第四讲：中值问题

1.罗尔定理
1.1原函数法
1.2构造通法
1.3常数K值法
2.拉格朗日中值定理
3.柯西中值定理
4.泰勒中值定理
5.达布定理
6.费马定理

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在$(-\infty,b)$上连续，在$(-\infty,b)$上可导$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\exists\xi\in(-\infty,b)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，在$(-\infty,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=s$或$+\infty$或$-\infty$

则$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=s$或$+\infty$

则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=s$或$+\infty$

则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

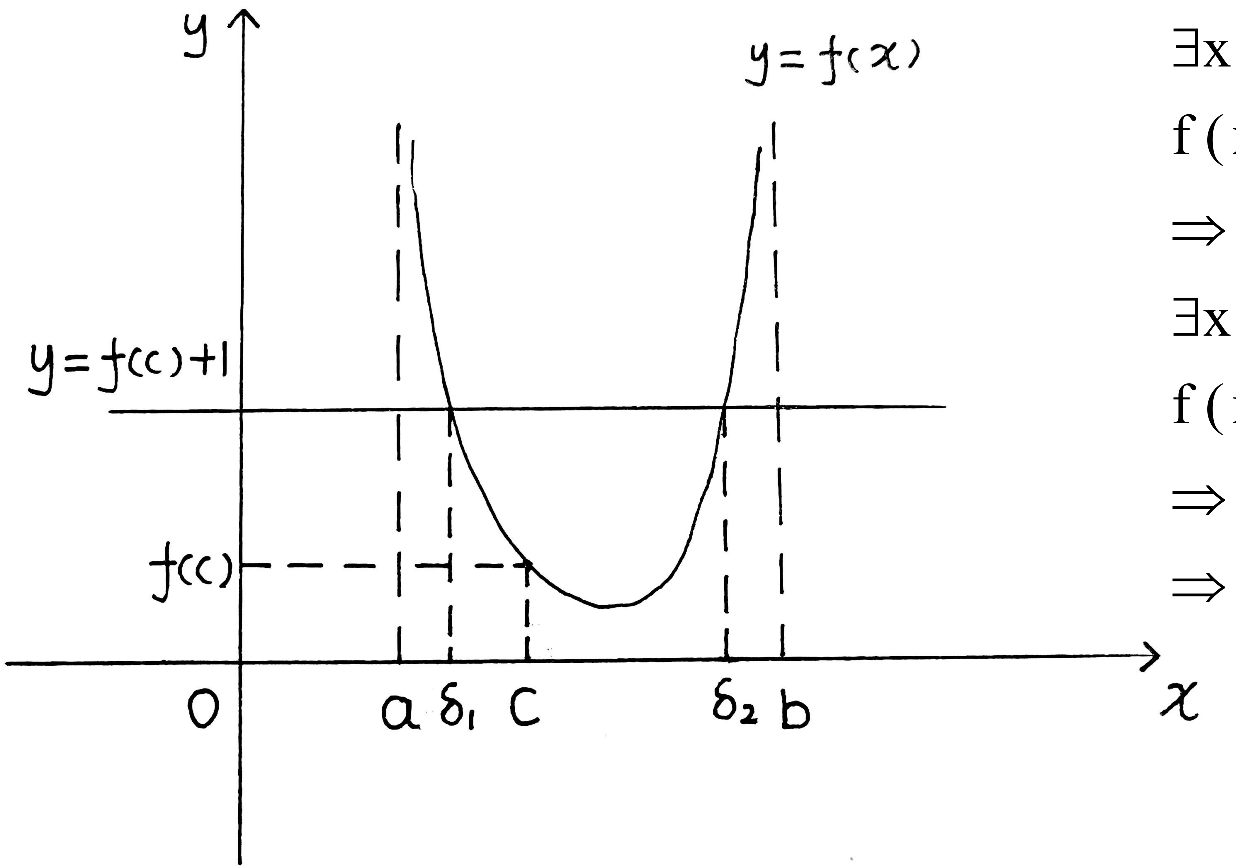
第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)上可导$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=s$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

补充定义$f(a)=f(b)=s\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(a)=f(b)$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$



取$c\in(a,b)$

$\exists x_1\in(a,c)$，使得$f(x_1)>f(c)+1$

$f(x_1)>f(c)+1>f(c)$

$\Rightarrow$由介值定理$\exists\delta_1\in(x_1,c)$，使得$f(\delta_1)=f(c)+1$

$\exists x_2\in(c,b)$，使得$f(x_2)>f(c)+1$

$f(x_2)>f(c)+1>f(c)$

$\Rightarrow$由介值定理$\exists\delta_2\in(c,x_2)$，使得$f(\delta_2)=f(c)+1$

$\Rightarrow f(\delta_1)=f(\delta_2)$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在(a,b)上连续，在(a,b)上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

值域无界的$f(x)\to$值域有界的$\arctan f(x)$ 将函数值域的无界区间转化成有界区间

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\arctan f(x)=\lim_{x\to b^-}\arctan f(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & x=a\\ \arctan f(x) & x\in(a,b)\\ \dfrac{\pi}{2} & x=b\end{cases}$$

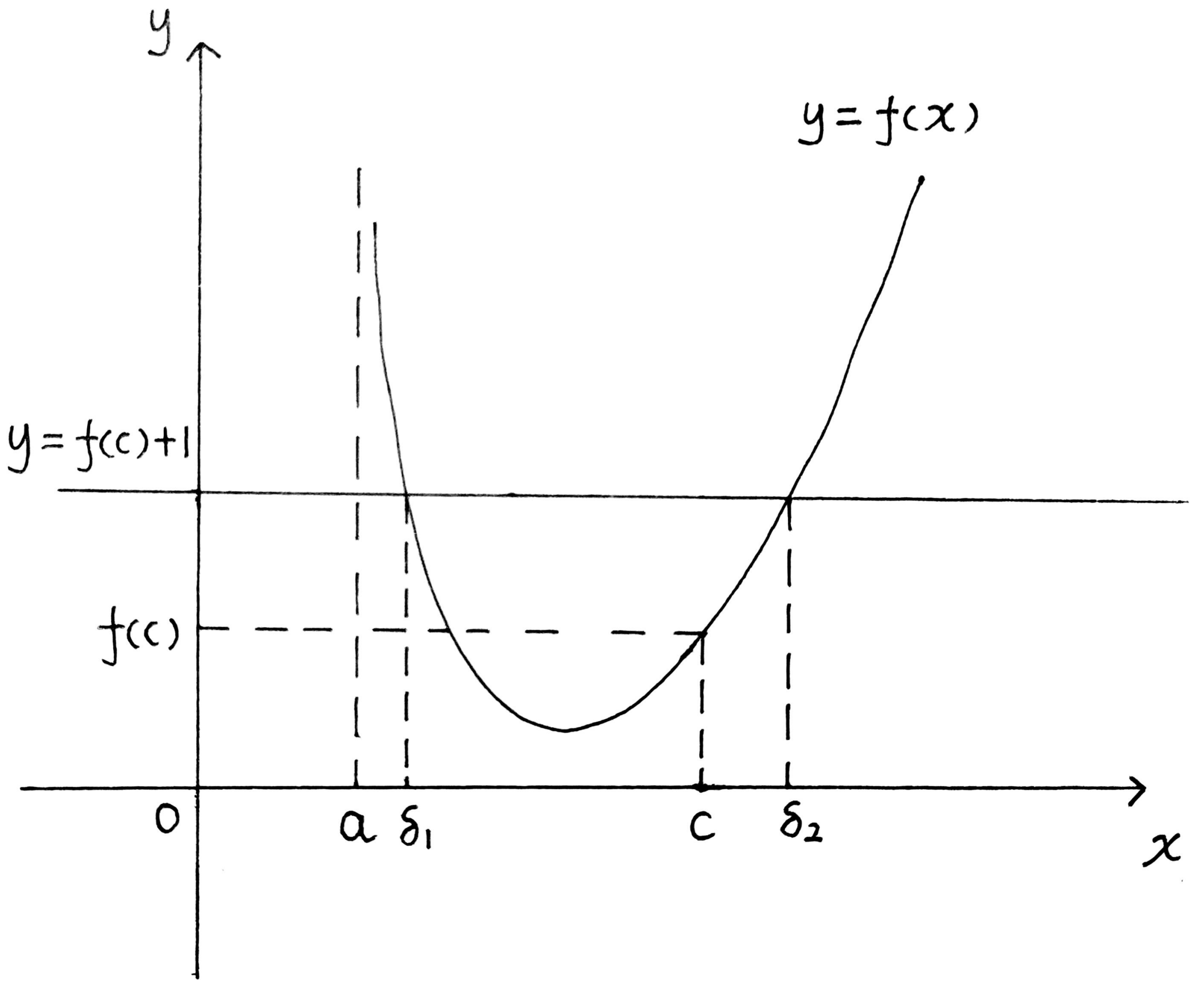
$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+}\arctan f(x)=\frac{\pi}{2}=g(a)\text{且}\lim_{x\to b^-} g(x)=\lim_{x\to b^-}\arctan f(x)=\frac{\pi}{2}=g(b)$$

$\Rightarrow g(x)$在$[a,b]$上连续且$g(a)=g(b)$

$\Rightarrow$由罗尔定理$\exists\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=0\Rightarrow\dfrac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}=0\Rightarrow f'(\xi)=0$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$



取$c\in(a,b)$

$\exists x_1\in(a,c)$，使得$f(x_1)>f(c)+1$

$f(x_1)>f(c)+1>f(c)$

$\Rightarrow$由介值定理$\exists\delta_1\in(x_1,c)$，使得$f(\delta_1)=f(c)+1$

$\exists x_2\in(c,+\infty)$，使得$f(x_2)>f(c)+1$

$f(x_2)>f(c)+1>f(c)$

$\Rightarrow$由介值定理$\exists\delta_2\in(c,x_2)$，使得$f(\delta_2)=f(c)+1$

$\Rightarrow f(\delta_1)=f(\delta_2)$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

值域定义域无界的$f(x)\to$值域定义域有界的$\arctan f(\tan x)$

$$(a,+\infty)\to(\arctan a,\frac{\pi}{2})\text{且}\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to\arctan a^+}\arctan f(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan f(\tan x)=\frac{\pi}{2}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x=\arctan a\\ \arctan f(\tan x) & x\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})\\ \frac{\pi}{2} & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

将函数定义域的无界区间转化成有界区间
将函数值域的无界区间转化成有界区间

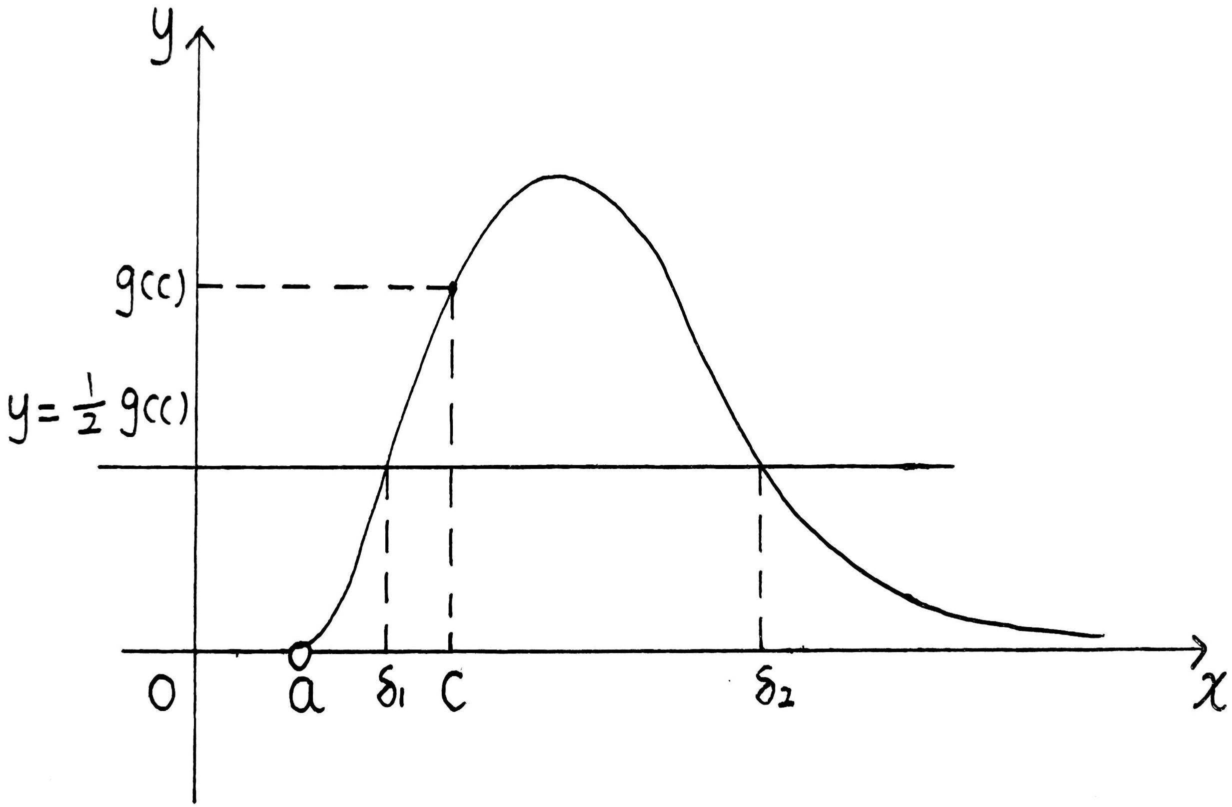
$$\lim_{x\to\arctan a^+} g(x)=\lim_{x\to\arctan a^+}\arctan f(\tan x)=\frac{\pi}{2}=g(\arctan a)\text{且}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan f(\tan x)=\frac{\pi}{2}=g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow g(x)\text{在}[\arctan a,\frac{\pi}{2}]\text{上连续且}g(\arctan a)=g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow\text{由罗尔定理}\exists\delta\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})\text{，使得}g'(\delta)=0\Rightarrow\frac{f'(\tan\delta)\sec^2\delta}{1+f^2(\tan\delta)}=0\Rightarrow f'(\tan\delta)=0,\tan\delta\in(a,+\infty)$$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=s$，则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$



