第三讲：n阶导数

1. 利用常用函数的n阶导数
2. 利用莱布尼茨公式
3. 利用递推公式
4. 利用麦克劳林展开式

1.求n阶导函数$f^{(n)}(x)$

2.求$f^{(n)}(0)$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$$

$$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$[\ln(x+a)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$$

$$((x+a)^k)^{(n)}=\begin{cases}0 & k=0,\cdots,\ n-1\\ k(k-1)\cdots(k-n+1)(x+a)^{k-n} & k\neq 0,\cdots,\ n-1\end{cases}$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求$y^{(n)}$

$$\begin{aligned}
&\sin^6 x+\cos^6 x\\
&=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\
&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x\\
&=1-3\sin^2 x\cos^2 x\\
&=1-3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\\
&=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}
\end{aligned}$$

$$(\sin^6 x+\cos^6 x)^{(n)}=\left(\frac{5+3\cos 4x}{8}\right)^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

棣莫弗公式

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + \sin nx$$

令 $\cos x + i\sin x = y \Rightarrow \cos x - i\sin x = \dfrac{1}{y}$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^n x = \frac{1}{2^n}\left(y + \frac{1}{y}\right)^n \qquad \sin x = \frac{1}{(2i)^n}\left(y - \frac{1}{y}\right)^n$$

$$y^n + \frac{1}{y^n} = \cos nx + i\sin nx + \cos nx - i\sin nx = 2\cos nx$$

$$y^n - \frac{1}{y^n} = \cos nx + i\sin nx - (\cos nx - i\sin nx) = 2i\sin nx$$

$$(\cos x - i\sin x)^n = (\cos(-x) + i\sin(-x))^n$$
$$= \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos nx - i\sin nx$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$$\cos^n x=\frac{1}{2^n}\left(y+\frac{1}{y}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{n-k}\frac{1}{y^k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{n-2k}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{n-2k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}y^{n-2(n-k)}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(y^{n-2k}+y^{2k-n}\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(n-2k)x$$

当n是偶数 $\sin^n x=\frac{1}{(2i)^n}\left(y-\frac{1}{y}\right)^n=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{n-k}\frac{(-1)^k}{y^k}=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k y^{n-2k}$

$$=\frac{1}{(2i)^n}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k y^{n-2k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}(-1)^{n-k}y^{n-2(n-k)}\right)$$

$$=\frac{1}{(2i)^n\cdot 2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\left(y^{n-2k}+y^{2k-n}\right)=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\cos(n-2k)x$$

当n是奇数 $\sin^n x=\frac{1}{(2i)^n}\left(y-\frac{1}{y}\right)^n=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{n-k}\frac{(-1)^k}{y^k}=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k y^{n-2k}$

$$=\frac{1}{(2i)^n}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k y^{n-2k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}(-1)^{n-k}y^{n-2(n-k)}\right)$$

$$=\frac{1}{(2i)^n\cdot 2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\left(y^{n-2k}-y^{2k-n}\right)=\frac{i}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin(n-2k)x$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求$y^{(n)}$

$$\cos^6 x=\frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{6}C_6^k\cos(6-2k)x$$

$$=\frac{1}{2^6}(\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+20+15\cos 2x+6\cos 4x+\cos 6x)$$

$$\sin^6 x=\frac{1}{(2i)^6}\sum_{k=0}^{6}C_6^k(-1)^k\cos(6-2k)x=-\frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{6}C_6^k(-1)^k\cos(6-2k)x$$

$$=-\frac{1}{2^6}(\cos 6x-6\cos 4x+15\cos 2x-20+15\cos 2x-6\cos 4x+\cos 6x)$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{24\cos 4x+40}{64}=\frac{3\cos 4x+5}{8}$$

$$\sin^6 x-\cos^6 x=\frac{4\cos 6x+60\cos 2x}{64}=\frac{\cos 6x+15\cos 2x}{16}$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

m是正整数，$y=\cos^m x$，求$y^{(n)}$

$$\cos^m x=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cos(m-2k)x$$

$$(\cos^m x)^{(n)}=\left(\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cos(m-2k)x\right)^{(n)}=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}C_m^k(m-2k)^n\cos\left[(m-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$y=\sin ax\sin bx$，求$y^{(n)}$

