二阶常系数线性微分方程

$$y'' + p y' + q y = 0$$

二阶常系数齐线性方程

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

二阶常系数非齐线性方程

特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

特征根

$$\lambda_1 , \lambda_2$$

特解 y^*

通解 $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$

通解 $y = \bar{y} + y^*$

一、二阶常系数齐次线性微分方程

形如

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (1)$$

的方程，称为二阶常系数齐线性微分方程，其中 p、q 为(实)常数。

假设方程有形如 $y = e^{\lambda x}$ 的解，则代入方程后，得

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda p e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0,$$

即

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0。$$

特征方程

二阶常系数齐线性微分方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (1)$$

的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0。$$

---

1) 特征方程有两个不同的 实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

是方程 (1) 的两个线性无关的解，故方程 (1) 的通解为

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \quad 。$$

二阶常系数齐线性微分方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (1)$$

的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0。$$

---

2) 特征方程有实重根 $\lambda_1 = \lambda_2$，则

$$p^2 - 4q = 0，$$

$$\boxed{p + 2\lambda_1 = 0}$$

由求根公式 $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\dfrac{p}{2}$，

此时，$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 是方程(1)的一个解。

$$\boxed{p+2\lambda_1=0}$$

由刘维尔公式求另一个解：

$$y_2=e^{\lambda_1 x}\int\frac{e^{-\int p\,\mathrm{d}x}}{(e^{\lambda_1 x})^2}\mathrm{d}x=e^{\lambda_1 x}\int e^{-(p+2\lambda_1)x}\,\mathrm{d}x$$

$$=e^{\lambda_1 x}\int\mathrm{d}x=xe^{\lambda_1 x}。$$

于是，当特征方程有重实根时，方程(1)的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x)。$$

二阶常系数齐线性微分方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \qquad (1)$$

的特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0\text{。}$$

---

3) 特征方程有一对共轭复根：$\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$，$\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$，**则**

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + \mathrm{i}\,\beta)x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - \mathrm{i}\,\beta)x}$$

是方程 (1) 的两个线性无关的解

欧拉公式： $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 。

$$y_1=e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\mathrm{i}\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-\mathrm{i}\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)\text{ 。}$$

由线性方程解的性质：

$$y_1^*=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2^*=\frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

均为方程 (1) **的解，且它们是线性无关的：**

故当特征方程有一对共轭复根

$$\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta，\ \lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$$

时，原方程的通解可表示为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)。$$

二阶常系数齐线性微分方程 $y'' + p\,y' + q\,y = 0$

特征方程 $\lambda^2 + \lambda p + q = 0$。

特 征 根	**通 解 形 式**
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ (实根)	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2$ (实重根)	$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$ (共轭复根)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解。

解 特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，

特征根 $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=3$，

所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ 。

例 求方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解。

解 特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0$，

特征根 $\lambda_1=1+2\mathrm{i}$， $\lambda_2=1-2\mathrm{i}$，

所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。

二、n 阶常系数齐线性微分方程

形如

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \qquad (1')$$

的方程，称为 n 阶常系数齐线性微分方程， 其中 $p_1,\cdots,p_n$ 为(实)常数。

n 阶常系数齐线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

特征根	通解中的对应项
单实根 λ	1 项 $Ce^{\lambda x}$
k 实重根 λ	k 项 $e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$	2 项 $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
一对共轭 k 重复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$	$2k$ 项 $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})\sin\beta x]$

例

求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}-3\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$ 的通解。

解

特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$，

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，

所求通解为 $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$。

例. 求 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解。

解：特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0$

$$r^2(r^2-2r+5)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}(r-1)^2&=-4\\ r-1&=\pm 2i\\ r&=1\pm 2i\end{aligned}}$$

