第十四讲：常数项级数

设无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$

$\{S_n\}$收敛(即$\lim_{n\to\infty} S_n$存在)则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

$\{S_n\}$发散(即$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在)则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

若$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{pn-(p-1)} + \cdots + u_{pn-1} + u_{pn})$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$同敛散 （p是大于1的正整数）

$$(u_1 + \cdots + u_{p-1} + u_p) + (u_{p+1} + \cdots + u_{2p-1} + u_{2p}) + (u_{2p+1} + \cdots + u_{3p-1} + u_{3p}) + \cdots\cdots$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

第十四讲：常数项级数

若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{pn-(p-1)}+\cdots+u_{pn-1}+u_{pn})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同敛散　(p是大于1的正整数)

记 $\{S_n\}$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列

$$\sum_{n=1}^{N}(u_{pn-(p-1)}+\cdots+u_{pn-1}+u_{pn})=\sum_{n=1}^{pN}u_n=S_{pN}$$

i.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{pn-(p-1)}+\cdots u_{pn-1}+u_{pn})$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(u_{pn-(p-1)}+\cdots+u_{pn-1}+u_{pn})$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty}S_{pN}$ 存在

$S_{pN+k}=S_{pN}+u_{pN+1}+\cdots+u_{pN+k}\quad k\in\{1,\cdots,\ p-1\}$

$\lim\limits_{N\to\infty}S_{pN+k}$ 存在且 $\lim\limits_{N\to\infty}S_{pN+k}=\lim\limits_{N\to\infty}S_{pN}\quad k\in\{1,\cdots,\ p-1\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

ii.如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{pn-(p-1)}+\cdots u_{pn-1}+u_{pn})$ 发散 $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(u_{pn-(p-1)}+\cdots+u_{pn-1}+u_{pn})$ 不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty}S_{pN}$ 不存在

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散　　　　若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同敛散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 级数敛散性证明方法

设$\{S_n\}$是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列

$\Rightarrow$数列$\{S_n\}$单调递增

若$\{S_n\}$有界$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$存在$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

若$\{S_n\}$无界即$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

存在$M>0$使得对于任意的k有$S_{n_k} < M$

假设数列$\{S_n\}$无界

则存在正整数N，使得当$n>N$有$S_n > M$

$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow \exists$正整数s，使得$n_s > N \Rightarrow S_{n_s} > M \Rightarrow M < S_{n_s} < M$矛盾！

故数列$\{S_n\}$有界

方法一

收敛的证明：部分和数列$\{S_n\}$有界　($\exists M>0$，使得对任意的正整数n恒有$S_n < M$)

只需证明部分和数列$\{S_n\}$的某一子数列$\{S_{n_k}\}$有界

只需证明部分和数列$\{S_n\}$的子数列$\{S_{pn}\}$有界　$(S_{pn-p+1} \le \cdots \le S_{pn-1} \le S_{pn})$

发散的证明：部分和数列$\{S_n\}$无界　(对任意的$M>0$，总存在正整数n，使得$S_n > M$)

只需证明部分和数列$\{S_n\}$的某一子数列$\{S_{n_k}\}$无界

只需证明部分和数列$\{S_n\}$的子数列$\{S_{pn}\}$无界

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 级数敛散性证明方法

方法二 (比值形式的比较审敛法)

收敛的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=s\quad(0\le s<+\infty)$ (级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛)

发散的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=s>0$或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$ (级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散)

方法三 (不等式形式的比较审敛法)

收敛的证明：存在正整数N，当$n\ge N$时有$u_n\le kv_n\ (k>0)$成立 (级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛)

发散的证明：存在正整数N，当$n\ge N$时有$u_n\ge kv_n\ (k>0)$成立 (级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散)

方法四 (比值审敛法)

收敛的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$

发散的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$ (或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$)

方法五 (根植值审敛法)

收敛的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho<1$

发散的证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho>1$ (或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 级数敛散性证明方法

方法六 (收敛级数必要条件)

发散的证明：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = s > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在

方法七

发散的证明：余项 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \not\to 0 \quad n\to\infty$

对任意的正整数n，总存在正整数p，使得 $u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} > M > 0$

假设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛，设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = s \Rightarrow r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = s - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \to s - s = 0$

对任意的正整数n，$r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k > u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} > M > 0$ 矛盾！故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 部分和数列子数列

q是大于1的正整数，证明：正项级数$\sum_{n=q}^{\infty} a_{\left[\frac{n}{q}\right]}$与正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$同敛散

$$\sum_{n=q}^{\infty} a_{\left[\frac{n}{q}\right]} = \overbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}^{q} + \overbrace{a_2 + a_2 + \cdots + a_2}^{q} + \overbrace{a_3 + a_3 + \cdots + a_3}^{q} + \cdots\cdots$$

记$S_j = \sum_{n=q}^{j} a_{\left[\frac{n}{q}\right]}$　$j = q，q+1,\cdots$

$$S_{qN+q-1} = \sum_{n=q}^{qN+q-1} a_{\left[\frac{n}{q}\right]} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=qk}^{qk+q-1} a_{\left[\frac{n}{q}\right]} = \sum_{k=1}^{N}\left(a_{\left[\frac{qk}{q}\right]} + a_{\left[\frac{qk+1}{q}\right]} + \cdots + a_{\left[\frac{qk+q-1}{q}\right]}\right) = q\sum_{k=1}^{N} a_k$$

i.若$\sum_{n=q}^{\infty} a_{\left[\frac{n}{q}\right]}$收敛$\Rightarrow S_j < M \Rightarrow S_{qN+q-1} < M \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} a_k < \frac{M}{q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

ii.若$\sum_{n=q}^{\infty} a_{\left[\frac{n}{q}\right]}$发散$\Rightarrow S_j \to +\infty \Rightarrow S_{qN+q-1} \to +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} a_k \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 部分和数列子数列

