第十三讲：形心坐标 > 二重积分

$(\bar{x},\ \bar{y})$是平面区域D的形心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\,d\sigma}{\iint\limits_D dS}$

$$\iint\limits_D x\,d\sigma=\bar{x}\iint\limits_D d\sigma=\bar{x}S$$

$$\iint\limits_D y\,d\sigma=\bar{y}\iint\limits_D d\sigma=\bar{y}S$$

S表示平面区域D的面积

第十三讲：形心坐标 > 二重积分

D是曲线$x^2+x+y^2+y+xy=1$所围的区域，计算$\iint\limits_D (ax+by)dxdy$

A、B、C待定,$(x+A)^2+(y+B)^2+(x+A)(y+B)=C$

$x^2+y^2+xy+(2A+B)x+(2B+A)y+A^2+B^2+AB-C=0$

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ 2B+A=1 \\ A^2+B^2+AB-C=-1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{4}{3}$$

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$是$x^2+y^2+xy=\frac{4}{3}$向左向下平移$\frac{1}{3}$个单位得到

$x^2+y^2+xy=\frac{4}{3}$关于原点(0,0)对称

$\Rightarrow(0,0)$是$x^2+y^2+xy=\frac{4}{3}$的形心坐标$\Rightarrow(0,0)$是D_0的形心坐标 （D_0是$x^2+y^2+xy=\frac{4}{3}$所围区域）

$\Rightarrow\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$是D的形心坐标

$$\iint\limits_D (ax+by)dxdy=a\iint\limits_D xdxdy+b\iint\limits_D ydxdy=a\left(-\frac{1}{3}\right)S+b\left(-\frac{1}{3}\right)S$$

第十三讲：形心坐标 > 二重积分

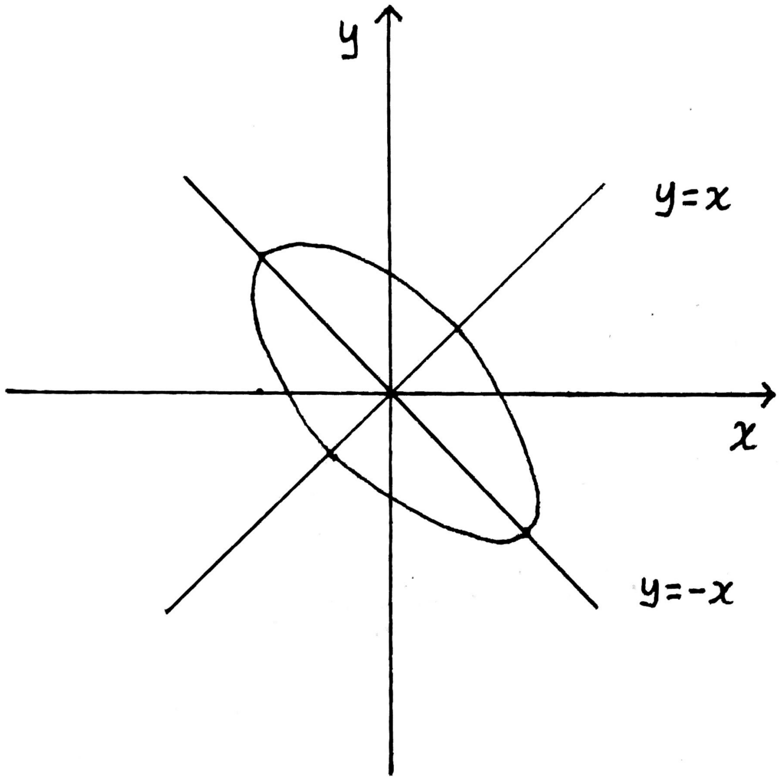
D是曲线$x^2+x+y^2+y+xy=1$所围的区域，计算$\iint\limits_D (ax+by)dxdy$

$x^2+y^2+xy=\dfrac{4}{3}$关于直线$y=x$、$y=-x$对称

$\Rightarrow y=x$、$y=-x$被$x^2+y^2+xy=\dfrac{4}{3}$所截长度是长轴、短轴

$$S_0=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$S=S_0=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$$



