大学生数学竞赛中的方法与技巧

夜雨

第一讲：极限

求极限或证明极限存在的方法：

1. 利用洛必达法则
2. 利用等价无穷小
3. 利用泰勒公式
4. 利用施笃兹定理
5. 利用夹逼准则
6. 利用微分中值定理
7. 利用积分与积分的定义
8. 利用导数的定义
9. 利用无穷级数
10. 利用单调有界准则
11. 利用欧拉常数
12. 利用斯特林公式
13. 利用子数列
14. 利用极限的定义

第一讲：极限 > 洛必达法则

运用洛必达法则要求未定式是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型

所以在使用洛必达法则前，要判断未定式是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型

$\frac{\infty}{\infty}$型可推广为$\frac{*}{\infty}$型

只要求分母为无穷大不要求分子为无穷大

第一讲：极限 > 洛必达法则

α，β是大于0的常数，求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}$

未定式属于$0\cdot\infty$型，我们把它转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型，$x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}=\dfrac{(\ln x)^{\beta}}{x^{-\alpha}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\beta(\ln x)^{\beta-1}x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{-\alpha}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-1}}{x^{-\alpha}}\text{(一次洛必达法则)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{-\alpha}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-1}}{x^{-\alpha}}=\cdots=\lim_{x\to0^+}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{(-\alpha)^{k}}\cdot\frac{(\ln x)^{\beta-k}}{x^{-\alpha}}\text{(k次洛必达法则，k是大于}\beta\text{的正整数)}$$

事实上我们把这道题做复杂了，我们观察上面的过程，我们就会发现因为$\ln x$有β次方用了洛必达法则后的得到的式子更加复杂，我们利用洛必达法则其实是想把$\ln x$消掉，因为有β次方所以$\ln x$没有消掉，那我们可不可以把β消掉呢？答案是肯定的，事实上我们可以给原式子开个β次方

$$\left(\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\frac{\ln x}{x^{-\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{\alpha}{\beta}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-\frac{\alpha}{\beta}x^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{-\frac{\alpha}{\beta}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{-\alpha}}=0\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}=0$$

第一讲：极限 > 洛必达法则

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$

当底数和指数都含有变量时，我们一般取对数，将乘方开方这个三级运算转化成低一级的乘除运算将乘除运算转化成更低一级的加减运算，从而简化运算

比如$(a\times b\div c)^{\frac{d}{f}}$取自然对数后$\ln(a\times b\div c)^{\frac{d}{f}}=(\ln a+\ln b-\ln c)\times d\div f$，或$(a\times b\div c)^{\frac{d}{f}}=e^{\ln(a\times b\div c)^{\frac{d}{f}}}$

$$x^{x^x}=e^{\ln x^{x^x}}=e^{x^x\ln x}$$

$$x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

$$x^x\to e^0=1\Rightarrow x^x\ln x\to -\infty\Rightarrow x^{x^x}\to e^{-\infty}=0$$

p是正整数，a_1，$a_2,\cdots$，$a_p>0$，求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\ln\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\exp\left(\frac{\ln\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_p^x\ln a_p}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{a_1}{M}\right)^x\ln a_1+\left(\frac{a_2}{M}\right)^x\ln a_2+\cdots+\left(\frac{a_p}{M}\right)^x\ln a_p}{\left(\frac{a_1}{M}\right)^x+\left(\frac{a_2}{M}\right)^x+\cdots+\left(\frac{a_p}{M}\right)^x}\qquad \text{记}M=\max\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_p\}$$

$$=\frac{s\ln M}{s}=\ln M\qquad \text{记}a_1,\ a_2,\cdots,\ a_p\text{中有}s\text{个等于}M$$

$$\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\to\exp(\ln M)=M=\max\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_p\}$$

第一讲：极限 > 洛必达法则

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_p\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

函数极限与数列极限的关系

1.如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一趋向于 $+\infty$ 的数列，且满足：那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2.如果极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一趋向于 $-\infty$ 的数列，且满足：那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3.如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0\ (n\in N^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

第一讲：极限 > 洛必达法则

p是正整数， $a_1, a_2, \cdots, a_p$, $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_p^x\right)^{\frac{1}{x}} = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$

第一讲：极限 > 洛必达法则

p是正整数，a_1，$a_2,\cdots$，$a_p>0$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\exp\left(\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_p^x\ln a_p}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_p}{p}=\ln\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}$$

$$\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\to\exp\left(\ln\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}\right)=\sqrt[p]{a_1a_2\cdots a_p}$$

第一讲：极限 > 洛必达法则

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}\right)'}{2x}$$

$$\left(\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}\right)'$$

$$=(\cos x)'\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}+\cos x\left(\sqrt[2]{\cos 2x}\right)'\cdots\sqrt[n]{\cos nx}+\cdots+\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\left(\sqrt[n]{\cos nx}\right)'$$

$$=\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}\left(\frac{(\cos x)'}{\cos x}+\frac{\left(\sqrt[2]{\cos 2x}\right)'}{\sqrt[2]{\cos 2x}}+\cdots+\frac{\left(\sqrt[n]{\cos nx}\right)'}{\sqrt[n]{\cos nx}}\right)$$

对于$k=1,2,\cdots,\ n$

$$\lim_{x\to 0}-\frac{\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}\dfrac{\left(\sqrt[k]{\cos kx}\right)'}{\sqrt[k]{\cos kx}}}{2x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\left(\sqrt[k]{\cos kx}\right)'}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx(\cos kx)^{\frac{1}{k}-1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{2x}=\frac{k}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

常用等价无穷小

当$x \to 0$时

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad \ln(1+x) \sim x \quad (1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x$$

利用等价无穷小有时能极大的简化我们的式子

第一讲：极限 > 等价无穷小

等价无穷小的代换

若α、α^*是等价无穷小则有

$\lim\alpha^*\beta$存在 $\Rightarrow \lim\alpha\beta=\lim\alpha^*\beta$

$\lim\frac{\beta}{\alpha^*}$存在 $\Rightarrow \lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha^*}$

$$\lim\alpha\beta=\lim\frac{\alpha}{\alpha^*}\cdot\alpha^*\beta=\lim\frac{\alpha}{\alpha^*}\cdot\lim\alpha^*\beta=\lim\alpha^*\beta$$

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha^*}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\alpha^*}=\lim\frac{\alpha^*}{\alpha}\cdot\lim\frac{\beta}{\alpha^*}=\lim\frac{\beta}{\alpha^*}$$

若$\alpha\sim\alpha^*$且$\beta\neq 0$则有$\alpha\beta\sim\alpha^*\beta \Leftarrow \lim\frac{\alpha\beta}{\alpha^*\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha^*}=1$

若$\alpha\sim\alpha^*$则有$\alpha^k\sim(\alpha^*)^k \Leftarrow \lim\frac{\alpha^k}{(\alpha^*)^k}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)^k=1$

若$\alpha\sim\alpha^*$且$\beta\sim\beta^*$则有$\alpha\beta\sim\alpha^*\beta^* \Leftarrow \lim\frac{\alpha\beta}{\alpha^*\beta^*}=\lim\frac{\alpha}{\alpha^*}\cdot\lim\frac{\beta}{\beta^*}=1$

若$\alpha\sim\beta$且$\beta\sim\gamma$则有$\alpha\sim\gamma \Leftarrow \lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\frac{\beta}{\gamma}=1$

第一讲：极限 > 等价无穷小

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\ln\left(1+\sin^2 x\right)\sim\sin^2 x\sim x^2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

$$1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}=1-e^{\ln\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}\sim-\ln\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[k]{\cos kx}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\cos kx}{k}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln\cos kx}{k}}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos kx}{kx^2}=\sum_{k=1}^{n}-\frac{k}{2}$$

$$\ln\cos kx\sim\cos kx-1\sim-\frac{(kx)^2}{2}$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

把 $\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ 看作数列 $\{I_k\}$ 的第n项

$$I_k=\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2},\quad k=1,2,\cdots$$

$$I_n=\sum_{k=2}^{n}(I_k-I_{k-1})+I_1$$

$$\lim_{x\to0}I_n \Leftarrow \lim_{x\to0}(I_k-I_{k-1})\quad \lim_{x\to0}I_1$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

这道题我们用差分来做，设$I_k=\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos2x}\cdots\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}$，$k=1,2,\cdots$

$$I_n=\sum_{k=2}^{n}(I_k-I_{k-1})+I_1$$

对于$k=2,\cdots$，n

$$I_k-I_{k-1}=\frac{\cos x\sqrt[2]{\cos2x}\cdots\sqrt[k-1]{\cos(k-1)x}\left(1-\sqrt[k]{\cos kx}\right)}{x^2}$$

$$1-\sqrt[k]{\cos kx}=1-[(\cos kx-1)+1]^{\frac{1}{k}}\sim\frac{1}{k}(1-\cos kx)\sim\frac{1}{k}\cdot\frac{(kx)^2}{2}=\frac{k}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to0}(I_k-I_{k-1})=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}=\frac{k}{2}\Rightarrow I_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

p是给定的正整数，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{p} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{p} x}{\tan x-\sin x}$

记 $I_k=\dfrac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k} x}{\tan x-\sin x}$，$k=1,2,\cdots$

$$I_p=\sum_{k=2}^{p}(I_k-I_{k-1})+I_1$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

$$\text{记} I_k=\frac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k} x}{\tan x-\sin x},\quad k=1,2,\cdots$$

$$I_p=\sum_{k=2}^{p}(I_k-I_{k-1})+I_1=\sum_{k=2}^{p}(I_k-I_{k-1})+I_1$$

$$\text{对于} k=2,\cdots,\ m\qquad I_k-I_{k-1}=\frac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k} x-\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k-1} x}{\tan x-\sin x}-\frac{\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k-1} x}{\tan x-\sin x}$$

$$\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}\Rightarrow\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k} x-\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k-1} x\sim\frac{(\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{k-1} x)^3}{3}\sim\frac{x^3}{3}$$

$$\sin x-x\sim-\frac{x^3}{6}\Rightarrow\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k-1} x\sim-\frac{(\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{k-1} x)^3}{6}\sim-\frac{x^3}{6}$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}\Rightarrow\lim_{x\to0}(I_k-I_{k-1})=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}}-\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{2}}=1\Rightarrow\lim_{x\to0}I_p=p$$

第一讲：极限 > 等价无穷小

$\alpha\in(0,1)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]$

记 $n=\frac{1}{t},(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=\frac{(t+1)^{\alpha}-1}{t^{\alpha}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^{\alpha}-1}{t^{\alpha}}=\lim_{t\to0}\frac{\alpha t}{t^{\alpha}}=\lim_{t\to0}\alpha t^{1-\alpha}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}=0$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

无穷小的运算

m，n是正整数

$\alpha \sim x^n$或$\alpha = o(x^n)$，$o(x^m)\cdot\alpha = o(x^{m+n})$

$o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

$m > n$是正整数

$o(x^m) = o(x^n)$

$o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^n)$

$\alpha \sim x^n$，$o(x^m) \div \alpha = o(x^{m-n})$

$$\frac{o(x^m)\cdot\alpha}{x^{m+n}} = \frac{o(x^m)}{x^m}\cdot\frac{\alpha}{x^n} \to 0\cdot 1\text{或}0 \Rightarrow o(x^m)\cdot\alpha = o(x^{m+n})$$

$$\frac{o(x^n)\pm o(x^n)}{x^n} = \frac{o(x^n)}{x^n} \pm \frac{o(x^n)}{x^n} \to 0+0 \Rightarrow o(x^n)\pm o(x^n) = o(x^n)$$

$$\frac{o(x^m)}{x^n} = \frac{o(x^m)}{x^m}\cdot\frac{x^m}{x^n} = \frac{o(x^m)}{x^m}\cdot x^{m-n} \to 0\cdot 0 \Rightarrow o(x^m) = o(x^n)$$

$$\frac{o(x^m)\pm o(x^n)}{x^n} = \frac{o(x^m)}{x^n} \pm \frac{o(x^n)}{x^n} \to 0+0 \Rightarrow o(x^m)\pm o(x^n) = o(x^n)$$

$$\frac{o(x^m)\cdot o(x^n)}{x^{m+n}} = \frac{o(x^m)}{x^m}\cdot\frac{o(x^n)}{x^n} \to 0\cdot 0 \Rightarrow o(x^m)\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$\frac{o(x^m)\div\alpha}{x^{m-n}} = \frac{o(x^m)}{x^m}\cdot\frac{x^n}{\alpha} \to 0\cdot 1 \Rightarrow o(x^m)\div\alpha = o(x^{m-n})$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

常用的泰勒公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \theta\in(0,1)\qquad \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}=o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{\sin\left[\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad \theta\in(0,1)\qquad \frac{\sin\left[\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}=o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\cos[\theta x+(n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2},\quad \theta\in(0,1)\qquad \frac{\cos[\theta x+(n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2}=o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},\quad \theta\in(0,1)\qquad \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}=o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}}{(n+1)!},\quad \theta\in(0,1)$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}}{(n+1)!}=o(x^n)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o(x^7)$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} \\
\hline
1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6) & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^7) \\
 & x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{4!} - \dfrac{x^7}{6!} + o(x^7) \\
\hline
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \dfrac{x^7}{840} + o(x^7) \\
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{x^7}{72} + o(x^7) \\
\hline
 & \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{4x^7}{315} + o(x^7) \\
 & \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{x^7}{15} + o(x^7) \\
\hline
 & \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
 & \dfrac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
\hline
 & o(x^7)
\end{array}$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\right) + o(x^7)$$

等式两边除以$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$

得
$$\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

$$\Rightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

利用泰勒公式能把一个式子写成幂的和的形式

1.有时能极大的简化式子

2.能将两个看似不相关的式子变成一样的形式，从而联系起来

第一讲：极限 > 泰勒公式

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

$$\frac{o(\cos kx-1)}{x^2}=\frac{o(\cos kx-1)}{\cos kx-1}\cdot\frac{\cos kx-1}{x^2}\to 0\cdot\left(-\frac{k^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{o\left((kx)^2\right)}{x^2}=\frac{o\left((kx)^2\right)}{(kx)^2}\cdot\frac{(kx)^2}{x^2}\to 0\cdot k^2=0$$

对于 $k=1,2,\cdots,\ n$

$$\sqrt[k]{\cos kx}=[(\cos kx-1)+1]^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}(\cos kx-1)+o(\cos kx-1)=1+\frac{1}{k}(\cos kx-1)+o(x^2)$$

$$\cos kx=1-\frac{1}{2}(kx)^2+o\left((kx)^2\right)\Rightarrow\cos kx-1=-\frac{1}{2}(kx)^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow\sqrt[k]{\cos kx}=1+\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{2}(kx)^2+o(x^2)\right]+o(x^2)=1-\frac{k}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}=\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{2}{2}x^2+o(x^2)\right]\cdots\left[1-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{2}x^2-\cdots-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{n}{2}+o(1)$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

$$\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{2}{2}x^2+o(x^2)\right]\cdots\left[1-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)\right]=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{2}x^2-\cdots-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)$$

将$\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]\left[1-\frac{2}{2}x^2+o(x^2)\right]\cdots\left[1-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)\right]$展开共有$3^n$项

任意一项$a_1a_2\cdots a_n$ $\quad a_k\in\{1,-\frac{k}{2}x^2,\ o(x^2)\}\quad k=1,2,\cdots,\ n$

i.$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$中存在某个a_t取第三项(即$a_t=o(x^2)$)$\Rightarrow a_1a_2\cdots a_n=o(x^2)$

$\Rightarrow\sum a_1a_2\cdots a_n=o(x^2)$

ii.$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$都不取第三项(即$a_k\neq o(x^2)$)且存在$a_i,\ a_j$取第二项(即存在$a_i=-\frac{i}{2}x^2,\ a_j=-\frac{j}{2}x^2,\ i\neq j$)