$r_1=r_2=0$, $r_3, r_4=1\pm 2i$

$\therefore$ 通解 $y=e^{0\cdot x}(C_1+C_2x)+e^{x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$

$$=C_1+C_2x+e^{x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

三、二阶常系数非齐线性微分方程

形如

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \qquad (2)$$

的方程，称为二阶常系数非齐线性微分方程， 其中 p、q 为(实)常数。

它对应的齐方程为

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0。 \qquad (1)$$

我们只讨论函数 $f(x)$ 的几种简单情形下，(2) 的特解。

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \quad (2)$$
$$y'' + p\,y' + q\,y = 0。\quad (1)$$

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 的情形

其中 $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$。

方程 (2) 对应的齐方程 (1) 的特征方程及特征根为

特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$；

特征根 λ_1，λ_2。

单根

二重根

一对共轭复根

假设方程

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x) \qquad (2)$$

有下列形式的特解：$y = e^{\alpha x}u(x)$， 则

$$y' = \alpha e^{\alpha x}u + e^{\alpha x}u',$$

$$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}u + 2\alpha e^{\alpha x}u' + e^{\alpha x}u'',$$

代入方程 (2)，得

$$e^{\alpha x}[u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u] = e^{\alpha x}P_n(x),$$

即

$$\underline{u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u = P_n(x)}\text{。} \qquad (3)$$

方程 (3) 的系数与方程 (1) 的特征根有关。

$y = e^{\alpha x} u(x)$

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x) \qquad (2)$$
$$u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u = P_n(x)。 \qquad (3)$$

(1) 若 α 不是特征根，则

$$\alpha^2 + \alpha p + q \neq 0,$$

由方程 (3) 及多项式求导的特点可知，应有

$$u(x) = Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$$

$Q_n(x)$ 是n次待定多项式。

故当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 中的 α 不是方程 (1) 的特征根时，

方程 (2) 有下列形式的特解:

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)。$$

$y = e^{\alpha x} u(x)$

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x) \qquad (2)$$
$$u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u = P_n(x)。 \qquad (3)$$

(2) 若 α 是单特征根，则

$$\alpha^2 + \alpha p + q = 0，$$

而 $\alpha \neq -\dfrac{p}{2}$，即 $2\alpha + p \neq 0$。此时，方程 (3) 为

$$u'' + (2\alpha + p)u' = P_n(x)。$$

由多项式求导的特点可知，应有

$$u(x) = xQ_n(x) = x(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n)，$$

故当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 中的 α 是方程(2)的单特征根时，

方程 (2) 有下列形式的特解:

$$y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x)。$$

$$y = e^{\alpha x}u(x)$$

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x) \qquad (2)$$

$$u'' + (2\alpha + p)u' + (\alpha^2 + p\alpha + q)u = P_n(x)。 \qquad (3)$$

(3) 若 α 是二重特征根，则

$$\alpha^2 + \alpha p + q = 0,$$

且 $\alpha = -\dfrac{p}{2}$，即 $2\alpha + p = 0$。此时，方程 (3) 为

$$u'' = P_n(x)。$$

由多项式求导的特点可知，应有

$$u(x) = x^2 Q_n(x) = x^2(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n),$$

故当 $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ 中的 α 是方程(2)的二重特征根时，

方程 (2) 有下列形式的特解:

$$y^* = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x)。$$

定理 1　**当二阶常系数非齐线性方程**

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \qquad (2)$$

的右端为 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时，**它有下列形式的特解：**

$$\boldsymbol{y^* = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)}\ ,$$

其中：　当 α 不是特征根时，取 $k=0$；

当 α 是单特征根时，取 $k=1$；

当 α 是二重特征根时，取 $k=2$。

例

求方程 $y''+y=x^2+x$ 的通解。

解 $f(x)=x^2+x$，$\alpha=0$，$n=2$。 $(f(x)=e^{\alpha x}P_n(x))$

对应的齐方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$。

对应的齐方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x\text{。}$$

由于 α 不是特征根，故取 $k=0$，原方程有特解

$$y^*=b_0x^2+b_1x+b_2\text{，}$$

将它代入原方程，得

$$2b_0+b_0x^2+b_1x+b_2=x^2+x\text{，}$$

比较两边同类项的系数，得

$$\begin{cases} b_0 = 1, \\ b_1 = 1, \\ 2b_0 + b_2 = 0, \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= 1, \\ b_2 &= -2, \end{aligned}$$

