全国大学生数学竞赛辅导——级数

数学与统计学院 赵雷嘎 2021

一、数项级数敛散性的判别

二、幂级数的收敛域与和函数

三、函数的级数展开

- 幂级数展开（泰勒级数）
- 三角级数展开（傅里叶级数）

*基本概念与内容提要

1、级数敛散性的概念和性质

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛是指： **前 n 项和数列** $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛。

即 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，则级数收敛；否则发散。

掌握：裂项相消、等差求和、等比求和等方法

（2）当$c \neq 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$收敛性相同。

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$。

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$必发散。

(3).根值判别法：设$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，则

当$0\le\rho<1$时，级数收敛；

当$\rho>1$时，级数发散；

当$\rho=1$时，不确定。

注意：ρ=0时级数也收敛。

(4).比值判别法：设$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则

当$0\le\rho<1$时，级数收敛；

当$\rho>1$时，级数发散；

当$\rho=1$时，不确定。

注意：ρ=0时级数也收敛。

(5).积分判别法：$f(x)$是在$[1,+\infty)$上单调递减的正项连续函数，

则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$与广义积分$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$具有相同的收敛性。

（6）交错级数审敛法——莱布尼兹定理：

交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，即 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots(\text{或}-u_1+u_2-u_3+\cdots, u_n>0)$

如果交错级数满足$\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$，那么级数收敛且其和$s \leq u_1$，其余项$r_n$的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

3、绝对收敛与条件收敛：

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且称为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛则称为条件收敛。

注：由 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散。但如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的发散是由比值法（或根值法）推断出的，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散。

绝对收敛级数的和仍绝对收敛，绝对收敛级数与条件收敛级数的和是条件收敛。

任意项级数的判别法：

a) 取绝对值判别：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。即绝对收敛的级数一定收敛。

b) 拆项或并项的方法，将通项拆成几项之和，利用交错级数和正项级数的判别方法。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 任意项级数

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ —非→ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

是

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 用正项级数判别法 —收敛→ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 用莱布尼茨法则、定义或基本性质判别 —收敛→ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

发散

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

4、幂级数：

$$(1):1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \begin{cases} |x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x} \\ |x|\geq 1\text{时，发散} \end{cases}$$

(2)：对于级数 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，存在$R$，

$$\text{使}\begin{cases} |x|<R\text{时收敛} \\ |x|>R\text{时发散，其中}R\text{称为收敛半径。} \\ |x|=R\text{时不定} \end{cases}$$

（3）求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是系数，

$$\text{则}\begin{cases}\rho\neq 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$$

（4）若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$$ ，收敛半径 $R=\min\{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\}$。

例：幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为________________

（5）幂级数在收敛域$(-\mathrm{R},\mathrm{R})$上绝对收敛，且和函数$S(x)$为连续函数。

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在-R 或 R 处收敛，则$S(x)$在-R 或 R 处分别右连续、左连续。

和函数$S(x)$为可导函数且$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$，逐项求导后收敛半径不变。

和函数$S(x)$为可积函数且$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt$，逐项积分后收敛半径不变。

逐项求导、逐项积分后，**收敛半径不变**但收敛域可能改变，在端点处的敛散性可能改变。

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$处发散，则当 $|x| > |x_0|$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$发散。如果在某点 $x = x_0$处幂级数条件收敛，则$x = x_0$ 必位于该幂级数的收敛域的端点。

（6）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的求法：

设 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$或$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (ρ可以为∞)，则当

$\rho = 0$时R=∞; 当ρ=∞时R=0; 当$\rho \neq 0$，∞时R=$\frac{1}{\rho}$。

注：此种求收敛半径的方法是充分条件，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在时并不能说收敛半径不存在

对于类似 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{3n}$ 等级数的收敛半径不能这样做，根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ 求收敛半径。

（7）幂级数的和的求法：

观察幂级数通项 x^n 的系数 a_n，若 a_n 为 n 的简单有理式，则通过拆项将其拆成更简单的分式之和；通过逐项积分，设法消去分式中分子的 n(或 n−1, n+1 等)；通过逐项求导，设法消去分式中分母的 n(或 n−1，n+1 等)；最后设法利用级数之和 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$。

若 a_n 的分母为 $n!$或$(2n)!$或$(2n-1)!$也可通过上述方法化简，最后利用 $e^x, \sin x, \cos x$ 的展开式求和。

常用方法举例：设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，用下列两种途径求和函数 $s(x)$：（1）$s(x)=\int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1})dx$；（2）$s(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)'$。

5、函数展开成幂级数

直接展开法：利用泰勒级数公式，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数。

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

$f(x)$展开成x的幂级数的步骤：

(1)求出$f^{(n)}(x)(n=1,2,\ldots)$;(2)求$f^{(n)}(0)(n=1,2,\ldots)$;

(3)写出$f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$并求出敛散半径R；

(4)当$x\in(-R,R)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$($\xi$位于0与$x$之间)是$f(x)$的麦克劳林级数收敛的充要条件。此时$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

间接展开法：通过一定的运算（主要是加减法，数乘运算，逐项积分和逐项求导运算）将函数转化为其它函数，进而利用新函数的幂级数（主要是一些简单函数的麦克劳林展开式）展开将原来函数展开为幂级数。间接法是将函数展开为幂级数的主要方法，具体方法是：①先求导，展开成幂级数后在积分；②先积分，展开成幂级数后在求导。当然，中间还要通过一些适当的运算。

一些常用函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots (-1<x<1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \left(-1 \le x \le 1\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + .. + x^n + \ldots (-1<x<1), \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots (-1<x<1)$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots(-1<x<1)$$

6、三角级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性:$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分$=0$。