$\Rightarrow a_ia_j=o(x^2)\Rightarrow a_1a_2\cdots a_n=o(x^2)\Rightarrow\sum a_1a_2\cdots a_n=o(x^2)$

iii.$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$都不取第三项(即$a_k\neq o(x^2)$)且不存在$a_i,\ a_j$取第二项(即不存在$a_i=-\frac{i}{2}x^2,\ a_j=-\frac{j}{2}x^2,\ i\neq j$)

$(a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n)=(1,1,\cdots,1)$、$(-\frac{1}{2}x^2,1,\cdots,1)$、$(1,-\frac{2}{2}x^2,\cdots,1)$、$\cdots$、$(1,1,\cdots,-\frac{n}{2}x^2)$

$\Rightarrow a_1a_2\cdots a_n=1$或$-\frac{1}{2}x^2$或$-\frac{2}{2}x^2\cdots$或$-\frac{n}{2}x^2\Rightarrow\sum a_1a_2\cdots a_n=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{2}x^2-\cdots-\frac{n}{2}x^2$

第一讲：极限 > 泰勒公式

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

$$\cos x\sqrt[2]{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{2}x^2-\cdots-\frac{n}{2}x^2+o(x^2)$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

$$\frac{o(\tan^3 x)}{x^3}=\frac{o(\tan^3 x)}{\tan^3 x}\cdot\frac{\tan^3 x}{x^3}\to 0\cdot 1=0$$

$$\frac{o(\sin^3 x)}{x^3}=\frac{o(\sin^3 x)}{\sin^3 x}\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}\to 0\cdot 1=0$$

在用泰勒公式前我们首先要想到要展开到哪一项

注意到$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^3$，所以我们展开到$x^3$项

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\tan\tan x=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+o(\tan^3 x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)+\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3}{3}+o(x^3)=x+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\sin\sin x=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}=2$$

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3=x^3+o(x^3)$$

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3=x^3+o(x^3)$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

p是给定的正整数，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{p} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{p} x}{\tan x-\sin x}$

这题我们用递推来做，根据上一题，我们猜测对任意的正整数n，$\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{n} x$可以表示成$a_n x+b_n x^3+o(x^3)$

设$\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{n} x=I_n \quad (n=1,2,\cdots)$

假设I_n可以表示成$a_n x+b_n x^3+o(x^3) \quad (n=1,2,\cdots)$

$$I_{n+1}=\tan I_n=I_n+\frac{1}{3}I_n^3+o(I_n^3)=a_n x+b_n x^3+o(x^3)+\frac{1}{3}\left(a_n x+b_n x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3)$$

$$=a_n x+b_n x^3+\frac{1}{3}a_n^3x^3+o(x^3)$$

$$=a_n x+\left(b_n+\frac{1}{3}a_n^3\right)x^3+o(x^3)=a_{n+1}x+b_{n+1}x^3+o(x^3)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\text{且}b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}a_n^3$$

$$\Rightarrow a_n=\cdots=a_1=1\Rightarrow b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\Rightarrow b_n=\cdots=b_1+\frac{n-1}{3}=\frac{n}{3}$$

$$\Rightarrow I_n=x+\frac{n}{3}x^3+o(x^3)\Rightarrow \overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{n} x=x+\frac{n}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\tan\tan x=x+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\frac{o(I_n^3)}{x^3}=\frac{o(I_n^3)}{I_n^3}\cdot\frac{I_n^3}{x^3}\to 0\cdot a_n^3=0$$

$$\left(a_n x+b_n x^3+o(x^3)\right)^3=a_n^3x^3+o(x^3)$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

同样的我们可以推出对任意的n，$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n} x = x - \frac{n}{6}x^3 + o(x^3)$

第一讲：极限 > 泰勒公式

设$\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{n} x = I_n \quad (n=1,2,\cdots)$

我们用数学归纳法证明$I_n = x+\frac{n}{3}x^3+o(x^3) \quad (n=1,2,\cdots)$

当$n=1$时，$I_1=\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \Rightarrow n=1$成立

假设$n=k \quad (k\ge 1)$成立$\Rightarrow I_k = x+\frac{k}{3}x^3+o(x^3)$

$$I_{k+1}=\tan I_k = I_k+\frac{1}{3}I_k^3+o(I_k^3)=x+\frac{k}{3}x^3++o(x^3)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{k}{3}x^3++o(x^3)\right)^3+o(x^3)=x+\frac{k+1}{3}x^3+o(x^3)$$

$\Rightarrow n=k+1$成立$\Rightarrow I_n = x+\frac{n}{3}x^3+o(x^3) \quad (n=1,2,\cdots)$

设$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n} x = H_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 同理可证$H_n = x-\frac{n}{6}x^3+o(x^3) \quad (n=1,2,\cdots)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\tan\tan\cdots\tan}^{p} x-\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{p} x}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{I_p-H_p}{I_1-H_1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{p}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{p}{2}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}=p$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{k}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\left(\sin\frac{\pi}{k}-\frac{\pi}{k}\right)$

$$\sin x - x = -\frac{\cos(\xi)}{3!}x^3$$

对于 $k=n+1,\cdots,2n$

$$\sin\frac{\pi}{k}-\frac{\pi}{k}=-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{\pi}{k}\right)^3$$

$$\left|-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{\pi}{k}\right)^3\right|\le\frac{\pi^3}{6k^3}\le\frac{\pi^3}{6n^3}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{\pi}{k}\right)^3\right|\le\sum_{k=n+1}^{2n}\left|-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{\pi}{k}\right)^3\right|\le n\cdot\frac{\pi^3}{6n^3}=\frac{\pi^3}{6n^2}\to 0\Rightarrow\sum_{k=n+1}^{2n}-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{\pi}{k}\right)^3\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{k}=\pi\ln 2$$

第一讲：极限 > 泰勒公式

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$ （第一届决赛） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right)$

$$\sin x-x=-\frac{\cos(\xi)}{3!}x^3$$

$$\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}=-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3$$ 对于$k=1,\cdots,\ n-1$

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2}-\frac{k\pi}{n^2}\right)=-\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\left|\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3\left(1+\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\cdot 2=\frac{\pi^3}{3n^3}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3\left(1+\frac{k}{n}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3\left(1+\frac{k}{n}\right)\right|=\frac{(n-1)\pi^3}{3n^3}\to 0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\xi_k)}{3!}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3\left(1+\frac{k}{n}\right)\to 0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2\pi}{n^3}=\frac{n(n-1)\pi}{2n^2}+\frac{(n-1)n(2n-1)\pi}{6n^3}\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

施笃兹定理

$\dfrac{*}{+\infty}$型

如果数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：(1)$\{b_n\}$严格单调递增(2)$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

$\dfrac{0}{0}$型

如果数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：(1)$\{b_n\}$严格单调递减且趋于0(2)$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0(3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

当$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$或$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}d_k$利用施笃兹定理可极大的简化我们要求的极限

第一讲：极限 > 施笃兹定理

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$或$+\infty$或$-\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n = s\text{或}+\infty\text{或}-\infty$$

$\{a_n\}$是正数数列，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$或$+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = e^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln s\text{或}+\infty$$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = e^{\ln s}\text{或}e^{+\infty}\quad\text{即}s\text{或}+\infty$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $\qquad\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}-\sqrt[n-1]{(n-1)!}}{n-(n-1)}$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$$

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\ln\sqrt[n]{n!}-\ln n=\frac{\ln n!}{n}-\ln n=\frac{\ln n!-n\ln n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-n\ln n-[\ln(n-1)!-(n-1)\ln(n-1)]}{n-(n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n-1)\ln\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)\frac{-1}{n}=-1$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to e^{-1}$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{n!}{n^n}=e^{\ln\frac{n!}{n^n}}\qquad \ln\frac{n!}{n^n}=\ln n!-n\ln n=?\cdot\frac{\ln n!-n\ln n}{?}=n\cdot\frac{\ln n!-n\ln n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-n\ln n-[\ln(n-1)!-(n-1)\ln(n-1)]}{n-(n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n-1)\ln\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)\frac{-1}{n}=-1$$

$$\ln\frac{n!}{n^n}\to-\infty\Rightarrow\frac{n!}{n^n}\to e^{-\infty}=0$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

令 $2a_n+a_{n-1}=b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$-2a_n-a_{n-1}=-b_n$

$(-2)^n a_n-(-2)^{n-1}a_{n-1}=-(-2)^{n-1}b_n \Rightarrow (-2)^k a_k-(-2)^{k-1}a_{k-1}=-(-2)^{k-1}b_k$

上式对 k从1到n求和

$$(-2)^n a_n-(-2)^0 a_0=-\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k$$

$$a_n=\frac{-\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k+(-2)^0 a_0}{(-2)^n}=-\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{(-2)^n}+\frac{a_0}{(-2)^n}=(-1)^{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{2^n}+\frac{a_0}{(-2)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k-\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}b_k}{2^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n-1}b_n}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}b_n=0$$

$\Rightarrow a_n\to 0$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + a_{n-1}) = 0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

变量代换简化条件

旧条件 $\lim\limits_{n\to\infty} 2a_n + a_{n-1} = 0 \Rightarrow$ 新条件 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

旧结论 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ 新结论 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} b_k + (-2)^0 a_0}{(-2)^n} = 0$

实现问题的转换

$\lim\limits_{n\to\infty} 2a_n + a_{n-1} = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \to \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} b_k + (-2)^0 a_0}{(-2)^n} = 0$

复杂条件 → 简单结论

简单条件 → 复杂结论

第一讲：极限 > 施笃兹定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

令 $2a_n+a_{n-1}=b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$$2a_n+a_{n-1}=b_n=\frac{(-2)^n a_n-(-2)^{n-1}a_{n-1}}{-(-2)^{n-1}} \qquad \frac{(-2)^n a_n}{(-2)^n}$$

$-2a_n-a_{n-1}=-b_n$

$(-2)^n a_n-(-2)^{n-1}a_{n-1}=-(-2)^{n-1}b_n \Rightarrow (-2)^k a_k-(-2)^{k-1}a_{k-1}=-(-2)^{k-1}b_k \qquad \frac{(-2)^n a_n}{2^n}$

上式对 k 从 1 到 n 求和

$$(-2)^n a_n-(-2)^0 a_0=-\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k \qquad (-1)^n a_n$$

$$a_n=\frac{-\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k+(-2)^0 a_0}{(-2)^n}=-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{(-2)^n}+\frac{a_0}{(-2)^n}=(-1)^{n-1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{2^n}+\frac{a_0}{(-2)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}b_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}b_k}{2^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n-1}b_n}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}b_n=0$$

$\Rightarrow a_n\to 0$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})=0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n=\frac{(-2)^n a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n a_n-(-2)^{n-1}a_{n-1}}{2^n-2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_n+2^{n-1}a_{n-1}}{2^{n-1}}\cdot(-1)^n=\lim_{n\to\infty}(2a_n+a_{n-1})(-1)^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot(-1)^n a_n=0$$

如果数列$\{y_n\}$有界且数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

$\exists M>0$使得$|y_n|\le M\quad n=1,2,\cdots$

$0\le|x_ny_n|\le M|x_n|$

$|x_ny_n|\to0\Rightarrow x_ny_n\to0$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

数列a_1，a_2,⋯，a_n,⋯满足$\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0$，证明：当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

首先从结论上看，我们只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) = 0$

再观察条件，我们发现这个条件有点复杂，不知道怎么利用

我们可以直接将$n(a_n - a_{n-1})$用c_n代换掉，这样条件就极其简洁，然后将结论用c_n表示出来

第一讲：极限 > 施笃兹定理

数列a_1，$a_2,\cdots$，$a_n,\cdots$满足$\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-a_{n-1})=0$，证明：当$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

设$a_0=0$，$n(a_n-a_{n-1})=c_n\ (n=1,2,\cdots)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$，$a_n-a_{n-1}=\dfrac{c_n}{n}$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})+a_0=\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

$$a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{na_n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n}=\frac{n\left(\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n}\right)-\left[\frac{c_1}{1}+\left(\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n}\right)\right]}{n}$$

$$=\frac{0\cdot\frac{c_1}{1}+1\cdot\frac{c_2}{2}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{c_n}{n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{0\cdot\frac{c_1}{1}+1\cdot\frac{c_2}{2}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{c_n}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)\cdot\frac{c_n}{n}=0$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

数列a_1，$a_2,\cdots$，$a_n,\cdots$满足$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，证明：当$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

变量代换简化条件

旧条件 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$ $\Rightarrow$ 新条件 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$

旧结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)=0\Rightarrow$ 新结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0\cdot\frac{c_1}{1}+1\cdot\frac{c_2}{2}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{c_n}{n}}{n}=0$

实现问题的转换

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0\to\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0\to\lim_{n\to\infty}\frac{0\cdot\frac{c_1}{1}+1\cdot\frac{c_2}{2}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{c_n}{n}}{n}=0$$

第一讲：极限 > 施笃兹定理

若$0<\lambda<1$，$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明:$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0)=a/(1-\lambda)$

像这种和的极限我们一般都会想到用施笃兹定理

但是a_n、λa_{n-1}、$\cdots$、$\lambda^n a_0$它们不能看成一个数列的项，为什么呢?

如果可以看成一个数列的项那么通项公式是什么？我们注意到这些项都可以用$\lambda^{n-k}a_k$表示出来

并且我们注意到n是变量，这就是a_n、λa_{n-1}、$\cdots$、$\lambda^n a_0$它们不能看成一个数列的项的原因，那么怎么办呢?

我们把λ^n提出来，这时这些项就都可以用$\lambda^{-k}a_k$表示

也就是说$\lambda^{-n}a_n$、$\lambda^{-(n-1)}a_{n-1}$、$\cdots$、$\lambda^{-0}a_0$它们可以看成一个数列的项

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0)=\lim_{n\to\infty}\lambda^n\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k}{\lambda^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^{-k}a_k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda^{-k}a_k}{(\lambda^{-1})^n-(\lambda^{-1})^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^{-n}a_n}{(\lambda^{-1})^n-(\lambda^{-1})^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\lambda}=a/(1-\lambda)$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

夹逼准则

数列的极限

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

1.从某项起，即$\exists n_0 \in N$，当$n > n_0$时，有$y_n \le x_n \le z_n$

2.$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

函数的极限

如果函数$f(x)$、$g(x)$及$h(x)$满足下列条件：

1.当$x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或$x > M$或$x < -M$)时，$g(x) \le f(x) \le h(x)$

2.$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} h(x) = A$

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} f(x)$存在，且等于A

如果数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$

如果数列$\{y_n\}$有界且数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

$\exists M > 0$使得$|y_n| \le M \quad n = 1, 2, \cdots$

$0 \le |x_n y_n| \le M|x_n|$

$|x_n y_n| \to 0 \Rightarrow x_n y_n \to 0$

如果函数$f(x)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} |f(x)| = 0$则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} f(x) = 0$

如果函数$g(x)$在x_0的某去心邻域(或当x充分大时或当x充分小时)有界

且函数$f(x)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} f(x) = 0$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to+\infty \\ x\to-\infty)}} f(x)g(x) = 0$

第一讲：极限 > 夹逼准则

更强的结论

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

1.从某项起，即$\exists n_0 \in N$，当$n > n_0$时，$\min\{y_n, z_n\} \le x_n \le \max\{y_n, z_n\}$

2.$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$\max\{y_n, z_n\} = \frac{y_n + z_n + |y_n - z_n|}{2}, \quad \min\{y_n, z_n\} = \frac{y_n + z_n - |y_n - z_n|}{2}$$

$$\frac{y_n + z_n - |y_n - z_n|}{2} \le x_n \le \frac{y_n + z_n + |y_n - z_n|}{2}$$

记$Y_n = \dfrac{y_n + z_n - |y_n - z_n|}{2}$，$Z_n = \dfrac{y_n + z_n + |y_n - z_n|}{2}$

$Y_n \le x_n \le Z_n$且$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

第一讲：极限 > 夹逼准则

p是正整数，a_1，$a_2,\cdots$，$a_p>0$，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}$

