2021

数学竞赛辅导

——微　分　方　程

张君施

北京工商大学　数学与统计学院

一、微分方程解的性质

1.（2009年第一届第五题）已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。

解 利用二阶线性非齐次解的性质知

若 y_1，y_2是$y'' + ay' + by = f(x)$的两个解，

则 $y_1 - y_2$是$y'' + ay' + by = 0$的解。

于是知：e^{2x}，e^{-x}是相应齐次线性微分方程的两个线性无关的解，

而xe^x是非齐次的一个特解.

解法1：设所求的方程为$y''-y'-2y=f(x)$

将xe^x代入上述方程，可得$f(x)=e^x-2xe^x$.

所求的方程：$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$

解法2：$y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$为所求方程的通解，求 y'与y'',并消去c_1，c_2，可得所求方程。

2. 已知微分方程 $y''+ay'+2y=f(x)$的两个特解

$$y_1=2e^x+\sin x, y_2=\sin x$$

求方程中的a与$f(x)$,并求其通解。

解 利用二阶线性非齐次解的性质知 $r^2+ar+2=0 \overset{r=1}{\Rightarrow} a-3$

$y_1-y_2=2e^x$是相应齐次方程$y''+ay'+2y=0$的解，故$a=-3$

于是知：e^{2x}，e^x是相应齐次微分方程的两个线性无关的解，

原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\sin x$

$$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r=1, r=2$$

$f(x)$的求法可仿1题做法

将特解y=sinx带入原方程 $y''-3y'+2y=f(x)$，可得

或利用$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\sin x$，求$y',y''$,消去$C_1,C_2$得

$$f(x)=\sin x-3\cos x.$$

二、可降阶的微分方程

3.（2015年第六届全国第一2题）

设实数$a\neq 0$,微分方程$\begin{cases} y''-ay'^2=0 \\ y(0)=0, y'(0)=-1 \end{cases}$的解________.

解　记$p=y'$, 则$p'-ap^2=0$, 于是$\dfrac{dp}{p^2}=a\,dx$,

从而$-\dfrac{1}{p}=ax+C_1$. 再由$y'(0)=p(0)=-1$, 得$C_1=1$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{ax+1}$, 得$y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2$,

再由 $y(0)=0$, 得$C_2=0$, 故 $y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$。

4.（2016年第七届全国第一1题）

微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的解_______.

解　记 $p=y'$，则 $p'-p^3=0$，

于是 $\dfrac{dp}{p^3}=dx$，

从而 $-\dfrac{1}{2p^2}=x-C_1$，即：$p=y'=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2(C_1-x)}}$

积分得　$y=C_2\pm\sqrt{2(C_1-x)}$

三、积分方程

5.（2017年第八届第四题）已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$\cos xf(x)+2\int_0^x f(t)\sin t\,dt = x+1,\text{求}f(x).$$

解　对方程两边对x求导，得　$f'(x)+\tan xf(x)=\sec x,$

$$\cos xf'(x)+\sin xf(x)=1,$$

于是　$f(x)=e^{-\int\tan x dx}(\int\sec xe^{\int\tan x dx}dx+C)$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x$$

由于 $f(0)=1,$ 则　$f(x)=\sin x+\cos x$

6.（2004年）已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$\int_0^x f(t)e^t dt = e^x f(x) + x^2 + x + 1, \text{求} f(x).$$

解　对方程两边对x求导，得

$$e^x f'(x) = -2x - 1 \quad \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}(2x+1)$$

于是　$f(x) = (3 + 2x)e^{-x} + C$

由于 $f(0) = -1$, 则　$C = -4$, 故　$f(x) = (3 + 2x)e^{-x} - 4$

四、线性微分方程的解的问题

7.（2014年第五届全国第三题) (2001年）设当$x > -1$时，可微函数

满足 $$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,\ f(0)=1$$

试证明：当 $x \ge 0$时，$e^{-x} \le f(x) \le 1.$

证明　对方程两边同乘以$(x+1)$,再两边对 x 求导，得

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

$$\Rightarrow (x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$$

解之得，$f'(x)=\dfrac{C_1e^{-x}}{1+x}$

由$f(0)=1$与已知方程得 $f'(0)=-f(0)=-1$

$\Rightarrow C_1=-1$, 于是 $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+x}$