故原方程有一特解为

$$y^* = x^2 + x - 2\text{。}$$

综上所述，原方程的通解为

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2\text{。}$$

例　求方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解。

解　$f(x)=e^{-x}$，$\alpha=-1$，$n=0$。$(f(x)=e^{\alpha x}P_n(x))$

对应的齐方程的特征方程为　$\lambda^2-2\lambda-3=0$，

特征根为　$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$。

对应的齐方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}\text{。}$$

由于 α 是单特征根，故取 $k=1$，原方程有特解

$$y^*=xe^{-x}b_0\text{，}$$

将它代入原方程，得

$$[b_0(x-2)-2b_0(1-x)-3xb_0]e^{-x}=e^{-x}\text{，}$$

上式即

$$-4b_0=1, \quad \Rightarrow \quad b_0=-\frac{1}{4},$$

故原方程有一特解为

$$y^*=-\frac{1}{4}xe^{-x}\text{。}$$

综上所述，原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}xe^{-x}\text{。}$$

例

求方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}+3x+1$ 的通解。

解

$$y''-2y'-3y=e^{-x}+3x+1$$

$$y''-2y'-3y=e^{-x}$$

$$y_1{}^*=-\frac{1}{4}xe^{-x}$$

$$y''-2y'-3y=3x+1$$

$$y_2{}^*=-x+\frac{1}{3}$$

对应的齐方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}\text{。}$$

综上所述，原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{4}xe^{-x}-x+\frac{1}{3}\text{。}$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

第一步　利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+\tilde{P}_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda+i\omega)x}+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\tilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda + i\omega$ **是特征方程的** k **重根** (k = 0, 1), **则 ② 有特解:**

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $$(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

等式两边取共轭：

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ **为方程 ③ 的特解 .**

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解：

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m}\, e^{-i\omega x}\right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[\, Q_m(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{Q_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\,\right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[\, R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x\,\right]$$

其中 $R_m, \tilde{R}_m$ **均为 m 次多项式 .**

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

因

$$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^***本质上为实函数，** 因此 $R_m, \tilde{R}_m$ **均为** m **次实多项式 .**

小结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x \right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 (k = 0, 1), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x \right]$$

其中 $m = \max\{ n, l \}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ **的一个特解.**

解: 本题 $\lambda=0, \omega=2, P_l(x)=x, \tilde{P}_n(x)=0,$

特征方程 $r^2+1=0$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$ **不是特征方程的根,** **故设特解为**

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x - (3cx+3d+4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数，得
$$\begin{cases} -3a=1 \\ -3b+4c=0 \\ -3c=0 \\ -3d+4a=0 \end{cases} \quad \therefore\ a=\frac{-1}{3},\ d=\frac{4}{9} \quad b=c=0$$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$

例 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ **的通解.**

解：特征方程为 $r^2+9=0,$ **其根为** $r_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$\pm 3i$ **为特征方程的单根，因此设非齐次方程特解为**

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x\,\underline{-6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x\,\underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5,\quad b=3,$

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

例 **设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:**

$$(1)\quad y^{(4)}+2y''+y=\sin x$$

$$(2)\quad y^{(4)}+y''=\underline{x}+\underline{e^{x}}+\underline{3\sin x}$$

解: (1) 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$, 即 $(r^2+1)^2=0$,

有二重根 $r=\pm i$, **所以设非齐次方程特解为**

$$y^*=x^2(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4+r^2=0$, 即 $r^2(r^2+1)=0$ **有根**

$$r_{1,2}=0,\quad r_{3,4}=\pm i$$

利用叠加原理 , 可设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(ax+b)+c\,e^{x}+x(d\cos x+k\sin x)$$