第十三讲：形心坐标 > 三重积分

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$是空间区域Ω的形心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,dv=\bar{x}\iiint\limits_{\Omega} dv=\bar{x}V$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,dv=\bar{y}\iiint\limits_{\Omega} dv=\bar{y}V$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\bar{z}\iiint\limits_{\Omega} dv=\bar{z}V$$

V表示空间区域Ω的体积

第十三讲：形心坐标 > 三重积分

球体$x^2+y^2+z^2\le 1$被平面$ax+by+cz=1$($\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1$)所截，Ω是不含原点的一部分，计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$

设P是Ω的形心$\Rightarrow OP\perp$平面$ax+by+cz=1\Rightarrow$直线OP：$x=at$，$y=bt$，$z=ct$

将Ω绕点O旋转一定角度得到Ω'，使得P'落在z轴正半轴上(P'是P的旋转对应点)

Ω'是球体$x^2+y^2+z^2\le 1$被平面$z=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$所截得的且位于平面上方的一部分

$$OP=OP'=z_{P'}=\iiint\limits_{\Omega'}zdv\Big/\iiint\limits_{\Omega'}dv$$

$$\iiint\limits_{\Omega'}zdv=\int_k^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_k^1 z(1-z^2)\pi dz=\frac{\pi}{4}(1-k^2)^2\quad 记k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\iiint\limits_{\Omega'}dv=\int_k^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_k^1(1-z^2)\pi dz=\frac{\pi}{3}(k^3-3k+2)=\frac{\pi}{3}(k+2)(k-1)^2$$

$$OP=\frac{3(k+1)^2}{4(k+2)}\quad 设P=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)\ (t_0>0)\quad OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t_0=\frac{t_0}{k}$$

$$\Rightarrow t_0=\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}\Rightarrow P=\left(\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}a,\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}b,\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}c\right)$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})V=\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}(a+b+c)\cdot\frac{\pi}{3}(k+2)(k-1)^2=\frac{\pi}{4}(k^2-1)^2(a+b+c)$$

第十三讲：形心坐标 > 三重积分

球体$x^2+y^2+z^2\le 1$被平面$ax+by+cz=1\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1\right)$所截，$\Omega$是不含原点的一部分，计算

设P是Ω的形心$\Rightarrow OP\perp$平面$ax+by+cz=1\Rightarrow$直线OP：$x=at$，$y=bt$，$z=ct$

将Ω绕点O旋转一定角度得到Ω'，使得P'落在z轴正半轴上(P'是P的旋转对应点)

Ω'是球体$x^2+y^2+z^2\le 1$被平面$z=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$所截得的且位于平面上方的一部分

$$OP=OP'=z_{P'}=\iiint\limits_{\Omega'}z\,dv\Big/\iiint\limits_{\Omega'}dv$$

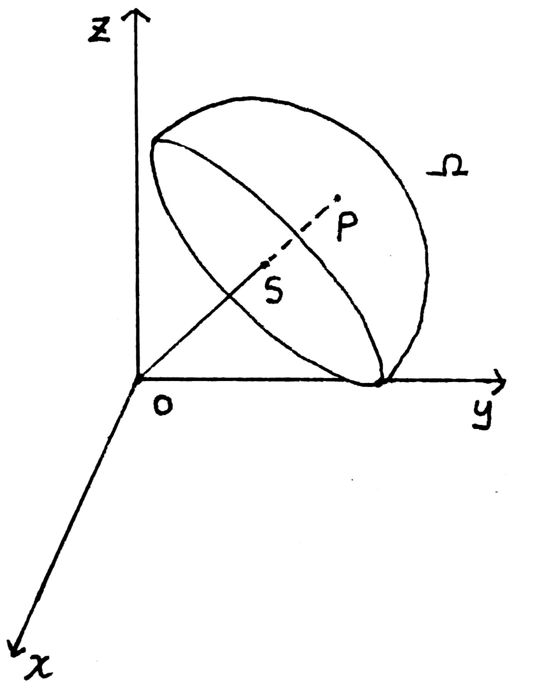
$$\iiint\limits_{\Omega'}z\,dv=\int_k^1 z\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_k^1 z\left(1-z^2\right)\pi dz=\frac{\pi}{4}\left(1-k^2\right)^2\quad 记k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