设$g(x)=f(x)-s\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

i.若存在 $c\in(a,+\infty)$，使得 $g(c)\neq0$，不妨设 $g(c)>0$

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0\Rightarrow \exists x_1\in(a,\ c)$，使得 $g(x_1)<\dfrac{1}{2}g(c)$

$\Rightarrow g(x_1)<\dfrac{1}{2}g(c)<g(c)$

$\Rightarrow$ 由介值定理 $\exists\delta_1\in(x_1,\ c)$，使得 $g(\delta_1)=\dfrac{1}{2}g(c)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0\Rightarrow \exists x_2\in(c,+\infty)$，使得 $g(x_2)<\dfrac{1}{2}g(c)$

$\Rightarrow g(x_2)<\dfrac{1}{2}g(c)<g(c)$

$\Rightarrow$ 由介值定理 $\exists\delta_2\in(c,\ x_2)$，使得 $g(\delta_2)=\dfrac{1}{2}g(c)$

$\Rightarrow g(\delta_1)=g(\delta_2)$

$\Rightarrow \exists\xi\in(\delta_1,\ \delta_2)$，使得 $g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=0$

ii.若不存在 $c\in(a,+\infty)$，使得 $g(c)\neq0$

$\Rightarrow g(x)\equiv0\Rightarrow g'(x)\equiv0\Rightarrow f'(x)\equiv0$

第四讲：中值问题 > 其他12种情形的罗尔定理

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$上可导$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=s$，则$\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

定义域无界的$f(x)\to$定义域有界的$f(\tan x)$

将函数定义域的无界区间转化成有界区间

$$(a,+\infty)\to(\arctan a,\frac{\pi}{2})$$

$$g(x)=\begin{cases} s & x=\arctan a \\ f(\tan x) & x\in(\arctan a,\frac{\pi}{2}) \\ s & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\arctan a^+}g(x)=\lim_{x\to\arctan a^+}f(\tan x)=s=g(\arctan a)\text{且}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(\tan x)=s=g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow g(x)\text{在}[\arctan a,\frac{\pi}{2}]\text{上连续且}g(\arctan a)=g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow\text{由罗尔定理}\exists\delta\in(\arctan a,\frac{\pi}{2})\text{，使得}g'(\delta)=0\Rightarrow\sec^2\delta\cdot f'(\tan\delta)=0\Rightarrow f'(\tan\delta)=0,\tan\delta\in(a,+\infty)$$

原函数法(也叫还原法)是基于罗尔定理的一个找原函数的方法

运用罗尔定理的过程

$$F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow s(\xi)=t(\xi)\Rightarrow\frac{s(\xi)}{r(\xi)}=\frac{t(\xi)}{r(\xi)}\text{或}r(\xi)s(\xi)=r(\xi)t(\xi)$$

原函数法就是该过程的一个逆过程，把$F(x)$找出来

首先将结论中的ξ换成x

$$\frac{s(x)}{r(x)}=\frac{t(x)}{r(x)}\text{或}r(x)s(x)=r(x)t(x)\Rightarrow s(x)=t(x)\Rightarrow s(x)-t(x)=0\Rightarrow\int(s(x)-t(x))dx=C$$

$\int(s(x)-t(x))dx$ 就是我们要构造的函数 $F(x)$

将结论中的ξ换成x，我们做这样的事情：等式两边同时除以或乘以一个式子，移项，积分

最终化成$F(x)=C$这样的式子，这里的$F(x)$就是我们要构造的函数

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

因为原函数法有积分的过程所以原函数法与解微分方程类似

原函数法与解微分方程的区别与联系

联系

可以通过解微分方程去求原函数

可以从微分方程的通解去求原函数

$$f'(x)-f(x)=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\ln|f(x)|=x+C'\Rightarrow|f(x)|=e^{C'}\cdot e^{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\pm e^{C'}\cdot e^{x}=Ce^{x}$$

区别1

$f'(x)-f(x)=0$

解微分方程$f(x)=Ce^{x}$

原函数法$e^{-x}f(x)=C$

区别2

$f''(x)-f'(x)=0$

解微分方程$f(x)=C_1e^{x}+C_2e^{0x}=C_1e^{x}+C_2$有两个任意常数

原函数法$e^{-x}f'(x)=C$或$f'(x)-f(x)=C$仅有一个任意常数

消C_2

$f(x)=C_1e^{x}+C_2$求导$\Rightarrow f'(x)=C_1e^{x}\Rightarrow e^{-x}f'(x)=C_1$

消C_1

$f(x)=C_1e^{x}+C_2\Rightarrow e^{-x}f(x)=C_1+C_2e^{-x}$

求导$\Rightarrow e^{-x}(f'(x)-f(x))=-C_2e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)-f(x)=-C_2$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

原函数不唯一

$f''(x)-f(x)=0$

视为二阶常系数线性微分方程

通解$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

消去一个任意常数$C_1 \Rightarrow e^{-x}(f(x)+f'(x))=2C_2$

消去一个任意常数$C_2 \Rightarrow e^{x}(f(x)-f'(x))=2C_1$

视为二阶可降阶的微分方程

$(f'(x))^2-(f(x))^2=C$

万能构造

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

$f''(x)-f(x)=0 \Rightarrow f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=0$

$\Rightarrow (f'(x)+f(x))'-(f'(x)+f(x))=0$

$G(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))$

$f''(x)-f(x)=0 \Rightarrow f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=0$

$\Rightarrow (f'(x)-f(x))'+(f'(x)-f(x))=0$

$G(x)=e^{x}(f'(x)-f(x))$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

原函数不唯一

$f''(x)-f(x)=0$

视为二阶常系数线性微分方程

通解$f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

消去一个任意常数$C_1\Rightarrow e^{-x}(f(x)+f'(x))=2C_2$

消去一个任意常数$C_2\Rightarrow e^{x}(f(x)-f'(x))=2C_1$

视为二阶可降阶的微分方程

$(f'(x))^2-(f(x))^2=C$

消C_1

$$\begin{cases} f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x} \\ f'(x)=-C_1e^{-x}+C_2e^{x} \end{cases}\Rightarrow f(x)+f'(x)=2C_2e^{x}$$

$$\Rightarrow e^{-x}(f(x)+f'(x))=2C_2$$

消C_2

$$\begin{cases} f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x} \\ f'(x)=-C_1e^{-x}+C_2e^{x} \end{cases}\Rightarrow f(x)-f'(x)=2C_1e^{x}$$

$$\Rightarrow e^{-x}(f(x)-f'(x))=2C_2$$

设$f'(x)=p$，$f(x)=y$

$$f''(x)=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy}-y=0\Rightarrow pdp-ydy=0$$

积分$\Rightarrow \frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}y^2=C\Rightarrow p^2-y^2=2C$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

原函数不唯一

$f''(x)+f(x)=0$

视为二阶常系数线性微分方程

通解$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$

消去一个任意常数$C_1 \Rightarrow f(x)\cos x-f'(x)\sin x=C_2$

消去一个任意常数$C_2 \Rightarrow f(x)\sin x+f'(x)\cos x=C_1$

视为二阶可降阶的微分方程

$(f'(x))^2+(f(x))^2=C$

消C_1

$$\begin{cases} f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x \\ f(x)=C_1\cos x-C_2\sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\cos x-f'(x)\sin x=C_2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=C_2$$

消C_2

$$\begin{cases} f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x \\ f(x)=C_1\cos x-C_2\sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)\sin x+f'(x)\cos x=C_1\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=C_1$$

设$f'(x)=p$，$f(x)=y$

$$f''(x)=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy}+y=0\Rightarrow pdp+ydy=0$$

积分$\Rightarrow \frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}y^2=C\Rightarrow p^2+y^2=2C$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设$h(x)$，$p(x)$在$[a, b]$上连续，$h(x)$在(a, b)上可导且$h(a)=h(b)=0$

证明：存在$\xi\in(a, b)$使得$h'(\xi)+h(\xi)p(\xi)=0$

将结论中ξ换成x

$$h'(x)+h(x)p(x)=0\Rightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}+p(x)=0\Rightarrow\int\frac{h'(x)}{h(x)}dx+\int p(x)dx=C_1$$

$$\Rightarrow\ln|h(x)|+\int p(x)dx=C_1\Rightarrow|h(x)|e^{\int p(x)dx}=e^{C_1}$$

$$\Rightarrow h(x)e^{\int p(x)dx}=\pm e^{C_1}=C$$

齐次一阶线性微分方程通解$h(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow h(x)e^{\int p(x)dx}=C$$

万能构造

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

比万能构造更一般的构造

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

非齐次一阶线性微分方程通解$h(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

$\Rightarrow h(x)e^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$

$\Rightarrow h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=C$

万能构造

将结论中的ξ换成x后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设$f(x)$，$g(x)$在$[a，b]$上有二阶导数且$g(x)$，$g''(x)\neq 0$，又$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

证明：存在$\xi\in(a，b)$，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$$\int uv''dx=\int u''vdx+uv'-u'v+C$$

$$\int(uv''-u''v)dx=uv'-u'v+C$$

将结论中ξ换成x

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x)}{g''(x)}\Rightarrow f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0\Rightarrow\int f(x)g''(x)dx-\int f''(x)g(x)dx=C_1$$

$$\int f(x)g''(x)dx-\int f''(x)g(x)dx=\int f(x)dg'(x)-\int g(x)df'(x)$$

$$=\left(f(x)g'(x)-\int g'(x)f'(x)dx\right)-\left(g(x)f'(x)-\int f'(x)g'(x)dx\right)$$

$$=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)+C_2$$

$$\Rightarrow f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=C_2-C_1=C$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数且$f(0)=f'(0)=0$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

$$\int uv''dx=\int u''vdx+uv'-u'v+C$$

$$\int (uv''-u''v)dx=uv'-u'v+C$$

$$f''(x)=\frac{2f(x)}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(x)(1-x)^2-2f(x)=0$$

积分$\Rightarrow \int\left(f''(x)(1-x)^2-2f(x)\right)dx=C_1$

$$\int\left(f''(x)(1-x)^2-2f(x)\right)dx=\int\left(f''(x)(1-x)^2-((1-x)^2)''f(x)\right)dx$$

$$=(1-x)^2f'(x)-((1-x)^2)'f(x)+C_2=(1-x)^2f'(x)-2(x-1)f(x)+C_2$$

$$\Rightarrow (1-x)^2f'(x)-2(x-1)f(x)=C_1-C_2=C$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f'(\xi)=\xi+\xi f^2(\xi)$