证明：调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

记 $S_{2^m}=\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{n}$ （m是正整数）

$$S_{2^m}=\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{i}\ge 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1}=1+\frac{m}{2}\to+\infty$$

p，q待定

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{1}{n}\ge\sum_{n=p+1}^{p+q}\frac{1}{p+q}=\frac{q}{p+q}$$

取 $p=q$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=q+1}^{2q}\frac{1}{n}\ge\sum_{n=q+1}^{2q}\frac{1}{2q}=\frac{q}{2q}=\frac{1}{2}$$

取正整数数列 $\{q_k\}$ 满足 $q_k+1>2q_{k-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=q_1+1}^{2q_1}\frac{1}{n}+\sum_{n=q_2+1}^{2q_2}\frac{1}{n}+\cdots+\sum_{n=q_k+1}^{2q_k}\frac{1}{n}\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{k}{2},$$ 取 $q_k=2^k$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 部分和数列子数列

证明：调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

p，q待定，$p>q$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{n}>\sum_{n=q}^{p}\frac{1}{p}=\frac{p-q+1}{p}$$

取$p=2q$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=q}^{2q}\frac{1}{n}>\sum_{n=q}^{2q}\frac{1}{2q}=\frac{q+1}{2q}>\frac{1}{2}$$

取正整数数列$\{q_k\}$满足$q_k>2q_{k-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\sum_{n=q_1}^{2q_1}\frac{1}{n}+\sum_{n=q_2}^{2q_2}\frac{1}{n}+\cdots+\sum_{n=q_k}^{2q_k}\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 积分判别法

证明：正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$当$q>1$时收敛，当$0\le q\le 1$发散

当$q>1$

$$\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n(\ln n)^q}=\sum_{n=3}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n(\ln n)^q}dx\le\sum_{n=3}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x(\ln x)^q}dx=\int_2^N\frac{1}{x(\ln x)^q}dx=\left[\frac{1}{(1-q)(\ln x)^{q-1}}\right]_2^N=\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}}-\frac{1}{(q-1)(\ln N)^{q-1}}$$

$$\le\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}}$$

当$0\le q\le 1$

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(\ln n)^q}=\sum_{n=2}^{N}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{n(\ln n)^q}dx\ge\sum_{n=2}^{N}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x(\ln x)^q}dx=\int_2^{N+1}\frac{1}{x(\ln x)^q}dx=\begin{cases}\ln\ln x\Big|_2^{N+1}=\ln\ln(N+1)-\ln\ln 2 & q=1\\ \left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{N+1}=\frac{[\ln(N+1)]^{1-q}}{1-q}-\frac{(\ln 2)^{1-q}}{1-q} & 0\le q<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(\ln n)^q}\to+\infty$$

证明：调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 积分判别法

设$a_n>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明：

(1)当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛

(2)当$\alpha\le1$，且$S_n\to\infty\quad(n\to\infty)$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散

当$\alpha>1$时

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_n^\alpha}=\sum_{n=2}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}=\sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^\alpha}dx\le\sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^\alpha}dx=\int_{S_1}^{S_N}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{S_1}^{S_N}=\frac{1}{(\alpha-1)S_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-1)S_N^{\alpha-1}}\le\frac{1}{(\alpha-1)S_1^{\alpha-1}}$$

当$0<\alpha\le1$时

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_{n-1}^\alpha}=\sum_{n=2}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}^\alpha}=\sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_{n-1}^\alpha}dx\ge\sum_{n=2}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^\alpha}dx=\int_{S_1}^{S_N}\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\ln x\Big|_{S_1}^{S_N}=\ln S_N-\ln S_1 & \alpha=1\\ \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{S_1}^{S_N}=\dfrac{S_N^{1-\alpha}-S_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} & 0<\alpha<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_{n-1}^\alpha}\text{发散}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 积分判别法

设$a_n>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明：

(1)当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛

(2)当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty\quad(n\to\infty)$时$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}\text{发散}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\Big/\frac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right)^{\alpha}\qquad\frac{a_n}{S_n}\to 0???$$

$$\text{假设}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{S_n^{1-\alpha}}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}\text{收敛 矛盾！}$$

$$\text{当}\alpha\le 0\text{时},\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_{n-1}^{\alpha}}\ge\sum_{n=2}^{N}\frac{a_n}{S_1^{\alpha}}=\frac{1}{S_1^{\alpha}}\sum_{n=2}^{N}a_n\to+\infty$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 积分判别法

$x>0$，设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和为S_n，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$收敛

$$\sum_{n=1}^{N}a_n e^{-S_n x}=\sum_{n=1}^{N}(S_n-S_{n-1})e^{-S_n x}=\sum_{n=1}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}e^{-S_n x}dt\le\sum_{n=1}^{N}\int_{S_{n-1}}^{S_n}e^{-tx}dt=\int_{S_0}^{S_N}e^{-tx}dt$$

$$=\left.\frac{e^{-tx}}{-x}\right|_{S_0}^{S_N}=\frac{e^{-S_0 x}}{x}-\frac{e^{-S_N x}}{x}\le\frac{e^{-S_0 x}}{x}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 凑差分