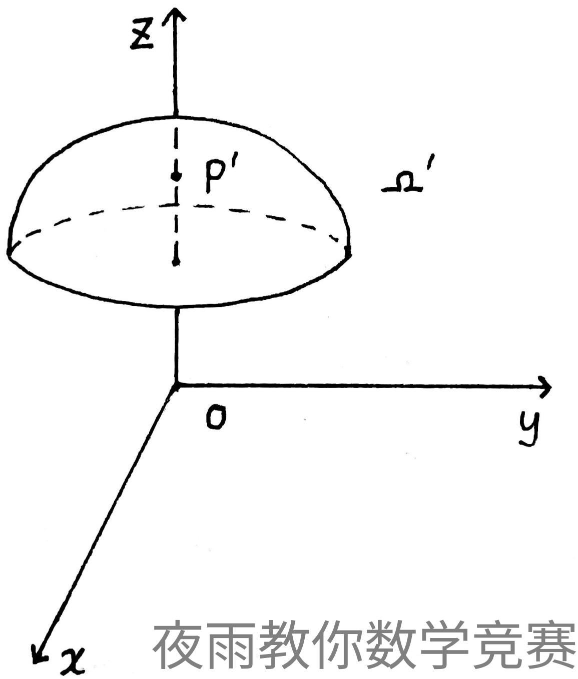
$$\iiint\limits_{\Omega'}dv=\int_k^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_k^1\left(1-z^2\right)\pi dz=\frac{\pi}{3}\left(k^3-3k+2\right)=\frac{\pi}{3}(k+2)(k-1)^2$$

$$OP=\frac{3(k+1)^2}{4(k+2)}\quad 设P=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)\ (t_0>0)\ \ OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t_0=\frac{t_0}{k}$$

$$\Rightarrow t_0=\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}\Rightarrow P=\left(\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}a,\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}b,\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}c\right)$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})V=\frac{3k(k+1)^2}{4(k+2)}(a+b+c)\cdot\frac{\pi}{3}(k+2)(k-1)^2=\frac{\pi}{4}\left(k^2-1\right)^2(a+b+c)$$





第十三讲：形心坐标 > 三重积分

圆锥体Ω的顶点在原点，底面在平面$ax+by+cz=1(a^2+b^2+c^2\neq 0)$上，底面半径是1，计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv$

第十三讲：形心坐标 > 曲面积分

$(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$是曲面$\Sigma$的形心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} x\,dS}{\iint\limits_{\Sigma} dS}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} y\,dS}{\iint\limits_{\Sigma} dS}$，$\bar{z}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} z\,dS}{\iint\limits_{\Sigma} dS}$

$$\iint\limits_{\Sigma} x\,dS=\bar{x}\iint\limits_{\Sigma} dS=\bar{x}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma} y\,dS=\bar{y}\iint\limits_{\Sigma} dS=\bar{y}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,dS=\bar{z}\iint\limits_{\Sigma} dS=\bar{z}S$$

S表示曲面Σ的面积

第十三讲：形心坐标 > 曲面积分

Σ是柱面$x^2+x+y^2+y=1$介于平面$z=0$，$z=1$之间的部分，计算$\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz)dS$

柱面:$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow(\bar{x}，\bar{y}，\bar{z})=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz)dS=(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z})S=\frac{1}{2}(c-a-b)\cdot\sqrt{2}\pi$$

第十三讲：形心坐标 > 曲面积分

球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$ax+by+cz=1(\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1)$截成两部分，$\Sigma$是其中较小的一部分，计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$

设P是Σ的形心$\Rightarrow OP\perp$平面$ax+by+cz=1\Rightarrow$直线OP：$x=at$，$y=bt$，$z=ct$

将Σ绕点O旋转一定角度得到Σ'，使得P'落在z轴正半轴上(P'是P的旋转对应点)