记$M=\max\{a_1, a_2,\cdots, a_p\}$

$$\left(M^x\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(pM^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$M\le\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\le p^{\frac{1}{x}}M$$

$$\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)^{\frac{1}{x}}\to M$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

$q<p$是正整数，$\alpha>1$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\dfrac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots+\dfrac{1}{(pn)^{\alpha}}$

$$0<\frac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(pn)^{\alpha}}<\frac{pn-qn}{(qn)^{\alpha}}=\frac{p-q}{q^{\alpha}n^{\alpha-1}}\to 0$$

$$\frac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(pn)^{\alpha}}\to 0$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$0\le\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}=\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\to 0$$

$$\Rightarrow\frac{n!}{n^n}\to 0$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

p是正整数，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}$

$$0\le\frac{n!}{n^{n-p}}=p!\times\frac{(p+1)(p+2)\cdots n}{n^{n-p}}=p!\times\frac{p+1}{n}\times\frac{p+2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}$$

$$=p!\times\frac{p+1}{n}\times\left(\frac{p+2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}\right)\le p!\times\frac{p+1}{n}\to 0$$

$$\Rightarrow\frac{n!}{n^{n-p}}\to 0$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

$p>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{pk-1}{pk}$ $\qquad 1+x\le e^{x}$， $x\in(-1,+\infty)$

$$0\le\prod_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{pk}\right)\le\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{1}{pk}}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}-\frac{1}{pk}}=e^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\to e^{-\infty}=0$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}=e^{\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}}$$

$$\ln(1+x)\le x,\quad x\in(-1,+\infty)$$

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{pk-1}{pk}=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{pk}\right)\le\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{pk}=-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to-\infty$$

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}\to-\infty$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{pk-1}{pk}\to e^{-\infty}=0$$

$x\in(-1,+\infty)$

$1+x\le e^{x}\Rightarrow\ln(1+x)\le x$

$\ln(1+x)\le x\Rightarrow 1+x\le e^{x}$

$p>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{pk-1}{pk}$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

第一讲：极限 > 夹逼准则

正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1$

首先我们不难发现 $\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}<1$，那怎么进行放缩把它放小呢？

我们注意到 $a_2>a_3$，$a_4>a_5,\cdots$，$a_{2n-2}>a_{2n-1}$

分子 $(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2})+a_{2n}$

分母 $a_1+(a_3+a_5\cdots+a_{2n-1})$，分子中没有大于或等于 a_1 的项怎么办

借一还一的思想分子加个 a_1 再减个 a_1，这样就能放缩了

$$\frac{(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2})+a_{2n}}{a_1+(a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})}=\frac{a_1+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2})+a_{2n}-a_1}{a_1+(a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})}>1+\frac{-a_1}{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}}$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}\quad (a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$$

$$2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})>(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $a_n \geq a_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$

显然 $0 \leq na_n$， 怎么放大？ $na_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \not\to 0$

a_n 能放大的只有 a_1， $a_2, \cdots$， a_n $\frac{n}{2} a_n \leq a_{\frac{n}{2}+1} + a_{\frac{n}{2}+2} + \cdots + a_n$

我们不能全部放那就放一半

$$\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) a_n \leq a_{[\frac{n}{2}]+1} + a_{[\frac{n}{2}]+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} a_k \to s - s = 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s\right)$$

$$\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) a_n \geq \frac{n}{2} a_n \geq 0$$

$$x - 1 < [x] \leq x, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

正项数列$\{a_n\}$满足$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn，n = 1, 2, \cdots)$，$p < q$是正整数，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

$na_n \ge 0$所以我们想办法把它放大

$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn，n = 1, 2, \cdots)$这个不等式告诉我们对于给定的n有哪些项比$a_n$小

但我们需要放大不是放小

我们‘固定’住m，看对于给定的m有哪些项比a_m大

$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn) \Rightarrow a_m \le a_n\ (\frac{m}{q} \le n \le \frac{m}{p})$这一步看似简单其实很关键

第一讲：极限 > 夹逼准则

正项数列$\{a_n\}$满足$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn,\ n=1,2,\cdots)$，$p<q$是正整数，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

$$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn) \Rightarrow a_m \le a_n\ \left(\frac{m}{q} \le n \le \frac{m}{p}\right)$$

$$0 \le \left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m \le a_{\left[\frac{m}{q}\right]+1}+a_{\left[\frac{m}{q}\right]+2}+\cdots+a_{\left[\frac{m}{p}\right]}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]} a_k-\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]} a_k \to s-s=0 \Rightarrow \left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m \to 0$$

$$\left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m=\left(\left(\frac{m}{p}-\left\{\frac{m}{p}\right\}\right)-\left(\frac{m}{q}-\left\{\frac{m}{q}\right\}\right)\right)a_m$$

$$=\left(\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)a_m-\left(\left\{\frac{m}{p}\right\}-\left\{\frac{m}{q}\right\}\right)a_m$$

$$0 \le \left\{\frac{m}{p}\right\},\left\{\frac{m}{q}\right\}<1 \Rightarrow -1<\left\{\frac{m}{p}\right\}-\left\{\frac{m}{q}\right\}<1 \Rightarrow \left(\left\{\frac{m}{p}\right\}-\left\{\frac{m}{q}\right\}\right)a_m \to 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{p}-\frac{m}{q}\right)a_m \to 0 \Rightarrow a_m \to 0$$

$$x \le y \Rightarrow [x] \le [y]$$

$$x-1<[x]\le x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$0 \le \{x\} < 1$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

正项数列$\{a_n\}$满足$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn,\ n=1,2,\cdots)$，$p<q$是正整数，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

$$a_m \le a_n\ (pn \le m \le qn) \Rightarrow a_m \le a_n\ \left(\frac{m}{q} \le n \le \frac{m}{p}\right)$$

$$x \le y \Rightarrow [x] \le [y]$$

$$x-1<[x]\le x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$0 \le \left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m \le a_{\left[\frac{m}{q}\right]+1}+a_{\left[\frac{m}{q}\right]+2}+\cdots+a_{\left[\frac{m}{p}\right]}=\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}a_k-\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}a_k \to s-s=0 \Rightarrow \left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m \to 0$$

$$\frac{\left(\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]\right)a_m}{ma_m}=\frac{\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]}{m} \to \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$$

$$ma_m \to 0$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{m}=\frac{\frac{m}{p}-\left(\frac{m}{q}-1\right)}{m} \ge \frac{\left[\frac{m}{p}\right]-\left[\frac{m}{q}\right]}{m} \ge \frac{\left(\frac{m}{p}-1\right)-\frac{m}{q}}{m}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{m}$$

第一讲：极限 > 夹逼准则

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0$

$$\frac{|a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1|}{n} \le \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_n^2 + b_{n-1}^2 + \cdots + b_1^2}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}{n}$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \cdot \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{n}} \to 0 \cdot 0$$

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \to 0$$

如果数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$

第一讲：极限 > 微分中值定理

拉格朗日中值定理

如果函数$f(x)$满足(1)在闭区间$[a, b]$区间上连续(2)在开区间(a, b)上可导

那么在(a, b)内至少存在一点ξ，使得等式$f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi)$成立

柯西中值定理

如果函数$f(x)$、$F(x)$满足(1)在闭区间$[a, b]$区间上连续(2)在开区间(a, b)上可导(3)对任意$x\in(a, b)$，$F(x)\neq 0$

那么在(a, b)内至少存在一点ξ，使得等式$\dfrac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$成立

第一讲：极限 > 微分中值定理

$ad=bc$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{x+a}{x+b}}-e^{\frac{x+c}{x+d}}\right)$

取 $f(x)=e^x$ $\quad f\left(\frac{x+a}{x+b}\right)-f\left(\frac{x+c}{x+d}\right)=f'(\xi)\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{x+c}{x+d}\right)$，$\xi$ 介于 $\frac{x+a}{x+b}$、$\frac{x+c}{x+d}$ 之间

$e^{\frac{x+a}{x+b}}-e^{\frac{x+c}{x+d}}=e^{\xi}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{x+c}{x+d}\right)$，$\xi$ 介于 $\frac{x+a}{x+b}$、$\frac{x+c}{x+d}$ 之间

$$x\left(e^{\frac{x+a}{x+b}}-e^{\frac{x+c}{x+d}}\right)=xe^{\xi}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{x+c}{x+d}\right)$$

$$=xe^{\xi}\frac{(x+a)(x+d)-(x+c)(x+b)}{(x+b)(x+d)}$$

$$=xe^{\xi}\frac{\left[x^2+(a+d)x+ad\right]-\left[x^2+(c+b)x+bc\right]}{(x+b)(x+d)}$$

$$=e^{\xi}\frac{(a+d-c-b)x^2}{(x+b)(x+d)}\to e(a+d-c-b) \qquad \frac{x+a}{x+b}、\frac{x+c}{x+d}\to 1\Rightarrow \xi\to 1$$

第一讲：极限 > 微分中值定理

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin\cos x-\sin\sin 1}{\cos\cos\cos x-\cos\cos 1}$

$$f'(x)=\cos\sin x\cdot\cos x$$
$$F'(x)=\sin\cos x\cdot\sin x$$

$f(x)=\sin\sin x$， $F(x)=\cos\cos x$

$$\frac{\sin\sin\cos x-\sin\sin 1}{\cos\cos\cos x-\cos\cos 1}=\frac{f(\cos x)-f(1)}{F(\cos x)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{\cos\sin\xi\cdot\cos\xi}{\sin\cos\xi\cdot\sin\xi}\to\frac{\cos\sin 1\cdot\cos 1}{\sin\cos 1\cdot\sin 1}$$

$f(x)=\sin\sin\cos x$， $F(x)=\cos\cos\cos x$

ξ介于$\cos x,1$之间

第一讲：极限 > 微分中值定理

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$

$\tan\tan x$ 与 $\sin\sin x$ 看上去没什么联系，那么我们可不可以产生一个数，它与 $\tan\tan x$ 和 $\sin\sin x$ 都有联系

事实上，$\tan\sin x$ 就是这样一个数，它与 $\tan\tan x$ 和 $\sin\sin x$ 都有联系

$$\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}=\frac{\tan\tan x-\tan\sin x+\tan\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}=\frac{\tan\tan x-\tan\sin x}{\tan x-\sin x}+\frac{\tan\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$$

$f(x)=\tan x$

$$\frac{\tan\tan x-\tan\sin x}{\tan x-\sin x}=\frac{f(\tan x)-f(\sin x)}{\tan x-\sin x}=f'(\xi)=\sec^2\xi\to 1\qquad \xi\text{介于}\tan x、\sin x\text{之间}$$

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,\tan\sin x-\sin\sin x\sim\frac{1}{2}\sin^3 x\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$\frac{\tan\sin x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}\to 1$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

[a，b]中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间[a，b]分成n个小区间

$$[x_0, x_1],[x_1, x_2],\cdots,[x_{n-1}, x_n]$$

各个小区间的长度依次记为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\quad \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\quad \Delta x_n=x_n-x_{n-1}$$

$$\xi_1\in[x_0, x_1],\quad \xi_2\in[x_1, x_2],\cdots,\quad \xi_n\in[x_{n-1}, x_n]$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots, \Delta x_n\}\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

1.确定[a，b]　2.确定cn

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{cn}\sum_{k=1}^{cn} f\left[a+\frac{b-a}{cn}\cdot k\right]$$

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}\cdot k$$

$$[a+\frac{b-a}{n}\cdot 0,\quad a+\frac{b-a}{n}\cdot 1]$$

$$[a+\frac{b-a}{n}\cdot 1,\quad a+\frac{b-a}{n}\cdot \mathbf{2}]$$

$$\vdots$$

$$[a+\frac{b-a}{n}\cdot(n-1),\quad a+\frac{b-a}{n}\cdot n]$$

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_n=\frac{b-a}{n}$$

$$\xi_k=a+\frac{k}{n}(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right]$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

$p>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^{p}}{n^{p+1}}$

将区间$[0,1]$分成n个小区间$[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\quad(k=1,\cdots,\ n)$

$\frac{1}{n}$是小区间$[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$的长度，$\frac{k}{n}$是小区间$[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$上一点 $\quad(k=1,\cdots,\ n)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^{p}\to\int_{0}^{1}x^{p}dx=\left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{p+1}$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$$

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\to\int_0^1\ln x\,dx=-1$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to e^{-1}$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

q，p是正整数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{qn+1}+\dfrac{1}{qn+2}+\cdots+\dfrac{1}{(q+p)n}$

$$\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{(q+p)n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{q+\frac{1}{n}}+\frac{1}{q+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{q+p}\right)\to\int_q^{q+p}\frac{1}{x}dx$$

将区间$[q,\ q+p]$分成pn个小区间$\left[q+\dfrac{k-1}{n},\ q+\dfrac{k}{n}\right]\quad(k=1,\cdots,\ pn)$

$\dfrac{1}{n}$是小区间$\left[q+\dfrac{k-1}{n},\ q+\dfrac{k}{n}\right]$的长度，$q+\dfrac{k}{n}$是小区间$\left[q+\dfrac{k-1}{n},\ q+\dfrac{k}{n}\right]$上一点 $(k=1,\cdots,\ pn)$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

q，p是正整数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{qn+p}+\dfrac{1}{qn+2p}+\cdots+\dfrac{1}{(q+p)n}$

$$\frac{1}{qn+p}+\frac{1}{qn+2p}+\cdots+\frac{1}{(q+p)n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{q+\frac{p}{n}}+\frac{1}{q+\frac{2p}{n}}+\cdots+\frac{1}{q+\frac{np}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{p}\times\frac{p}{n}\left(\frac{1}{q+\frac{p}{n}}+\frac{1}{q+\frac{2p}{n}}+\cdots+\frac{1}{q+\frac{np}{n}}\right)\to\frac{1}{p}\int_q^{p+q}\frac{1}{x}dx$$

将区间$[q,\ q+p]$分成n个小区间$\left[q+\dfrac{p(k-1)}{n},\ q+\dfrac{pk}{n}\right]$ $(k=1,\cdots,\ n)$

$\dfrac{p}{n}$是小区间$\left[q+\dfrac{p(k-1)}{n},\ q+\dfrac{pk}{n}\right]$的长度，$q+\dfrac{pk}{n}$是小区间$\left[q+\dfrac{k-1}{n},\ q+\dfrac{k}{n}\right]$上一点 $(k=1,\cdots,\ n)$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-2)^2}\right)$ 缺项

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\to\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-0$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-2)^2}\right)$

分离

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-2)^2}\right)$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\times\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-2)^2}\right)\to 1\times\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{n!}{n^n}=e^{\ln\frac{n!}{n^n}}$$

$$\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\to\int_0^1\ln x\,dx=-1$$

$$\ln\frac{n!}{n^n}=\ln\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}=\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}$$

$$=n\times\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\to-\infty$$

$$\frac{n!}{n^n}\to e^{-\infty}=0$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{n}{n}}\right)$

放缩

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{1+\frac{n}{n^2}}\right)$$

放大成 $\dfrac{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}\to\dfrac{\int_0^1\sin\pi x dx}{1}$

放小成 $\dfrac{\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)}{1+\frac{n}{n^2}}\to\dfrac{\int_0^1\sin\pi x dx}{1}$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{n}{n}}\right)$

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\le\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{n}{n}}\le\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\to\int_0^1\sin\pi x dx$$

$$\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\to 1\times\int_0^1\sin\pi x dx$$