显然，在$x\geq 0$时，$f'(x)<0$. 故$f(x)$单调递减，即$f(x)< f(0)=1$

又因 $f'(x)=\dfrac{-1}{x+1}e^{-x}\geq -e^{-x}$ $(x>-1)$，利用积分的保序性，知

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt \geq \int_0^x -e^{-t}dt=e^{-x}\Big|_0^x=e^{-x}-1$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\geq e^{-x}.$$

8.（2012年第三届全国决赛非数学第六题）（1）求解微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

（2）若$y=y(x)$为（1）的解，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx = \dfrac{\pi}{2}$

提示：（1）利用一阶线性微分方程求解，得 $y = e^{x^2}$

（2） 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\arctan n = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2+1}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n(e^{x^2}-1)}{n^2x^2+1}dx + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}dx$$

$$= 0 + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}$$

五、导数的应用

9. 设函数$f(x)$在当$x=0$处可导，$f(0)=1$，且满足函数方程

$f(x+y)=f(x)f(y)$，求 $f(x)$.

解：将函数方程变形 $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\dfrac{f(y)-1}{y}f(x)$

$$=\frac{f(y)-f(0)}{y}f(x)$$

取极限 $f'(x)=f'(0)f(x)$ 解之得 $f(x)=e^{xf'(0)}$

10.（2010年第二届全国第三题）设函数 $y=f(x)$ 是由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$$

所确定，且 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$ **其中** $\Psi(t)$

具有二阶导数，曲线 $\Psi(t)$与$y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \dfrac{3}{2e}$在$t = 1$处相切，

求函数$\Psi(t)$.

解：利用参数方程确定函数求二阶导数，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Psi'(t)}{2+2t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

根据题设，有 $$\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$$

整理得 $$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$$

设 $u=\Psi'(t)$，则有 $$u'-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$$

此为一阶线性微分方程，解之得

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$u = \Psi'(t) = e^{\int \frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t}dt}dt + C_1\right] = (1+t)(3t + C_1)$$

$$\psi(t) = \int (1+t)(3t + C_1)dt = t^3 + \frac{3+C_1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

又因为 $y = \Psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2}du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切，

则有 $\psi(1) = \frac{3}{2e}$， $\psi'(1) = \frac{2}{e}$ 于是 $C_1 = \frac{1}{e} - 3$， $C_2 = 2.$

$$\Rightarrow \quad \psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + \left(\frac{1}{e} - 3\right)t + 2$$

六、多元函数微分学的应用

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

11.（2013年第四届全国第一题） 设函数$f(u,v)$具有连续的偏导数，且满足$f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求$y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解

解： $$y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u(x,x)+e^{-2x}f_v(x,x)$$

$$=-2y+e^{-2x}\cdot x\cdot x=-2y+x^2e^{-2x}$$

解之得 $$y=e^{-\int 2dx}[\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+\mathrm{C}]=e^{-2x}[\frac{x^3}{3}+C]$$

12.（北京市大学生数学竞赛2） 设函数 $u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

试求函数 f 的表达式。

$$u=f(t),t=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

解：利用多元复合函数微分法，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\frac{1}{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$t=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Rightarrow x^2+y^2=e^{2t}$$

即有 $f''(t)=e^{5t}$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{5}e^{5t}+C_1,\ f(t)=\frac{1}{25}e^{5t}+C_1t+C_2$$

13.（北京市大学生数学竞赛5） 设函数 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$

试求函数 f 的表达式。

解：利用多元复合函数微分法，得 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\cdot u'(r) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''(r)\frac{x^2}{r^2}+u'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''(r)\frac{y^2}{r^2}+u'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$$

于是，得$u''(r)+u(r)=r^2$，　此以r为自变量u为未知函数的二阶线性非齐次微分方程

特征根　$r=i,-i$，特解 $y^*=x^0e^{0r}(ar^2+br+c)$

带入到上述方程得$a=1,b=0,c=-2$,即：$y^*=r^2-2$

解之，得 $u(r)=r^2-2+C_1\cos r+C_2\sin r$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow u(r)=u(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=x^2+y^2-2+C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}$$

七、二重积分学的应用

14. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，且满足积分方程

$$f(t)=\iint_D f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)d\sigma+e^{4\pi t^2}\qquad \text{其中：} D: x^2+y^2\le 4t^2$$

求函数$f(x)$.