7、傅立叶级数：

（1）正交性：$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots \sin nx, \cos nx \cdots$ 任意两个不同项的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分＝0。

（2）傅里叶级数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$， 周期$=2\pi$，

其中$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ ， $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx (n = 1, 2, 3\cdots)$

正弦级数：$a_n = 0$，$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad n = 1, 2, 3\cdots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n = 0$，$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad n = 0, 1, 2\cdots \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$是偶函数

周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数： $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l})$,

周期为$2l$,其中$a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$ ，$b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2,3\cdots)$

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，该级数收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，该级数收敛于 $f(x)$ 在该点的左右极限的平均值 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$。

典型题目选讲

1、利用 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

例 1（1）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-\frac{1}{n})^n \sin\frac{1}{3^n}$ 的敛散性

（2）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\left(a>0\right)$的敛散性。

2、利用比值判别法、根值判别法判断级数的敛散性

注意：一些常见的极限

（1）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{an+b}=1$ （2）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{|a|,|b|\}$

例 2（1）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\pi^n-3^n}$ 的敛散性

（2）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$ 的敛散性

3、利用等价无穷小替换判断级数的敛散性

方法：如果 $a_n \sim b_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性

例 3(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n^{\lambda}})}{n}$ （$\lambda > 0$）

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$

4、利用比较判别法判断级数的敛散性

常用不等式 $\ln n < n$

例 4（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \sqrt[3]{n}}$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$

5、利用级数的性质判断级数的敛散性

方法：（1）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中有一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 发散

例 5（1） $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$

6、利用泰勒公式判断级数的敛散性

方法：利用泰勒公式展开找和原级数等价无穷小的级数讨论

例 6（1）$\sum_{n=1}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^{n}]^{p}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)^p$ （$p>0$）

7、判断级数条件收敛或绝对收敛

例 7（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\left(\sqrt{n^2+3}\ \pi\right)$

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

8、求级数的收敛域和收敛半径

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f(n,x)$ 的收敛域

方法（1）求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot f(n+1,x)|}{|a_n \cdot f(n,x)|} = h(x)$（或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot f(n,x)|} = h(x)$）

（2）令 $h(x) < 1$，求出 x 的范围

（3）再把 x 的范围的端点值代入原级数判断收敛否，最终确定收敛域和收敛半径 R

例 8（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

9、求幂级数的和函数

方法（1）先求幂级数的收敛域

（2）令其和函数为 $s(x)$

（3）利用逐项积分或逐项求导求 $s'(x)$ 或 $\int s(x)dx$

（4）最后确定 $s(x)$

注意下列公式的应用

（1）$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

（2）$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sin x$

（3）$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$

例 10（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n}$

10、借助幂级数求数项级数的和

方法：把级数中含有 A^{an} 的形式设为 x^{an} 或 x^{n}，利用求幂级数的和函数的方法处理

（1） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

11、利用级数的敛散性讨论数列的敛散性

数列 $\{x_n\}$ 的敛散性 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 的敛散性

北京工商大学 BEIJING TECHNOLOGY AND BUSINESS UNIVERSITY

例 11 判断数列$\{x_n\}$是否收敛

（1）$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

（2） $$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$$

12、把级数转化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 的形式处理

常用公式：（1）$a=e^{\ln a}$　　　（2）$e^{a\ln n}=n^{a}$

例 12 判断下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

13、函数的幂级数展开

例1、 设 $f(x)=x^3\cdot\arctan x^2$ 那么 $f^{(2021)}(0)=?$

分析 如果按照求导公式，计算将繁琐。利用函数的幂级数展开，给出简洁的求解方法。

问题：设 $f(x)=x^3\cdot\arctan x^2$ 那么 $f^{(2021)}(0)=?$

思路

(1)求函数 $f(x)$ 的幂级数展开式（间接法），

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad x\in(-R,R)$$

(2)由展开式的唯一性知，上式即为 $f(x)$ 的麦克劳林级数

$$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

对比系数得 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$

步1：将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

解　因　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n,\quad |x|<1$

两边从 0 到 x 积分，得

$$\arctan x=\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x^2)^n dx,$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1)$$

上述幂级数在 $x=\pm1$ 处也收敛, 且 $\arctan x$ 在 $x=\pm1$ 处有定义且连续, 所以上述展开式成立的范围为 $x\in[-1,1]$

注:

本例中，利用已知展开式,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n,$$

通过逐项积分的方法，求出函数的幂级数展开式，这是典型的间接展开法。

步2: 设 $f(x)=x^3\cdot\arctan x^2$，那么 $f^{(2021)}(0)=?$

解 利用 $\arctan x$ 的展开式，得

$$f(x)=x^3\cdot\arctan x^2=x^3\left(x-\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}-\cdots+\frac{x^{2018}}{1009}-\cdots\right)$$

$$=x^3-\frac{x^9}{3}+\frac{x^{13}}{5}-\cdots+\frac{x^{2021}}{1009}-\cdots$$

因而

$$f^{(2021)}(0)=2021!a_{2021}=\frac{2021!}{1009}$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)}$$

例2 将 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并确定收敛域。

解 先将 $\dfrac{1}{x-2}$ 展开成 x 的幂级数:

$$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2(1-x/2)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad \left|\frac{x}{2}\right|<1$$

再逐项求导，得

$$\frac{1}{(x-2)^2}=-\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},\ x\in(-2,2)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1)$$

14、函数的三角级数展开-2016

六：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$。用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数．

部分综合题选讲

一、试求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ 的和。

二、判断数列 $\{x_n\}$ 是否收敛

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

三、（满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(x)$，且，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛

四、（本题 14 分）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，

（1）若 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

五、求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量。