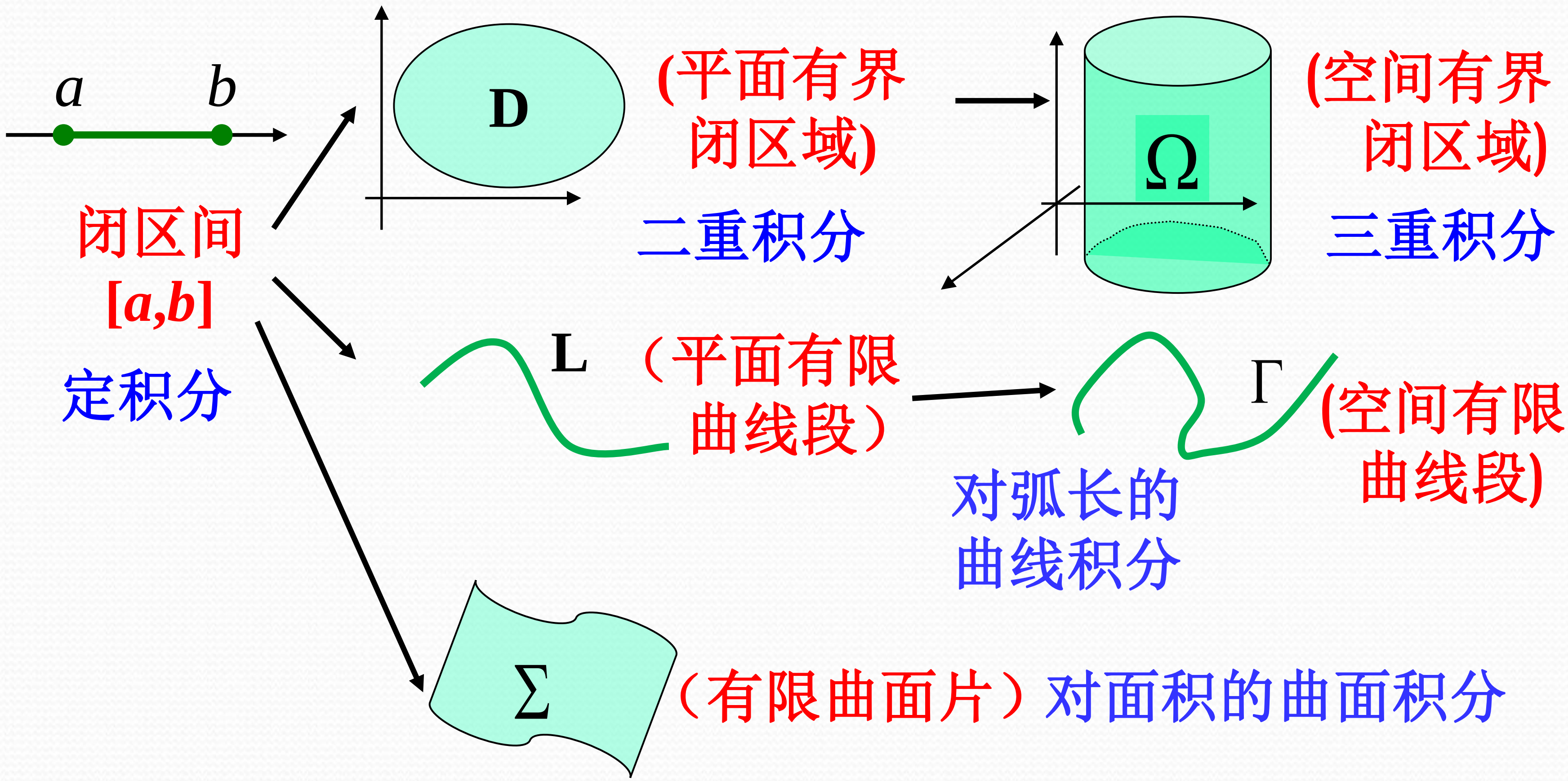
高数中的积分是不同几何形体上的积分：(7个）



曲线、曲面的方向性：对坐标的曲线积分和曲面积分.

黎曼积分：乘积和的极限.