设$\alpha>1$，数列$\{p_n\}$满足$p_n>0$，$p_{n+1}\ge p_n$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}$收敛

$$\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}=\frac{p_n}{p_np_{n-1}^{\alpha}}-\frac{p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}=\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}=\left(\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{p_n^{\alpha}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}\right)\le\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_n^{\alpha}}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}\le\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)=\frac{1}{p_0^{\alpha}}-\frac{1}{p_N^{\alpha}}\le\frac{1}{p_0^{\alpha}}$$

$$\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}=\frac{p_n}{p_np_{n-1}^{\alpha}}-\frac{p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}=\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}=\left(\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}}-\frac{1}{p_{n-1}p_{n-2}^{\alpha-1}}\right)+\left(\frac{1}{p_{n-1}p_{n-2}^{\alpha-1}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}\right)\le\frac{1}{p_{n-1}p_{n-2}^{\alpha-1}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}$$

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{p_n-p_{n-1}}{p_np_{n-1}^{\alpha}}\le\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{p_{n-1}p_{n-2}^{\alpha-1}}-\frac{1}{p_np_{n-1}^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{p_1p_0^{\alpha-1}}-\frac{1}{p_Np_{N-1}^{\alpha-1}}\le\frac{1}{p_1p_0^{\alpha-1}}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 凑差分

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$收敛

记$S_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\frac{S_n}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)S_n=\frac{S_n}{n}-\frac{S_n}{n+1}=\left(\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)+\left(\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)+a_{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{N}a_{n+1}=\frac{S_1}{1}-\frac{S_{N+1}}{N+1}+\sum_{n=1}^{N}a_{n+1}\le S_1+M$$

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\frac{S_n}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)S_n=\frac{S_n}{n}-\frac{S_n}{n+1}=\left(\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n}\right)+\left(\frac{S_{n-1}}{n}-\frac{S_n}{n+1}\right)$$

$$=a_n+\left(\frac{S_{n-1}}{n}-\frac{S_n}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}a_n+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{S_{n-1}}{n}-\frac{S_n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{N}a_n+\frac{S_0}{1}-\frac{S_N}{N+1}\le M+S_0$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 凑差分

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$收敛

$\{a_n\}\{b_n\}$

阿贝尔变换$\sum a\cdot\Delta b\to\sum b\cdot\Delta a$

记$S_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)S_n=\frac{S_1}{1}-\frac{S_N}{N+1}+\sum_{n=1}^{N-1}(S_{n+1}-S_n)\frac{1}{n+1}$$

$$=S_1-\frac{S_N}{N+1}+\sum_{n=1}^{N-1}a_{n+1}\le S_1+M$$

$\{S_n\}\{\frac{1}{n}\}$

$\frac{S_N}{N}-\frac{S_N}{N+1}$

$\frac{S_{N-1}}{N-1}-\frac{S_{N-1}}{N}$

$\vdots$

$\frac{S_2}{2}-\frac{S_2}{3}$

$\frac{S_1}{1}-\frac{S_1}{2}$

$-\frac{S_N}{N+1}$

$\frac{S_N}{N}-\frac{S_{N-1}}{N}$

$\vdots$

$\frac{S_2}{2}-\frac{S_1}{2}$

$\frac{S_1}{1}$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法一 > 凑差分

已知$\{a_k\}\{b_k\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0$，$k=1,2,\cdots$，δ为一常数

证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛　(第十届初赛)

$$k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}=k\sqrt[k]{(a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(a_kb_k)}\le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\le\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{b_{k+1}b_k}$$

记$S_k=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_k}{b_{k+1}b_k}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b_k-b_{k+1}}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)S_k\le\frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)S_k$$

$$=\frac{1}{\delta}\left[\frac{S_1}{b_1}-\frac{S_N}{b_{N+1}}+\sum_{n=1}^{N-1}(S_{k+1}-S_k)\frac{1}{b_{k+1}}\right]=\frac{1}{\delta}\left(\frac{S_1}{b_1}-\frac{S_N}{b_{N+1}}+\sum_{n=1}^{N-1}a_{k+1}\right)\le\frac{1}{\delta}\left(\frac{S_1}{b_1}+M\right)$$

$\dfrac{S_N}{b_N}-\dfrac{S_N}{b_{N+1}}$　　　　$-\dfrac{S_N}{b_{N+1}}$

$\dfrac{S_{N-1}}{b_{N-1}}-\dfrac{S_{N-1}}{b_N}$　　$\dfrac{S_N}{b_N}-\dfrac{S_{N-1}}{b_N}$

$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$

$\dfrac{S_2}{b_2}-\dfrac{S_2}{b_3}$　　$\dfrac{S_2}{b_2}-\dfrac{S_1}{b_2}$

$\dfrac{S_1}{b_1}-\dfrac{S_1}{b_2}$　　$\dfrac{S_1}{b_1}$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

证明：若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n}-1)$收敛

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的敛散性

$$\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}=\frac{(n+x)^n}{n^n}\cdot\frac{1}{n^x}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n^x}$$

$$\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}\bigg/\frac{1}{n^x}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$敛散性相同

当$x>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$收敛　当$x\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

证明：正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$当$p>1$时收敛，当$p<1$发散

当$p>1$，取r使得$p>r>1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p(\ln n)^q}}{\frac{1}{n^r}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-r}(\ln n)^q}=0\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^r}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\text{收敛}$$

