1. $y^{(n)} = f(x)$ 型

只需连续进行 n 次积分即可求解这类方程，但请注意：每次积分都应该出现一个积分常数。

例

求方程 $y''' = \ln x$ 的通解。

解

对方程两边关于x连续积分3次，得到所求的通解：

$$y'' = \int \ln x \,\mathrm{d}\, x = x\ln x - x + C_1,$$

$$y' = \int (x\ln x - x + C_1)\,\mathrm{d}\, x$$

$$= x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left[x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) + C_1 x + C_2\right]\mathrm{d}\, x$$

$$= \frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \text{。}$$

2. $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$ 型

令 $p = y^{(n-1)}$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)。$$

这是一个一阶微分方程。设其通解为

$$p = \varphi(x, C_1),$$

这是一个 $y^{(n)} = f(x)$ 型的方程：

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1),$$

连续积分即可求解。

例 求方程 $x\,y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解。

解 令 $p = y^{(4)}$，则原方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x} - p = 0,$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{p} = \frac{\mathrm{d}\,x}{x},$$

积分，得

$$y^{(4)} = p = Cx,$$

$\boxed{y^{(n)} = f(x)\text{型}}$

连续积分 4 次，得原方程的通解为

$$\boldsymbol{y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5}$$

3. $y'' = f(y, y')$ 型

令 $p = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。

于是，原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)。$$

这是一个一阶微分方程。设其通解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = \varphi(y, C_1)。$$

这是一个变量分离方程，它的通解就是原方程的通解。

例　求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解。

解　令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。

于是，原方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$。

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}。$$

两边积分，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = C_1 y$。

运用分离变量法，得此方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$。