第一讲：极限 > 积分与积分的定义

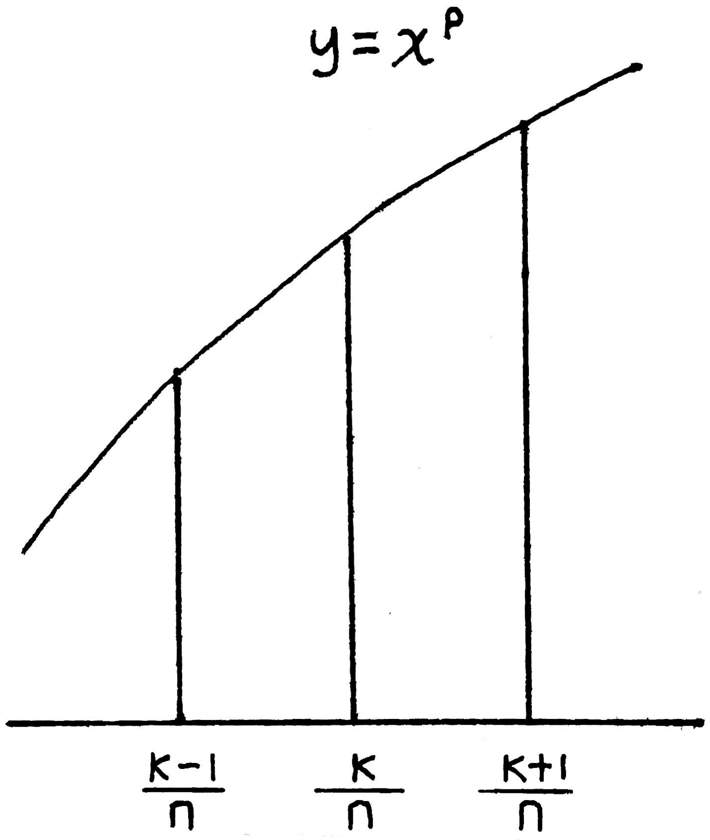
$p>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^p}{n^{p+1}}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^p=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p dx\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}x^p dx=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}x^p dx$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^p=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p dx\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p dx=\int_0^1 x^p dx$$

$$\int_0^1 x^p dx\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^p\le\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}x^p dx$$



第一讲：极限 > 积分与积分的定义

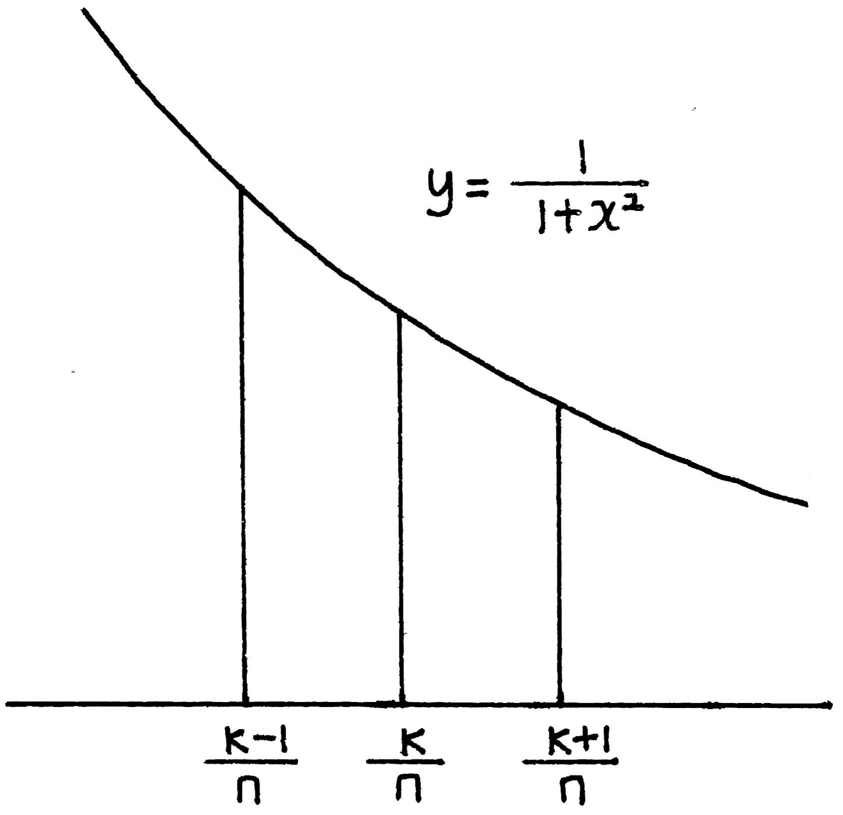
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}dx\ge\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}dx\le\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{0}^{\frac{n^2}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx\le\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\le\int_{0}^{\frac{n^2}{n}}\frac{1}{1+x^2}dx\qquad\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\leftarrow\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



第一讲：极限 > 导数的定义

$f(x)>0$，$f'(0)$存在，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{x}$

记$G(x)=f(x)^{f(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=G'(x)\big|_{x=0}$$

$$G'(x)=\left(e^{f(x)\ln f(x)}\right)'$$

$$=e^{f(x)\ln f(x)}\left(f'(x)\ln f(x)+f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}f'(x)\right)$$

$$=f(x)^{f(x)}f'(x)(\ln f(x)+1)$$

$$G'(x)\big|_{x=0}=f(0)^{f(0)}f'(0)(\ln f(0)+1)$$

第一讲：极限 > 导数的定义

$f(x)>0$，$f'(0)$存在，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{x}$

为什么$G(x)=f(x)^{f(x)}$在$x=0$处可导???

定理1

如果$u=g(x)$在点x可导，而$y=f(u)$在点$u=g(x)$可导，那么复合函数$y=f(g(x))$在点x可导，且其导数为

$\dfrac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$或$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

定理2

如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$都在点x具有导数，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点x具有导数

$f(x)$在$x=0$可导$\xrightarrow{\text{定理1}}\ln f(x)$在$x=0$可导$\xrightarrow{\text{定理2}}f(x)\cdot\ln f(x)$在$x=0$可导

$\xrightarrow{\text{定理1}}e^{f(x)\cdot\ln f(x)}$在$x=0$可导即$f(x)^{f(x)}$在$x=0$可导

第一讲：极限 > 导数的定义

$f(x)$在$x=0$处连续，且$f(0)>0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{f(x)-f(0)}$

设$t=f(x)\Rightarrow$当$x\to 0$时，$t\to f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{f(x)-f(0)}=\lim_{t\to f(0)}\frac{t^t-f(0)^{f(0)}}{t-f(0)}=\left(t^t\right)'\Big|_{t=f(0)}$$

$$\left(t^t\right)'=\left(e^{t\ln t}\right)'=e^{t\ln t}(\ln t+1)=t^t(\ln t+1)$$

$$\left(t^t\right)'\Big|_{t=f(0)}=f(0)^{f(0)}(\ln f(0)+1)$$

复合函数的极限运算法则

设函数$y=f(g(x))$是由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$f(g(x))$在x_0的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且存在$\delta_0>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0，\delta_0)$时，有$g(x)\neq u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$

注意这题不能这么做

$$\frac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{f(x)-f(0)}=\frac{f(x)^{f(x)}-f(0)^{f(0)}}{x-0}\Big/\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\to\left(f(x)^{f(x)}\right)'\Big|_{t=0}\Big/f'(0)$$

第一讲：极限 > 无穷级数

比值审敛法

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$如果满足$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$

根值审敛法

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$如果满足$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{\rho}<1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho>1\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\rho}<1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$

第一讲：极限 > 无穷级数

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 可能存在也可能不存在

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 可能存在也可能不存在

$a_n=1$

$a_n=n$

$a_n=1$

$a_n=2+(-1)^n$

第一讲：极限 > 无穷级数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$0\le\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}$$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!}{(n+1)^n}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

第一讲：极限 > 无穷级数

p是正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}$　　$0\le\dfrac{n!}{n^{n-p}}\le p!\times\dfrac{p+1}{n}$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1-p}}}{\dfrac{n!}{n^{n-p}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!}{(n+1)^{n-p}}}{\dfrac{n!}{n^{n-p}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}=0$

$r>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{r^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n+1}=0$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n!}$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}=0$

第一讲：极限 > 无穷级数

$r>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{\alpha}}{r^{n+1}}}{\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{r}<1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}=0$

第一讲：极限 > 无穷级数

$r>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{r^{x}}$

$$\left(\frac{x}{r^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^{\alpha}=\frac{x^{\alpha}}{r^{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{r^{\frac{x}{\alpha}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln r\cdot r^{\frac{x}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha>0\Rightarrow\ln r\cdot r^{\frac{x}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}\to+\infty\Rightarrow\frac{x}{r^{\frac{x}{\alpha}}}\to0\Rightarrow\frac{x^{\alpha}}{r^{x}}\to0\Rightarrow\frac{n^{\alpha}}{r^{n}}\to0$$

$$\alpha\le0\Rightarrow n^{\alpha}\to0\text{或}1\Rightarrow\frac{n^{\alpha}}{r^{n}}\to0$$

第一讲：极限 > 无穷级数

$r>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{r^{n}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{r^{x}}$

$$\lim_{t\to0^+} t\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}-t=0$$

$$\frac{x^{\alpha}}{r^{x}}=e^{\alpha\ln x-x\ln r}$$

$$x=\frac{1}{t}\Rightarrow \alpha\ln x-x\ln r=\alpha\ln\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\ln r=-\alpha\ln t-\frac{\ln r}{t}=-\frac{\alpha t\ln t+\ln r}{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha\ln x-x\ln r)=\lim_{t\to0^+}-\frac{\alpha t\ln t+\ln r}{t}=-\infty\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{r^{x}}=0\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{r^{n}}=0$$

第一讲：极限 > 无穷级数

$r>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n^n}$

考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{r^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=0$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n^n}$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n^n}=0$

$$\frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{r^n}{n^n}}=r\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=r\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1}=r\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1}\to r\cdot\frac{1}{e}\cdot 0=0$$

第一讲：极限 > 无穷级数

$r>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n^n}$

$$\frac{r^n}{n^n}=e^{n(\ln r-\ln n)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} n(\ln r-\ln n)=-\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n^n}=0$$

第一讲：极限 > 无穷级数

级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛于s，$f(n)$、$g(n) \in N^+$且$f(n) > g(n) \to +\infty$

$$\sum_{k=g(n)+1}^{f(n)} a_k = \sum_{k=1}^{f(n)} a_k - \sum_{k=1}^{g(n)} a_k \to s - s = 0$$

$$\sum_{k=g(n)+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{g(n)} a_k \to s - s = 0$$

第一讲：极限 > 无穷级数

$q<p$是正整数，$\alpha>1$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\dfrac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots+\dfrac{1}{(pn)^{\alpha}}$

$$\frac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(pn)^{\alpha}}=\sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{k^{\alpha}}-\sum_{k=1}^{qn}\frac{1}{k^{\alpha}}\to s-s=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=s$$

第一讲：极限 > 无穷级数

q是正整数，$\alpha>1$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\dfrac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots$

$$\frac{1}{(qn+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(qn+2)^{\alpha}}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}-\sum_{k=1}^{qn}\frac{1}{k^{\alpha}}\to s-s=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=s$$

第一讲：极限 > 无穷级数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{2n}}{2n}$

$$\frac{(-1)^{n}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k}\to s-s=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}=s$$

第一讲：极限 > 无穷级数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\cdots$

$$\frac{(-1)^{n}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k}\to s-s=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}=s$$

数列极限存在性问题转化为无穷级数敛散性问题

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k - a_{k-1})\text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})\text{存在} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n\text{存在}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k - a_{k-1})\text{发散} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})\text{不存在} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n\text{不存在}$$

第一讲：极限 > 无穷级数

证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$存在

记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=-1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)\text{收敛}$$

$$\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}=\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}+\left[-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]=-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k^2}\text{收敛}\qquad \sum_{k=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)\text{收敛}$$

$$\left|o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right|\Big/\frac{1}{k^2}=\left|o\left(\frac{1}{k^2}\right)\Big/\frac{1}{k^2}\right|\to 0\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{k=2}^{\infty}\left|o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right|\text{收敛}\Rightarrow\sum_{k=2}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)\text{收敛}$$

第一讲：极限 > 无穷级数

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ 存在

记 $a_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=-1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\right)\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\right)\text{收敛}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}-2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}\text{收敛}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}\Bigg/\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\to 1\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\text{收敛}\Rightarrow\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}\text{收敛}$$

第一讲：极限 > 无穷级数

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}-\ln n\right)$存在

记$a_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}-\ln n$ $\quad a_n=a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=1+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k+\frac{1}{k}}-\ln\dfrac{k}{k-1}\right)$ $\quad \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k+\frac{1}{k}}-\ln\dfrac{k}{k-1}\right)$收敛

$$\frac{1}{k+\frac{1}{k}}-\ln\frac{k}{k-1}=\frac{k}{k^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)=\frac{k}{k^2+1}-\left[\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}+o\left(\frac{1}{(k-1)^2}\right)\right]$$

$$=-\frac{k+1}{(k^2+1)(k-1)}+\frac{1}{2(k-1)^2}+o\left(\frac{1}{(k-1)^2}\right)$$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{k+1}{(k^2+1)(k-1)}$收敛 $\quad \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{2(k-1)^2}$收敛 $\quad \sum\limits_{k=2}^{\infty}o\left(\dfrac{1}{(k-1)^2}\right)$收敛

$\dfrac{k+1}{(k^2+1)(k-1)}\Big/\dfrac{1}{k^2}\to 1$ $\quad \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{k+1}{(k^2+1)(k-1)}$收敛

第一讲：极限 > 单调有界准则

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)$ 存在

设 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<0$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}dx\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{1}^{n+1}=2\sqrt{n+1}-2$$

$$a_n\geq 2\sqrt{n+1}-2-2\sqrt{n}>-2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\text{存在}$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{k}}dx\leq\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_{0}^{n}=2\sqrt{n}$$

$$a_n\leq 2\sqrt{n}-2\sqrt{n}=0$$

$$-2<a_n\leq 0\Rightarrow -2\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq 0$$

第一讲：极限 > 单调有界准则

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在

设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\frac{x+1}{x}\text{在}[1,+\infty)\text{上单调递增}\Leftarrow f'(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}>0$$

$$f(x)\le\lim_{x\to+\infty}f(x)\Rightarrow f(x)\le 0\Rightarrow f(n)\le 0$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx\ge\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{n+1}=\ln(n+1)$$

$$a_n\ge\ln(n+1)-\ln n>0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n\text{存在}$$

第一讲：极限 > 单调有界准则

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}dx\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{1}^{n+1}=\ln(n+1)$$

$$a_n\geq\ln(n+1)-\ln n>0$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}dx\leq1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=1+\ln x\Big|_{1}^{n}=1+\ln n$$

$$a_n\leq1+\ln n-\ln n=1$$

$$1\geq a_n>0\Rightarrow1\geq\lim_{n\to\infty}a_n\geq0$$

第一讲：极限 > 单调有界准则

证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}-\ln n$存在

第一讲：极限 > 单调有界准则

设$a_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}-\ln n\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}-\ln\dfrac{n+1}{n}$

$f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}-\ln\dfrac{x}{x-1}$在$[2,+\infty)$上单调递增$\Leftarrow f'(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x+1}{x(x-1)\left(x^2+1\right)^2}>0$

$f(x)\le\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Rightarrow f(x)\le 0\Rightarrow f(n+1)\le 0$

$\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+\frac{1}{k}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\dfrac{1}{k+\frac{1}{k}}dx\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}dx\Leftarrow f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}$在$[1,+\infty)$上单调递减

$=\int_1^{n+1}\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}dx=\int_1^{n+1}\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln\left[(n+1)^2+1\right]-\dfrac{1}{2}\ln 2>\dfrac{1}{2}\ln n^2-\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln n-\dfrac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow a_n>-\dfrac{1}{2}\ln 2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在