当$p<1$，取s使得$p<s<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p(\ln n)^q}}{\frac{1}{n^s}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s-p}}{(\ln n)^q}=+\infty\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\text{发散}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$的敛散性

$$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{o(1)}$$

$$\ln n!=\frac{1}{2}\ln(2n\pi)+n\ln\frac{n}{e}+o(1)=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+o(1)$$

$$\frac{\ln n!}{n\ln n}\to 1\Leftarrow\frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi}{n\ln n}\quad\frac{\frac{1}{2}\ln n}{n\ln n}\quad\frac{-n}{n\ln n}\quad\frac{o(1)}{n\ln n}\to 0$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$ 的敛散性

$$\ln n!=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+o(1)$$

$$\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+o(1)}{n^{\alpha}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+o(1)}{n\ln n}\cdot\frac{n\ln n}{n^{\alpha}}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}\text{与}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\text{同敛散}$$

当 $\alpha-1>1$，取 r 使得 $\alpha-1>r>1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}}{\frac{1}{n^{r}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1-r}}=0\quad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{r}}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\text{收敛}$$

当 $\alpha-1<1$，取 s 使得 $\alpha-1<s<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}}{\frac{1}{n^{s}}}=\lim_{n\to\infty}n^{s-(\alpha-1)}\ln n=+\infty\quad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\text{发散}$$

当 $\alpha-1=1$

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}\quad(n\geq 3)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}\text{发散}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

p，q是正整数，且$p>q$，$A_n=\sum_{i=n^q+1}^{n^p}\frac{1}{i}\ (n=1,2,\cdots)$ 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{A_n}}$敛散性

$$A_n=\sum_{i=1}^{n^p}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n^q}\frac{1}{i}=\ln n^p+C+o(1)-\left(\ln n^q+C+o(1)\right)=\ln n^{p-q}+o(1)$$

$$2^{A_n}=\left(e^{\ln 2}\right)^{A_n}=\left(e^{A_n}\right)^{\ln 2}=\left(e^{\ln n^{p-q}}\cdot e^{o(1)}\right)^{\ln 2}=\left(n^{p-q}\cdot e^{o(1)}\right)^{\ln 2}=n^{(p-q)\ln 2}\cdot e^{o(1)}$$

$$\frac{\frac{1}{2^{A_n}}}{\frac{1}{n^{(p-q)\ln 2}}}\to 1$$

换底公式$a^{\ln b}=b^{\ln a}$

当$p-q=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(p-q)\ln 2}}$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{A_n}}$发散

当$p-q>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(p-q)\ln 2}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{A_n}}$收敛

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}$ 敛散性

$$\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}=\frac{\ln n+C+o(1)}{n^{\alpha}}=\frac{\ln n+C+o(1)}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$ 同敛散

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 敛散性

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ 敛散性

$$\frac{1}{n^{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{n^{\alpha}\ln(\ln n+C+o(1))}=\frac{\ln\ln n}{\ln(\ln n+C+o(1))}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}\ln\ln n}$$

$$\frac{\ln\ln n}{\ln(\ln n+C+o(1))}-1=\frac{\ln\frac{\ln n}{\ln n+C+o(1)}}{\ln(\ln n+C+o(1))}\to 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln\ln n}$ 同敛散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法二

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$ 收敛

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}\quad 0<\xi_n<1$$

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}$$

$$\frac{\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{e^{\xi_n}}{n+1}\to 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right]$ 收敛

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法三

设$a_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right|$同敛散

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$发散

$$k|a_{n+1}-a_n| \le \left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| \Leftarrow k \le \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} \quad \left(\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n a_{n+1}|}\cdot|a_{n+1}-a_n|\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n a_{n+1}|} = \dfrac{1}{a^2} > 0$，取$k = \dfrac{1}{2a^2}$

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$收敛

$$k|a_{n+1}-a_n| \ge \left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| \Leftarrow k \ge \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} \quad \left(\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n a_{n+1}|}\cdot|a_{n+1}-a_n|\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n a_{n+1}|} = \dfrac{1}{a^2} > 0$，取$k = \dfrac{2}{a^2}$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法三

设$a_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right|$同敛散

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \text{当}n\text{充分大时}\frac{1}{2a^2} \leq \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} \leq \frac{2}{a^2}\text{恒成立}$$

$$\frac{1}{2a^2}|a_{n+1} - a_n| \leq \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \leq \frac{2}{a^2}|a_{n+1} - a_n|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|\text{发散}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|\text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法三

设$\{p_k\}$是单调递增的正数列，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$同敛散

当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$发散

$$k\frac{1}{p_n}\le\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\Leftrightarrow k(p_1+p_2+\cdots+p_n)\le np_n\quad 取k=1$$

当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$收敛

$$k\frac{1}{p_n}\ge\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\Leftrightarrow k(p_1+p_2+\cdots+p_n)\ge np_n\Leftarrow kp_n\ge np_n\ ?$$

$$k\frac{1}{p_{\left[\frac{n}{2}\right]}}\ge\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\Leftrightarrow k(p_1+p_2+\cdots+p_n)\ge np_{\left[\frac{n}{2}\right]}\Leftarrow k\left(p_{\left[\frac{n}{2}\right]}+p_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+p_n\right)\ge np_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

$$k\left(p_{\left[\frac{n}{2}\right]}+p_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+p_n\right)\ge k\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)p_{\left[\frac{n}{2}\right]}\ge k\cdot\frac{n}{2}\cdot p_{\left[\frac{n}{2}\right]}\quad 取k=2$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法三