将结论中ξ换成x

$$f'(x)=x+xf^2(x)\Rightarrow f'(x)=x\left(1+f^2(x)\right)\Rightarrow\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=x\Rightarrow\arctan f(x)=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$\arctan f(x)-\frac{1}{2}x^2=C$$

构造函数$F(x)=\arctan f(x)-\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

将结论中的ξ换成x后如果形如$\varphi(f(x), f'(x), f''(x))=0$

可降阶的二阶微分方程

将结论中的ξ换成x后如果形如$\varphi(f(x), f'(x), f''(x))=0$

设$f'(x)=p$，$f(x)=y \Rightarrow f''(x)=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

$$\varphi(f(x), f'(x), f''(x))=0 \Rightarrow \varphi\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根

(2) 方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根　　(2017年数二)

$\exists\delta\in(0,1)$，使得 $\dfrac{f(\delta)}{\delta}<0\Rightarrow f(\delta)<0$ 由零点定理 $\exists\xi\in(\delta,1)$，使得 $f(\xi)=0$

$$f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0\Rightarrow yp\frac{dp}{dy}+p^2=0\Rightarrow\frac{dp}{p}+\frac{dy}{y}=0\Rightarrow \ln|p|+\ln|y|=C'$$

$\Rightarrow py=C$ 故构造函数 $R(x)=f'(x)f(x)$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0$$

$f(0)=f(\xi)\Rightarrow$ 由罗尔定理 $\exists\theta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\theta)=0$

$\Rightarrow R(0)=R(\theta)=R(\xi)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)+(f'(\xi)f(\xi))^2=0$

$$f''(x)+(f'(x)f(x))^2=0\Rightarrow p\frac{dp}{dy}+p^2y^2=0\Rightarrow\frac{dp}{p}+y^2dy=0$$

$$\Rightarrow\ln|p|+\frac{1}{3}y^3=C'\Rightarrow pe^{\frac{1}{3}y^3}=C$$

故构造函数 $R(x)=f'(x)e^{\frac{f^3(x)}{3}}$

$R(0)=R(1)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=0$ 且 $f'(x)>0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)f(\xi)=-1$

$$f''(x)+f(x)=-1\Rightarrow py\frac{dp}{dy}=-1\Rightarrow pdp+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}p^2+\ln|y|=C'\Rightarrow ye^{\frac{1}{2}p^2}=C$$

故构造函数 $R(x)=e^{\frac{1}{2}(f'(x))^2}f(x)$

$$R(0)=R(1)=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 原函数法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$ 且 $f'(x)>0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)+(f(\xi))^2=0$

$$f''(x)+(f(x))^2=0\Rightarrow p\frac{dp}{dy}+y^2=0\Rightarrow pdp+y^2dy=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{3}y^3=C$$

故构造函数 $R(x)=\frac{1}{2}(f'(x))^2+\frac{1}{3}(f(x))^3$

$R(0)=R(1)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

万能构造

将结论中的ξ换成 x 后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=0$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$

比万能构造更一般的构造

将结论中的ξ换成 x 后如果形如$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$

构造辅助函数$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

通解$h(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$

通解$h(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，$f(2)=2$，$f(1)=\frac{1}{2}$

证明：$\exists\xi\in(1,2)$，使得$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

$$f'(x)=\frac{2f(x)}{x}$$

$$f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0$$

$$\int-\frac{2}{x}dx=-2\ln x+C$$

构造函数$G(x)=f(x)e^{-2\ln x}=\frac{f(x)}{x^2}$

$$G(1)=G(2)=\frac{1}{2}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，$f(0)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得$2f'(\xi)=\tan\frac{\xi}{2}f(\xi)$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$2f'(x)=\tan\frac{x}{2}f(x)$$

$$f'(x)-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}f(x)=0$$

$$\int-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}dx=\int-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=\int\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}d\cos\frac{x}{2}=\ln\cos\frac{x}{2}+C$$

构造函数$G(x)=e^{\ln\cos\frac{x}{2}}f(x)=\cos\frac{x}{2}f(x)$ $\quad G(0)=G(\pi)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

$$f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$$

$$f''(x)-\frac{2}{1-x}f'(x)=0$$

$$\int -\frac{2}{1-x}dx=2\ln(1-x)+C$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

构造函数$G(x)=e^{2\ln(1-x)}f'(x)=(1-x)^2f'(x)$　　$G(1)=0$

由罗尔定理$\exists\delta\in(0,1)$，使得$f'(\delta)=0$　　$G(\delta)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$且当$x\in(0,1]$时，$f(x)>0$

证明：$\forall\alpha>0$，$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\dfrac{\alpha f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

$$\frac{\alpha f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}$$

$$f'(x)-\frac{f'(1-x)}{\alpha f(1-x)}f(x)=0$$

$$\int-\frac{f'(1-x)}{\alpha f(1-x)}dx=\int\frac{1}{\alpha f(1-x)}df(1-x)=\frac{1}{\alpha}\ln f(1-x)+C$$

构造函数$G(x)=e^{\frac{1}{\alpha}\ln f(1-x)}f(x)=f^{\frac{1}{\alpha}}(1-x)f(x)$

$$G(1)=G(0)=0$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导且$f(x)+f'(x)\neq 0$，$f(x)>1$

证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$\dfrac{f(\xi)-f'(\xi)}{f(\xi)+f'(\xi)}=e^{2\xi}$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+f'(x)}=e^{2x}$$

$$\Rightarrow f(x)-f'(x)=e^{2x}(f(x)+f'(x))\Rightarrow(e^{2x}+1)f'(x)+(e^{2x}-1)f(x)=0\Rightarrow f'(x)+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}f(x)=0$$

$$\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx=\int\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}d(e^{x}+e^{-x})=\ln(e^{x}+e^{-x})+C$$

构造函数$F(x)=e^{\ln(e^{-x}+e^{x})}f(x)=(e^{-x}+e^{x})f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty\Rightarrow\exists\xi\in(-\infty,+\infty)\text{使得}F'(\xi)=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导且有界，$f'(x)\neq f(x)$

证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$\dfrac{f'(\xi)+f(\xi)}{f(\xi)-f'(\xi)}=e^{2\xi}$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)+f'(x)}{f(x)-f'(x)}=e^{2x}\Rightarrow f(x)+f'(x)=e^{2x}(f(x)-f'(x))\Rightarrow\left(1+e^{2x}\right)f'(x)+\left(1-e^{2x}\right)f(x)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)+\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}f(x)=0$$

$$\int\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}dx=\int\frac{-1}{e^{-x}+e^{x}}d\left(e^{-x}+e^{x}\right)=-\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)+C$$

构造函数$F(x)=e^{-\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)}f(x)=\dfrac{f(x)}{e^{-x}+e^{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0\Rightarrow\exists\xi\in(-\infty,+\infty)\text{使得}F'(\xi)=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\frac{\pi}{2})$内可导，$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}$

证明：$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$f'(\xi)-f(\xi)=\sin\xi$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$f'(x)-f(x)=\sin x$$

$$\int -1dx=-x+C$$

$$\int e^{-x}\sin xdx=-e^{-x}\frac{\cos x+\sin x}{2}+C$$

构造函数$G(x)=e^{-x}f(x)+e^{-x}\frac{\cos x+\sin x}{2}=e^{-x}\left(f(x)+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)$

$$G(0)=G(\frac{\pi}{2})=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$

求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

$$h'(x)+p(x)h(x)=0$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

$$h'(x)+p(x)h(x)=q(x)$$

$$G(x)=h(x)e^{\int p(x)\,dx}-\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx$$

$$xf''(x)+(1+x)f'(x)=1+x$$

$$f''(x)+\frac{1+x}{x}f'(x)=\frac{1+x}{x}$$

$$\int\frac{1+x}{x}dx=\ln x+x+C$$

$$\int\frac{1+x}{x}e^{\ln x+x}dx=\int(1+x)e^{x}dx=xe^{x}+C$$

构造函数$G(x)=e^{\ln x+x}f'(x)-xe^{x}=xe^{x}(f'(x)-1)$　　　$G(0)=0$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta\in(0,1)$，使得$f'(\delta)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$　　　$G(\delta)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

两次运用罗尔定理的情形

将结论中的ξ换成x后如果形如$h''(x)+2r(x)h'(x)+\left(r'(x)+r^2(x)\right)h(x)=0$

我们可以构造函数$F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$

$$\left(e^{\int r(x)dx}h(x)\right)''=e^{\int r(x)dx}\left[h''(x)+2r(x)h'(x)+\left(r'(x)+r^2(x)\right)h(x)\right]$$

只要原函数是两个函数的乘积的形式，那么此构造都是可行的！

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$f(x)$至少有三个零点

证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f''(\xi)+2\xi^2 f'(\xi)+\left(\xi^4+2\xi\right)f(\xi)=0$

$$h''(x)+2r(x)h'(x)+\left(r'(x)+r^2(x)\right)h(x)=0,\quad F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$$

$$f''(x)+2x^2 f'(x)+\left(x^4+2x\right)f(x)=0$$

$$\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+C$$

构造函数$F(x)=e^{\frac{x^3}{3}}f(x)$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$内有二阶导数，证明：存在$\xi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$使得

$$(f''(\xi)-2f'(\xi)-f(\xi))\sin\xi+(f''(\xi)+2f'(\xi)-f(\xi))\cos\xi=0$$

$$h''(x)+2r(x)h'(x)+\left(r'(x)+r^2(x)\right)h(x)=0,\quad F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$$

$$(f''(x)-2f'(x)-f(x))\sin x+(f''(x)+2f'(x)-f(x))\cos x=0$$

$$(\sin x+\cos x)f''(x)+2(\cos x-\sin x)f'(x)-(\sin x+\cos x)f(x)=0$$

$$f''(x)+\frac{2(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}f'(x)-f(x)=0$$

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{\sin x+\cos x}d(\sin x+\cos x)=\ln(\sin x+\cos x)+C$$

构造函数$F(x)=e^{\ln(\sin x+\cos x)}f(x)=(\sin x+\cos x)f(x)$

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})f(x)\quad F(-\frac{\pi}{4})=F(\frac{3\pi}{4})=F(\frac{7\pi}{4})=0$$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 构造通法

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导且有界，$f'(x)\neq f(x)$，$f(0)=0$

证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$\left(e^{-2\xi}+e^{2\xi}+2\right)f''(\xi)+2\left(e^{-2\xi}-e^{2\xi}\right)f'(\xi)+\left(e^{-2\xi}+e^{2\xi}-6\right)f(\xi)=0$

$h''(x)+2r(x)h'(x)+\left(r'(x)+r^2(x)\right)h(x)=0$，$F(x)=e^{\int r(x)dx}h(x)$

$$\left(e^{-2x}+e^{2x}+2\right)f''(x)+2\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)f'(x)+\left(e^{-2x}+e^{2x}-6\right)f(x)=0$$

$$f''(x)+\frac{2\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)}{e^{-2x}+e^{2x}+2}f'(x)+\frac{e^{-2x}+e^{2x}-6}{e^{-2x}+e^{2x}+2}f(x)=0$$

$$\int\frac{e^{-2x}-e^{2x}}{e^{-2x}+e^{2x}+2}dx=\int\frac{\left(e^{-x}-e^{x}\right)\left(e^{-x}+e^{x}\right)}{\left(e^{-x}+e^{x}\right)^2}dx=\int\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}dx=\int\frac{-1}{e^{-x}+e^{x}}d\left(e^{-x}+e^{x}\right)=-\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)+C$$

构造函数$F(x)=e^{-\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)}f(x)=\dfrac{f(x)}{e^{-x}+e^{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(0)=0$$

常数K值法适用情形

结论中含有中值的部分能分离

第一类常数K值法

第一步：将中值部分用常数K替换得到的式子*

第二步：将式子*中的某个常数s换成变量x，进行移项，除以或乘以某一个$h(x)$，得到$F(x)=0$

第三步：构造函数$F(x)$

第一类常数K值法是基于罗尔定理的一个找原函数的方法

实际上这个构造过程产生出了$F(s)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第一类常数K值法

$f(x)$在$[a，b]$上有二阶导数，证明：对于$\forall x\in(a，b)$，存在$\xi\in(a，b)$，使得

$$\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

$$\frac{1}{x-b}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=K$$

把x换成t $\Rightarrow \frac{1}{t-b}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=K$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-b}\left[\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]-K=0\Rightarrow f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)-K(t-a)(t-b)=0$$