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}(\cos(ax-bx)-\cos(ax+bx))=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x)$$

$$(\sin ax\sin bx)^{(n)}=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x)^{(n)}$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$$

p、q是正整数，$y=\sin^p x\sin^q x$，求$y^{(n)}$

$y=\sin ax\sin bx\sin cx$，求$y^{(n)}$

$$\sin ax\sin bx\sin cx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x)\sin cx$$

$$=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x\sin cx-\cos(a+b)x\sin cx)$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(c+a-b)x+\sin(c-a+b)x]-\frac{1}{4}[\sin(c+a+b)x+\sin(c-a-b)x]$$

m是大于2的正整数，$y=\sin a_1x\sin a_2x\cdots\sin a_mx$，求$y^{(n)}$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$y=\dfrac{x^4}{x-1}$，求$y^{(2000)}$

$$\frac{x^4}{x-1}=\frac{x^4-1+1}{x-1}=x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^4}{x-1}\right)^{(2000)}=\left(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)^{(2000)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2000)}=\frac{(-1)^{2000}2000!}{(x-1)^{2001}}$$

记$t=x-1$

$$\frac{x^4}{x-1}=\frac{(t+1)^4}{t}=\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t}=t^3+4t^2+6t+4+\frac{1}{t}$$

$$=(x-1)^3+4(x-1)^2+6(x-1)+4+\frac{1}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^4}{x-1}\right)^{(2000)}=\left((x-1)^3+4(x-1)^2+6(x-1)+4+\frac{1}{x-1}\right)^{(2000)}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2000)}=\frac{(-1)^{2000}2000!}{(x-1)^{2001}}$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$y=\frac{x^{1001}}{x^2-1}$，求$y^{(2000)}$

记$s=x^2$

$$\frac{x^{1001}}{x^2-1}=\frac{x\cdot\left(x^2\right)^{500}}{x^2-1}=\frac{x\cdot s^{500}}{s-1}=x\frac{s^{500}-1+1}{s-1}=x\frac{s^{500}-1}{s-1}+\frac{x}{s-1}=x\left(1+s+\cdots+s^{498}+s^{499}\right)+\frac{x}{x^2-1}$$

$$=x\left(1+s+\cdots+s^{498}+s^{499}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$$

记$t=x^2-1$

$$\frac{x^{1001}}{x^2-1}=\frac{x\cdot\left(x^2\right)^{500}}{x^2-1}=\frac{x(t+1)^{500}}{t}=\frac{x\sum_{k=0}^{500}C_{500}^{k}t^{k}}{t}=\frac{x\left(\sum_{k=1}^{500}C_{500}^{k}t^{k}+1\right)}{t}=x\sum_{k=1}^{500}C_{500}^{k}t^{k-1}+\frac{x}{t}=x\sum_{k=1}^{500}C_{500}^{k}t^{k-1}+\frac{x}{x^2-1}$$

$$=x\sum_{k=1}^{500}C_{500}^{k}t^{k-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$$y=\frac{x^{1001}}{x^2-1},\quad 求y^{(2000)}$$

$$\frac{x^{1001}}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)x^{1001}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{1001}}{x-1}-\frac{x^{1001}}{x+1}\right)$$

$$\frac{x^{1001}}{x-1}=\frac{x^{1001}-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\sum_{n=0}^{1000}x^n+\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x^{1001}}{x+1}=\frac{x^{1001}+1}{x+1}+\frac{-1}{x+1}=\frac{x^{1001}-(-1)^{1001}}{x-(-1)}+\frac{-1}{x+1}=\sum_{n=0}^{1000}x^n(-1)^{1000-n}+\frac{-1}{x+1}$$

$a>b>c$，求函数$f(x)=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$的n阶导数

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}=\frac{1}{(x+a)(x+b)}\cdot\frac{1}{x+c}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\cdot\frac{1}{x+c}$$
$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}\cdot\frac{1}{x+c}-\frac{1}{x+b}\cdot\frac{1}{x+c}\right)$$
$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+c}\right)-\frac{1}{c-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}\right)\right]$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$p^2 \neq 4q$且$q \neq 0$，$y = \dfrac{1}{x^2 + px + q}$，求$y^{(n)}$

设α、β是$x^2 + px + q = 0$的两根(虚根或实根)

$$\frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x^2+px+q}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)\right)^{(n)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-\beta)^{n+1}}\right]$$

$$y^{(n)}(0) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}}\right)n!$$

第三讲：n阶导数 > 常用函数的n阶导数

$$y^{(n)}(0)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{\beta^{n+1}}\right]$$

$$\frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{\beta^{n+1}}=\frac{\beta^{n+1}(-1)^n n!}{q^{n+1}}-\frac{\alpha^{n+1}(-1)^n n!}{q^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!}{q^{n+1}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})$$