设$\{p_k\}$是单调递增的正数列，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$同敛散

当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$发散 $\frac{1}{p_n}\le\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\quad(n=1,2,\cdots)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$发散

当$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$收敛 $2\left(p_{\left[\frac{n}{2}\right]}+p_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+p_n\right)\ge 2\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)p_{\left[\frac{n}{2}\right]}\ge np_{\left[\frac{n}{2}\right]}\quad(n\ge 2)\Rightarrow\frac{1}{p_{\left[\frac{n}{2}\right]}}\ge\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\quad(n\ge 2)$

记$S_j=\sum_{n=2}^{j}\frac{1}{p_{\left[\frac{n}{2}\right]}}\quad(j=2,3,\cdots)$

$$S_{2N+1}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{p_{\left[\frac{n}{2}\right]}}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{p_{\left[\frac{2k}{2}\right]}}+\frac{1}{p_{\left[\frac{2k+1}{2}\right]}}\right)=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{p_k}\le 2M$$

$S_{2N}<S_{2N+1}\le 2M\quad(N=1,2,\cdots)\Rightarrow S_j\le 2M\quad(j=2,3,\cdots)\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p_{\left[\frac{n}{2}\right]}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$收敛

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法三

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛

$$(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le ka_n \Leftrightarrow a_n^n \le k^{n+1} a_n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{k^{n+1}} \le a_n \ ?$$

当 $\frac{1}{k^{n+1}} \le a_n$ 时 $(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le ka_n$

当 $\frac{1}{k^{n+1}} > a_n$ 时 $(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le \frac{1}{k^n}$

$(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le \max\{ka_n, \frac{1}{k^n}\} \le ka_n + \frac{1}{k^n}$ 取 $k>1$

取常数 $k>1$

i. 当 $\frac{1}{k^{n+1}} \le a_n$ 时 $(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le ka_n$

ii. 当 $\frac{1}{k^{n+1}} > a_n$ 时 $(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le \frac{1}{k^n}$

$\Rightarrow (a_n)^{\frac{n}{n+1}} \le \max\{ka_n, \frac{1}{k^n}\} \le ka_n + \frac{1}{k^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{\frac{n}{n+1}}$ 收敛

$$ka_n + \frac{1}{k^n} = \frac{ka_n}{n} \cdot n + \frac{1}{k^n} \ge (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{ka_n}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{k^n}} = \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \ge \frac{n+1}{n}(a_n)^{\frac{n}{n+1}} \ge (a_n)^{\frac{n}{n+1}}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法四

判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!}$的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(2(n+1))!!}}{\dfrac{n!}{(2n)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法四

正数数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,0\le a<1$，p是正整数，判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1}a_k}{\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a<1$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法五

判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$的敛散性

$$\left[\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}}=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}-1+1\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(n\sin\frac{1}{n}-1\right)\qquad \sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right)=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\left[\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}}\to e^{-\frac{1}{6}}<1$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法五

判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)^{n^3}$的敛散性

$$\left[\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$$

$$\left[\left(1+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}}\to e$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法五

设正项级数$\{a_n\}$单调递减，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$

$$\left[\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a_n+1}\to\frac{1}{a+1}\quad(\text{记}\lim_{n\to\infty}a_n=a\geq 0)$$

假设$a=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛　矛盾!

$$\Rightarrow a>0\Rightarrow\frac{1}{a+1}<1$$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法六

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项发散级数，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$发散

$$\frac{a_n}{a_n+1}\ge ka_n \Leftarrow \frac{1}{k}\ge a_n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k}-1\ge a_n$$

若$\{a_n\}$有界，设$a_n\le M\ (n=1,2,\cdots)$ 取$k=\frac{1}{M+1}\quad (M=\frac{1}{k}-1)$

若$\{a_n\}$无界，$\frac{a_n}{a_n+1}=1-\frac{1}{a_n+1}\to 1$

若$\{a_n\}$有界，则$\exists M>0$使得$a_n\le M\ (n=1,2,\cdots)$

$$\frac{a_n}{a_n+1}\ge\frac{1}{M+1}a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}\text{发散}$$

若$\{a_n\}$无界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+1}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法七

证明：调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

$$\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geq\frac{p}{n+p}=1-\frac{n}{n+p}\quad (n,\ p\in N^{+})$$

对$\forall n\in N^{+}$，$\exists p_{n}\in N^{+}$使得$\frac{n}{n+p_{n}}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p_{n}}\geq\frac{1}{2}$

故余项不趋于0故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法七

设$a_n>0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

(1)当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛

(2)当$\alpha\le1$，且$S_n\to\infty\quad(n\to\infty)$时$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散

当n充分大时$S_n\ge1\Rightarrow\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\ge\frac{a_n}{S_n}$，故只需证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\ge\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\quad(n,\ p\in N^+)$$

对$\forall n\in N^+$，$\exists p_n\in N^+$使得$\frac{S_n}{S_{n+p_n}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p_n}}{S_{n+p_n}}\ge\frac{1}{2}$

故余项不趋于0故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法七

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$R_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_n}$发散

$$\frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{R_{n+p}}\geq\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}}{R_{n+1}}=\frac{R_{n+1}-R_{n+p+1}}{R_{n+1}}=1-\frac{R_{n+p+1}}{R_{n+1}}\quad(n，p\in N^+)$$

对$\forall n\in N^+$，$\exists p_n\in N^+$使得$\dfrac{R_{n+p_n+1}}{R_{n+1}}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{R_{n+1}}+\cdots+\dfrac{a_{n+p_n}}{R_{n+p_n}}\geq\dfrac{1}{2}$