构造函数$F(t)=f(t)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)-K(t-a)(t-b)$

$F(a)=F(x)=F(b)=0$

$\Rightarrow$由罗尔定理$\exists\delta_1\in(a，x)$，$\delta_2\in(x，b)$

使得$F'(\delta_1)=0$，$F'(\delta_2)=0\Rightarrow F'(\delta_1)=F'(\delta_2)$

$\Rightarrow$由罗尔定理$\exists\xi\in(\delta_1，\delta_2)$，使得$F''(\xi)=0$即$f''(\xi)-2K=0\Rightarrow K=\frac{1}{2}f''(\xi)$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第一类常数K值法

设$f(x)$在点a的某个领域具有二阶导数，证明：对充分小的h存在$\theta\in[0,1)$，使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$$

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=K$$

把h换成x $\Rightarrow\frac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}=K\Rightarrow\frac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}-K=0\Rightarrow f(a+x)+f(a-x)-2f(a)-x^2K=0$

构造函数$F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a)-x^2K$

$F(-h)=F(0)=F(h)=0$

$\Rightarrow$由罗尔定理$\exists\delta_1\in(-h,0)$，$\delta_2\in(0，h)$

使得$F'(\delta_1)=0$，$F'(\delta_2)=0\Rightarrow F'(\delta_1)=F'(\delta_2)$

$\Rightarrow$由罗尔定理$\exists\xi\in(\delta_1，\delta_2)$，使得$F''(\xi)=0$即$f''(a+\xi)+f''(a-\xi)-2K=0$

i.若$\xi\geq0$　取$\theta=\frac{\xi}{h}$则$0\leq\theta<1$且$f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)-2K=0$　　　$\xi\in(\delta_1，\delta_2)\Rightarrow\xi\in(-h，h)$

ii.若$\xi<0$　取$\theta=\frac{-\xi}{h}$则$0<\theta<1$且$f''(a-\theta h)+f''(a+\theta h)-2K=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第一类常数K值法

$f(x)$在区间(x_1, x_n)内存在n阶导数，在区间$[x_1, x_n]$上连续，且存在n个不同的点$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

使得$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$，证明：对于任意的$c \in (x_1, x_n)$，必存在相应的$\xi \in (x_1, x_n)$

使得$f(c) = \dfrac{1}{n!}(c-x_1)(c-x_2)\cdots(c-x_n)f^{(n)}(\xi)$

$$f(c) = \frac{1}{n!}(c-x_1)(c-x_2)\cdots(c-x_n)K$$

把c换成x $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)K \Rightarrow f(x) - \dfrac{1}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)K = 0$

构造函数$F(x) = f(x) - \dfrac{1}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)K$

$$F(x_1) = F(x_2) = \cdots = F(x_n) = F(c) = 0$$

i.若c等于$x_1, x_2, \cdots, x_n$中某一个

ii.若c不等于$x_1, x_2, \cdots, x_n$中任一个

利用n次罗尔定理可得到$\exists \xi \in (x_1, x_n)$，使得$F^{(n)}(\xi) = 0$即$f^{(n)}(\xi) - K = 0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = K$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第二类常数K值法

第二类常数K值法能处理第一类常数K值法所处理不了的情形

第二类常数K值法

第一步：将中值部分用常数K替换得到的式子 *

第二步：对式子 * 进行移项，除以或乘以某一个常数，得到$F(a)=F(b)$

第三步：构造函数$F(x)$

第二类常数K值法是基于罗尔定理的一个找原函数的方法

实际上这个构造过程产生出了$F(a)=F(b)$即使用罗尔定理的条件

第一类常数K值法

第一步：将中值部分用常数K替换得到的式子 *

第二步：将式子 * 中的某个常数s换成变量x，进行移项，除以或乘以某一个$h(x)$，得到$F(x)=0$

第三步：构造函数$F(x)$

第一类常数K值法是基于罗尔定理的一个找原函数的方法

实际上这个构造过程产生出了$F(s)=0$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第二类常数K值法

$b>a>0$，设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导

证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得$\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

用K替换结论中的$f(\xi)-\xi f'(\xi)$

得到$\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=K$

将b换成x

$$\Rightarrow\frac{af(x)-xf(a)}{a-x}=K\Rightarrow af(x)-xf(a)=K(a-x)\Rightarrow af(x)-xf(a)-K(a-x)=0$$

构造辅助函数$F(x)=af(x)-bf(a)-K(a-x)$

$\because F(a)=F(b)=0$

$\therefore\exists\xi\in(a, b)$，使得$F'(\xi)=0\Rightarrow af'(\xi)-f(a)+K=0$

$\Rightarrow K=f(a)-af'(\xi)$与结论不一致，第一类常数K值法失效了

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第二类常数K值法

$b>a>0$，设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导

证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得$\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

用K替换结论中的$f(\xi)-\xi f'(\xi)$

得到$\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=K\Rightarrow\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=K\Rightarrow af(b)-bf(a)=aK-bK$

$\Rightarrow af(b)-aK=bf(a)-bK\Rightarrow\dfrac{f(b)-K}{b}=\dfrac{f(a)-K}{a}$

构造辅助函数$F(x)=\dfrac{f(x)-K}{x}$

$\because F(a)=F(b)$

$\therefore\exists\xi\in(a, b)$，使得$F'(\xi)=0\Rightarrow\dfrac{\xi f'(\xi)-(f(\xi)-K)}{\xi^{2}}=0\Rightarrow K=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

第四讲：中值问题 > 罗尔定理 > 第二类常数K值法

$b>a>0$，设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)上可导

证明：$\exists \xi \in (a, b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

用K替换结论中的$\xi^2 f'(\xi)$

得到$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{K}{ab}$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{K}{a}-\frac{K}{b} \Rightarrow f(b)+\frac{K}{b}=f(a)+\frac{K}{a}$$

构造辅助函数$F(x)=f(x)+\dfrac{K}{x}$

$\because F(a)=F(b)$

$\therefore \exists \xi \in (a, b)$，使得$F'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)-\dfrac{K}{\xi^2}=0 \Rightarrow K=\xi^2 f'(\xi)$

一般能用第二类常数K值法做的题也能用柯西中值定理来做

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

设$f(x)$在$[a，b]$上连续，在$(a，b)$内可导，且$f(a)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$，证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得$f'(\xi)=0$

闭区间的积分中值定理

如果函数$f(x)$在积分区间$[a，b]$上连续，则至少存在一点$\delta\in[a，b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\delta)$

开区间的积分中值定理

如果函数$f(x)$在积分区间$[a，b]$上连续，则至少存在一点$\delta\in(a，b)$，使得$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\delta)$

由闭区间的积分中值定理$\exists\delta\in[a，b]$使得$f(\delta)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow f(\delta)=f(a)$　　δ可能等于a

设$F(x)=\int_a^x f(x)dx\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta\in(a，b)$，使得$F'(\delta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(a)\Rightarrow f(\delta)=f(a)$

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

设$f(x)$在$[a，b]$上连续，在$(a，b)$内可导，且$f(a)=f(b)=1$

证明：$\exists\xi，\eta\in(a，b)$，使得$e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$

将两个中值分离开

$$e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=\frac{e^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]}{e^{\xi}}=\frac{\left.(e^{x}f(x))'\right|_{x=\eta}}{\left.(e^{x})'\right|_{x=\xi}}$$

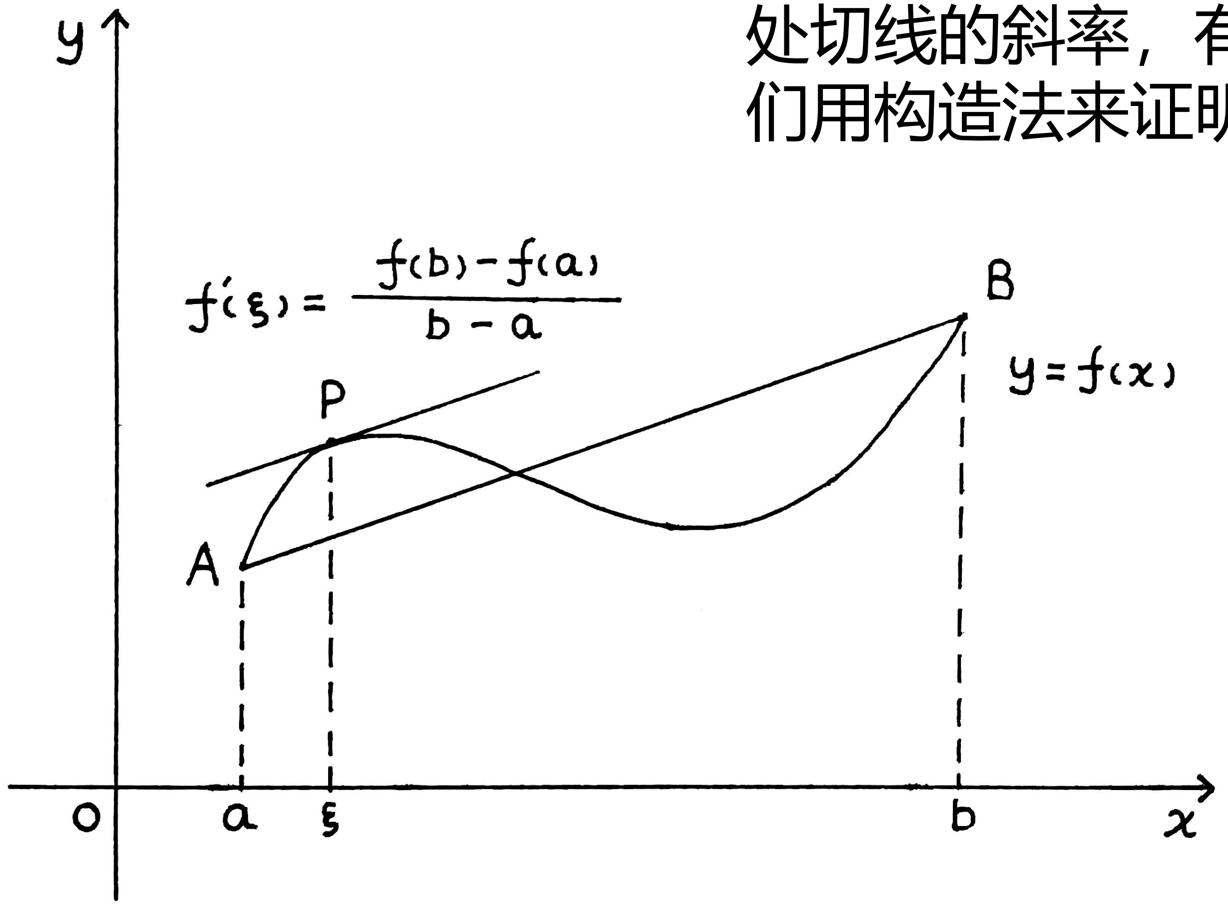
$$\exists\eta\in(a，b)\text{使得}\left.(e^{x}f(x))'\right|_{x=\eta}=\frac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}$$

$$\exists\xi\in(a，b)\text{使得}\left.(e^{x})'\right|_{x=\xi}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$$

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

几何意义：$A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$是$y=f(x)$上的两点，存在一异于A和B的点$P(\xi, f(\xi))$，$a<\xi<b$满足$y=f(x)$在点P处的切线的斜率等于弦AB的斜率