解: 利用二重积分计算，极坐标，则有

$$f(t)=2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{r}{2}\right)dr+e^{4\pi t^2}$$

对上式两边求导，得 $f'(t)=8\pi t f(t)+8\pi t e^{4\pi t^2}$

解之，得 $f(t)=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}$　　注意： $f(0)=1$

$C=1$

15. 设函数$f(x)$连续，$f(0)=0$, 且满足积分方程

$$f(t)=\iint_D x\left(1-\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\right)d\sigma$$

其中：$D: x^2+y^2\le t^2,\ x\ge 0, y\ge 0$ 求函数$f(x)$.

解：利用二重积分计算，极坐标，则有

$$f(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^t r\cos\theta(1-\frac{f(r)}{r^2})rdr=\frac{1}{3}t^3-\int_0^t f(r)dr$$

对上式两边求导，得 $f'(t)=t^2-f(t)$

解之，得 $f(t)=t^2-2t+2+Ce^{-t}$

$$\overset{f(0)=0}{\Rightarrow} f(t)=t^2-2t+2-2e^{-t}$$

八、级数的应用

16.(2009年第一届第七题）设函数$u_n(x)$满足:

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x\text{（}n\text{为正整数}\text{），}\quad \text{且}\quad u_n(1)=\frac{e}{n}$$

求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

解: 先求级数的通项，再求其和

由已知条件 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x\ (n\text{为正整数})$

得 $$u_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+c\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right)$$

$$u_n(1)=\frac{e}{n}\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 幂级数的和函数

记 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 其收敛域[-1,1)， 当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow s(x) - s(0) = s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

当 $x = -1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1} \ln 2$

故，当 $-1 \le x < 1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-x} \ln(1-x)$

17.验证 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{12}}{12!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$

满足方程 $y''+y'+y=e^x$，并利用上面的结果求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$

的和函数。

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{10}}{10!}+\cdots$$

解 分别求 y',y'',并将 y,y',y'' 带入到 $y''+y'+y=e^x$ 中，

$$左=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=e^x=右$$

方程的解即为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数

解二阶线性常系数非齐次方程 $y''+y'+y=e^x$， $\boxed{r=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},}$

相应齐次方程通解 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

再求非齐次方程的特解 $y^*=Ae^x=\frac{1}{3}e^x$

原方程的通解 $y=\frac{1}{3}e^x+e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

初始条件： $y(0)=1, y'(0)=0$ $\Rightarrow C_1=\frac{2}{3}, C_2=0$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

18.(北京市学生数学竞赛试题6)　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$ 的和函数。

解: 记 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$

$$=x+\frac{x^3}{1\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot3\cdot5}+\frac{x^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}+\cdots$$

$$S'(x)=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot3}+\frac{x^6}{1\cdot3\cdot5}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-3)}+\cdots$$

$$=1+xS(x)$$

解一阶线性方程 $S'(x)-xS(x)=1$

解之得 $S(x)=e^{\int xdx}[\boxed{\int e^{-\int xdx}dx}+C]$ 表示一个函数即可

$$=e^{\frac{1}{2}x^2}[\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt+C]$$ 其中 $S(0)=0$

$$\Rightarrow \quad S(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\int e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

九、曲线积分的应用

19.（2012年第三届第一题）设函数$u(x)$连续可微，$u(2)=1$, 且

$\int_L (x+2y)u\,dx+\left(x+u^3\right)u\,dy$ 在右半平面上与路径无关，求$u(x)$.