故余项不趋于0故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{R_n}$发散

记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=s$，$R_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k-\sum\limits_{k=n-1}^{\infty}a_k=s-\sum\limits_{k=n-1}^{\infty}a_k\to s-s=0$

第十四讲：常数项级数 > 正项级数 > 方法七

设正项数列$\{a_n\}$单调递增，证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛，则$\{a_n\}$有界

假设$\{a_n\}$无界

$$\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}\right)=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}}\geq\frac{a_{n+2}-a_{n+1}+\cdots+a_{n+p+1}-a_{n+p}}{a_{n+p+1}}$$

$$=\frac{a_{n+p+1}-a_{n+1}}{a_{n+p+1}}=1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}}\quad (n,\ p\in N^+)$$

对$\forall n\in N^+$，$\exists p_n\in N^+$使得$\frac{a_{n+1}}{a_{n+p_n+1}}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{a_{n+p_n}}{a_{n+p_n+1}}\right)\geq\frac{1}{2}$

故余项不趋于0故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$发散 矛盾!

第十四讲：常数项级数 > 交错级数 > 级数敛散性证明方法

交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\lim_{n\to\infty} u_n = 0)$

方法一　(莱布尼茨判别法)

当n充分大时恒有$|u_n| \geq |u_{n+1}|$

方法二

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$敛散性相同

当n充分大时恒有$u_{2n-1}+u_{2n} \geq 0$(或$u_{2n-1}+u_{2n} \leq 0$)

方法三

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

其中$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是收敛的交错级数

当n充分大时恒有$u_n - v_n \geq 0$(或$u_n - v_n \leq 0$)

方法二、方法三实际上将交错级数敛散性问题转化成了正项级数敛散性问题

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha \neq 0, 0<r<1$，判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-r)^n}$ 的敛散性

当 $\alpha<0$ $\quad \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-r)^n} \not\to 0$

当 $\alpha-1>0$ ∃正整数 N，当 $n \geq N$ 时 $n^{\alpha}+(-r)^n>0$

$$\frac{1}{n^{\alpha}+(-r)^n} \geq \frac{1}{(n+1)^{\alpha}+(-r)^{n+1}} \Leftrightarrow (n+1)^{\alpha}-n^{\alpha} \geq (r+1)(-r)^n \quad (n \geq N)$$

记 $f(n)=\dfrac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{(r+1)r^n} \quad (n \geq N)$

$$f(n)=\frac{\alpha\xi_n^{\alpha-1}}{(r+1)r^n}\begin{cases} > \dfrac{\alpha n^{\alpha-1}}{(r+1)r^n} \to +\infty & \alpha-1>0 \\ = \dfrac{\alpha}{(r+1)r^n} \to +\infty & \alpha-1=0 \\ > \dfrac{\alpha(n+1)^{\alpha-1}}{(r+1)r^n} \to +\infty & \alpha-1<0 \end{cases} \qquad (n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=\alpha\xi_n^{\alpha-1} \quad n<\xi_n<n+1$$

当 n 充分大时 $f(n) \geq 1 \Rightarrow (n+1)^{\alpha}-n^{\alpha} \geq (r+1)r^n \geq (r+1)(-r)^n$

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha\neq 0, 0<r<1$，判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}$的敛散性

当$\alpha>0$ $\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}\to 0$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^\alpha+(-r)^{2n}}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha+(-r)^{2n+1}}\right]\text{与}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}\text{同敛散}$$

$$\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^\alpha+(-r)^{2n}}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^\alpha+(-r)^{2n+1}}=\frac{1}{(2n)^\alpha+r^{2n}}+\frac{-1}{(2n+1)^\alpha-r^{2n+1}}$$

$$=\frac{(2n+1)^\alpha-(2n)^\alpha-r^{2n+1}-r^{2n}}{\left[(2n)^\alpha+r^{2n}\right]\left[(2n+1)^\alpha+r^{2n+1}\right]}=\frac{(2n+1)^\alpha-(2n)^\alpha}{\left[(2n)^\alpha+r^{2n}\right]\left[(2n+1)^\alpha-r^{2n+1}\right]}-\frac{r^{2n}(r+1)}{\left[(2n)^\alpha+r^{2n}\right]\left[(2n+1)^\alpha-r^{2n+1}\right]}=a_n-b_n$$

$$(2n+1)^\alpha-(2n)^\alpha=\alpha\xi_n^{\alpha-1}\quad 2n<\xi_n<2n+1$$

$$a_n\sim\frac{\alpha\xi_n^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha\cdot(2n+1)^\alpha}\sim\frac{\alpha(2n)^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha\cdot(2n)^\alpha}=\frac{\alpha}{(2n)^{\alpha+1}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ 收敛}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=r^2<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{ 收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha\neq0,0<r<1$，判定级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}$的敛散性

当$\alpha>0$

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}=\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}=-\frac{r^n}{\left[n^\alpha+(-r)^n\right]n^\alpha}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{\left[(n+1)^\alpha+(-r)^{n+1}\right](n+1)^\alpha}\Big/\frac{r^n}{\left[n^\alpha+(-r)^n\right]n^\alpha}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r\left[n^\alpha+(-r)^n\right]n^\alpha}{\left[(n+1)^\alpha+(-r)^{n+1}\right](n+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}r\cdot\frac{n^\alpha+(-r)^n}{(n+1)^\alpha+(-r)^{n+1}}\cdot\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=r<1$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-r)^n}\text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha \neq 0$，判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$的敛散性