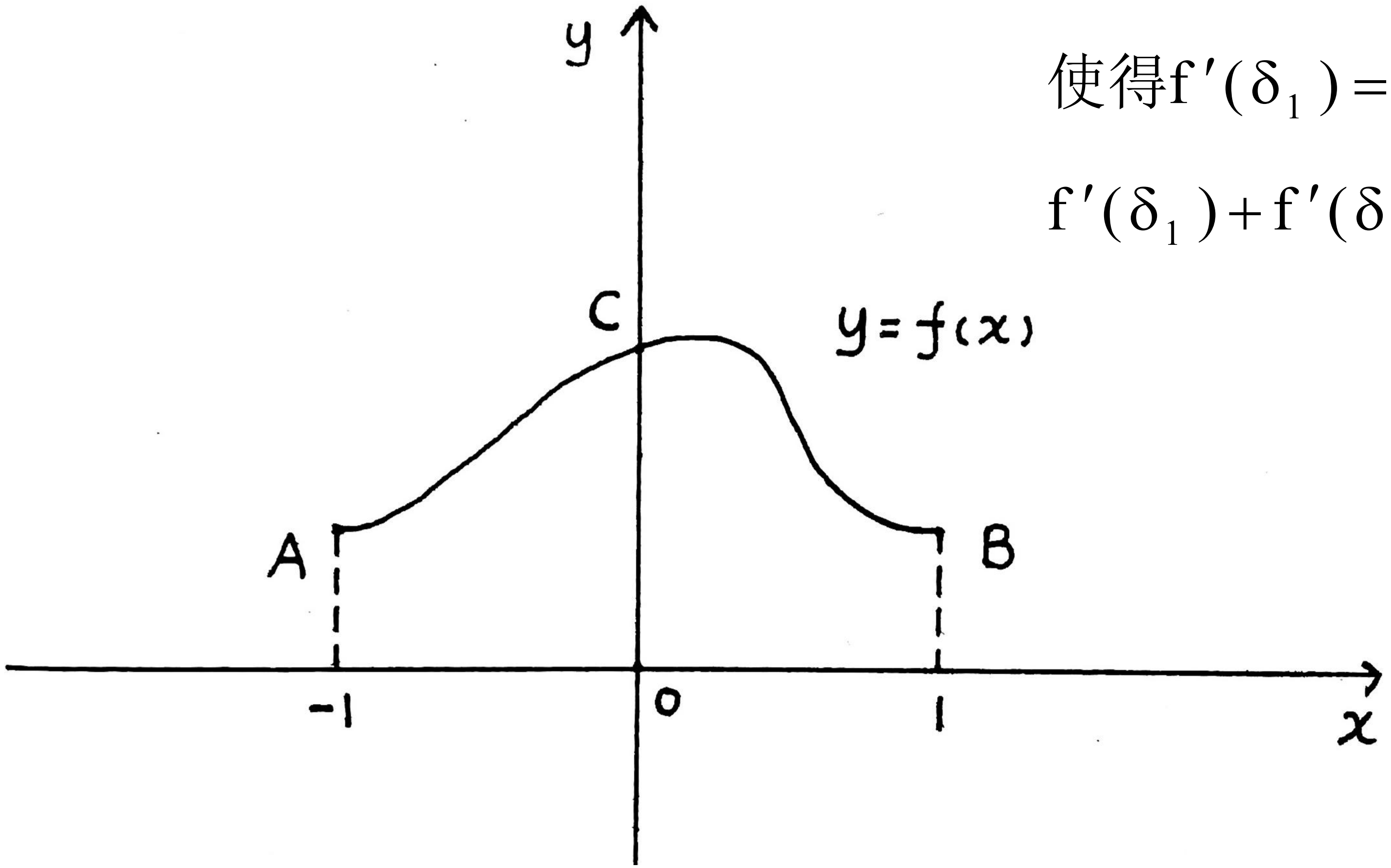
基于这一几何意义，函数在某一点的导数即函数在某一点处切线的斜率，有时可以看作某一条弦的斜率，这对于我们用构造法来证明存在性问题有一定帮助



第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

已知函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，且$f(-1)=f(1)$

证明：存在两个不同的点δ_1，$\delta_2\in(-1,1)$，使得$f'(\delta_1)+f'(\delta_2)=0$



由拉格朗日中值定理$\exists\delta_1\in(-1,0)$，$\delta_2\in(0,1)$

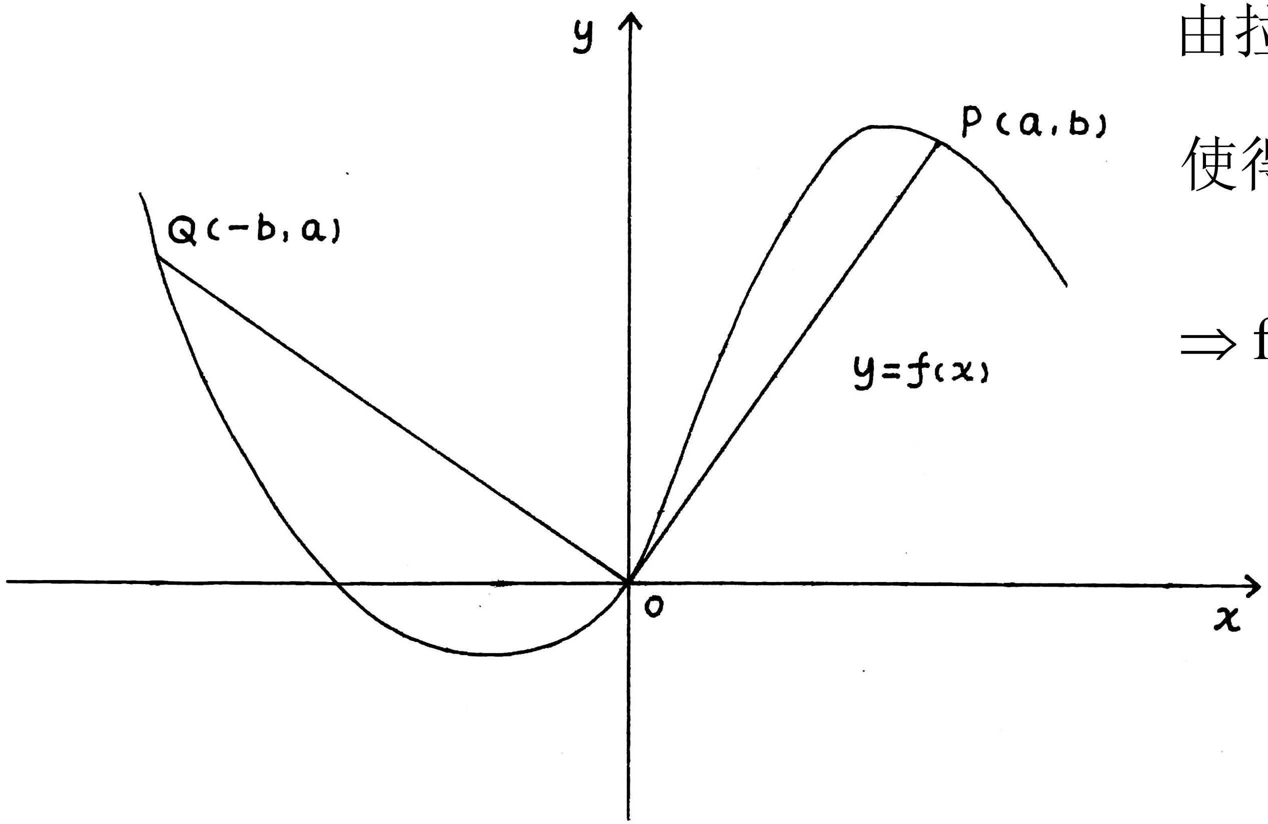
使得$f'(\delta_1)=\dfrac{f(-1)-f(0)}{-1-0}$，$f'(\delta_2)=\dfrac{f(0)-f(1)}{0-1}$

$f'(\delta_1)+f'(\delta_2)=f(0)-f(-1)+f(1)-f(0)=0$

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

已知函数$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可导，$f(-b)=a$，$f(a)=b$，$f(0)=0$，a，$b>0$

证明：存在两个不同的点δ_1，$\delta_2\in(-b, a)$，使得$f'(\delta_1)f'(\delta_2)=-1$



由拉格朗日中值定理$\exists\delta_1\in(-b,0)$，$\delta_2\in(0, a)$

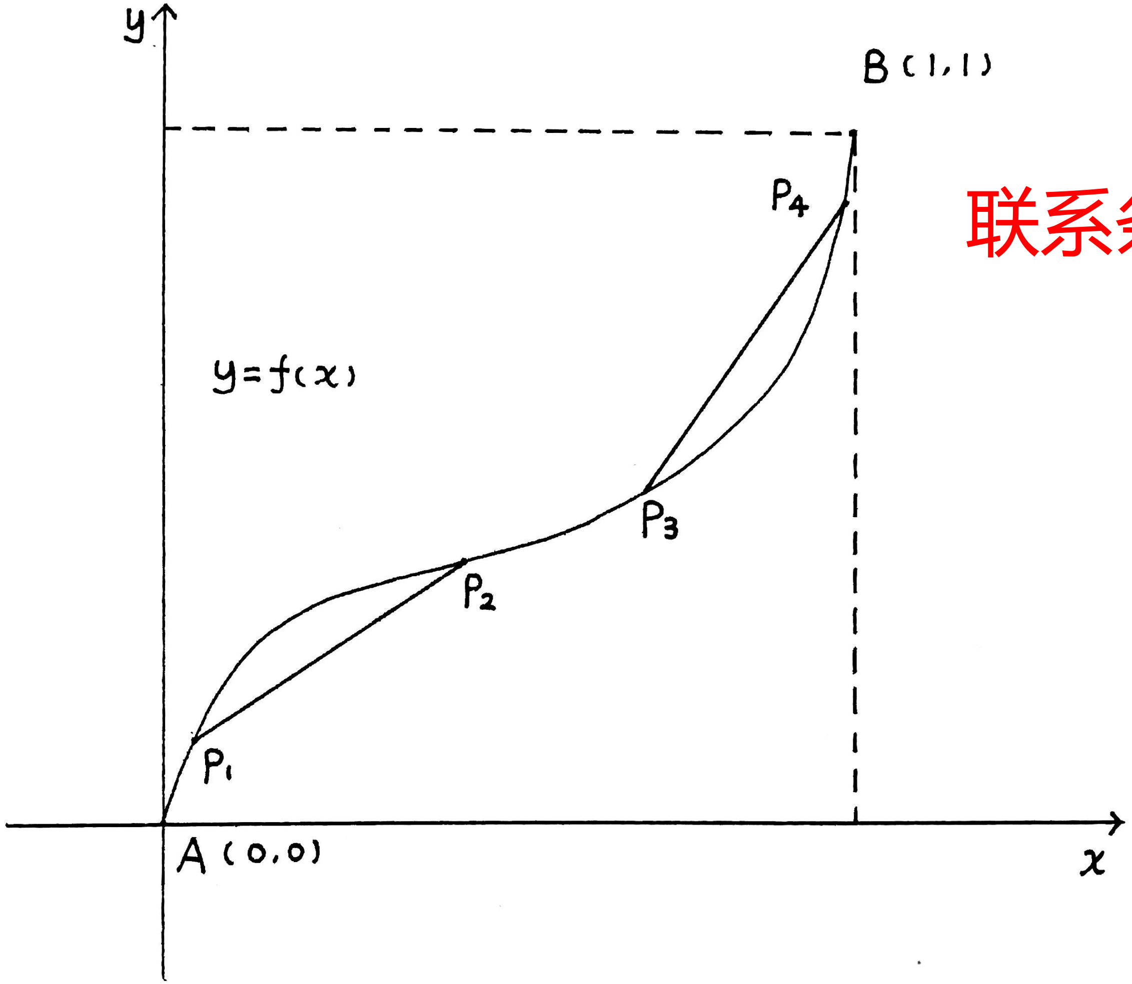
使得$f'(\delta_1)=\dfrac{f(0)-f(-b)}{0-(-b)}$，$f'(\delta_2)=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$