定积分:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

二重积分:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y)d\sigma$$

三重积分:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i = \iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$

曲线积分:

对弧长的曲线积分:

平面曲线:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

空间曲线:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k=\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

对坐标的曲线积分:

平面曲线
$$\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_{\mathbf{k}},\eta_k)\Delta x_k=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x\\ \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} Q(\xi_{\mathbf{k}},\eta_k)\Delta y_k=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y\end{cases}$$

空间曲线
$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

曲面积分:

对面积的曲面积分: $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

对坐标的曲面积分:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

大学生数学竞赛真题多元积分出题情况：

第一届2009： 二重积分的计算、曲线积分

第二届2010： 三重积分(求转动惯量)、曲线积分

第三届2011： 二重积分的计算、曲面积分

第四届2012： 三重积分的计算、曲线积分

第五届2013： 曲面积分的计算、曲线积分

第六届2014： 曲面积分的计算、体积、曲面面积

第七届2015： 二重积分(体积)、二重积分估值

第八届2016： 三重积分(求质量)

第九届2017： 三重积分的计算、曲线积分

第十届2018： 三重积分的计算、曲线积分

第十一届2019：三重积分的计算、曲面积分

第十二届2020：二重积分的计算、曲线积分

重　积　分

一、重积分的定义、性质及典型例题

二、二重积分计算方法、技巧及典型例题

三、三重积分计算方法、技巧及典型例题

一、重难点内容归纳

(一)重积分的定义、性质

1. 二重积分的定义

定义： 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.

将 D 任意分为 n 个小闭区域： $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_i,\cdots,\Delta\sigma_n$,

以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i) , 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在， 则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint_D f(x,y)d\sigma$,

即
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \, .$$

2. 三重积分的定义

定义: 设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域: $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$, 以 Δv_i 表示第 i 个小闭区域的体积. 在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$, 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

存在, 则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i .$$

3．重积分的性质

性质 1 (可积性)若 $f(x,y)$在有界闭区域 D上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$ 中二重积分存在.

性质 2 (线性性)

$$\iint_D (k_1 f(x,y) \pm k_2 g(x,y))d\sigma = k_1\iint_D f(x,y)d\sigma \pm k_2\iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质 3 (对区域具有可加性)　($D = D_1 + D_2$)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 4 (D的面积)　$\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

性质 5（不等式）若在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地：$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

性质 6（估值不等式）设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

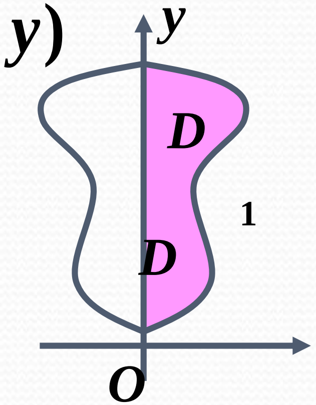
性质 7（中值定理）设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma\cdot$$

性质8（对称性） 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，

1) 如果积分区域 D 关于 y 轴对称，则有

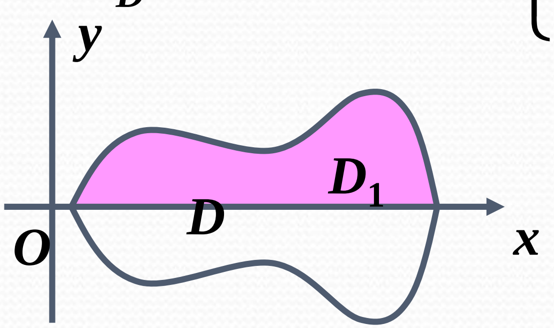
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0\qquad\qquad, & f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$



其中 $D_1=\begin{cases}D\\ x\ge 0\quad (x\le 0)\end{cases}$.

2) 如果积分区域 D 关于 x 轴对称，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0\qquad\qquad, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$



其中 $D_1=\begin{cases}D\\ y\ge 0\quad (y\le 0)\end{cases}$.

3) 如果积分区域 D 关于原点对称，则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}0, & f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

4) 如果交换变量 x 与 y，积分区域 D 保持不变，

或者 D 关于直线 $y=x$ 对称，这时也称区域 D 关于

变量 x 与 y 具有轮换对称性，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]d\sigma.$$

三重积分的性质与二重积分相似.