当$\alpha<0$ $\quad \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}=\frac{1}{(-1)^n n^\alpha+1}\to 1$

当$\alpha-1>0$ $\exists$正整数N，当$n\geq N$时$n^\alpha+(-1)^n>0$

$$\frac{1}{n^\alpha+(-1)^n}\geq\frac{1}{(n+1)^\alpha+(-1)^{n+1}}\Leftrightarrow(n+1)^\alpha-n^\alpha\geq 2(-1)^n \quad (n\geq N)$$

记$f(n)=(n+1)^\alpha-n^\alpha \quad (n\geq N)$ $\qquad (n+1)^\alpha-n^\alpha=\alpha\xi_n^{\alpha-1} \quad n<\xi_n<n+1$

$$f(n)=\alpha\xi_n^{\alpha-1}\begin{cases}\to+\infty & \alpha-1>0\\ =1 & \alpha-1=0\\ \to 0 & \alpha-1<0\end{cases}$$

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha \neq 0$，判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ 的敛散性

当 $\alpha > 0$ $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^\alpha + (-1)^{2n}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^\alpha + (-1)^{2n+1}}\right] \text{与} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \text{同敛散}$$

$$\frac{(-1)^{2n}}{(2n)^\alpha + (-1)^{2n}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^\alpha + (-1)^{2n+1}} = \frac{1}{(2n)^\alpha + 1} + \frac{-1}{(2n+1)^\alpha - 1}$$

$$= \frac{(2n+1)^\alpha - (2n)^\alpha - 2}{[(2n)^\alpha + 1][(2n+1)^\alpha - 1]} = \frac{(2n+1)^\alpha - (2n)^\alpha}{[(2n)^\alpha + 1][(2n+1)^\alpha - 1]} - \frac{2}{[(2n)^\alpha + 1][(2n+1)^\alpha - 1]} = a_n - b_n$$

$$(2n+1)^\alpha - (2n)^\alpha = \alpha \xi_n^{\alpha-1} \quad 2n < \xi_n < 2n+1$$

$$a_n \sim \frac{\alpha \xi_n^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha \cdot (2n+1)^\alpha} \sim \frac{\alpha (2n)^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha \cdot (2n)^\alpha} = \frac{\alpha}{(2n)^{\alpha+1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

$$b_n \sim \frac{2}{(2n)^\alpha \cdot (2n)^\alpha} = \frac{\alpha}{(2n)^{2\alpha}} \Rightarrow \text{当}\alpha \leq \frac{1}{2}\text{时}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散，当}\alpha > \frac{1}{2}\text{时}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha \neq 0$，判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$的敛散性

当$\alpha>0$

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}=-\frac{1}{\left[n^\alpha+(-1)^n\right]n^\alpha}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

$$\frac{1}{\left[n^\alpha+(-1)^n\right]n^\alpha}\sim\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

当$\alpha>\frac{1}{2}$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$收敛，当$\alpha\leq\frac{1}{2}$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$发散

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha>0$，讨论级数$1-\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^{\alpha}}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$的敛散性

$\alpha>0$，级数$1-\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^{\alpha}}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$的一般项趋于0

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$与原级数同敛散

当$\alpha>1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)\Big/\dfrac{1}{2n-1}=1\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$发散

当$\alpha<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)\Big/\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}=1\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$发散

第十四讲：常数项级数 > 交错级数

$\alpha>0$，讨论级数$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$的敛散性

$$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$$

当$\alpha>1$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)\Big/\frac{1}{2n}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$发散

当$\alpha<1$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)\Big/\frac{1}{(2n)^{\alpha}}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\right)$发散

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数

方法一　转化成正项级数

方法二　证明绝对收敛

方法三　阿贝尔判别法

方法四　狄利克雷判别法

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法一

$\alpha>0$，讨论级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}+\cdots$的敛散性

原级数与$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}\right)$同敛散

当$\alpha>1$时$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}}{\frac{1}{3n}}=2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$同敛散

当$\alpha=1$时$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}}{\frac{1}{3n}}=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$同敛散

当$\alpha<1$时$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}}{\frac{1}{(3n)^{\alpha}}}=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{(3n)^{\alpha}}\right)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^{\alpha}}$同敛散

讨论级数$\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^{\alpha}}+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{(2p)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{np-1}-\frac{1}{(np)^{\alpha}}+\cdots$的敛散性

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法一

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛并有$a_n \le c_n \le b_n$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛

$$a_n \le c_n \le b_n \Rightarrow 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n\text{收敛}$$

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \Rightarrow 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法二

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$收敛

$$|a_n \sin nx| = a_n |\sin nx| \le a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法二

$r(n)$是关于n的某个函数，$r(n)\in Z$，$\alpha>1$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\right)$收敛

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\right)\sim\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\Rightarrow\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\right)\right|\sim\frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\right)\right|\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{r(n)}}{n^{\alpha}}\right)\text{收敛}$$

$\alpha>1$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right)$收敛

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法二

证明存在正整数N_0，使得当$n \ge N_0$时恒有$1+\dfrac{r^n}{n!}>0$，并证明级数$\sum\limits_{n=N_0}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{r^n}{n!}\right)$收敛

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \frac{r^n}{n!} \sim \frac{r^n}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{er}{n}\right)^n$$

$$\left(\frac{er}{n}\right)^n = e^{n(1+\ln r-\ln n)} \to 0 \Rightarrow \frac{r^n}{n!} \to 0$$