$$\Rightarrow f'(\delta_1)f'(\delta_2)=\frac{-a}{b}\cdot\frac{b}{a}=-1$$

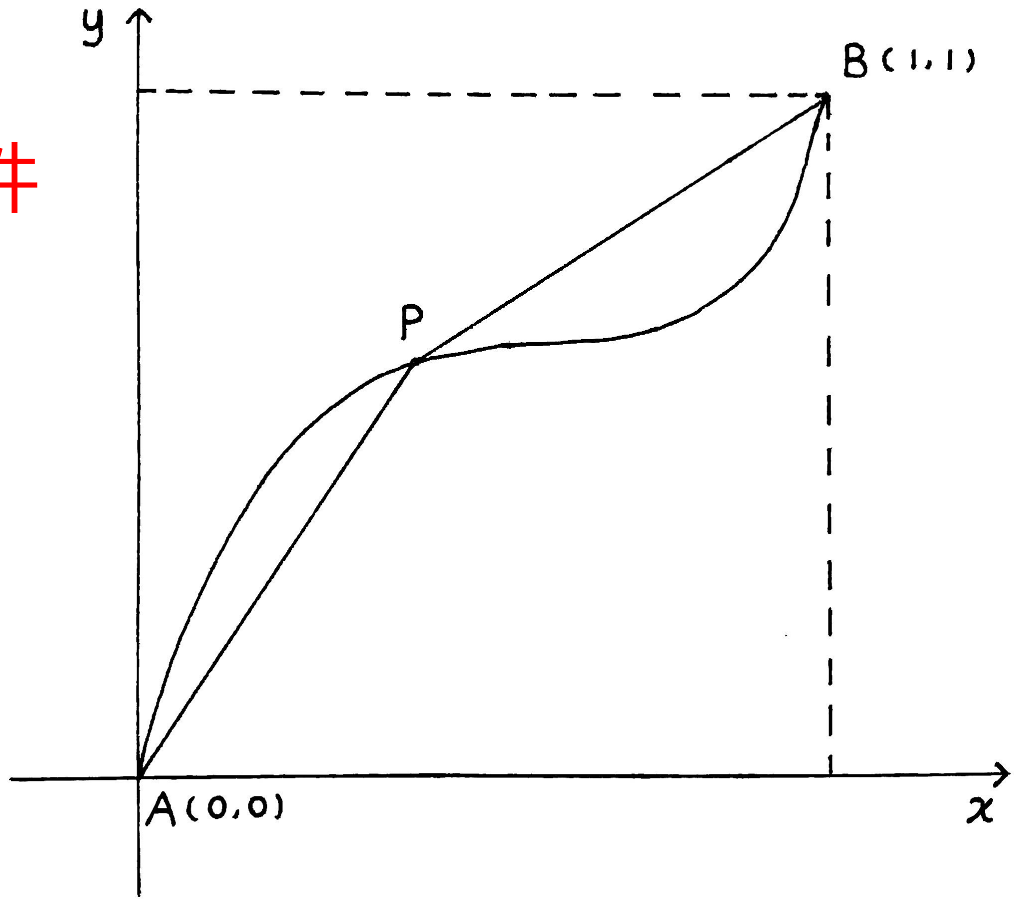
第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：存在两个不同的点δ_1，$\delta_2 \in (0,1)$，使得$f'(\delta_1)f'(\delta_2)=1$



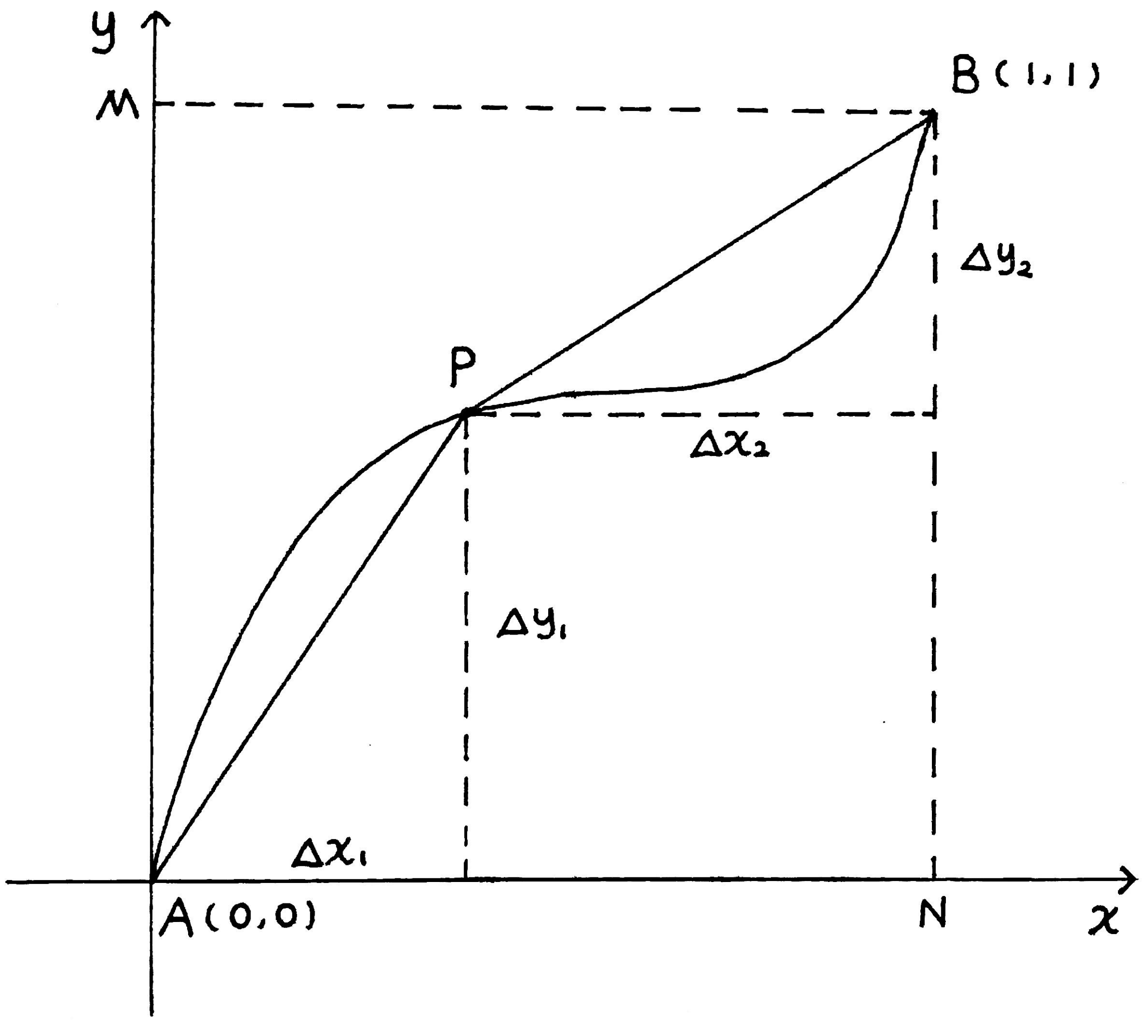
联系条件



第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：存在两个不同的点δ_1，$\delta_2\in(0,1)$，使得$f'(\delta_1)f'(\delta_2)=1$



$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\cdot\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=1\Rightarrow\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{\Delta x_2}{\Delta y_2}$$

$\Rightarrow\angle PAN=\angle PBN$

$\Rightarrow P$在直线MN上$\Rightarrow P$是$y=f(x)$与$y=1-x$的交点

$F(x)=f(x)-(1-x)$

$F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$

$\Rightarrow$由零点定理$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0$

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：存在两个不同的点δ_1，$\delta_2\in(0,1)$，使得$f'(\delta_1)f'(\delta_2)=1$

设$F(x)=f(x)-(1-x)$

$F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$

由零点定理$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=1-\xi$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta_1\in(0，\xi)$，$\delta_2\in(\xi,1)$

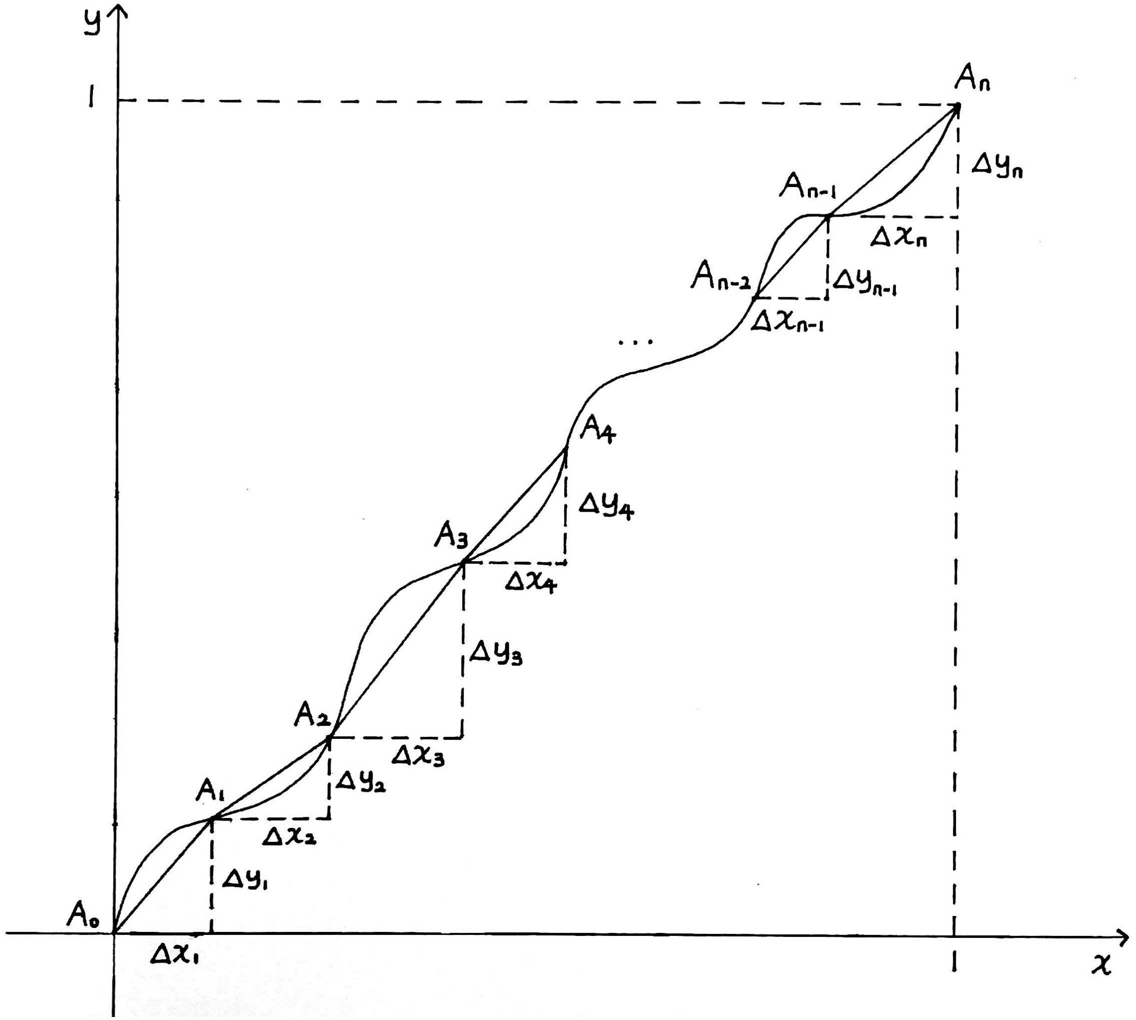
使得$f'(\delta_1)=\dfrac{f(0)-f(\xi)}{0-\xi}$，$f'(\delta_2)=\dfrac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1}$

$$f'(\delta_1)f'(\delta_2)=\frac{f(0)-f(\xi)}{0-\xi}\cdot\frac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1}=1$$

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n为n个正数且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$

证明：在区间$(0,1)$内存在一组互不相等的数ξ_1，$\xi_2,\cdots$，ξ_n使得$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{f'(\xi_k)}=1$



$$\frac{\Delta x_1}{\Delta y_1}\cdot\lambda_1+\frac{\Delta x_2}{\Delta y_2}\cdot\lambda_2+\cdots+\frac{\Delta x_n}{\Delta y_n}\cdot\lambda_n=1$$

令$\Delta y_k=\lambda_k$，$k=1,2,\cdots$，n

设y_k是点A_k的纵坐标，$k=1,2,\cdots$，n

$y_k=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$，$k=1,2,\cdots$，$n$

第四讲：中值问题 > 拉格朗日中值定理

$0<\lambda_1<1 \Rightarrow$ 由介值定理$\exists x_1 \in (0,1)$，使得$f(x_1)=\lambda_1$

$\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1 \Rightarrow$ 由介值定理$\exists x_2 \in (x_1,1)$，使得$f(x_1)=\lambda_1+\lambda_2$

依次下去，我们可以得到一组点$0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<1$

使得$f(x_k)=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$，$k=1,\cdots,n-1$

补充定义$x_0=0$，$x_n=1 \Rightarrow f(x_n)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$

由拉格朗日中值定理$\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$使得

$$f'(\xi_k)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=\frac{\lambda_k}{x_k-x_{k-1}},\quad k=1,\cdots,n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{f'(\xi_k)}=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=x_n-x_0=1$$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理

$b>a>0$，设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

$$\xi^2 f'(\xi)=\frac{f'(\xi)}{\xi^{-2}}=\left.\frac{f'(x)}{(-x^{-1})'}\right|_{x=\xi}$$