Σ'是球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$z=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$所截得的且位于平面上方的一部分

$$OP=OP'=z_{P'}=\iint\limits_{\Sigma'}zdS\Big/\iint\limits_{\Sigma'}dS$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}zdS=\iint\limits_{D_{\theta z}}zd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_k^1 zdz=(1-k^2)\pi\quad 记k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}dS=\iint\limits_{D_{\theta z}}d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_k^1 dz=2(1-k)\pi$$

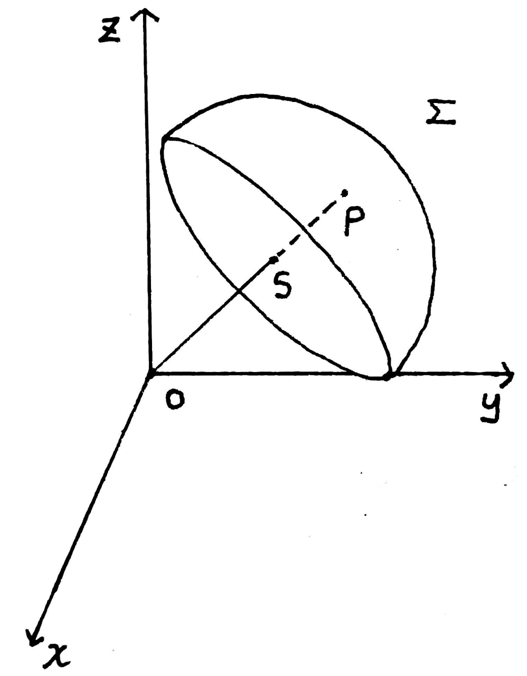
$$OP=\frac{k+1}{2}\quad 设P=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)\ (t_0>0)\quad OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t_0=\frac{t_0}{k}$$

$$\Rightarrow t_0=\frac{k(k+1)}{2}\Rightarrow P=\left(\frac{k(k+1)}{2}a,\frac{k(k+1)}{2}b,\frac{k(k+1)}{2}c\right)$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})S=\frac{k(k+1)}{2}(a+b+c)\cdot 2(1-k)\pi=k(1-k^2)(a+b+c)\pi$$

第十三讲：形心坐标 > 曲面积分

球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$ax+by+cz=1(\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1)$截成两部分,Σ是其中较 … $)dS$



设P是Σ的形心$\Rightarrow OP\perp$平面$ax+by+cz=1\Rightarrow$直线OP：$x=at$，$y=bt$，$z=ct$

将Σ绕点O旋转一定角度得到Σ′，使得P′落在z轴正半轴上(P′是P的旋转对应点)

Σ′是球面$x^2+y^2+z^2=1$被平面$z=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$所截得的且位于平面上方的一部分

$$OP=OP'=z_{P'}=\iint_{\Sigma'}zdS\Big/\iint_{\Sigma'}dS$$

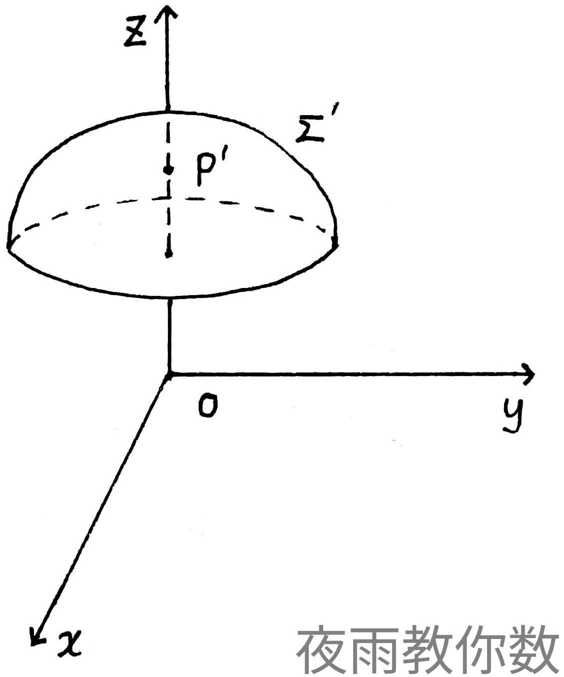
$$\iint_{\Sigma'}zdS=\iint_{D_{\theta z}}zd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_k^1 zdz=\left(1-k^2\right)\pi\quad 记k=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\iint_{\Sigma'}dS=\iint_{D_{\theta z}}d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_k^1 dz=2(1-k)\pi$$

