一般周期的函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 函数 $f(x)$

$\Downarrow$ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 函数 $F(z)$

$\Downarrow$ 将$F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理. 设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理条件,则它的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: 令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$ ，则 $x \in [-l, l]$ 变成 $z \in [-\pi, \pi]$,

令 $F(z) = f(x) = f(\dfrac{lz}{\pi})$, 则

$$F(z+2\pi) = f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi}) = f(\frac{lz}{\pi} + 2l)$$
$$= f(\frac{lz}{\pi}) = F(z)$$

所以 $F(z)$ 是以 2π 为周期的周期函数 , 且它满足收敛定理条件, 将它展成傅里叶级数:

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$$

(在 $F(z)$ 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

$\Big\downarrow$ 令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

（在 $f(x)$ 的 连续点处） 证毕

说明: 如果 $f(x)$ 为**奇函数**, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 $f(x)$ 为**偶函数**, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad (\text{在 } f(x) \text{ 的连续点处})$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

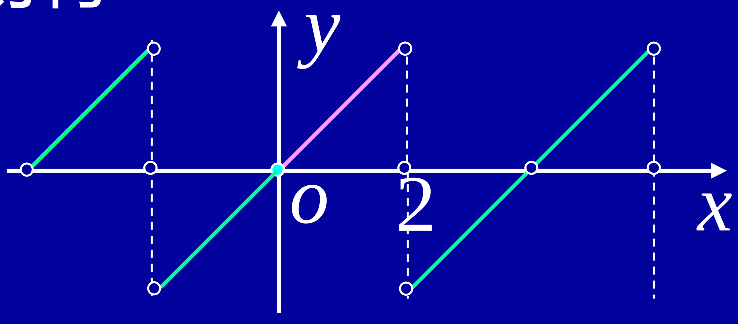
注: 无论哪种情况 , 在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例1. 把 $f(x)=x \quad (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数;　　(2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

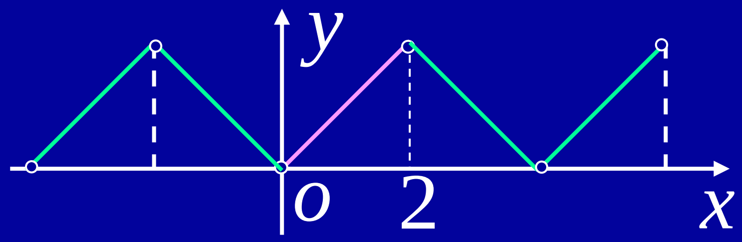
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0<x<2)$$

(2) 将$f(x)$作偶周期延拓, 则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\quad f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$