设$\alpha=a+bi$，$\beta=a-bi\quad(b\neq 0)$

$$\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}=(a+bi)^{n+1}-(a-bi)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(bi)^k a^{n+1-k}-\sum_{k=0}^{n+1}(-bi)^k a^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}b^k a^{n+1-k}\left[i^k-(-i)^k\right]$$

$$i^k-(-i)^k=\begin{cases}0 & k\text{是偶数}\\ 2i^k=2i\text{或}-2i & k\text{是奇数}\end{cases}$$

$$\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}=Si$$

$$\beta-\alpha=2bi\Rightarrow y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n!}{q^{n+1}}\cdot\frac{S}{2b}$$

第三讲：n阶导数 > 莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

当u或v是一个低次数多项式函数的时候，我们可以考虑利用这个公式

第三讲：n阶导数 > 莱布尼茨公式

设$y=x^2\sin x$，求$y^{(2000)}$

$$(x^2\sin x)^{(2000)}=\sum_{k=0}^{2000}C_{2000}^{k}(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(2000-k)}=\sum_{k=0}^{2}C_{2000}^{k}(x^2)^{(k)}(\sin x)^{(2000-k)}$$

$$=x^2(\sin x)^{(2000)}+2000\cdot 2x(\sin x)^{(1999)}+\frac{2000\cdot 1999}{2}\cdot 2(\sin x)^{(1998)}$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{2000\pi}{2}\right)+4000x\sin\left(x+\frac{1999\pi}{2}\right)+2000\cdot 1999\sin\left(x+\frac{1998\pi}{2}\right)$$

第三讲：n阶导数 > 莱布尼茨公式

$$y=\frac{x^4}{x-1}，\ 求y^{(2000)}$$

$$\left(\frac{x^4}{x-1}\right)^{(2000)}=\left(x^4\cdot\frac{1}{x-1}\right)^{(2000)}=\sum_{k=0}^{2000}C_{2000}^{k}\left(x^4\right)^{(k)}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2000-k)}=\sum_{k=0}^{4}C_{2000}^{k}\left(x^4\right)^{(k)}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2000-k)}$$

$$=x^4+2000\cdot4x^3\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(1999)}+\frac{2000\cdot1999}{2}\cdot12x^2\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(1998)}+\frac{2000\cdot1999\cdot1998}{6}\cdot24x\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(1997)}$$

$$+\frac{2000\cdot1999\cdot1998\cdot1997}{24}\cdot24\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(1996)}$$

设$y=\arctan x$，求$y^{(n)}(0)$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow(1+x^2)y'=1\text{两边对}x\text{求}n\text{阶导数}(n\geq 2)$$

$$C_n^0(1+x^2)y^{(n+1)}+C_n^1(1+x^2)'y^{(n)}+C_n^2(1+x^2)''y^{(n-1)}=0$$

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0\text{，把}x=0\text{代入}$$

$$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0$$

$$\Rightarrow\frac{y^{(n+1)}(0)}{n!}+\frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-2)!}=0\Rightarrow\frac{y^{(n+1)}(0)}{n!}=-\frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-2)!}\quad(n\geq 2)\Rightarrow\frac{y^{(n)}(0)}{(n-1)!}=-\frac{y^{(n-2)}(0)}{(n-3)!}\quad(n\geq 3)$$

$$\text{若}n\text{是偶数}\frac{y^{(n)}(0)}{(n-1)!}=(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{y^{(2)}(0)}{1!}=0\Rightarrow y^{(n)}(0)=0$$

$$\text{若}n\text{是奇数}\frac{y^{(n)}(0)}{(n-1)!}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{y^{(1)}(0)}{0!}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Rightarrow y^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$$

第三讲：n阶导数 > 递推公式

设$y=\arcsin x$，求$y^{(n)}(0)$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y'=1\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y''+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y'=0\Rightarrow\left(1-x^2\right)y''-xy'=0$$

两边对x求n阶导数$(n\geq 2)$

$$C_n^0\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}+C_n^1\left(1-x^2\right)'y^{(n+1)}+C_n^2\left(1-x^2\right)''y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0$$

$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0$，把$x=0$代入

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0$$

$$\Rightarrow\frac{y^{(n+2)}(0)}{(n!!)^2}-\frac{y^{(n)}(0)}{((n-2)!!)^2}=0\Rightarrow\frac{y^{(n+2)}(0)}{(n!!)^2}=\frac{y^{(n)}(0)}{((n-2)!!)^2}\quad(n\geq 2)$$

