例 1．求常数 a, b, c 的值，使 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正方向的方向导数有最大值 64.

解：$\text{grad}\ f(1,2,-1)=\{4a+3c, 4a-b, 2b-2c\}//\{0,0,1\}$，故有 $\begin{cases}4a+3c=0\\ 4a-b=0\\ 2b-2c>0\end{cases}$

方向导数最大值等于梯度的模，故 $|\text{grad}\ f(1,2,-1)|=\sqrt{(2b-2c)^2}=64$

解之得： $a=6, b=24, c=-8$

例 2. 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶偏导数， $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明 $\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy\right|\le \dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$

证明：在点 $(0,0)$ 点展开 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2 f_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2 f_{yy}(\theta x,\theta y)\right)，其中 \theta\in(0,1).$$

因为 $x^2 f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2 f_{yy}=\left(f_{xx}, \sqrt{2}f_{xy}, f_{yy}\right)\cdot\left(x^2, \sqrt{2}xy, y^2\right)$

$\le\sqrt{f_{xx}{}^2+2f_{xy}{}^2+f_{yy}{}^2}\cdot\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^2}$,

且 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$，故 $|f(x,y)|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{M}\cdot(x^2+y^2)$

从而 $\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy\right|\le\dfrac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

例 3．设 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，且 $f(x,y)$在$(0, 0)$点连续，则

$2f_x'(0,0)+f_y'(0,0)=$______.

解：设 $F(x,y)=f(x,y)+3x-4y$，则 $F(0,0)=0$，且

$F(x,y)-F(0,0)=o(\sqrt{x^2+y^2})$

于是 $F_x'(0,0)=f_x'(0,0)+3=0,\ F_y'(0,0)=f_y'(0,0)-4=0$

故 $2f_x'(0,0)+f_y'(0,0)=-2$

例 4. 设 $f(x,y)=|x-y|\phi(x,y)$，其中 $\phi(x,y)$ 在点(0, 0)的一个邻域内连续，证明：

$f(x,y)$在(0, 0)点可微的充分必要条件是：$\phi(0,0)=0$

证明：必要性：若 $f(x,y)$可微则偏导存在，

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=\phi(0,0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}=-\phi(0,0)$$

从而：$\phi(0,0)=0$

充分性：若$\phi(0,0)=0$由 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\phi(x,0)}{x}$ 可知：

$$f_x'(0,0)=0,\ f_y'(0,0)=0$$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x-y|\phi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

因为$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$，又$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=0$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，从而 $f(x,y)$在(0, 0)点可微

例 5. 已知$z=x(x^2+y^2)^{\frac{y}{x}+e^{xy}}$，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$____.

解：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=[z(x,0)]_x'\big|_{x=1}=(x^3)'\big|_{x=1}=3$

例 6. 设$w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$u=x-cy, v=x+cy$，其中c为非零常数。则

$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$________

解：$w_x=f_1+f_2$，$w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$，$w_y=c(f_2-f_1)$，

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial y}(f_2-f_1)=c(-cf_{21}+cf_{22}+cf_{11}-cf_{12})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22})$$

所以$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$

例 7．设方程组$\begin{cases}x=u+vz\\ y=-u^2+v+z\end{cases}$在点$(x,y,z)=(2,1,1)$的某个邻域内确定隐函数

$u(x,y,z),v(x,y,z)$，且$u(2,1,1)>0$，则$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(2,1,1)}=$______

解：方程两边求全微分：$\begin{cases}dx=du+zdv+vdz\\ dy=-2udu+dv+dz\end{cases}$

$(x,y,z)=(2,1,1)$代入原方程组解得：$u=1,\ v=1$

$(x,y,z)=(2,1,1)$，$u=1,\ v=1$代入微分方程组，即

$$\begin{cases}dx=du+dv+dz & (1)\\ dy=-2du+dv+dz & (2)\end{cases}$$

(1)−(2)得$3du=dx-dy$，故$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{3},\frac{\partial u}{\partial z}=0$

(1)×2+(2)得$3dv=2dx+dy-3dz$，故$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{3}$

例 8．设$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中φ具有二阶导数，且$\varphi'\neq-1$.