第一讲：极限 > 单调有界准则

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}dx\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}dx\Leftarrow f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\text{在}[1,+\infty)\text{上单调递减}$$

$$=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{1}^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left[(n+1)^2+1\right]-\frac{1}{2}\ln 2>\frac{1}{2}\ln n^2-\frac{1}{2}\ln 2=\ln n-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow a_n>-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}dx\leq\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}dx\Leftarrow f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\text{在}[1,+\infty)\text{上单调递减}$$

$$=\frac{1}{2}+\int_{1}^{n}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{2}+\int_{1}^{n}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{1}^{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(n^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{1}}dx\geq\int_{0}^{1}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}dx\Leftarrow f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\text{在}(0,1)\text{上单调递增}$$

$$\Rightarrow a_n\leq\frac{1}{2}\ln\left(n^2+1\right)-\ln n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(n^2+1\right)-\ln n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\geq a_n>-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\geq\lim_{n\to\infty}a_n\geq-\frac{1}{2}\ln 2$$

第一讲：极限 > 欧拉常数

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$　　C是欧拉常数　　$C\approx 0.5772$

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n$　　其中$\varepsilon_n\to 0$，$n\to\infty$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+o(1)$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n\Leftarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+C+o(1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{C}{\ln n}+\frac{o(1)}{\ln n}\right)=1$$

$\ln n+C$是对$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$的一个估计

第一讲：极限 > 欧拉常数

q，p是正整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{(q+p)n}$

$$\sum_{k=qn+1}^{(q+p)n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{(q+p)n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{qn}\frac{1}{k}=\ln(q+p)n+C+o(1)-(\ln qn+C+o(1))=\ln\frac{q+p}{q}+o(1)\to\ln\frac{q+p}{q}$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+o(1)$$

第一讲：极限 > 欧拉常数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n}$

$$\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n}=\frac{e^{\ln n+C+o(1)}}{n}=\frac{n\cdot e^{C+o(1)}}{n}=e^{C+o(1)}\to e^{C}$$

第一讲：极限 > 欧拉常数

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\sim\ln\ln n$$

$\alpha,\beta>0$

如果 α 与 β 是等价无穷小或等价无穷大

则 $\ln\alpha$ 与 $\ln\beta$ 是等价无穷大

$$\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-1=\frac{\ln\dfrac{\alpha}{\beta}}{\ln\beta}$$

$$\ln\frac{\alpha}{\beta}\to 0,\ln\beta\to+\infty\text{或}-\infty\Rightarrow\frac{\ln\dfrac{\alpha}{\beta}}{\ln\beta}\to 0\Rightarrow\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\to 1$$

第一讲：极限 > 欧拉常数

p是给定的正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{p+1} n}$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\sim\ln\ln n$$

$$\vdots$$

$$\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\sim\overbrace{\ln\ln\cdots\ln}^{p+1} n$$

第一讲：极限 > 斯特林公式

斯特林公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^{n}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad 0<\theta_n<1$$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{o(1)}$$

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

斯特林公式是对n!的一个估计

第一讲：极限 > 斯特林公式

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{o(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{n^n}=\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}e^{o(1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{\sqrt{2\pi x}}}{e^x}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}=0$$

$$\Rightarrow\frac{n!}{n^n}\to 0$$

第一讲：极限 > 斯特林公式

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{o(1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!}=(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{n}{e}\cdot e^{\frac{1}{n}o(1)}$$

$$(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}=e^{\frac{\ln(2\pi n)}{2n}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2\pi x)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2\pi n)}{2n}=0\Rightarrow(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\to 1$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{n!}\to+\infty$$

第一讲：极限 > 斯特林公式

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{o(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\frac{1}{e}e^{\frac{1}{n}o(1)}$$

$$\Rightarrow (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\to 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\to\frac{1}{e}$$

第一讲：极限 > 子数列

数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$(或$+\infty$或$-\infty$)，则对于数列$\{x_n\}$的任意子数列$\{x_{k_n}\}$都有

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$(或$+\infty$或$-\infty$)

数列$\{x_n\}$被分成p个互不相交的子数列，若p个子数列的极限都是a(或$+\infty$或$-\infty$)

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$(或$+\infty$或$-\infty$)

数列$\{x_n\}$被分成p个子数列$\{x_{pn+r}\}(r=0,\cdots,p-1)$，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{pn+r} = a\ (r=0,\cdots,p-1)$

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

数列$\{x_n\}$被分成2个子数列$\{x_{2n}\}$、$\{x_{2n+1}\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

第一讲：极限 > 子数列

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})$$

考虑子数列$\{a_{k_n}\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k_n}-a_{k_{n-1}}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(a_{k_n}-a_{k_{n-1}})\qquad k_n-k_{n-1}=p\Rightarrow k_n=pn+r$$

$$\Rightarrow\{a_{k_n}\}=\{a_{pn+r}\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}-a_{p(n-1)+r}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(a_{pn+r}-a_{p(n-1)+r})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}}{pn+r}$$

第一讲：极限 > 子数列

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$

令$z_n=\frac{a_n}{n}$，将数列$\{z_n\}$分成p个子数列$\{z_{pn}\},\{z_{pn+1}\},\cdots,\{z_{pn+p-1}\}$

对于任意一个子数列$\{z_{pn+r}\}$，$r\in\{0,1,\cdots,\ p-1\}$

$$\lim_{n\to\infty}z_{pn+r}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}}{pn+r}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}-a_{p(n-1)+r}}{pn+r-(p(n-1)+r)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pn+r}-a_{p(n-1)+r}}{p}=\frac{\lambda}{p}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{\lambda}{p}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$$

$b_n=a_{n+p}-a_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lambda$

a_{pn+r}是数列$\{a_{pn+r}\}$的第n项

$a_{p(n-1)+r}$是数列$\{a_{pn+r}\}$的第$n-1$项

$\{b_{p(n-1)+r}\}$是$\{b_n\}$的子数列

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_{p(n-1)+r}=\lambda\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_{pn+r}-a_{p(n-1)+r})=\lambda$

第一讲：极限 > 子数列

数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})/n=0$

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{n}-\frac{x_{n-1}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

第一讲：极限 > 子数列

数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/n = 0$

令$z_n = (x_n - x_{n-1})/n$，将数列$\{z_n\}$分成两个子数列$\{z_{2n}\},\{z_{2n+1}\}$

对于任意一个子数列$\{z_{2n+r}\}$，$r \in \{0,1\}$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n+r} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+r} - x_{2n+r-1}}{2n+r} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+r} - x_{2n+r-1} - (x_{2(n-1)+r} - x_{2(n-1)+r-1})}{2n+r-(2(n-1)+r)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n+r} - x_{2(n-1)+r} - (x_{2n+r-1} - x_{2(n-1)+r-1})}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/n = 0$$

第一讲：极限 > 子数列

设$y_n = x_{n-1} + 2x_n$，数列$\{y_n\}$收敛，证明：数列$\{x_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$$-y_n = (-2)x_n - x_{n-1}$$

$$-(-2)^{n-1} y_n = (-2)^n x_n - (-2)^{n-1} x_{n-1}$$

$\Rightarrow -(-2)^{k-1} y_k = (-2)^k x_k - (-2)^{k-1} x_{k-1}$对k从1到n求和

$$-\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k = (-2)^n x_n - (-2)^0 x_0$$

$$x_n = \frac{x_0 - \sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{(-2)^n} = \frac{x_0}{(-2)^n} + (-1)^{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k - \sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1} y_k}{2^n - 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n-1} y_{n-1}}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} y_{n-1} \ ???$$

第一讲：极限 > 子数列

$$\lim_{n\to\infty} y_n = s$$

令$z_n = (-1)^{n-1}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}y_k}{2^n}$ 将数列$\{z_n\}$分成两个子数列 $\{z_{2n}\},\{z_{2n+1}\}$

对于任意一个子数列 $\{z_{2n+r}\}$，$r\in\{0,1\}$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n+r} = (-1)^{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n+r}(-2)^{k-1}y_k}{2^{2n+r}} = (-1)^{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n+r}(-2)^{k-1}y_k - \sum_{k=1}^{2(n-1)+r}(-2)^{k-1}y_k}{2^{2n+r}-2^{2(n-1)+r}}$$

$$= (-1)^{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n+r-1}y_{2n+r}+(-2)^{2n+r-2}y_{2n+r-1}}{3\cdot 2^{2n+r-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+r-1}y_{2n+r}-2^{2n+r-2}y_{2n+r-1}}{3\cdot 2^{2n+r-2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2y_{2n+1}-y_{2n}}{3} = \frac{1}{3}s \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3}s$$

第一讲：极限 > 子数列

设$y_n = x_{n-1} + 2x_n$，数列$\{y_n\}$收敛，证明：数列$\{x_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$$-y_n = (-2)x_n - x_{n-1}$$

$$-(-2)^{n-1} y_n = (-2)^n x_n - (-2)^{n-1} x_{n-1}$$

$$\Rightarrow -(-2)^{k-1} y_k = (-2)^k x_k - (-2)^{k-1} x_{k-1} \text{对}k\text{从}1\text{到}n\text{求和}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k = (-2)^n x_n - (-2)^0 x_0$$

$$x_n = \frac{x_0 - \sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{(-2)^n} = \frac{x_0}{(-2)^n} + (-1)^{n-1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(-2)^{k-1} y_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1} y_k}{2^n - 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n-1} y_{n-1}}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} y_{n-1} ???$$

$$y_n = \frac{(-2)^n x_n - (-2)^{n-1} x_{n-1}}{-(-2)^{n-1}}$$

$$\frac{(-2)^n x_n}{(-2)^n}$$

$$\frac{(-2)^{2n+r} x_{2n+r}}{(-2)^{2n+r}}$$

$$= (-1)^r \frac{(-2)^{2n+r} x_{2n+r}}{2^{2n+r}}$$

第一讲：极限 > 子数列

设$y_n=x_{n-1}+2x_n$，数列$\{y_n\}$收敛，证明：数列$\{x_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

将数列$\{x_n\}$分成两个子数列$\{x_{2n}\},\{x_{2n+1}\}$，对于任意一个子数列$\{x_{2n+r}\}$，$r\in\{0,1\}$

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+r}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n+r}x_{2n+r}}{(-2)^{2n+r}}=(-1)^r\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n+r}x_{2n+r}}{2^{2n+r}}$$

$$=(-1)^r\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n+r}x_{2n+r}-(-2)^{2(n-1)+r}x_{2(n-1)+r}}{2^{2n+r}-2^{2(n-1)+r}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+r}x_{2n+r}-2^{2(n-1)+r}x_{2(n-1)+r}}{3\cdot 2^{2(n-1)+r}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4x_{2n+r}-x_{2(n-1)+r}}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2y_{2n+r}-y_{2n+r-1}}{3}=\frac{s}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{s}{3}$$

$$y_{2n+r}=x_{2n+r-1}+2x_{2n+r}$$

$$y_{2n+r-1}=x_{2n+r-2}+2x_{2n+r-1}$$

第一讲：极限 > 子数列

设数列$\{a_n\}$有界，对于任何n总有$a_n \le a_{n+2}$，$a_n \le a_{n+3}$成立，证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

$a_n \le a_{n+2} \Rightarrow a_{2n} \le a_{2(n+1)} \qquad a_{2n+1} \le a_{2(n+1)+1}$

又数列$\{a_n\}$有界$\Rightarrow \{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\}$有界$\Rightarrow \{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\}$极限存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = s, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = t$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k}} a_n \le \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k}} a_{n+3} \Rightarrow s \le t$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k+1}} a_n \le \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k+1}} a_{n+3} \Rightarrow t \le s$

$\Rightarrow s = t \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

第一讲：极限 > 极限的定义

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

对任意的$M>0$，$\exists N\in N^{+}$，使得当$n>N$时，$\sqrt[n]{n!}>M$

$$\sqrt[n]{n!}>M\Leftrightarrow n!>M^{n}\Leftrightarrow 1\times 2\times\cdots\times n>M^{n}$$

$$n!=1\times\cdots\times[M]\times([M]+1)\times\cdots\times n>1\times M^{n-[M]}$$

$$n!=1\times\cdots\times[M]\times([M]+1)\times\cdots\times(n-1)\times n>M^{n-[M]-1}\times n$$

$$M^{n-[M]-1}\times n>M^{n}\Rightarrow n>M^{[M]+1}\qquad 取N=\left[M^{[M]+1}\right]+1$$

$$x-1<[x]\le x,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

第一讲：极限 > 极限的定义

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

对任意的$M\geq 1$，当$n>N=\left[M^{[M]+1}\right]+1$

$n!=1\times\cdots\times[M]\times([M]+1)\times\cdots\times(n-1)\times n>1\times M^{n-[M]-1}\times M^{[M]+1}>M^{n}$

$\Rightarrow\sqrt[n]{n!}>M$

第一讲：极限 > 极限的定义

$r>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n!}=0$

考虑$r>1$的情形

对任意的$\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，使得当$n>N$时，$\dfrac{r^n}{n!}<\varepsilon$

$$\frac{r^n}{n!}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{r^n}{\varepsilon}<n!$$

$$n!=1\times\cdots\times[r]\times([r]+1)\times\cdots\times(n-1)\times n>r^{n-[r]-1}\times n$$

$$r^{n-[r]-1}\times n>\frac{r^n}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{r^{[r]+1}}{\varepsilon}\qquad N=\left[\frac{r^{[r]+1}}{\varepsilon}\right]+1$$

第一讲：极限 > 极限的定义

p是正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n-p}}=0$

对任意的$\varepsilon>0$，$\exists N\in N^{+}$，使得当$n>N$时，$\dfrac{n!}{n^{n-p}}<\varepsilon$

$$\frac{n!}{n^{n-p}}=p!\times\frac{(p+1)(p+2)\cdots n}{n^{n-p}}=p!\times\frac{p+1}{n}\times\frac{p+2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}<p!\times\frac{p+1}{n}=\frac{(p+1)!}{n}$$

$$\frac{(p+1)!}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{(p+1)!}{\varepsilon}$$

取$N=\left[\dfrac{(p+1)!}{\varepsilon}\right]+1$

第一讲：极限 > 极限的定义

$r>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{n^n}=0$

对任意的$\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，使得当$n>N$时，$\dfrac{r^n}{n^n}<\varepsilon$

$$\frac{r^n}{n^n}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}\right)^{n-1}<\varepsilon \Leftarrow \frac{r}{n}<\varepsilon \text{且} \frac{r}{n}<1 \Leftrightarrow n>\frac{r}{\varepsilon}\text{且}n>r$$

取$N=\max\left\{\left[\dfrac{r}{\varepsilon}\right]+1,[r]+1\right\}$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

有些数列极限问题，我们可以通过求出数列的通项公式来求解极限或判断极限是否存在，而大多数数列的通项公式可以利用差分来求

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})+a_0$$

$$\text{减法运算}\xrightarrow{\text{取指数}}\text{除法运算}$$

$$\text{减法运算}\xleftarrow{\text{取对数}}\text{除法运算}$$

$$a_n=a_0\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})+a_0\Rightarrow e^{a_n}=e^{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})+a_0}\Rightarrow e^{a_n}=e^{a_0}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{a_k}}{e^{a_{k-1}}}$$

$$a_n=a_0\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}\Rightarrow \ln a_n=\ln\left(a_0\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)\Rightarrow \ln a_n=\sum_{k=1}^{n}(\ln a_k-\ln a_{k-1})+\ln a_0$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n},\quad a_0 = 0，求 \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) + a_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$a_n + a_{n-1} = \frac{1}{2^n},\quad a_0 = 0, \lim_{n\to\infty} a_n 是否存在$$

$$-a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2^n} \Rightarrow (-1)^n a_n - (-1)^{n-1} a_{n-1} = \frac{1}{(-2)^n}$$

$$\Rightarrow (-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1} = \frac{1}{(-2)^k} \quad 对k从1到n求和$$

$$(-1)^n a_n - (-1)^0 a_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(-2)^k} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right]$$

$$(-1)^n a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1}\right] + (-1)^0 a_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(-2)^k} + (-1)^0 a_0$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$rs(r+s)\neq 0$，$ra_n+sa_{n-1}=1$，$a_0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在的条件是什么？

$$\left(\frac{r}{s}\right)a_n+a_{n-1}=\frac{1}{s}\Rightarrow\left(-\frac{r}{s}\right)a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{s}\Rightarrow\left(-\frac{r}{s}\right)^n a_n-\left(-\frac{r}{s}\right)^{n-1}a_{n-1}=-\frac{1}{s}\left(-\frac{r}{s}\right)^{n-1}$$

$$\left(-\frac{r}{s}\right)^k a_k-\left(-\frac{r}{s}\right)^{k-1}a_{k-1}=-\frac{1}{s}\left(-\frac{r}{s}\right)^{k-1}\quad 对k从1到n求和$$

$$\Rightarrow\left(-\frac{r}{s}\right)^n a_n-\left(-\frac{r}{s}\right)^0 a_0=\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{s}\left(-\frac{r}{s}\right)^{k-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{\left(-\frac{s}{r}\right)^n-1}{-s-r}\Rightarrow -1<-\frac{s}{r}\leq 1\Rightarrow -1<-\frac{s}{r}<1$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$na_n - a_{n-1} = n$，$a_0 = 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$n!a_n - (n-1)!a_{n-1} = n!$

