}f(x)\sin\frac{n\pi x}{s}dx\quad(n=1,2,\cdots)$

第十五讲：函数项级数 > 傅里叶级数

$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=|x|$，将$f(x)$展开成傅里叶级数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2(\cos n\pi-1)}{\pi n^2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\pi$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$f(x)$是周期为2π的周期函数

三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是$f(x)$的傅里叶级数

其中$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,\cdots)\qquad b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots)$

第十五讲：函数项级数 > 傅里叶级数

$f(x)$是周期为2的周期函数，它在$[-1,1)$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,0)\\ 1 & x\in[0,1)\end{cases}$ 将$f(x)$展开成傅里叶级数

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx=1$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{0}^{1}\cos n\pi x dx=\left[\frac{\sin n\pi x}{n}\right]_0^1=0$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{1}\sin n\pi x dx=\left[-\frac{\cos n\pi x}{n}\right]_0^1=\frac{1-(-1)^n}{n}=\begin{cases}0 & n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{2}{n} & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x \qquad x\in(-\infty,+\infty)\text{且}x\neq\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x \qquad x=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$$

$f(x)$是周期为$2s$的周期函数

三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{s}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{s}\right)$是$f(x)$的傅里叶级数

其中$a_n=\dfrac{1}{s}\int_{-s}^{s}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{s}dx\quad(n=0,1,\cdots)\qquad b_n=\dfrac{1}{s}\int_{-s}^{s}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{s}dx\quad(n=1,2,\cdots)$