(1) 求dz；(2) 记$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

解：(1) $2xdx+2ydy-dz=\phi'(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)$，故

$$dz=\frac{2x-\phi'}{\phi'+1}dx+\frac{2y-\phi'}{\phi'+1}dy$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)}{\phi'+1}$，$u=\frac{2}{\phi'+1}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2[\phi']'_x}{(\phi'+1)^2}=-\frac{2\phi''\cdot(x+y+z)'_x}{(\phi'+1)^2}$$

$$=-\frac{2\phi''\cdot(1+z'_x)}{(\phi'+1)^2}=-\frac{2\phi''\cdot(1+2x)}{(\phi'+1)^3}$$

例 9．设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(1)=2$．记 $z=f(e^x y^2)$，若 $\frac{\partial z}{\partial x}=z$，求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式.

解：$z=f(u),\quad u=e^x y^2$，$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x y^2=f'(u)u$

$\frac{\partial z}{\partial x}=z$ 可得：$f'(u)u=f(u)$，即：$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}$

解微分方程可得：$f(u)=cu$.

再由 $f(1)=2$ 可知 $c=2$，故当 $x>0$ 时 $f(x)=2x$

例 10．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，其中 F 具有连续的二阶偏导数，且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$.求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

证明：在方程 $F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$ 两边分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_u+\frac{\partial z}{\partial x}F_v=0\\&\frac{\partial z}{\partial y}F_u+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_v=0\end{aligned}\quad \text{即：}\quad \begin{aligned}&(F_u+F_v)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u}{x^2}\quad\cdots\cdots(1)\\&(F_u+F_v)\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_v}{y^2}\quad\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

解出 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u}{x^2(F_u+F_v)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_v}{y^2(F_u+F_v)}$，或 $(1)\times x^2+(2)\times y^2$ 均可得：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=F_u-F_v=0$$

$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 两边分别对 x 和 y 求偏导，得

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0\quad \text{即：}\ x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x}\cdots\cdots(3)$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\quad \text{即：}\ x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y}\cdots\cdots(4)$$

$(4)\times x+(5)\times y$ 可得

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(xy^2+x^2y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

例 11. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明：$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\left|AB\right|$，其中 $\left|AB\right|$ 表示线段 AB 的长度.

证明：作辅助函数 $g(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$

显然 $g(t)$ 在[0,1]上可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g(1)-g(0)=g'(\xi)$

因为 $g'(t)=(x_2-x_1)f_x'(x,y)+(y_2-y_1)f_y'(x,y)$

从而：$\left|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)\right|=\left|g(1)-g(0)\right|$

$$=\left|(x_2-x_1)f_x'(x,y)+(y_2-y_1)f_y'(x,y)\right|\le\sqrt{\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

由 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$ 立得 $\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\left|AB\right|$

例 12. 设 $z=f(x,y)$ 满足：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x^2$，$f(0,y)=y$，则 $f(x,y)=$_________.

解：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{y^2}{2}+g(x)$，从而

$$z=f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\int_0^x g(x)dx+h(y)$$

$$f(0,y)=y\Rightarrow h(y)=y$$

$$f(x,0)=x^2\Rightarrow\int_0^x g(x)dx+h(0)=x^2$$

故：$z=f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+x^2+y$

例 13. 设 $f(x,y)$ 可微，且满足条件 $\dfrac{f_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$，求 $f(x,y)$.