例如, 中值定理：设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续,

V 为Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$,

使得 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$

对称性质：设函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续.

如果积分区域 Ω 关于 *xoy* 面 对称, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 0, & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

其中 $\Omega_1 = \begin{cases} \Omega \\ z\geq 0 \quad (z\leq 0) \end{cases}$.

4. 关于定义与性质的题型

例1: 设函数 $f(x,y)$ 连续, 且满足方程: (类似2009-1(2)定积分)

$$f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)dxdy$$

其中 D 是由 $y=x^2, y=0, x=1$ 围成的区域, 求 $f(x,y)$.

例2: (1) 比较积分的大小: $\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{d}\sigma$, $\iint_D (x+y)^3 \, \mathrm{d}\sigma$

其中 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 2$

(2) 排序 $I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,dxdy$

$$I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,dxdy$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,dxdy$$

例3: 若平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$, （2009年）

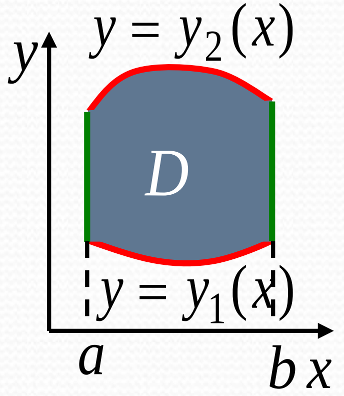
证明：$\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint\limits_D (e^{\sin x}+e^{-\sin y})d\delta \ge \frac{5}{2}\pi^2$

二、二重积分的计算方法与技巧

思想方法：把二重积分化为两次定积分来计算, 关键是确定两次积分的各积分上下限，主要的计算公式：

1.不同坐标系下的计算：

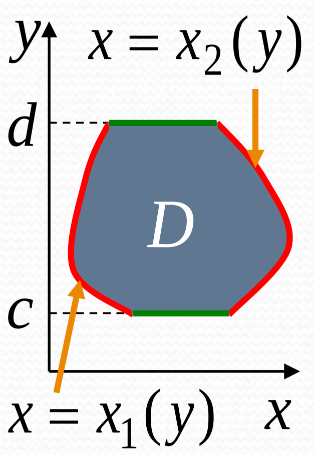
1）直角坐标系： $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$



X型积分区域：

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \mathrm{d}\,x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$



Y型积分区域：

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \mathrm{d}\,y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

关 键： 确 定 积 分 上 下 限.

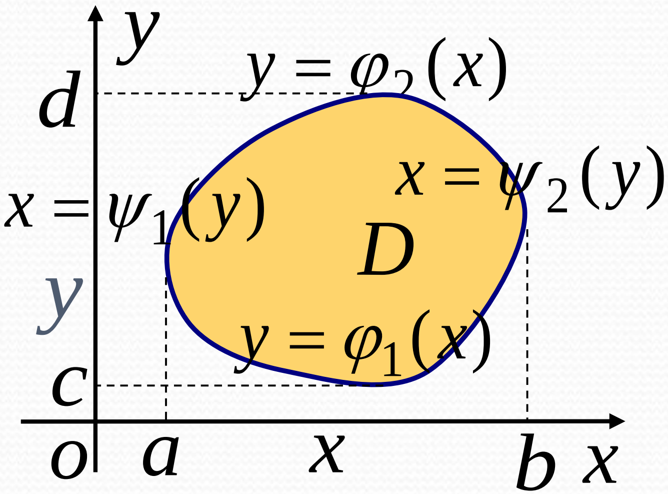
“后积先定限, 限内划条线, 先交是下限, 后交是下限”.

说明: (1) 若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域，

则有 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

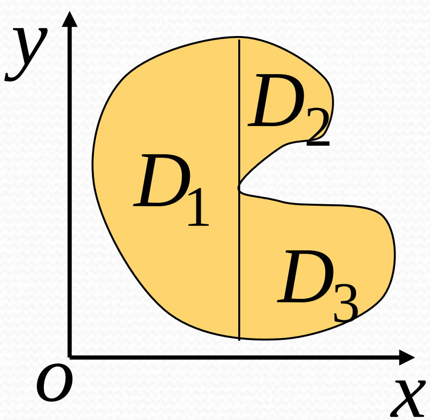


为计算方便,可选择积分序, 必要时还可以交换积分顺序.