$OP=\dfrac{k+1}{2}$　设$P=(at_0,\ bt_0,\ ct_0)\ (t_0>0)$　$OP=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t_0=\dfrac{t_0}{k}$

$$\Rightarrow t_0=\frac{k(k+1)}{2}\Rightarrow P=\left(\frac{k(k+1)}{2}a,\frac{k(k+1)}{2}b,\frac{k(k+1)}{2}c\right)$$

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})S=\frac{k(k+1)}{2}(a+b+c)\cdot2(1-k)\pi=k\left(1-k^2\right)(a+b+c)\pi$$



第十三讲：形心坐标 > 曲线积分

$(\bar{x},\ \bar{y})$是平面曲线L的形心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\int_L x\,ds}{\int_L ds}$，$\bar{y}=\dfrac{\int_L y\,ds}{\int_L ds}$

$$\int_L x\,ds=\bar{x}\int_L ds=\bar{x}L$$

$$\int_L y\,ds=\bar{y}\int_L ds=\bar{y}L$$

L表示空间曲线L的长度

$(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$是空间曲线Γ的形心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\int_\Gamma x\,ds}{\int_\Gamma ds}$，$\bar{y}=\dfrac{\int_\Gamma y\,ds}{\int_\Gamma ds}$，$\bar{z}=\dfrac{\int_\Gamma z\,ds}{\int_\Gamma ds}$

$$\int_\Gamma x\,ds=\bar{x}\int_\Gamma ds=\bar{x}L$$

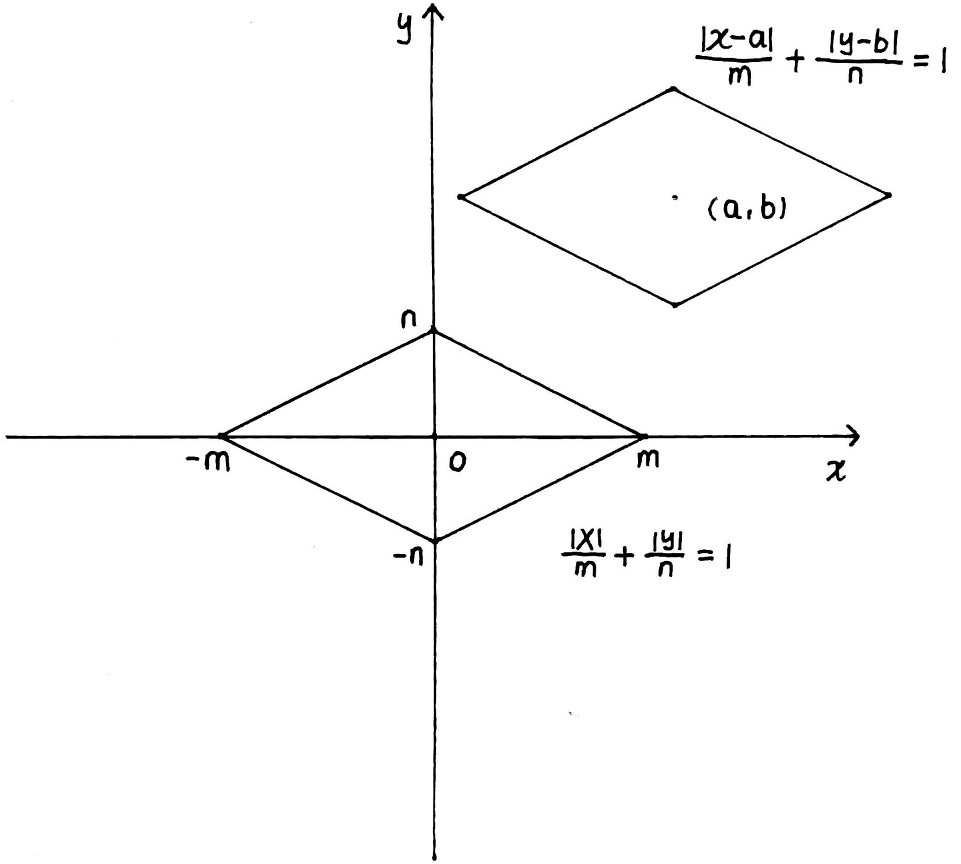
$$\int_\Gamma y\,ds=\bar{y}\int_\Gamma ds=\bar{y}L$$