故存在正整数N_0，使得当$n \ge N_0$时恒有$1+\dfrac{r^n}{n!}>0$

$$\ln\left(1+\frac{r^n}{n!}\right) \sim \frac{r^n}{n!} \Rightarrow \left|\ln\left(1+\frac{r^n}{n!}\right)\right| \sim \frac{|r|^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|r|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|r|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|r|}{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{|r|^n}{n!}\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=N_0}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{r^n}{n!}\right)\right|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=N_0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r^n}{n!}\right)\text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法三

阿贝尔判别法：若数列$\{a_n\}$单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

记$B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k \quad (k=1,2,\cdots) \quad B_0=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} B_n$存在$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|B_n|$存在

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n=\sum_{n=1}^{N} a_n (B_n-B_{n-1})=\sum_{n=2}^{N} B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_N B_N-a_1 B_0$$

$\exists M>0$使得$\forall n\in N^+$有$|B_n|\le M$

$$\sum_{n=2}^{N}|B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)|\le M\sum_{n=2}^{N}|a_{n-1}-a_n|=\begin{cases} M\sum_{n=2}^{N}(a_{n-1}-a_n)=M(a_1-a_{N-1})\le MM_1 & (M_1>0) \quad a_n\text{单调递减} \\ M\sum_{n=2}^{N}(a_n-a_{n-1})=M(a_{N-1}-a_1)\le MM_2 & (M_2>0) \quad a_n\text{单调递增} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)|\text{收敛}\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)\text{收敛}\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N} B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)\text{存在}$$

$\lim_{N\to\infty} a_N$存在且$\lim_{N\to\infty} B_N$存在$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} a_N B_N$存在

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\text{存在}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\text{收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法三

阿贝尔判别法：若数列$\{a_n\}$单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

令$a_n = r^n + k \quad (0 < r < 1)$

若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n + k)b_n$ 收敛

令$a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} + k \ (0 < \alpha)$

若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}} + k\right)b_n$ 收敛

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法三

阿贝尔判别法：若数列$\{a_n\}$单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

令$b_n = u_{n+1} - u_n$　其中$\{u_n\}$是收敛数列$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} b_n = u_{N+1} - u_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

若数列$\{a_n\}$单调且趋于0，$\{u_n\}$是收敛数列，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_{n+1} - u_n)$收敛

令$u_n = \dfrac{\sin nx}{n}$　$a_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin(n+1)x}{n+1} - \dfrac{\sin nx}{n}\right)$收敛

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法四

狄利克雷判别法：若数列$\{a_n\}$单调且趋于0，$\sum_{k=1}^{n} b_k$ 有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

记$B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k \quad (k=1,2,\cdots) \quad B_0=0$

B_n有界$\Rightarrow |B_n|$有界

$\exists M>0$使得$\forall n\in N^+$有$|B_n|\le M$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n=\sum_{n=1}^{N} a_n(B_n-B_{n-1})=\sum_{n=2}^{N} B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_N B_N-a_1 B_0$$

$$\sum_{n=2}^{N}|B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)|\le M\sum_{n=2}^{N}|a_{n-1}-a_n|=\begin{cases} M\sum_{n=2}^{N}(a_{n-1}-a_n)=M(a_1-a_{N-1})\le MM_1 \quad (M_1>0) \quad a_n\text{单调递减} \\ M\sum_{n=2}^{N}(a_n-a_{n-1})=M(a_{N-1}-a_1)\le MM_2 \quad (M_2>0) \quad a_n\text{单调递增} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)|\text{收敛}\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)\text{收敛}\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)\text{存在}$$

$$0\le|a_N B_N|\le M|a_N|\Rightarrow \lim_{N\to\infty}|a_N B_N|=0\Rightarrow \lim_{N\to\infty}a_N B_N=0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n b_n\text{ 存在}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n\text{ 收敛}$$

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法四

狄利克雷判别法：若数列$\{a_n\}$单调且趋于0，$\sum_{k=1}^{n} b_k$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

令$a_n = r^n \quad (0 < r < 1)$

若$\sum_{k=1}^{n} b_k$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} r^n b_n$收敛

令$a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$

若$\sum_{k=1}^{n} b_k$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{n^{\alpha}}$收敛

令$b_n = (-1)^{n+1}$且$a_n \geq 0$

若正项数列$\{a_n\}$单调递减且趋于0，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$收敛

第十四讲：常数项级数 > 非正项非交错级数 > 方法四

狄利克雷判别法：若数列$\{a_n\}$单调且趋于0，$\sum_{k=1}^{n} b_k$有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

令$b_n = u_{n+1} - u_n$　$\{u_n\}$是有界数列$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k = u_{n+1} - u_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_k$有界

若数列$\{a_n\}$单调且趋于0，$\{u_n\}$是有界数列，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_{n+1} - u_n)$收敛

令$b_n = \sin nx$　$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x - \sin nx}{n}$收敛

$\sin(n+1)x - \sin nx = 2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{1}{2}x \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n}$收敛　$(\cos\frac{1}{2}x \neq 0)$

令$b_n = \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$　$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n}$收敛

$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin nx\cos\frac{1}{2}x \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$收敛　$(\cos\frac{1}{2}x \neq 0)$

令$b_n = \sin\left(n+p-\frac{1}{2}\right)x$　$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+p+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n+p-\frac{1}{2}\right)x}{n}$收敛

$\sin\left(n+p+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n+p-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin(n+p)x\cos\frac{1}{2}x \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+p)x}{n}$收敛　$(\cos\frac{1}{2}x \neq 0)$