$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\left.\dfrac{f'(x)}{(-x^{-1})'}\right|_{x=\xi}=\dfrac{f(b)-f(a)}{-b^{-1}-(-a^{-1})}$

设$f(x)$在$[a，b]$上连续，在$(a，b)$内可导，且$f'(x)\neq 0$

证明：$\exists\xi，\eta\in(a，b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

$$f'(\xi)=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}f'(\eta)=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

将两个中值分离开
将含有相同中值的部分放到一起

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\left.\frac{f'(x)}{(e^x)'}\right|_{x=\eta}$$

$\exists\eta\in(a，b)$使得$\left.\dfrac{f'(x)}{(e^x)'}\right|_{x=\eta}=\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$　　$\exists\xi\in(a，b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理

设$f(x)$在$[a，b]$上连续，在$(a，b)$内可导，$0\le a<b<\dfrac{\pi}{2}$

证明：$\exists\xi，\eta\in(a，b)$，使得$f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$

$$\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$$

将两个中值分离开

将含有相同中值的部分放到一起

$$\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}=\left.\frac{f'(x)}{(-\cos x)'}\right|_{x=\eta}\qquad \frac{f'(\xi)}{\cos\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(\sin x)'}\right|_{x=\xi}$$

$\exists\eta\in(a，b)$使得$\left.\dfrac{f'(x)}{(-\cos x)'}\right|_{x=\eta}=\dfrac{f(b)-f(a)}{-\cos b-(-\cos a)}$ $\exists\xi\in(a，b)$使得$\left.\dfrac{f'(x)}{(\sin x)'}\right|_{x=\xi}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}$

$$\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\Big/\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}=\frac{\sin b-\sin a}{\cos a-\cos b}=\frac{2\cos\dfrac{b+a}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}}{2\sin\dfrac{b+a}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}}=\frac{1}{\tan\dfrac{b+a}{2}}$$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导

证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$T(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$ $\qquad$ $T'(x)=f'(x)-f'(a)$

$S(x)=g(x)-g(a)-(x-a)g'(a)$ $\qquad$ $S'(x)=g'(x)-g'(a)$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\frac{T(b)}{S(b)}=\frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)}=\frac{T'(\delta)}{S'(\delta)}=\frac{f'(\delta)-f'(a)}{g'(\delta)-g'(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

$a<\delta<b$ $\qquad$ $a<\xi<\delta$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a，b]$ 上二阶可导

证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

常数K值法

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=K\xrightarrow{\text{将 b 换成 x}}\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{g(x)-g(a)-(x-a)g'(a)}=K$$

$$\xrightarrow{\text{式子变形}}f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-K(g(x)-g(a)-(x-a)g'(a))=0$$

构造函数 $R(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-K(g(x)-g(a)-(x-a)g'(a))$

$R(a)=R(b)=0$

由罗尔定理 $\exists\delta\in(a，b)$，使得 $R'(\delta)=0\Rightarrow f'(\delta)-f'(a)-K(g'(\delta)-g'(a))=0$

$$\Rightarrow\frac{f'(\delta)-f'(a)}{g'(\delta)-g'(a)}=K$$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上三阶可导

证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}=f'''(\xi)$$

$$T(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x)) \qquad S(x)=-\frac{1}{12}(x-a)^3$$

$$T'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{1}{2}(x-a)f''(x) \qquad S'(x)=-\frac{1}{4}(x-a)^2$$

$$T''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x) \qquad S''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)$$

$$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))}{-\frac{1}{12}(b-a)^3}=\frac{T(b)}{S(b)}=\frac{T(b)-T(a)}{S(b)-S(a)}=\frac{T'(\delta)}{S'(\delta)}=\frac{T'(\delta)-T'(a)}{S'(\delta)-S'(a)}=\frac{T''(\xi)}{S''(\xi)}=f'''(\xi)$$

$a<\delta<b$ $\qquad a<\xi<\delta$

第四讲：中值问题 > 柯西中值定理 > 两次利用的情形

设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上三阶可导

证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)(f'(a)+f'(b))-\frac{1}{12}(b-a)^3 K$$

$$\xrightarrow{\text{将 b 换成 x 移项}} f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{12}(x-a)^3 K=0$$

构造函数 $R(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)(f'(a)+f'(x))+\frac{1}{12}(x-a)^3 K \qquad R(a)=R(b)=0$

由罗尔定理 $\exists\delta\in(a，b)$，使得 $R'(\delta)=0$

$$R'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{1}{2}(x-a)f''(x)+\frac{1}{4}(x-a)^2 K \qquad R'(a)=0$$

由罗尔定理 $\exists\xi\in(a，\delta)$，使得 $R''(\xi)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi)+\frac{1}{2}(\xi-a)K=0$

$$\Rightarrow f'''(\xi)=K$$

第四讲：中值问题 > 达布定理

达布定理：设$f(x)$在$[a, b]$上可导且$f'(a)\neq f'(b)$，则介于$f'(a)$、$f'(b)$之间的任何实数λ，存在$\xi\in(a, b)$使得$f'(\xi)=\lambda$

达布定理推论1：设$f(x)$在$[a, b]$上可导，若$\min\{f'(a), f'(b)\}\leq\lambda\leq\max\{f'(a), f'(b)\}$存在$\xi\in[a, b]$使得$f'(\xi)=\lambda$

达布定理推论2：设$f(x)$在(a, b)上可导，若不存在$\xi\in(a, b)$使得$f'(\xi)=\lambda$则在(a, b)上，$f'(x)$恒$>\lambda$或恒$<\lambda$

第四讲：中值问题 > 达布定理

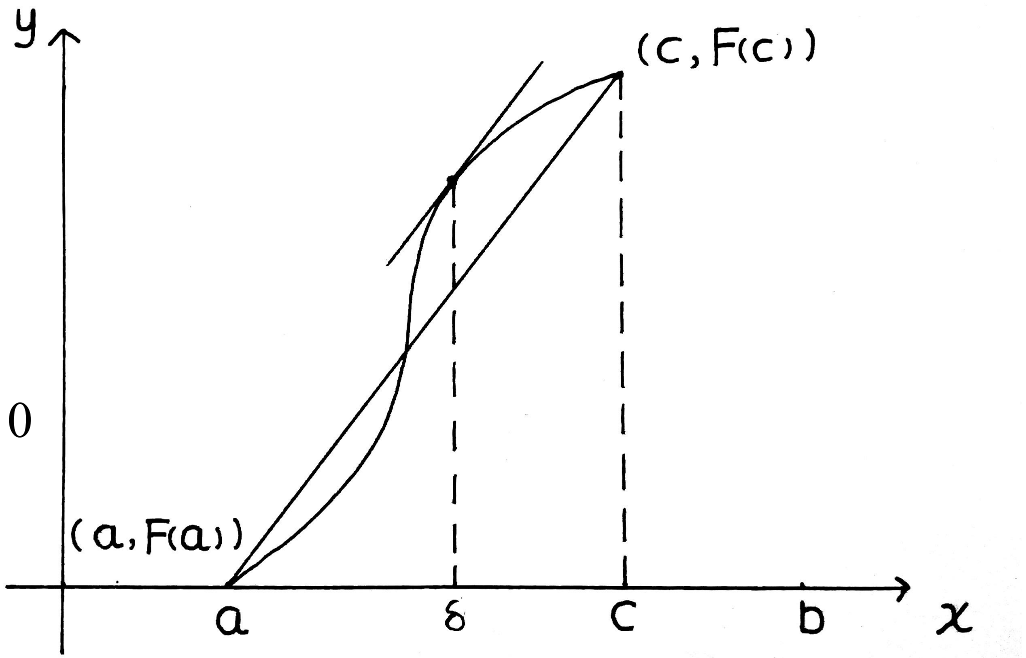
$F(x)$在$[a,b]$上可导，$\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)+\dfrac{F(c)}{b-a}=0$，$F(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$

i.若$F(c)=0\Rightarrow F'(c)=0$

ii.若$F(c)\neq 0$，不妨设$F(c)>0\Rightarrow F'(c)<0$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta\in(a,c)$使得$F'(\delta)=\dfrac{F(c)-F(a)}{c-a}>0$

由达布定理$\exists\xi\in(\delta,c)$使得$F'(\xi)=0$



第四讲：中值问题 > 达布定理

$F(x)$在$[a, b]$上可导，$\exists c\in(a, b)$，使得$F'(c)+\dfrac{F(c)}{b-a}=0$，$F(a)=0$，证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得$F'(\xi)=0$

假设不存在$\xi\in(a, b)$，使得$F'(\xi)=0$

当$x\in(a, b)$时，$F'(x)$恒<0或恒>0

i.若$F(c)=0\Rightarrow F'(c)=0$矛盾！

ii.若$F(c)\neq0$，不妨设$F(c)>0\Rightarrow F'(c)<0\Rightarrow F'(x)$恒$<0\Rightarrow F(c)\leq F(a)=0$矛盾！

第四讲：中值问题 > 达布定理

$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)=f(1)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

证明:$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=M$

拉格朗日中值定理的几何意义

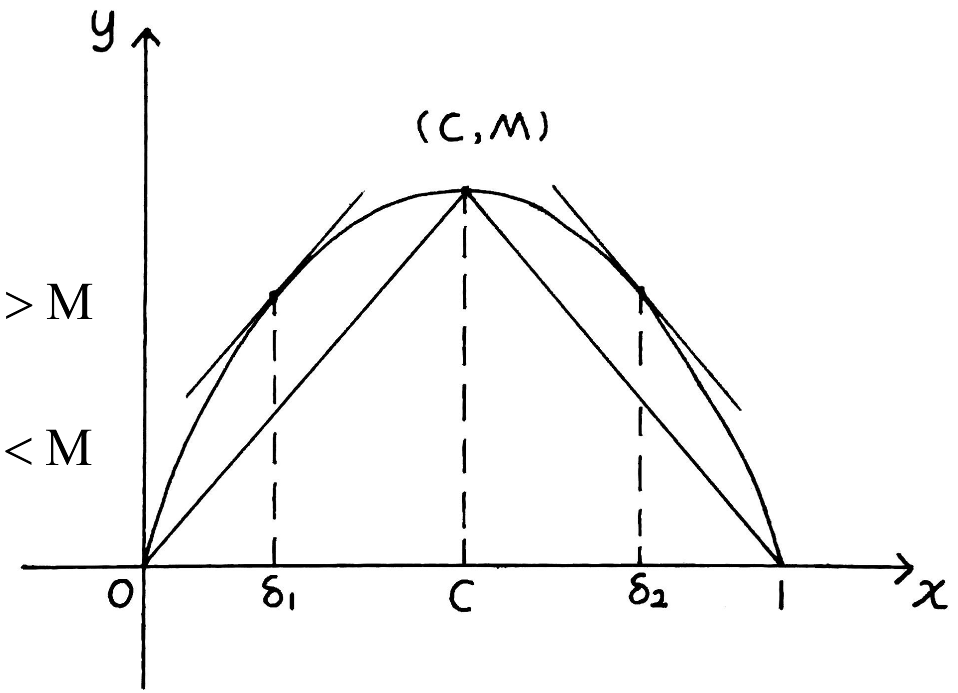
考虑$M>0$的情形

设$f(c)=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$，$c\in[0,1]\Rightarrow c\in(0,1)$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta_1\in(0,c)$使得$f'(\delta_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{M}{c}>M$

由拉格朗日中值定理$\exists\delta_2\in(c,1)$使得$f'(\delta_2)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{-M}{1-c}<M$

由达布定理$\exists\xi\in(\delta_1,\delta_2)$使得$f'(\xi)=M$



第四讲：中值问题 > 达布定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $(b-a)f'(\xi)=f(\frac{a+b}{2})$

考虑 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ 的情形

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{b-a}{2}f'(\xi_1) \qquad a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{a-b}{2}f'(\xi_2) \qquad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

$$f'(\xi_1)=\frac{2}{b-a}f(\frac{a+b}{2}) \qquad f'(\xi_2)=-\frac{2}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$$