$$\int_\Gamma z\,ds=\bar{z}\int_\Gamma ds=\bar{z}L$$

L表示空间曲线Γ的长度

第十三讲：形心坐标 > 曲线积分

L为闭曲线$\frac{|x-a|}{m}+\frac{|y-b|}{n}=1$，计算$\int_L(px+qy)ds$



$(\bar{x},\ \bar{y})=(a,\ b)$

$$\int_L(px+qy)ds=(p\bar{x}+q\bar{y})L=4(p\bar{x}+q\bar{y})\sqrt{m^2+n^2}$$

第十三讲：形心坐标 > 曲线积分

Γ是球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$ax+by+cz=1(\sqrt{a^2+b^2+c^2}>1)$的交线，计算$\int_L(x+y+z)ds$

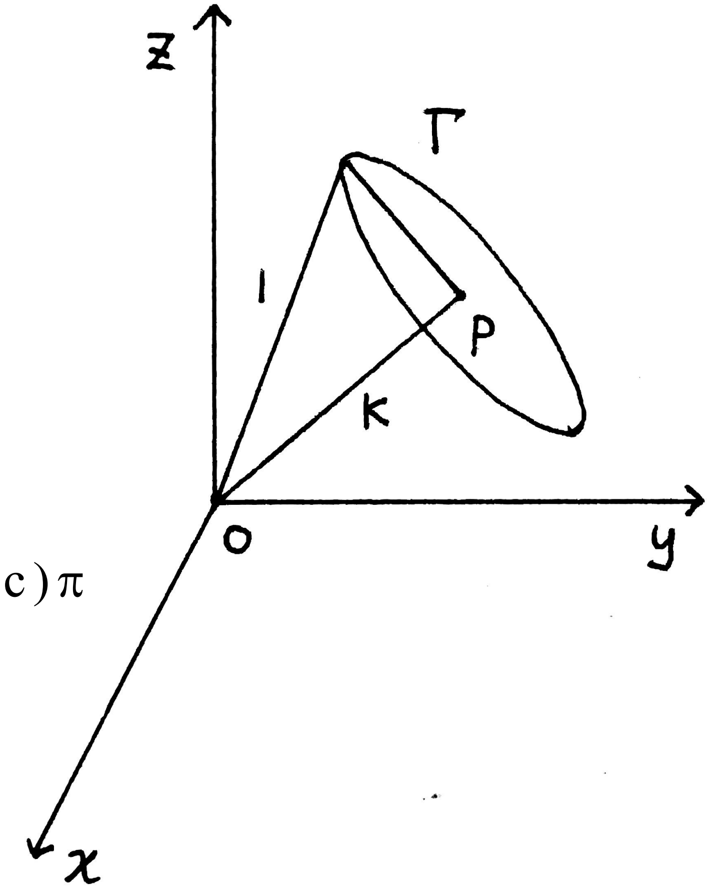
设P是Γ的形心$\Rightarrow$ P在平面$ax+by+cz=1$且$OP\perp$平面$ax+by+cz=1$

直线OP：$x=at$，$y=bt$，$z=ct$

设$P=(at_0, bt_0, ct_0)$ $(t_0>0)$代入平面$ax+by+cz=1$

$\Rightarrow t_0=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}=k^2$ 记$k=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow P=\left(ak^2, bk^2, ck^2\right)$



$\int_L(x+y+z)ds=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})L=(a+b+c)k^2\cdot 2\sqrt{1-k^2}\pi=2k^2\sqrt{1-k^2}(a+b+c)\pi$