(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干

X-型域或Y-型域，

则 $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$

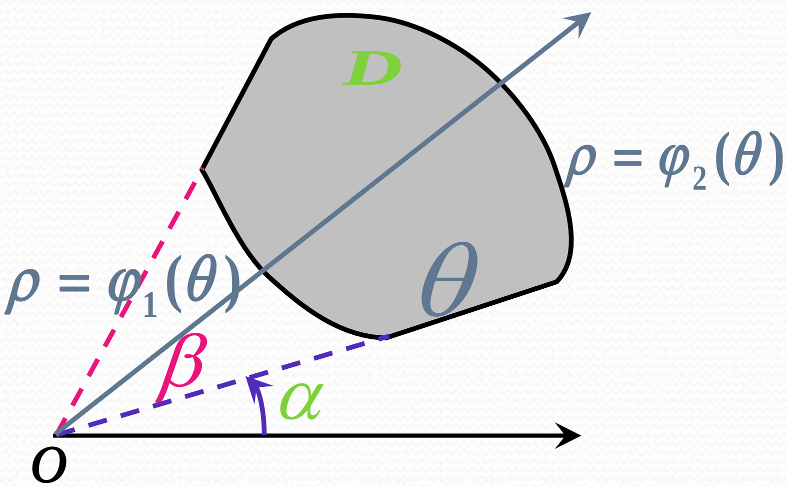


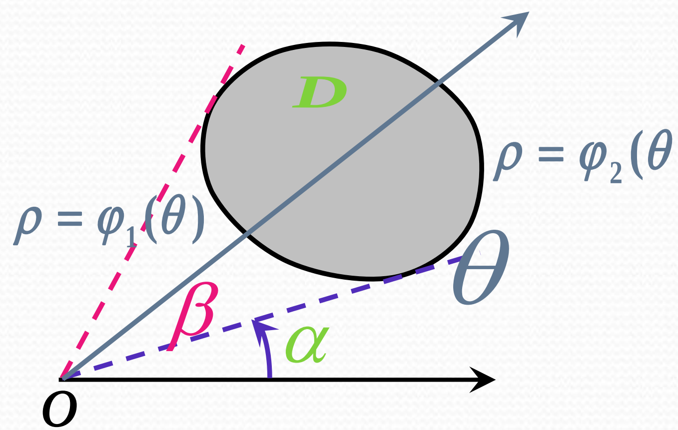
2)极坐标系: $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

若积分区域为: $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\alpha\le\theta\le\beta,\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta)\right\}$

则 $\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$





“后积先定限, 限内划条线, 先交是下限, 后交是下限” .

3)一般变量代换:

在变换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 下 $(x,y) \in D \longleftrightarrow (u,v) \in D'$,

若雅可比行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]\left|J\right|dudv.$$

当D是直线形时，多用直角坐标系，当D为圆形、扇形、环形及他们的部分区域，或被积函数可表为$f(x^2+y^2,y/x)$等形式时，则利用极坐标计算，优先考虑积分区域；如以上两种坐标系都不易计算时，因题而异采用一般变量代换.

2.计算步骤及注意事项

(1) 画出积分域；

(2) 选择坐标系；
- 积分区域：域边界应尽量多为坐标线
- 被积函数：关于坐标变量易分离

(3) 确定积分序
- 积分域分块要少
- 累次积好算为妙

(4)写出积分限
- 图示法
- 不等式

(后积先定限，限内划条线，先交是下限，后交是上限)

(5)计算要简便
- 充分利用对称性、对区域的可加性
- 应用换元公式

例4. 计算 $I=\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=x$, $x=-1$ 及 $y=1$ 所围的闭区域.

练习: 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$,其中D 是由直线$x = 2, y = x$ 及曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域.

注意：当被积函数 $f(x,y)$ 为以下函数时，不管积分区域为何类型，都只有一种积分次序才能积分.