$\Rightarrow k!a_k - (k-1)!a_{k-1} = k!$ 对k从1到n求和

$$n!a_n - 0!a_0 = \sum_{k=1}^{n} k!$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k! - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k!}{n! - (n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)(n-1)!} = 1$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$(n-1)a_n - na_{n-1} = 1$，$a_1 = 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_k}{k} - \frac{a_{k-1}}{k-1} = \frac{1}{k(k-1)}$$ 对k从2到n求和

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{1}{n} - 1$$

$$\Rightarrow a_n = 1 - n$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$(n+2)a_n-(n-1)a_{n-1}=1$，$a_1=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$(n+2)(n+1)na_n-(n+1)n(n-1)a_{n-1}=(n+1)n$

$\Rightarrow (k+2)(k+1)ka_k-(k+1)k(k-1)a_{k-1}=(k+1)k$ 对k从2到n求和

$(n+2)(n+1)na_n-3\cdot2\cdot1\cdot a_1=\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)k$

$$a_n=\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)k}{(n+2)(n+1)n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)k}{(n+2)(n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)k-\sum\limits_{k=2}^{n-1}(k+1)k}{(n+2)(n+1)n-(n+1)n(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{3(n+1)n}=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}(k+1)k}{(n+2)(n+1)n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)k-2}{(n+2)(n+1)n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k-2}{(n+2)(n+1)n}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2}{(n+2)(n+1)n}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$a_0=s$，$a_1=t$，$s\neq t$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 待定系数法 降阶

$$a_{n+1}-\lambda a_n=p(a_n-\lambda a_{n-1}) \qquad b_{n+1}=pb_n$$

$$a_{n+1}-(\lambda+p)a_n+p\lambda a_{n-1}=0$$

$$2a_{n+1}-a_n-a_{n-1}=0$$

$$\frac{1}{2}=\frac{-(\lambda+p)}{-1}=\frac{p\lambda}{-1}\Rightarrow\begin{cases}p=-\dfrac{1}{2}\\ \lambda=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}p=1\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$$

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-a_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(t-s)$$

$$a_{k+1}-a_k=\left(-\frac{1}{2}\right)^k(t-s) \quad \text{对}k\text{从}0\text{到}n-1\text{求和}$$

$$a_n-a_0=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k(t-s)$$

$$a_n=s+\frac{2}{3}(t-s)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\to\frac{2t+s}{3}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$a_{n+1}^{2}=a_{n}a_{n-1}$，$a_{0}=s>0$，$a_{1}=t>0$，$s\neq t$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}$

$$2\ln a_{n+1}=\ln a_{n}+\ln a_{n-1}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}+(pn-1)a_n}{pn},\quad a_0=0,\quad a_1=1,\quad 求\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$pna_{n+1}=a_{n-1}+(pn-1)a_n \Rightarrow pn(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})=0$$

设$b_n=a_{n+1}-a_n \Rightarrow pnb_n+b_{n-1}=0$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{-pn}b_{n-1}$$

$$\Rightarrow b_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{-pk}b_0 \Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(-p)^n n!}$$

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{(-p)^k k!}$$ 对k从0到$n-1$求和

$$\Rightarrow a_n-a_0=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(-p)^k k!} \Rightarrow a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(-p)^k k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-\frac{1}{p}\right)^k}{k!}\to e^{-\frac{1}{p}}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

二阶线性齐次递推数列与特征方程

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\quad q\neq 0$

如果方程$x^2+px+q=0$有两个不同的根r_1，$r_2\neq 0$

存在A和B使得对任意的正整数n，都有$a_n=Ar_1^n+Br_2^n$

其中A和B是常数并且由$\begin{cases}a_1=Ar_1+Br_2\\ a_2=Ar_1^2+Br_2^2\end{cases}$解出

$n=1,2$ 成立

假设 $1\leq n\leq k\quad (k\geq 2)$成立

$a_k=Ar_1^k+Br_2^k,\quad a_{k-1}=Ar_1^{k-1}+Br_2^{k-1}$

$a_{k+1}=-pa_k-qa_{k-1}=-p\left(Ar_1^k+Br_2^k\right)-q\left(Ar_1^{k-1}+Br_2^{k-1}\right)$

$=-A\left(pr_1^k+qr_1^{k-1}\right)-B\left(pr_2^k+qr_2^{k-1}\right)=Ar_1^{k+1}+Br_2^{k+1}$

$\Rightarrow n=k+1$成立 $\Rightarrow 1\leq n\leq k+1$成立

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

二阶线性齐次递推数列与特征方程

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \quad q\neq 0$

如果方程$x^2+px+q=0$有两个相同的根$r_1=r_2\neq 0$

存在A和B使得对任意的正整数n，都有$a_n=(A+nB)r_1^n$

其中A和B是常数并且由$\begin{cases} a_1=(A+B)r_1 \\ a_2=(A+2B)r_1^2 \end{cases}$解出

$n=1,2$成立

假设$1\le n\le k \quad (k\ge 2)$成立

$a_k=(A+kB)r_1^k$，$a_{k-1}=(A+(k-1)B)r_1^{k-1}$

$a_{k+1}=-pa_k-qa_{k-1}=-p(A+kB)r_1^k-q(A+(k-1)B)r_1^{k-1}$

$=A(-pr_1^k-qr_1^{k-1})+B(-pkr_1^k-q(k-1)r_1^{k-1})=Ar_1^{k+1}+B(2kr_1^{k+1}-(k-1)r_1^{k+1})=Ar_1^{k+1}+B(k+1)r_1^{k+1}$

$\Rightarrow n=k+1$成立$\Rightarrow 1\le n\le k+1$成立

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$a_0=s$，$a_1=t$，$s\neq t$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$1,-\frac{1}{2}$ 是方程 $2x^2=x+1$ 的两根

$$\begin{cases}s=A+B\\ t=A-\frac{1}{2}B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{s+2t}{3}\\ B=\frac{2s-2t}{3}\end{cases}\qquad\begin{cases}a_0=A+B\\ a_1=Ar_1+Br_2\end{cases}$$

$$a_n=\frac{s+2t}{3}\cdot 1^n+\frac{2s-2t}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to\frac{s+2t}{3}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$，$a_0=s$，$a_1=t$，$s\neq t$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$1,1$是方程$x^2=2x-1$的两根

$$\begin{cases}s=A\\t=A+B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=s\\B=t-s\end{cases}$$

$$a_n=s+n(t-s)\to\infty$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$a_1=a_0=1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\begin{cases} a_0=A+B \\ a_1=Ar_1+Br_2 \end{cases}$$

$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $x^2=x+1$ 的两根

$$\begin{cases} 1=A+B \\ 1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}A+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ B=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{cases} \qquad \Rightarrow a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} \quad \to \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

有些数列极限问题，通项公式不可求或难求，我们可以利用单调有界准则

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_1>0$，$x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ $n=1,2,\cdots$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

我们用数学归纳法证明$x_n>0$ $n=1,2,\cdots$

$n=1$成立，设$n=k(k\ge1)$成立$\Rightarrow x_k>0\Rightarrow x_{k+1}=\ln(1+x_k)>0\Rightarrow n=k+1$成立

$x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n\Leftarrow$当$x>0,\ln(1+x)<x$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow a\ge0$

$x_{n+1}=\ln(1+x_n)\Rightarrow a=\ln(1+a)\Rightarrow a$是方程$x=\ln(1+x)$在$[0,+\infty)$上的一解

方程$x=\ln(1+x)$在$[0,+\infty)$上仅有一解$x=0\Rightarrow a=0$

设$f(x)=x-\ln(1+x)$，$x\in(0,+\infty)$

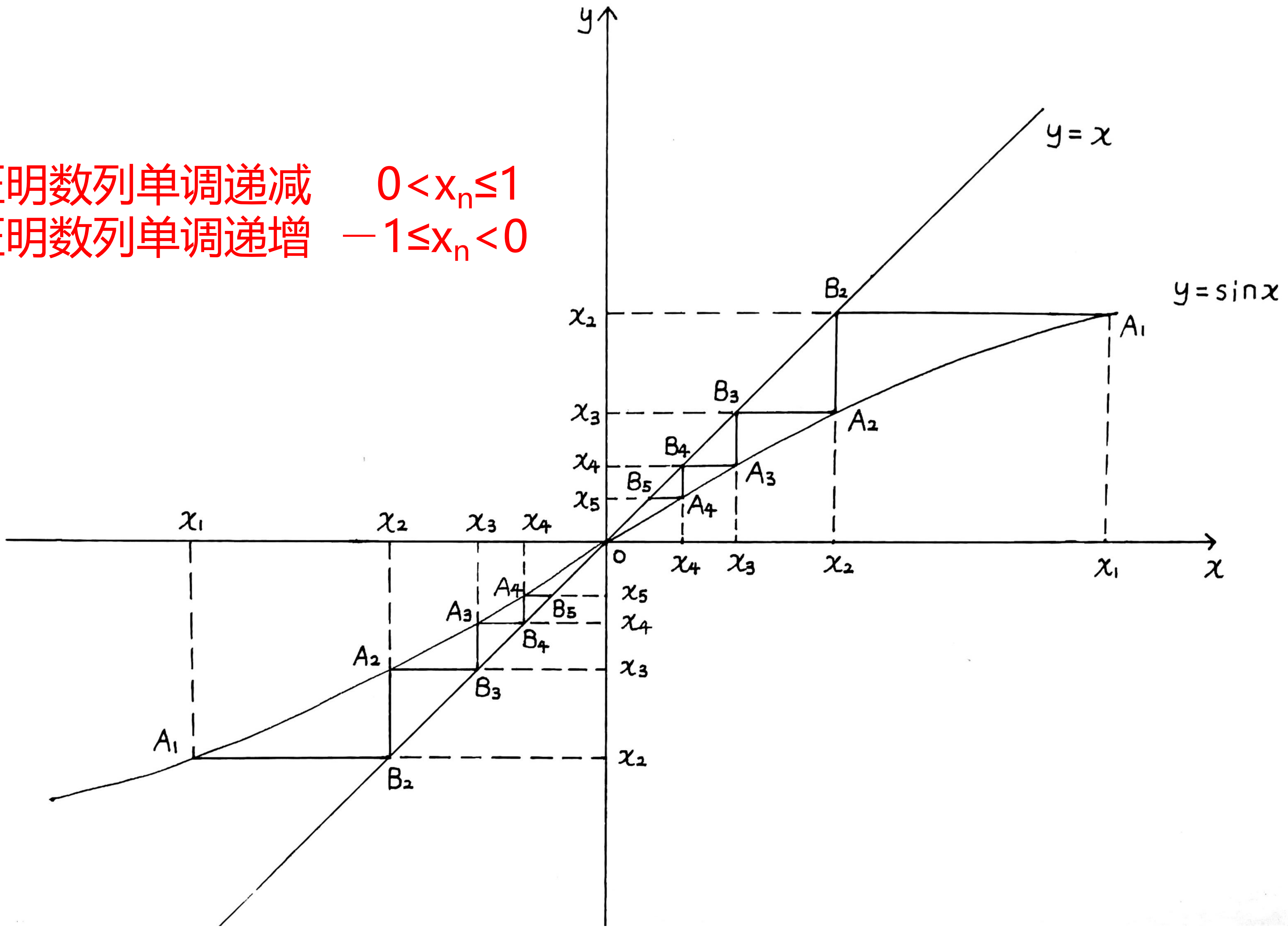
$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$

$f(x)>f(0)\Rightarrow\ln(1+x)<x$

$x_{n+1} = \sin x_n$，$n = 0,1,2,\cdots$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

判断数列单调性和收敛性的作图方法

$x_1>0$ 证明数列单调递减 $0<x_n\leq 1$
$x_1<0$ 证明数列单调递增 $-1\leq x_n<0$



第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=0,1,2,\cdots$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

i.当$x_1=0$时，$x_n=0\ \ n=1,2,\cdots$

ii.当$x_1>0$时，我们用数学归纳法证明$0<x_n\le 1$，$n=1,2,\cdots$

$0<x_1=\sin x_0\le 1\Rightarrow n=1$成立，假设$n=k(k\ge 1)$成立$\Rightarrow 0<x_k\le 1<\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0<x_{k+1}=\sin x_k\le 1\Rightarrow n=k+1$成立

$x_{n+1}=\sin x_n<x_n \Leftarrow$当$x>0,\sin x<x$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

iii.当$x_1<0$时，我们用数学归纳法证明$0>x_n\ge -1$，$n=1,2,\cdots$

$0>x_1=\sin x_0\ge -1\Rightarrow n=1$成立，假设$n=k(k\ge 1)$成立$\Rightarrow 0>x_k\ge -1>-\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0>x_{k+1}=\sin x_k\ge -1\Rightarrow n=k+1$成立

$x_{n+1}=\sin x_n>x_n \Leftarrow$当$x<0,\sin x>x$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

$x_{n+1}=\sin x_n \Rightarrow a=\sin a$

方程$x=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上仅有一解$x=0\Rightarrow a=0$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

当$x>0,\sin x<x$

设$f(x)=x-\sin x$，$x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$

$f(x)\geq f(0)\Rightarrow x-\sin x\geq 0\Rightarrow \sin x\leq x???$

设$f(x)=x-\sin x$，$x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=1-\cos x\geq 0$

i.当$x\in(0,\pi)$，$f'(x)>0$

$\Rightarrow$当$x\in(0,\pi]$，$f(x)>f(0)$

ii.当$x\in(\pi,+\infty)$，$f'(x)\geq 0$

$\Rightarrow$当$x\in(\pi,+\infty)$，$f(x)\geq f(\pi)>f(0)$

结合i.ii.当$x\in(0,+\infty)$，$f(x)>f(0)\Rightarrow x-\sin x>0\Rightarrow \sin x<x$

同理可证当$x<0,\sin x>x$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

方程$x=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上仅有一解$x=0$

假设$\exists x^{*}\neq 0$，$x^{*}=\sin x^{*}\Rightarrow |x^{*}|\leq 1$

设$f(x)=x-\sin x\Rightarrow f(x^{*})=f(0)$由罗尔定理$\exists\delta$介于$0$、$x^{*}$之间，使得$f'(\delta)=0$