解：$\dfrac{f_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y \Rightarrow \left[\ln f(0,y)\right]'_y=\cot y$

$\ln f(0,y)=-\ln\csc y+C=\ln\sin y+C$

$f(0,y)=C_1\sin y \quad \cdots\cdots(1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)\Rightarrow\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}=-1$$

$$\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}=\left[\ln f(x,y)\right]'_x=-1\Rightarrow\ln f(x,y)=-x+C(y)$$

$$f(x,y)=C(y)e^{-x}$$

$f(0,y)=C(y)\cdots\cdots(2)$

由（1）、（2）可知：$C(y)=C_1\sin y$，故 $f(x,y)=C_1e^{-x}\sin y$

由 $f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$ 可得 $C_1=1$，故 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$

例 14. 已知函数 $u(x,y,z)$ 可微, 且

$$\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\,\mathrm{d}z,$$

则 $u(x,y,z)=$__________

解：$u(x,y,z)=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}-3xyz+C$

例 15. 已知 $du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u(x,y)=$______

解一：$du(x,y)=\dfrac{d(\frac{x}{y})}{3(\frac{x}{y})^2-\frac{2x}{y}+3}$

$$\int\frac{dt}{3t^2-2t+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2-\frac{2t}{3}+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{8}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(t-\frac{1}{3})+C$$

所以$u(x,y)=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{x}{y}-\frac{1}{3})+C}$

解二：先分别求关于x,y的不定积分

$$\int\frac{ydx}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{y}{3}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{3}y)^2+\frac{8}{9}y^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{x}{y}-\frac{1}{3})+C$$

根据对称性：$\int\frac{xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{y}{x}-\frac{1}{3})+C$

$$\int\frac{-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{y}{x}-\frac{1}{3})+C$$

又$\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$，故$u(x,y)=\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}(\frac{x}{y}-\frac{1}{3})+C}$

16 试证：可微函数$z=f(x,y)$是$ax+by$ 的函数的充分必要条件是$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$.

证明：必要性: 若$z=f(x,y)=\phi(ax+by)$，则:

$\frac{\partial z}{\partial x}=a\phi'(ax+by),\frac{\partial z}{\partial y}=b\phi'(ax+by)$，于是$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$

充分性: 令 $\begin{cases}t=ax+by\\ s=y\end{cases}$ 则

$$z=g(t,s)=f\left(\frac{t-bs}{a},s\right)$$

$$g_s'=\left[f\left(\frac{t-bs}{a},s\right)\right]_s'=-\frac{b}{a}f_1'\left(\frac{t-bs}{a},s\right)+f_2'\left(\frac{t-bs}{a},s\right)=0$$

由此可得: z 是 t 的一元函数, 即: $z=g(t)=g(ax+by)$

例 17. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，证明：对任意常数 C，$f(x,y)=C$ 为一直线的充分必要条件是：$(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$.

证明: 必要性: 若 $f(x,y)=C$ 为一直线，则必有 $f(x,y)=ax+by+c$，则其所有二阶偏导为 0，必有 $(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$

充分性： $f(x,y)=C$ 是隐函数，确定一元函数 $y=y(x)$.

$f_x+f_y\cdot y'(x)=0$，从而 $y'(x)=-\dfrac{f_x}{f_y}$

$f_x+f_y\cdot y'(x)=0$ 再对 x 求导得： $f_{xx}+2f_{xy}\cdot y'(x)+f_{yy}\cdot[y'(x)]^2+f_y\cdot y''(x)=0$

将 $y'(x)=-\dfrac{f_x}{f_y}$ 代入上式得： $f_{xx}-2f_{xy}\cdot\dfrac{f_x}{f_y}+f_{yy}\cdot\dfrac{(f_x)^2}{(f_y)^2}+f_y\cdot y''(x)=0$

即：$(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2+(f_y)^3\cdot y''(x)=0$.

因为 $(f_y)^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}(f_x)^2=0$，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，所以 $y''(x)=0$，从而有 $y(x)=C_1x+C_2$，即 $f(x,y)=C$ 确定了直线：$y(x)=C_1x+C_2$

例 18. 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，且 $f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$，证明：$g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值.