(1) 先对 y 后对 x 积分：

$$e^{x^2},\ e^{\frac{y}{x}},\ \frac{e^x}{x},\ \sin x^2,\ \sin\frac{y}{x},\ \frac{\sin x}{x},\ \cos x^2,\ \cos\frac{y}{x},\ \frac{\cos x}{x}$$

(2) 先对 x 后对 y 积分：

$$e^{y^2},\ e^{\frac{x}{y}},\ \frac{e^y}{y},\ \sin y^2,\ \sin\frac{x}{y},\ \frac{\sin y}{y},\ \cos y^2,\ \cos\frac{x}{y},\ \frac{\cos y}{y}.$$

(2)交换积分次序

例5: 设函数 $f(x,y)$ 连续，则

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_$$

例6: 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$

则 $F'(2)$ 等于______.

$(A)\ 2f(2)$; $(B)\ f(2)$; $(C)-f(2)$; $(D)\ 0$.

例7: 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$. 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的第一象限内的闭区域.

例8. 计算 $I=\iint\limits_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)dxdy$. 其中 D 由 $x+y=1$, $x=0$ 及 $y=0$ 所围成.

练习： 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$ ______，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.（第一届2009）

例9. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} dxdy =$ ________.

例10: 设区域 $D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$,

计算二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

例11： 证明由曲面$(z-a)\varphi(x)+(z-b)\varphi(y)=0, x^2+y^2=c^2$ $(c>0)$, 和$z=0$所围立体体积为$v=\dfrac{1}{2}\pi c^2(a+b)$, 其中$\varphi$为任意正的连续函数.

练习. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 由 $y=4-x^2$, $y=-3x$, $x=1$ 所围成.

例12. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy,$

其中 $D=\{(x,\ y)\,|\,0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2\}.$

例13. 计算二重积分$\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2, y^2\}} dxdy$，其中

$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1\}$

例14. 计算$\int_0^1\int_0^1[2x+2y]dxdy$，其中$[x]$为不超过$x$的最大整数.

例 15. 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x\ (0<a<b)$.

例16. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,

求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

例17: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例18 设 $f(u)$ 有连续的一阶导数，且 $f(0)=0$. 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy.$$

三、三重积分的计算

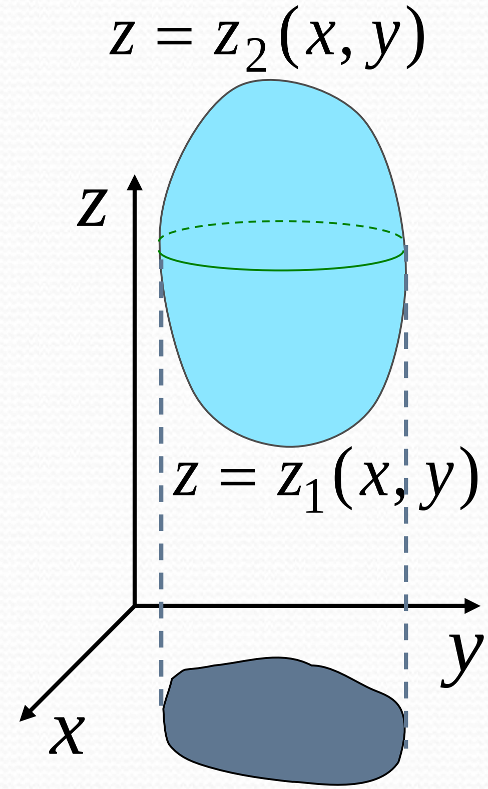
1. 不同坐标系下的计算：

1）利用直角坐标计算.

方法1.投影法（“先一后二”）

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$



关键: 1) 找到上下两曲面的方程——对z积分的上下限.