解 根据曲线积分与积分路径无关的充要条件，知

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(x+u^3)]=\frac{\partial}{\partial y}[(x+2y)u]$$

$$\int_L P\,dx+Q\,dy \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

即有 $(x+4u^3)u'=u \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=4u^2$

一阶线性微分方程

解之 得 $x=u\left(2u^2+C\right) \quad \Rightarrow \quad u=\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$

C=0

20. (广东省大学生数学竞赛1991) 设函数 $f(x)$有连续的二阶导数，$f(1)=f'(1)=1$，试确定函数 $f(\frac{y}{x})$，使

$$\int_L \left[\frac{y^2}{x}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx+\left[y-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=0$$

$$\int_L Pdx+Qdy \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

成立，其中路径L是不与y轴相交的任意简单正向闭曲线.

解 根据曲线积分与积分路径无关的充要条件，知

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f'(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x}=\frac{y}{x}f''(\frac{y}{x})-f'(\frac{y}{x})=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

令 $t=\dfrac{y}{x}$，则有 $f''(t)-\dfrac{2}{t}f'(t)=2$

解此二阶微分方程，$f'(t)=t^2[-\dfrac{2}{t}+C_1]=C_1t^2-2t$

$$\Rightarrow f'(t)=3t^2-2t \qquad (因 f'(1)=1,\ C_1=3)$$

$$\Rightarrow f(t)=t^3-t^2+C_2$$

$$\Rightarrow f(t)=t^3-t^2+1 \qquad (f(1)=1,\ C_2=1)$$

再带入，即可

21. (2018年第十届第二题) 设函数$f(t)$在$t\neq 0$时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$， 使得曲线积分

$$\int_L \left[y(2-f(x^2-y^2))\right]dx + xf(x^2-y^2)dy$$

与积分路径无关，其中L是任一不与直线 $y\neq\pm x$ 相交的分段光滑的闭曲线.

解 根据曲线积分与积分路径无关的充要条件，知

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2-f(t)+2y^2f'(t) = f(t)+2x^2f'(t) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad tf'(t)+f(t)=1 \qquad \Rightarrow (tf(t))'=1 \qquad (t=x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=1+\frac{C}{t}, \quad \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \quad f(t)=1-\frac{1}{t},$$ 带入

十、几何应用

22. 求曲线 $y=f(x)$,使得对于任意的 $x>0$,曲线在点$(x,f(x))$处的切线

在y轴上的截距是 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

解 曲线在点$(x,f(x))$处的切线方程

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

在y轴上的截距是 $f(x)-xf'(x)$

于是有 $f(x)-xf'(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

解此积分方程，变形，两边求导，得

$$xf''(x)+f'(x)=0$$

解之得(二阶可降阶微分方程)

$$f(x)=C_1\ln x+C_2$$

$$\frac{df'(x)}{dx}=-\frac{f'(x)}{x}$$

$$\ln f'(x)=-\ln x+\ln C_1=\ln\frac{C_1}{x}$$

23. 设函数 $y=f(x)$在[0,1]上连续,在(0,1)上 $f(x)>0$,且满足微分方程

$xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$ ，且由曲线$y=f(x),y=0,x=0,x=1$所围的面积等于2，求$f(x)$.

解 解微分方程 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$

得 $f(x)=x[\frac{3}{2}ax+C]$

利用定积分的几何意义 知

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(\frac{3}{2}ax+C]dx \Rightarrow a+C=4$$

$$f(x)=x[\frac{3}{2}ax+4-a]$$

十一、利用方程隐含的信息解题

24. 设函数 $y=f(x)$是微分方程 $y''-2y'+4y=0$的一个解，若$f(x_0)>0$，且$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在x_0点(A).

A. 取得极大值　　B.取得极小值

C.某个领域内单调增加　　D.某个领域内单调减少

解 由条件知：

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$$

利用极值存在的第二充分条件知：$f(x)$在x_0处取得极大值。

25. 设函数 $y=y(x)$是微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$的特解,则当$x\to 0$时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$的极限(C).

$A.$ 不存在　　B.等于1　　C.等于2　　D.等于3

解 由条件知：$y''(0)=e^0-py'(0)-qy(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2$$