由达布定理存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理

关于泰勒中值定理的中值问题

将$f(\alpha)$在β处展开

α，β是区间端点a，b或区间中点$\dfrac{a+b}{2}$或极值点(包括最值点)c或任意点x

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理

$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=-1$，$f'(0)=0$

证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=3$

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1) \qquad -1<\xi_1<0$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2) \qquad 0<\xi_2<1$$

$$f(1)-f(-1)=2f'(0)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

$$\Rightarrow f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$$

$$\min\{f'''(\xi_1),\ f'''(\xi_2)\}\le\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\le\max\{f'''(\xi_1),\ f'''(\xi_2)\}$$

$$\exists\xi\in[\xi_1,\ \xi_2]，使得f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$[a，b]$上三阶可导且$f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$

证明：存在$\xi\in[a，b]$，使得$f(b)-f(a)=\frac{1}{18}(b-a)^3f'''(\xi)$

待定x

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\frac{1}{6}(x-a)^3f'''(\xi_1)\qquad a<\xi_1<x$$

$$f(x)=f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{1}{2}(x-b)^2f''(b)+\frac{1}{6}(x-b)^3f'''(\xi_2)\qquad x<\xi_2<b$$

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{6}(x-a)^3f'''(\xi_1)+\frac{1}{6}(b-x)^3f'''(\xi_2)$$

记$\frac{1}{6}(x-a)^3+\frac{1}{6}(b-x)^3=S$，$\frac{1}{6}(x-a)^3f'''(\xi_1)+\frac{1}{6}(b-x)^3f'''(\xi_2)=K$

$\min\{f'''(\xi_1)，f'''(\xi_2)\}=m$，$\max\{f'''(\xi_1)，f'''(\xi_2)\}=M$

$m\le\frac{K}{S}\le M\Rightarrow\exists\xi\in[\xi_1，\xi_2]$使得$f'''(\xi)=\frac{K}{S}\Rightarrow K=Sf'''(\xi)$

欲使得$S=\frac{1}{18}(b-a)^3$即$\frac{1}{6}(x-a)^3+\frac{1}{6}(b-x)^3=\frac{1}{18}(b-a)^3$

$$3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3+3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3=1$$

令$\frac{x-a}{b-a}=t$则$\frac{b-x}{b-a}=1-t$

$$3t^3+3(1-t)^3=1$$

$$3t^3+3\left(1+3t-3t^2-t^3\right)=1$$

$$9t^2-9t+2=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}\text{或}\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{3}\text{或}\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x=a+\frac{1}{3}(b-a)\text{或}a+\frac{2}{3}(b-a)$$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$[a, b]$上三阶可导且$f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$

证明：存在$\xi\in[a, b]$，使得$f(b)-f(a)=\frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$

$$\frac{1}{6}(x-a)^3+\frac{1}{6}(b-x)^3=\frac{1}{24}(b-a)^3$$

$$4\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3+4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3=1$$

令$\frac{x-a}{b-a}=t$则$\frac{b-x}{b-a}=1-t$

$$4t^3+4(1-t)^3=1$$

$$4t^3+4\left(1+3t-3t^2-t^3\right)=1$$

$$4t^2-4t+1=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(b+a)$$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理 积分符号处理

$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数，且$f(0)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$

去积分符号

令$G(x)=\int_0^x f(x)dx$ 则$G'(x)=f(x)$，$G''(x)=f'(x)$

隐藏条件$G(0)=0$

$$f(0)=0\xrightarrow{\text{转化}}G'(0)=0$$

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx\xrightarrow{\text{转化}}G''(\xi)=2G(1)$$

$$G(1)=G(0)+G'(0)+\frac{1}{2}G''(\xi)=\frac{1}{2}G''(\xi)$$

$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数，且$f(0)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$

原函数法

$f'(x)=2\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow f'(x)-2\int_0^1 f(x)dx=0$积分$\Rightarrow f(x)-2x\int_0^1 f(x)dx=C$

构造辅助函数$G(x)=f(x)-2x\int_0^1 f(x)dx$

$f(0)=0\Rightarrow G(0)=0$

$\int_0^1 G(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 2xdx\cdot\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-1\cdot\int_0^1 f(x)dx=0$

由开区间的积分中值问题$\exists\delta\in(a，b)$，使得$G(\delta)=\int_0^1 G(x)dx=0$

$G(0)=G(\delta)$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理 积分符号处理

$f(x)$在$[-1,1]$上有二阶连续导数，证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使得

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$$

去积分符号

令$G(x)=\int_{-1}^{x} xf(x)dx$ 则$G'(x)=xf(x)$，$G''(x)=f(x)+xf'(x)$，$G'''(x)=2f(x)+xf''(x)$

隐藏条件$G(-1)=0$，$G'(0)=0$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)\xrightarrow{\text{转化}}G(1)=\frac{1}{3}G'''(\xi)$$

$$G(1)=G(0)+G'(0)+\frac{1}{2}G''(0)+\frac{1}{6}G'''(\xi_1) \qquad 0<\xi_1<1$$

$$G(-1)=G(0)-G'(0)+\frac{1}{2}G''(0)-\frac{1}{6}G'''(\xi_2) \qquad -1<\xi_2<0$$

$$G(1)=\frac{1}{6}G'''(\xi_1)+\frac{1}{6}G'''(\xi_2)$$

$$\min\{G'''(\xi_1),\ G'''(\xi_2)\}\le\frac{1}{2}G'''(\xi_1)+\frac{1}{2}G'''(\xi_2)\le\max\{G'''(\xi_1),\ G'''(\xi_2)\}$$

$\exists\xi\in[\xi_1,\ \xi_2]\subset(-1,1)$，使得$G'''(\xi)=\frac{1}{2}G'''(\xi_1)+\frac{1}{2}G'''(\xi_2)$

第四讲：中值问题 > 泰勒中值定理 积分符号处理

设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a](a>0)$ 上有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明：

$\exists\xi\in[-a, a]$，使得 $a^3 f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx$

去积分符号

令 $G(x)=\int_{-a}^{x} f(x)dx$ 则 $G'(x)=f(x)$，$G''(x)=f'(x)$，$G'''(x)=f''(x)$

隐藏条件 $G(-a)=0$

$f(0)=0 \xrightarrow{\text{转化}} G'(0)=0$

$a^3 f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx \xrightarrow{\text{转化}} a^3 G'''(\xi)=3G(a)$

$$G(a)=G(0)+aG'(0)+\frac{a^2}{2}G''(0)+\frac{a^3}{6}G'''(\xi_1) \qquad 0<\xi_1<a$$

$$G(-a)=G(0)-aG'(0)+\frac{a^2}{2}G''(0)-\frac{a^3}{6}G'''(\xi_2) \qquad -a<\xi_2<0$$

$$G(a)=\frac{a^3}{6}G'''(\xi_1)+\frac{a^3}{6}G'''(\xi_2)$$

$$\min\{G'''(\xi_1), G'''(\xi_2)\}\le\frac{1}{2}G'''(\xi_1)+\frac{1}{2}G'''(\xi_2)\le\max\{G'''(\xi_1), G'''(\xi_2)\}$$

$\exists\xi\in[\xi_1, \xi_2]\subset(-1,1)$，使得 $G'''(\xi)=\frac{1}{2}G'''(\xi_1)+\frac{1}{2}G'''(\xi_2)$

费马定理

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，并且在x_0处可导，如果对任意的$x\in U(x_0)$有$f(x)\le f(x_0)$（或者$f(x)\ge f(x_0)$），那么$f'(x_0)=0$

费马定理推论

函数$f(x)$在某一开区间内可导且在该区间内有最值，则$f(x)$在最值点处的导数等于0

第四讲：中值问题 > 费马定理

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明：$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f'(\xi)=0$

函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有最小值

参考第二讲函数连续最值性

函数$f(x)$在$(a，b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，证明：$\exists\xi\in(a，b)$，使得$f'(\xi)=0$

函数$f(x)$在$(a，b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$，证明：$f(x)$在$(a，b)$上有最小值

参考第二讲函数连续最值性

第四讲：中值问题 > 费马定理

$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f(0)$，$f(1)>0$且$\int_0^1 f(x)dx<0$

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$

由积分中值定理$\exists\delta\in[0,1]$，使得$f(\delta)=\int_0^1 f(x)dx$

设$f(\xi)$是$f(x)$在$[0,1]$上的最小值，$\xi\in[0,1]$

$f(\delta)<0<f(0)$，$f(1)$

$\Rightarrow\xi\neq0,1\Rightarrow\xi\in(0,1)$

$f(\xi)$是$f(x)$在$(0,1)$上的最小值$\Rightarrow f'(\xi)=0$

第四讲：中值问题 > 分部积分公式

$$\int u^{(n)} v dx = \int u v^{(n)} dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} u^{(k-1)} v^{(n-k)}$$

$$n = 2 \quad \int u'' v dx = \int u v'' dx + u'v - uv'$$

$$(u'v - uv')' = (u''v + u'v') - (u'v' + uv'') = u''v - uv''$$

$$\text{两边积分} \Rightarrow \int_a^b u'' v dx = \int_a^b u v'' dx + u'v|_a^b - uv'|_a^b$$

$$\int_a^b f''(x)P(x)dx = \int_a^b f(x)P''(x)dx + f'(x)P(x)|_a^b - f(x)P'(x)|_a^b$$

第四讲：中值问题 > 分部积分公式

$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数且$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$，证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}M$

$$\int_a^b f''(x)P(x)dx = \int_a^b f(x)P''(x)dx + f'(x)P(x)\Big|_a^b - f(x)P'(x)\Big|_a^b$$

$P(x)$是待定的二次多项式函数

条件中无$f'(a)$，$f'(b)$，故令$P(a)=P(b)=0 \Rightarrow$ 必有$P(x)=k(x-a)(x-b)$

不妨取$k=1$，即令$P(x)=(x-a)(x-b)$代入

$$\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx = 2\int_a^b f(x)dx$$

由积分第一中值定理$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx = f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6}f''(\xi)$

$$\int_a^b f(x)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

第四讲：中值问题 > 分部积分公式

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-6$

$$\int_0^1 f''(x)P(x)dx=\int_0^1 f(x)P''(x)dx+f'(x)P(x)\Big|_0^1-f(x)P'(x)\Big|_0^1$$

$P(x)$是待定的二次多项式函数

条件中无$f'(0)$，$f'(1)$，故令$P(0)=P(1)=0\Rightarrow$必有$P(x)=k(x-0)(x-1)$

不妨取$k=1$，即令$P(x)=x(x-1)$代入

$$\int_0^1 f''(x)x(x-1)dx=2\int_0^1 f(x)dx-f(x)(2x-1)\Big|_0^1=1$$

设$H(x)=\int_0^x f''(x)x(x-1)dx\quad G(x)=\int_0^x x(x-1)dx$

$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\dfrac{H'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{H(1)-H(0)}{G(1)-G(0)}$即$\dfrac{f''(\xi)\xi(\xi-1)}{\xi(\xi-1)}=\dfrac{\int_0^1 f''(x)x(x-1)dx}{\int_0^1 x(x-1)dx}\Rightarrow f''(\xi)=-6$

第四讲：中值问题 > 分部积分公式

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数且$f'(0)=f'(1)=0$，$f(0)+f(1)=0$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=-12\int_0^1 f(x)dx$

$$\int_0^1 f''(x)P(x)dx=\int_0^1 f(x)P''(x)dx+f'(x)P(x)\big|_0^1-f(x)P'(x)\big|_0^1$$

$P(x)$是待定的二次多项式函数

$$f(x)P'(x)\big|_0^1=f(1)P'(1)-f(0)P'(0)=f(1)(P'(1)+P'(0))$$

条件没有给出$f(1)$的值故令$P'(0)+P'(1)=0$注意$P(x)$是一次多项式函数，故$y=P'(x)$关于$\left(\frac{1}{2},0\right)$中心对称

$\Rightarrow$必有$P'(x)=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$不妨取$k=1$，即令$P'(x)=x-\frac{1}{2}\Rightarrow P(x)=\frac{1}{2}(x^2-x)$代入

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)(x^2-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

设$H(x)=\int_0^1 f''(x)(x^2-x)dx$ $G(x)=\int_0^1 (x^2-x)dx$

$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\frac{H'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{H(1)-H(0)}{G(1)-G(0)}$即$\frac{f''(\xi)(\xi^2-\xi)}{\xi^2-\xi}=\frac{\int_0^1 f''(x)(x^2-x)dx}{\int_0^1 (x^2-x)dx}\Rightarrow f''(\xi)=-12\int_0^1 f(x)dx$