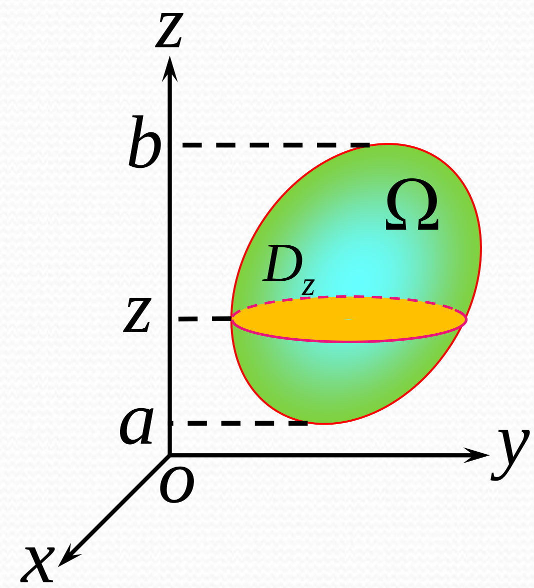
2) 确定两曲面在坐标面的投影——二重积分域.

(2) 截面法（先二后一法）

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$=\int_a^b [\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy]dz$$

$$=\int_a^b dz\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



关键: 1) 确定夹立体的上下两平面——对z积分的上下限.

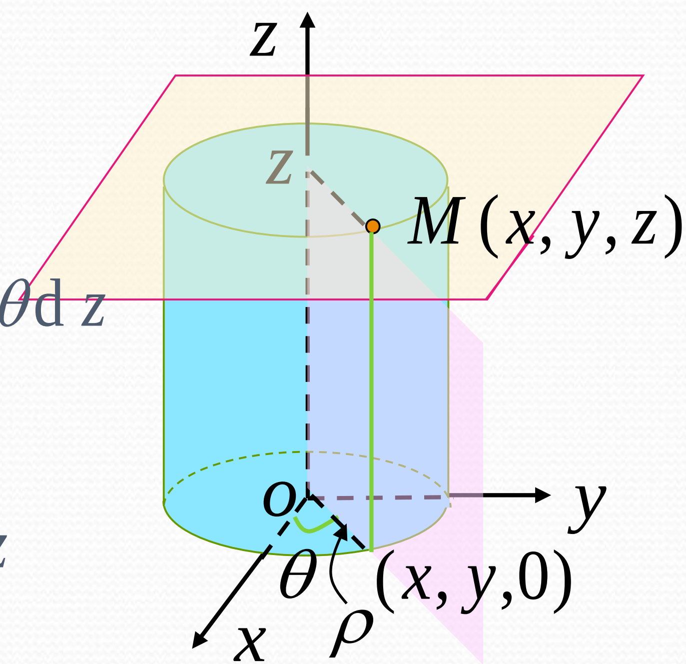
2) 找出截面区域——二重积分域.

2）利用柱坐标计算

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 将x,y用极坐标ρ,θ代替, 则(ρ,θ,z)

就称为点M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



在柱面坐标系中体积元素为 $\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

因此 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

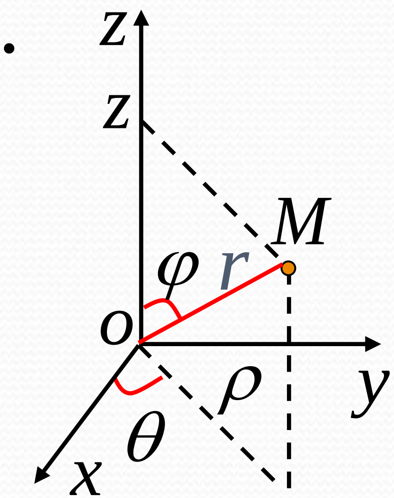
适用范围:

1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单;

2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

3）利用球坐标

设 $M(x,y,z)\in R^3$,其柱坐标为(ρ,θ,z),令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle ZOM=\varphi$, 则(r,θ,φ) **就称为点*M*的球坐标.**



直角坐标与球面坐标的关系

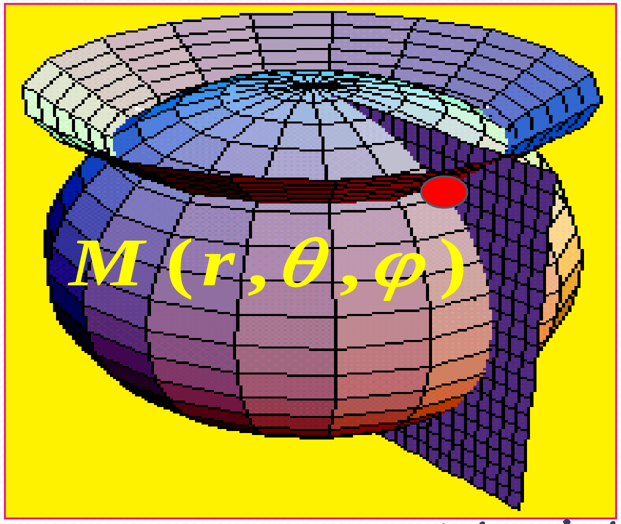
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 → 球面