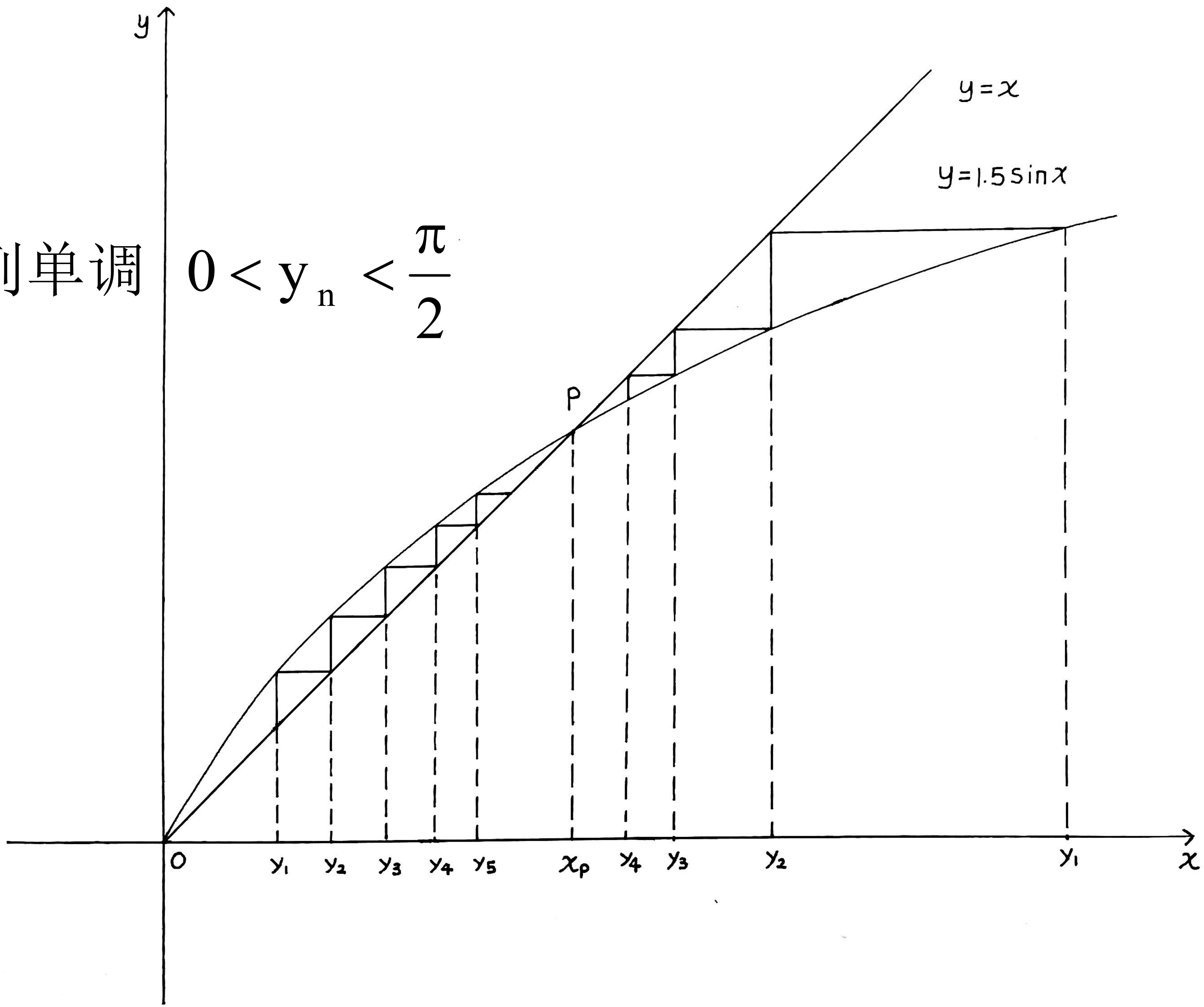
$\Rightarrow 1=\cos\delta$

$0<|\delta|<|x^{*}|\leq 1<\dfrac{\pi}{2}$矛盾！

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明数列$y_1 = x$，$y_{n+1} = 1.5\sin y_n \ (n = 1,2,\cdots)$的极限存在

证明数列单调 $0 < y_n < \frac{\pi}{2}$



$0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明数列$y_1 = x$，$y_{n+1} = 1.5\sin y_n \ (n = 1,2,\cdots)$的极限存在

$$\text{符号函数}\ \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明数列$y_1=x$，$y_{n+1}=1.5\sin y_n\ (n=1,2,\cdots)$的极限存在

递推的思想

我们用数学归纳法证明$0<y_n<\dfrac{\pi}{2}$，$n=1,2,\cdots$

$y_{n+1}-y_n\geq 0$或≤ 0

$n=1$成立，假设$n=k\,(k\geq 1)$成立$\Rightarrow 0<y_k<\dfrac{\pi}{2}$

考虑$y_{n+1}-y_n$与y_n-y_{n-1}之间的联系

$\Rightarrow 0<y_{k+1}=1.5\sin y_k<1.5<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow n=k+1$成立

$y_{n+1}-y_n=\sin y_n-\sin y_{n-1}=\cos\xi_n\,(y_n-y_{n-1})$，$\xi_n$介于$y_n$、$y_{n-1}$之间

$\operatorname{sgn}(y_{n+1}-y_n)=\operatorname{sgn}(y_n-y_{n-1})\Rightarrow\operatorname{sgn}(y_{n+1}-y_n)=\operatorname{sgn}(y_2-y_1)$

当$y_2-y_1>0\Rightarrow y_{n+1}-y_n>0$ 又$y_n<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在

当$y_2-y_1<0\Rightarrow y_{n+1}-y_n<0$ 又$y_n>0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在

当$y_2-y_1=0\Rightarrow y_{n+1}-y_n=0\Rightarrow y_n=y_1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

数列$\{x_n\}$满足$\exists m$，M使得$m<x_n<M$，$x_{n+1}=f(x_n)$

函数$f(x)$满足在$[m，M]$上连续，在$(m，M)$内可导且$f'(x)>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$，$\xi_n$介于$x_n$、$x_{n-1}$之间

$\operatorname{sgn}(x_{n+1}-x_n)=\operatorname{sgn}(x_n-x_{n-1})\Rightarrow\operatorname{sgn}(x_{n+1}-x_n)=\operatorname{sgn}(x_2-x_1)$

当$x_2-x_1>0\Rightarrow x_{n+1}-x_n>0$ 又$x_n<M\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

当$x_2-x_1<0\Rightarrow x_{n+1}-x_n<0$ 又$x_n>m\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

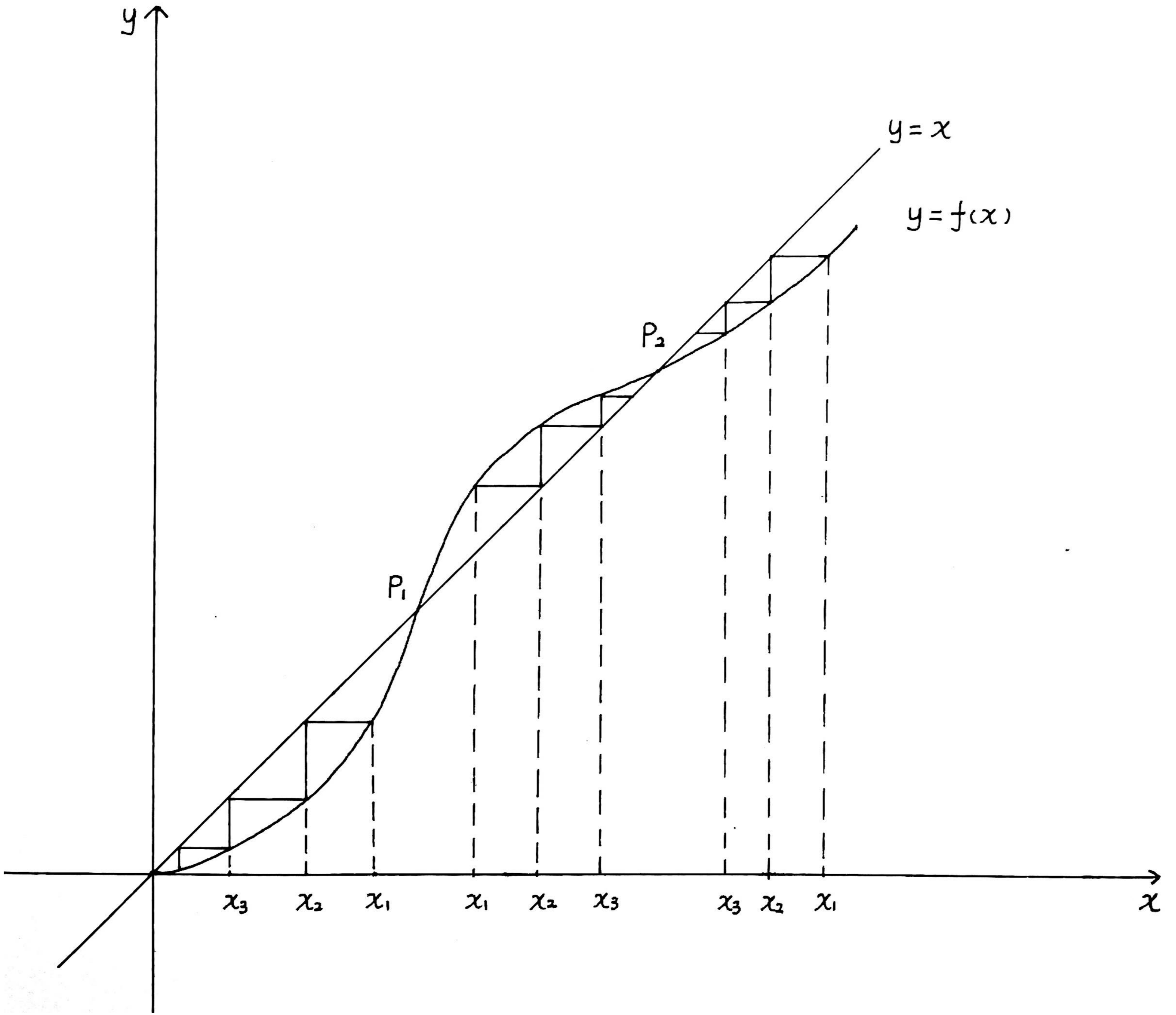
当$x_2-x_1=0\Rightarrow x_{n+1}-x_n=0\Rightarrow x_n=x_1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*\Rightarrow m\le x^*\le M$

$x_{n+1}=f(x_n)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\Rightarrow x^*=f(x^*)$

$\Rightarrow x^*$是方程$x=f(x)$在$[m，M]$上的一解

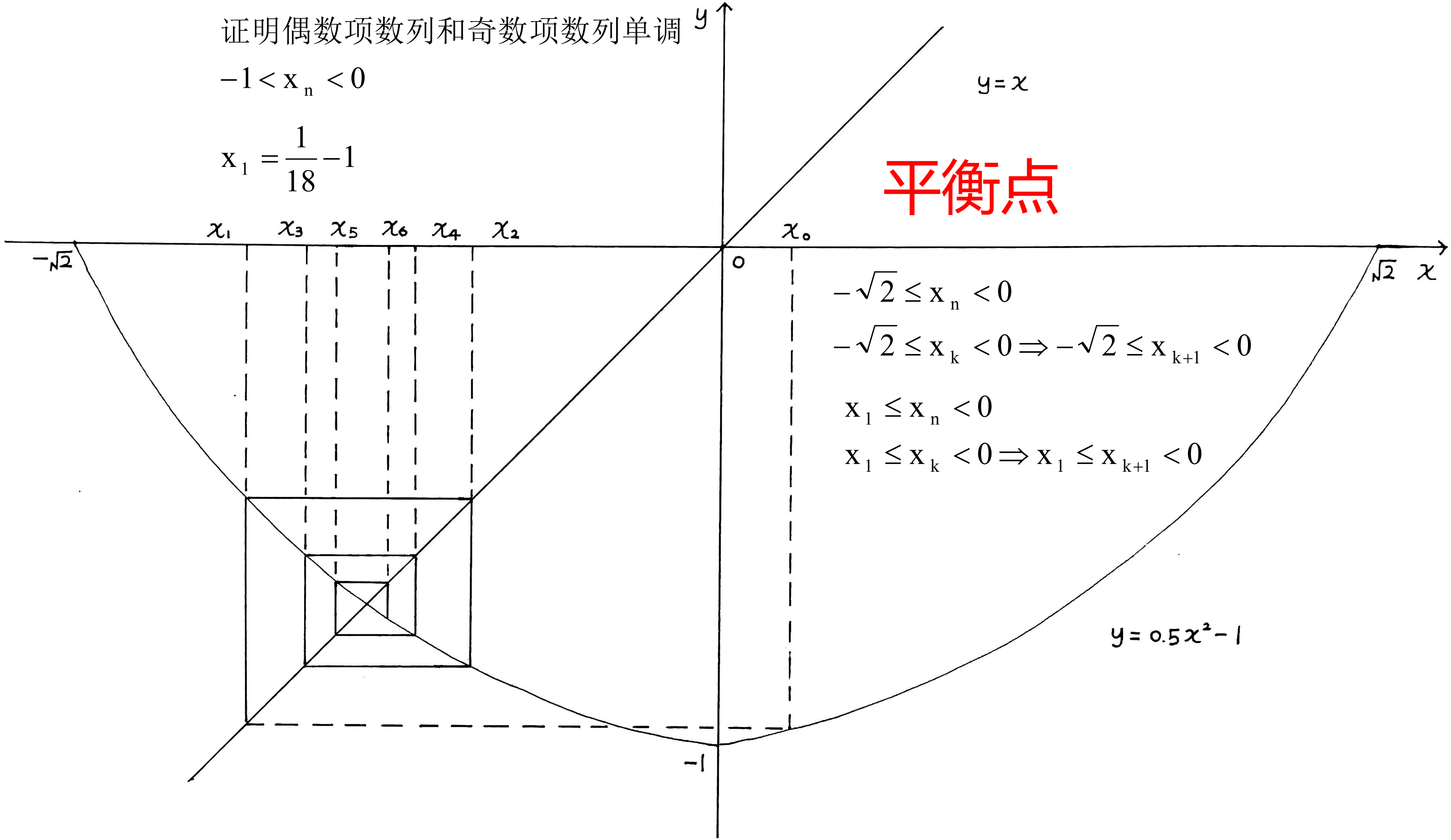
x^*是$y=x$与$y=f(x)$在$[m，M]$上的一交点的横坐标



y
y = x
y = f(x)
P₂
P₁
x₃
x₂
x₁
x₁
x₂
x₃
x₃
x₂
x₁
x

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

数列$\{x_n\}$满足$x_0=\dfrac{1}{3}$，$x_n=0.5x_{n-1}^2-1(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$



证明偶数项数列和奇数项数列单调

$-1 < x_n < 0$

$x_1 = \frac{1}{18} - 1$

平衡点

$-\sqrt{2} \le x_n < 0$

$-\sqrt{2} \le x_k < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \le x_{k+1} < 0$

$x_1 \le x_n < 0$

$x_1 \le x_k < 0 \Rightarrow x_1 \le x_{k+1} < 0$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

我们用数学归纳法证明$-1<x_n<0 \quad n=1,2,\cdots$

$-1<x_1=\frac{1}{18}-1<0 \Rightarrow n=1$成立，假设$n=k(k\ge 1)$成立$\Rightarrow -1<x_k<0$

$\Rightarrow -1<x_{k+1}=0.5x_k^2-1<0.5-1<0 \Rightarrow n=k+1$成立

n是偶数时，$x_{n+2}-x_n\ge 0$或≤ 0

n是奇数时，$x_{n+2}-x_n\ge 0$或≤ 0

考虑$x_{n+2}-x_n$与$x_{n+1}-x_{n-1}$的联系

递推的思想

$x_{n+2}-x_n=\left(0.5x_{n+1}^2-1\right)-\left(0.5x_{n-1}^2-1\right)=\xi_n\left(x_{n+1}-x_{n-1}\right)$，$\xi_n$介于$x_{n+1}$、$x_{n-1}$之间

$\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=-\operatorname{sgn}(x_{n+1}-x_{n-1})\Rightarrow \operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(x_3-x_1)$

当n是偶数 $\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=-\operatorname{sgn}(x_3-x_1)\Rightarrow\{x_{2n}\}$单调又$-1<x_n<0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$存在

当n是奇数 $\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=\operatorname{sgn}(x_3-x_1)\Rightarrow\{x_{2n+1}\}$单调又$-1<x_n<0\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}$存在

$\left(0.5x_{n+1}^2-1\right)-\left(0.5x_{n-1}^2-1\right)=0.5(x_{n+1}+x_{n-1})(x_{n+1}-x_{n-1})$ $\qquad x_3-x_1<0$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a,\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=b\Rightarrow -1\le a,\ b\le 0$

$x_n=0.5x_{n-1}^2-1\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k}} x_n=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k}}\left(0.5x_{n-1}^2-1\right)\quad \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k+1}} x_n=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k+1}}\left(0.5x_{n-1}^2-1\right)$

$\Rightarrow a=0.5b^2-1\quad b=0.5a^2-1$

作差$a-b=0.5(b-a)(b+a)\Rightarrow(a-b)[1+0.5(b+a)]=0$

假设$1+0.5(b+a)=0\Rightarrow a+b=-2\Rightarrow b^2-2b+2=0$矛盾!