解：由 $f(x,y)-f(1,0)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$ 可知：

$g(0,0)=f(1,0)=0$， $f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$

$g'_x(x,y)=ye^{xy}f'_1+2xf'_2,\quad g'_y(x,y)=xe^{xy}f'_1+2yf'_2$

$g''_{xx}(x,y)=y\cdot\left(e^{xy}f'_1\right)'_x+2f'_2+2x\left(f'_2\right)'_x$

$g''_{yy}(x,y)=x\cdot\left(e^{xy}f'_1\right)'_y+2f'_2+2y\left(f'_2\right)'_y$

$g''_{xx}(0,0)=2f'_y(1,0)=-2=A$

$g''_{yy}(0,0)=2f'_y(1,0)=-2=C$

$$g''_{xy}(x,y)=e^{xy}f_1'+y\cdot\left(e^{xy}f_1'\right)'_y+2x\left(f_2'\right)'_y$$
$$g''_{xy}(0,0)=e^0 f_x'(1,0)=-1=B$$

故 $g(0,\ 0)=0$ 是极大值

例 19. 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ 且 $\dfrac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$. 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

解： $\dfrac{dg_\alpha(t)}{dt}=\cos\alpha f_x+\sin\alpha f_y$

$$\frac{d^2g_\alpha(t)}{dt^2}=\cos\alpha(\cos\alpha f_{xx}+\sin\alpha f_{xy})+\sin\alpha(\cos\alpha f_{yx}+\sin\alpha f_{yy})$$
$$=\cos^2\alpha f_{xx}+2\sin\alpha\cos\alpha f_{xy}+\sin^2\alpha f_{yy}$$

$\dfrac{dg_\alpha(0)}{dt}=\cos\alpha f_x(0,0)+\sin\alpha f_y(0,0)=0$ 对任何 α 均成立， 分别取 $\alpha=0,\dfrac{\pi}{2}$ 可得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，故 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

令 $A=f_{xx}(0,0), B=f_{xy}(0,0), C=f_{yy}(0,0)$，则

$$\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$$

法一：根据线性代数二次型相关知识：

由 $\dfrac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$ 对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立，可知

$\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ 是一个正定阵，从而其顺序主子式大于 0，故 $f(0,0)$ 是 f 极小值.

法二：由 $\dfrac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha>0$ 对任何 α 成立，取 $\alpha=0$ 可得 $A>0$.

$$\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}=A[\cos^2\alpha+2\frac{B}{A}\sin\alpha\cos\alpha]+C\sin^2\alpha$$
$$=A(\cos\alpha+\frac{B}{A}\sin\alpha)^2+(C-\frac{B^2}{A})\sin^2\alpha$$

取 α 使得 $\cos\alpha+\frac{B}{A}\sin\alpha=0$，则：因为 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2}>0$，且 $A>0$，故 $C-\frac{B^2}{A}>0$，即 $AC-B^2>0$，从而可得 $f(0,0)$ 是 f 极小值.

例 20. 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是____________

解：设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法向量为 $\{x_0,2y_0,-1\}//\{2,2,-1\}$

从而切点为 $x_0=2, y_0=1$，进而得到 $z_0=1$

点法式方程为 $2(x-2)+2(y-2)-(z-1)=0$，即 $2x+2y-z-5=0$

例 21. 设 $a,b,c,\mu>0,$ 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 相切，证明 $\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$

解：设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则 $\{y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0\}//\left\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right\}$

设 $y_0z_0=\lambda\frac{x_0}{a^2}, x_0z_0=\lambda\frac{y_0}{b^2}, x_0y_0=\lambda\frac{z_0}{c^2}$，则

$x_0y_0z_0=\lambda\frac{x_0{}^2}{a^2}=\lambda\frac{y_0{}^2}{b^2}=\lambda\frac{z_0{}^2}{c^2}$，且 $(x_0y_0z_0)^3=\lambda^3\frac{(x_0y_0z_0)^2}{a^2b^2c^2}$

从而 $3\mu=\lambda$，且 $(abc)^2\mu=\lambda^3$

联立得 $(abc)^2=3^3\mu^2$