若n是偶数$\dfrac{y^{(n)}(0)}{((n-2)!!)^2}=\dfrac{y^{(2)}(0)}{(0!!)^2}=0\Rightarrow y^{(n)}(0)=0$

若n是奇数$\dfrac{y^{(n)}(0)}{((n-2)!!)^2}=\dfrac{y^{(3)}(0)}{(1!!)^2}=1\Rightarrow y^{(n)}(0)=((n-2)!!)^2$

第三讲：n阶导数 > 递推公式

$$y=\frac{x^4}{x-1}，\ 求y^{(2000)}$$

$y(x-1)=x^4$ 对x求n阶导数$(n\geq 5)$

$$C_n^0 y^{(n)}(x-1)+C_n^1 y^{(n-1)}(x-1)'=0$$

$$y^{(n)}(x-1)+ny^{(n-1)}=0$$

$$y^{(n)}(1-x)-ny^{(n-1)}=0$$

$$y^{(n)}(1-x)^n-ny^{(n-1)}(1-x)^{n-1}=0$$

$$\frac{y^{(n)}(1-x)^n}{n!}-\frac{y^{(n-1)}(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}=0\Rightarrow\frac{y^{(n)}(1-x)^n}{n!}=\frac{y^{(n-1)}(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{y^{(n)}(1-x)^n}{n!}=\frac{y^{(4)}(1-x)^4}{4!}$$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^n}\frac{y^{(4)}(1-x)^4}{4!}\Rightarrow y^{(2000)}=\frac{2000!}{(1-x)^{2000}}\frac{y^{(4)}(1-x)^4}{4!}$$

第三讲：n阶导数 > 麦克劳林级数

$f(x)=x^{1000}\sin x$，求$f^{2019}(0)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$x^{1000}\sin x=x^{1000}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1001}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n$$

比较等式两边x^{2019}的系数

$$\frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}=\frac{(-1)^{509}}{1019!}\Rightarrow f^{(2019)}(0)=-\frac{2019!}{1019!}$$

第三讲：n阶导数 > 麦克劳林级数

$f(x)=e^{x^2}\sin x$，求$f^{(2020)}(0)$和$f^{(2021)}(0)$

$$\sum_{n=p}^{\infty}a_n x^{mn+s}\cdot\sum_{n=q}^{\infty}b_n x^{mn+t}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{i=p}^{n-q}a_i b_{n-i}\right)x^{mn+s+t}$$

其中p，q是非负整数，m是正整数，s，t是整数

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{(-1)^{n-i}}{[2(n-i)+1]!}x^{2n+1}$$

x^{2020}的系数$\dfrac{f^{(2020)}(0)}{2020!}=0$

x^{2021}的系数$\dfrac{f^{(2021)}(0)}{2021!}=\displaystyle\sum_{i=0}^{1010}\frac{1}{i!}\frac{(-1)^{1010-i}}{[2(1010-i)+1]!}$ 令$2n+1=2021\Rightarrow n=1010$

第三讲：n阶导数 > 麦克劳林级数

$f(x)=e^{x^2}\sin x$，求$f^{(2020)}(0)$和$f^{(2021)}(0)$

$f(x)=e^{x^2}\sin x$

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x)$是奇函数$\Rightarrow f^{(2020)}(x)$是奇函数$\Rightarrow f^{(2020)}(0)$

奇函数的导函数是偶函数 $g(-x)=-g(x)\Rightarrow -g'(-x)=-g'(x)\Rightarrow g'(-x)=g'(x)$

偶函数的导函数是奇函数 $g(-x)=g(x)\Rightarrow -g'(-x)=g'(x)\Rightarrow g'(-x)=-g'(x)$

奇函数的任意偶数阶导函数仍然是奇函数

偶函数的任意偶数阶导函数仍然是偶函数

$f(x)=x^{1000}\tan x$，求$f^{(2020)}(0)$

第三讲：n阶导数 > 麦克劳林级数

函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\dfrac{-x\ln(1-x)}{(1-x)^2}$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{1-x^2}$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$，求$f^{(n)}(0)$

$a^2+b^2\neq 0$，函数$f(x)=e^{ax}\cos bx$，求$f^{(n)}(0)$

函数$f(x)=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$，求$f^{(n)}(0)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

求出$f(x)$的麦克劳林展开式$\rightarrow$求出$f^{(n)}(0)$

求麦克劳林展开式的方法就是求$f^{(n)}(0)$的方法