$\Rightarrow 1+0.5(b+a)\ne 0\Rightarrow a=b\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$是方程$x=0.5x^2-1$在$[-1,0]$上的解

又方程$x=0.5x^2-1$在$[-1,0]$上仅有一解$x=1-\sqrt{3}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1-\sqrt{3}$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

数列$\{x_n\}$满足$\exists m$，M使得$m < x_n < M$，$x_{n+1} = f(x_n)$

函数$f(x)$满足在$[m，M]$上连续，在$(m，M)$内可导且$f'(x) < 0$，$f'(x) \neq -1$则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

$x_{n+2} - x_n = f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_{n+1} - x_{n-1})$，$\xi_n$介于$x_{n+1}$、$x_{n-1}$之间

$\operatorname{sgn}(x_{n+2} - x_n) = -\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_{n-1}) \Rightarrow \operatorname{sgn}(x_{n+2} - x_n) = (-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(x_3 - x_1)$

当n是偶数　$\operatorname{sgn}(x_{n+2} - x_n) = -\operatorname{sgn}(x_3 - x_1) \Rightarrow \{x_{2n}\}$单调　又$m < x_n < M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$存在

当n是奇数　$\operatorname{sgn}(x_{n+2} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_3 - x_1) \Rightarrow \{x_{2n+1}\}$单调　又$m < x_n < M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$存在

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = b \Rightarrow m \le a$，$b \le M$

$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k}} x_{n+1} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k}} f(x_n)$　　$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k+1}} x_{n+1} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n=2k+1}} f(x_n)$

$\Rightarrow b = f(a)$　　$a = f(b)$

作差$b - a = f(a) - f(b) \Rightarrow f(b) + b = f(a) + a$，记$G(x) = f(x) + x \Rightarrow G(b) = G(a)$

假设$a \neq b$由罗尔定理$\exists\delta$介于a、b之间，使得$G'(\delta) = 0 \Rightarrow f'(\delta) + 1 = 0$

$m \le \min\{a，b\} < \delta < \max\{a，b\} \le M$，矛盾！$\Rightarrow a = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

数列$\{x_n\}$满足$\exists m$，M使得$m < x_n < M$，$x_{n+1} = f(x_n)$

函数$f(x)$满足在$[m, M]$上连续，在(m, M)内可导且$f'(x) < 0$，$f'(x) \neq -1$则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$是方程$x = f(x)$在$[m, M]$上唯一的一解

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \Rightarrow m \le x^* \le M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow x^* = f(x^*)$

$\Rightarrow x^*$是方程$x = f(x)$在$[m, M]$上的解　　这里可知方程$x = f(x)$在$[m, M]$上至少有一解

假设方程$x = f(x)$在$[m, M]$上存在异于x^*的解x'

设$G(x) = f(x) - x$，$x \in [m, M]$

$G(x') = G(x^*) = 0$由罗尔定理$\exists r$介于x'、x^*之间，使得$G'(r) = 0 \Rightarrow f'(r) = 1$

$m \le \min\{x', x^*\} < r < \max\{x', x^*\} \le M$ 矛盾！

$\Rightarrow$ 方程$x = f(x)$在$[m, M]$上仅有一解

$\Rightarrow x^*$是方程$x = f(x)$在$[m, M]$上唯一的解

$y = x$与$y = f(x)$在$[m, M]$上仅有一个交点，x^*是这个交点的横坐标

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<r\leq 1$，$q>\sqrt{2r}$，$x_1=\dfrac{r}{q}$，$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

数列$\{x_n\}$满足$x_0=\dfrac{1}{3}$，$x_n=0.5x_{n-1}^2-1(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<r\le 1$，$q>\sqrt{2r}$，$x_1=\dfrac{r}{q}$，$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$$\frac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}<\frac{r}{q}<\sqrt{r}$$

$\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}$是$y=\dfrac{r-x^2}{q}$与$y=x$右边交点的横坐标

$\sqrt{r}$是$y=\dfrac{r-x^2}{q}$与x轴右边交点的横坐标

通过作图法，我们会发现

$$0<x_n\le x_1=\frac{r}{q}$$

数列不单调，但它的偶数项数列与奇数项数列都是单调的

$$\frac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}<\frac{r}{q}\Leftrightarrow\frac{2r}{q+\sqrt{q^2+4r}}<\frac{r}{q}\Leftrightarrow 2q<q+\sqrt{q^2+4r}\Leftrightarrow q<\sqrt{q^2+4r}\Leftarrow 0<r$$

$$\frac{r}{q}<\sqrt{r}\Leftrightarrow\sqrt{r}<q\Leftarrow\sqrt{2r}<q$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<r\le 1$，$q>\sqrt{2r}$，$x_1=\dfrac{r}{q}$，$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

我们用数学归纳法证明$0<x_n\le\dfrac{r}{q}\quad n=1,2,\cdots$

$n=1$成立，假设$n=k(k\ge 1)$成立$\Rightarrow 0<x_k\le\dfrac{r}{q}$ $\qquad \dfrac{r}{q}<\dfrac{r}{\sqrt{2r}}=\sqrt{\dfrac{r}{2}}$

$$\Rightarrow 0<\frac{r-\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)^2}{q}<x_{k+1}=\frac{r-x_k^2}{q}<\frac{r}{q}\Rightarrow n=k+1\text{成立}$$

$x_{n+2}-x_n=\dfrac{r-x_{n+1}^2}{q}-\dfrac{r-x_{n-1}^2}{q}=-\dfrac{2\xi_n}{q}(x_{n+1}-x_{n-1})$，$\xi_n$介于$x_{n+1}$、$x_{n-1}$之间

$$\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=-\operatorname{sgn}(x_{n+1}-x_{n-1})\Rightarrow\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}(x_3-x_1)$$

当n是偶数 $\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=-\operatorname{sgn}(x_3-x_1)\Rightarrow\{x_{2n}\}$单调 又$0<x_n\le\dfrac{r}{q}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$存在

当n是奇数 $\operatorname{sgn}(x_{n+2}-x_n)=\operatorname{sgn}(x_3-x_1)\Rightarrow\{x_{2n+1}\}$单调 又$0<x_n\le\dfrac{r}{q}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}$存在

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<r\le 1$，$q>\sqrt{2r}$，$x_1=\dfrac{r}{q}$，$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=b,\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a\Rightarrow 0\le a$，$b\le\dfrac{r}{q}$

$$x_{n+1}=\frac{r-x_n^2}{q}\Rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty\\ n=2k}}x_{n+1}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n=2k}}\frac{r-x_n^2}{q}\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ n=2k+1}}x_{n+1}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ n=2k+1}}\frac{r-x_n^2}{q}$$

$$\Rightarrow a=\frac{r-b^2}{q}\quad b=\frac{r-a^2}{q}\Rightarrow a-b=\frac{(a-b)(a+b)}{q}\Rightarrow(a-b)\left(1-\frac{a+b}{q}\right)=0$$

假设$1-\dfrac{a+b}{q}=0\Rightarrow a+b=q\Rightarrow q\le\dfrac{2r}{q}\Rightarrow q\le\sqrt{2r}$矛盾！

$\Rightarrow 1-\dfrac{a+b}{q}\ne 0\Rightarrow a=b\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是方程$x=\dfrac{r-x^2}{q}$在$[0,\dfrac{r}{q}]$上的解

又方程$x=\dfrac{r-x^2}{q}$在$[0,\dfrac{r}{q}]$上仅有一解$x=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$0<r\leq 1$，$q>\sqrt{\dfrac{4r}{3}}$，$x_1=\dfrac{r}{q}$，$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=b,\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a\Rightarrow 0\leq a$，$b\leq\dfrac{r}{q}$

$x_{n+1}=\dfrac{r-x_n^2}{q}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k}}x_{n+1}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k}}\dfrac{r-x_n^2}{q}\qquad \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k+1}}x_{n+1}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\n=2k+1}}\dfrac{r-x_n^2}{q}$

$\Rightarrow a=\dfrac{r-b^2}{q}\qquad b=\dfrac{r-a^2}{q}\Rightarrow a-b=\dfrac{(a-b)(a+b)}{q}\Rightarrow (a-b)\left(1-\dfrac{a+b}{q}\right)=0$

假设$1-\dfrac{a+b}{q}=0\Rightarrow a+b=q\Rightarrow b^2-qb+q^2-r=0$

$\Rightarrow \Delta=q^2-4(q^2-r)\geq 0\Rightarrow q\leq\sqrt{\dfrac{4r}{3}}$矛盾！

$\Rightarrow 1-\dfrac{a+b}{q}\neq 0\Rightarrow a=b\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是方程$x=\dfrac{r-x^2}{q}$在$[0,\dfrac{r}{q}]$上的解

又方程$x=\dfrac{r-x^2}{q}$在$[0,\dfrac{r}{q}]$上仅有一解$x=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4r}}{2}$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

方法一

我们得确定出或猜测出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$是什么

数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)$

我们证明$|x_{n+1}-r|\le k|x_n-r|\quad 0<k<1$

$$\Rightarrow 0\le |x_n-r|\le k^{n-1}|x_1-r|\Rightarrow |x_n-r|\to 0\Rightarrow x_n\to r$$

$|f'(x)|\le k\quad 0<k<1$

$$|x_{n+1}-r|=|f(x_n)-f(r)|=|f'(\xi_n)||x_n-r|\le k|x_n-r|$$

方法二

数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)$

我们证明$|x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|\quad 0<k<1$

$$\Rightarrow |x_{n+1}-x_n|\le k^{n-1}|x_2-x_1|\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|\text{收敛}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)\text{收敛}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}$$

$|f'(x)|\le k\quad 0<k<1$

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi_n)||x_n-x_{n-1}|\le k|x_n-x_{n-1}|$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r\Rightarrow r=2+\dfrac{1}{r}\Rightarrow r=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow r=1+\sqrt{2}$ 易知$x_n\geq 2\Rightarrow r\geq 2$

$$x_{n+1}-\left(1+\sqrt{2}\right)=2+\frac{1}{x_n}-\left(2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\xi_n^2}\left[x_n-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left|x_{n+1}-\left(1+\sqrt{2}\right)\right|=\frac{1}{\xi_n^2}\left|x_n-\left(1+\sqrt{2}\right)\right|\leq\frac{1}{4}\left|x_n-\left(1+\sqrt{2}\right)\right|$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$$x_{n+1}-x_n=2+\frac{1}{x_n}-\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\frac{-1}{\xi_n^2}(x_n-x_{n-1})$$

$$\Rightarrow|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{\xi_n^2}|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r\Rightarrow r\ge 2$

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}\Rightarrow r=2+\frac{1}{r}\Rightarrow r=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow r=1+\sqrt{2}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_1 \geq 1$，$x_{n+1}=\frac{1}{p+1}\left(px_n+\frac{1}{x_n^p}\right)(n=1,2,\cdots)$，p是正整数，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

容易猜测$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

$$x_{n+1}-1=\frac{1}{p+1}\left(px_n+\frac{1}{x_n^p}\right)-\frac{1}{p+1}\left(p+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{p+1}\left(p-\frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right)(x_n-1)$$，ξ_n介于x_n、1之间

$$|x_{n+1}-1|=\frac{1}{p+1}\left|p-\frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right||x_n-1|$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{p+1}\left(px_n+\frac{1}{x_n^p}\right)=\frac{1}{p+1}\left(\overbrace{x_n+\cdots+x_n}^{p}+\frac{1}{x_n^p}\right)\geq\sqrt[p+1]{\overbrace{x_n\times\cdots\times x_n}^{p}\times\frac{1}{x_n^p}}=1$$

$$1\leq\xi_n\Rightarrow 0\leq p-\frac{p}{\xi_n^{p+1}}<p\Rightarrow\left|p-\frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right|<p\Rightarrow\frac{1}{p+1}\left|p-\frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right|<\frac{p}{p+1}$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_1 \ge 1$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{p+1}\left(px_n + \dfrac{1}{x_n^p}\right)(n=1,2,\cdots)$，p是正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$x_{n+1} = \frac{1}{p+1}\left(px_n + \frac{1}{x_n^p}\right) = \frac{1}{p+1}\left(\overbrace{x_n + \cdots + x_n}^{p} + \frac{1}{x_n^p}\right) \ge \sqrt[p+1]{\overbrace{x_n \times \cdots \times x_n}^{p} \times \frac{1}{x_n^p}} = 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{p+1}\left(px_n + \frac{1}{x_n^p}\right) - \frac{1}{p+1}\left(px_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^p}\right) = \frac{1}{p+1}\left(p - \frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right)(x_n - x_{n-1})$$，ξ_n 介于 x_n、x_{n-1} 之间

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{p+1}\left|p - \frac{p}{\xi_n^{p+1}}\right||x_n - x_{n-1}| < \frac{p}{p+1}|x_n - x_{n-1}|$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r \Rightarrow r \ge 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{p+1}\left(px_n + \frac{1}{x_n^p}\right) \Rightarrow r = \frac{1}{p+1}\left(pr + \frac{1}{r^p}\right) \Rightarrow r^{p+1} = 1 \Rightarrow r = 1$$

第一讲：极限 > 给定递推公式的数列极限问题

$x_0=m$，$x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}\,(n=1,2,\cdots),0<\varepsilon<1$，证明数列$\{x_n\}$有极限a，且a是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的唯一解

设$F(x)=m+\varepsilon\sin x-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty\Rightarrow F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有零点$a'\Rightarrow a'$是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的解

假设方程$x=m+\varepsilon\sin x$存在异于a'的解b

$F(a')=F(b)=0$

由罗尔定理$\exists\delta$介于a'、b之间使得$F'(\delta)=0\Rightarrow\varepsilon\cos\delta=1\Rightarrow\cos\delta=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 矛盾！

$\Rightarrow a'$是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的唯一解

$x_{n+1}-a'=m+\varepsilon\sin x_n-(m+\varepsilon\sin a')=\varepsilon\cos\xi_n(x_n-a')$，$\xi_n$介于$x_n$、$a'$之间

$|x_{n+1}-a'|=|\varepsilon\cos\xi_n||x_n-a'|\le\varepsilon|x_n-a'|$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a'$

$x_0=m$，$x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}\,(n=1,2,\cdots),0<\varepsilon<1$，证明数列$\{x_n\}$有极限a，且a是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的唯一解

$x_{n+1}-x_n=m+\varepsilon\sin x_n-(m+\varepsilon\sin x_{n-1})=\varepsilon\cos\xi_n(x_n-x_{n-1})$，$\xi_n$介于$x_n$、$x_{n-1}$之间

$|x_{n+1}-x_n|=|\varepsilon\cos\xi_n||x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon|x_n-x_{n-1}|$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

$x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}\Rightarrow a=m+\varepsilon\sin a\Rightarrow a$是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的解

假设方程$x=m+\varepsilon\sin x$存在异于a的解b

设$F(x)=m+\varepsilon\sin x-x\Rightarrow F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理$\exists\delta$介于a、b之间使得$F'(\delta)=0\Rightarrow\varepsilon\cos\delta=1\Rightarrow\cos\delta=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 矛盾！

$\Rightarrow a$是方程$x=m+\varepsilon\sin x$的唯一解