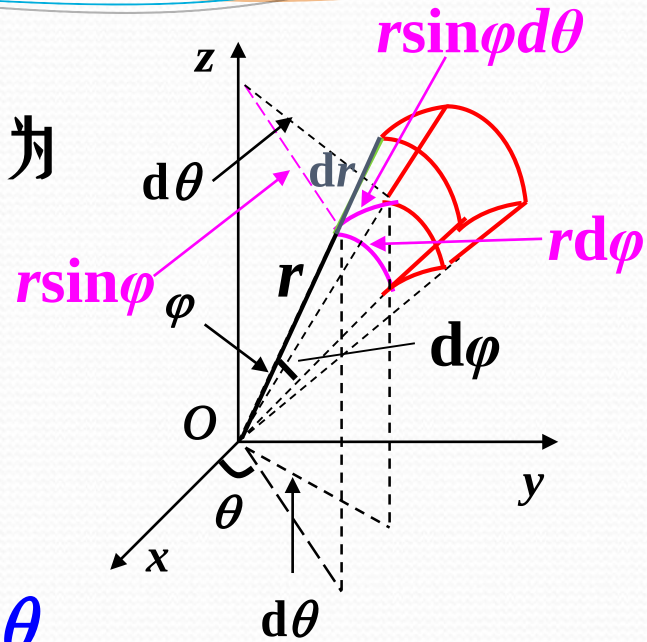
$\theta=$ 常数 → 半平面

$\varphi=$ 常数 → 锥面



在球面坐标系中,实际上是用一系列球面，锥面和半平面来分划Ω，体积元为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega_{r\theta\varphi}} F(r,\theta,\varphi)\; r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

注意: 以下情形可考虑用球坐标:

1) 积分域为球域或非标准球域;

2) 被积函数含有 $x^2 + y^2 + z^2$;

北京工商大学 吴巧梅

2.三重积分计算的基本技巧

1）交换积分顺序的方法

2）利用对称性或重心公式简化计算

3）消去被积函数绝对值符号 $\begin{cases} \text{分块积分法} \\ \text{利用对称性} \end{cases}$

4）利用重积分换元公式

使用对称性时应注意：

1 .积分区域关于坐标面的对称性；

2 .被积函数在积分区域上的关于三个坐标轴的奇偶性.

一般地，当积分区域Ω关于xoy平面对称，且被积函数$f(x,y,z)$是关于z的奇函数，则三重积分为零，若被积函数$f(x,y,z)$是关于z的偶函数，则三重积分为Ω在xoy平面上方的半个闭区域的三重积分的两倍.

例1: 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$,其中Ω由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成.

例2. 计算 $\iiint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由

$x^2+y^2+(z-1)^2=1, z\geq 1, y\geq 0$ 所围成.

例3. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域为 V, 则三重积分 $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ ______.（第九届2017）

例4. 设Ω由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}v.$

例5. 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中

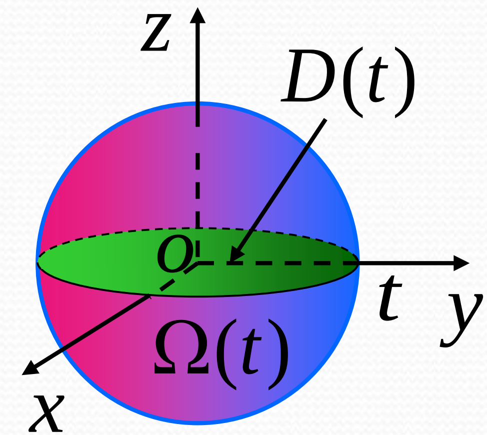
Ω 由 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 围成.

例6. 求 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围立体体积.

例 7. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$



其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.