第十讲：三重积分 > 先一后二法

先一后二法（穿线法）：先计算一个定积分，再计算一个二重积分

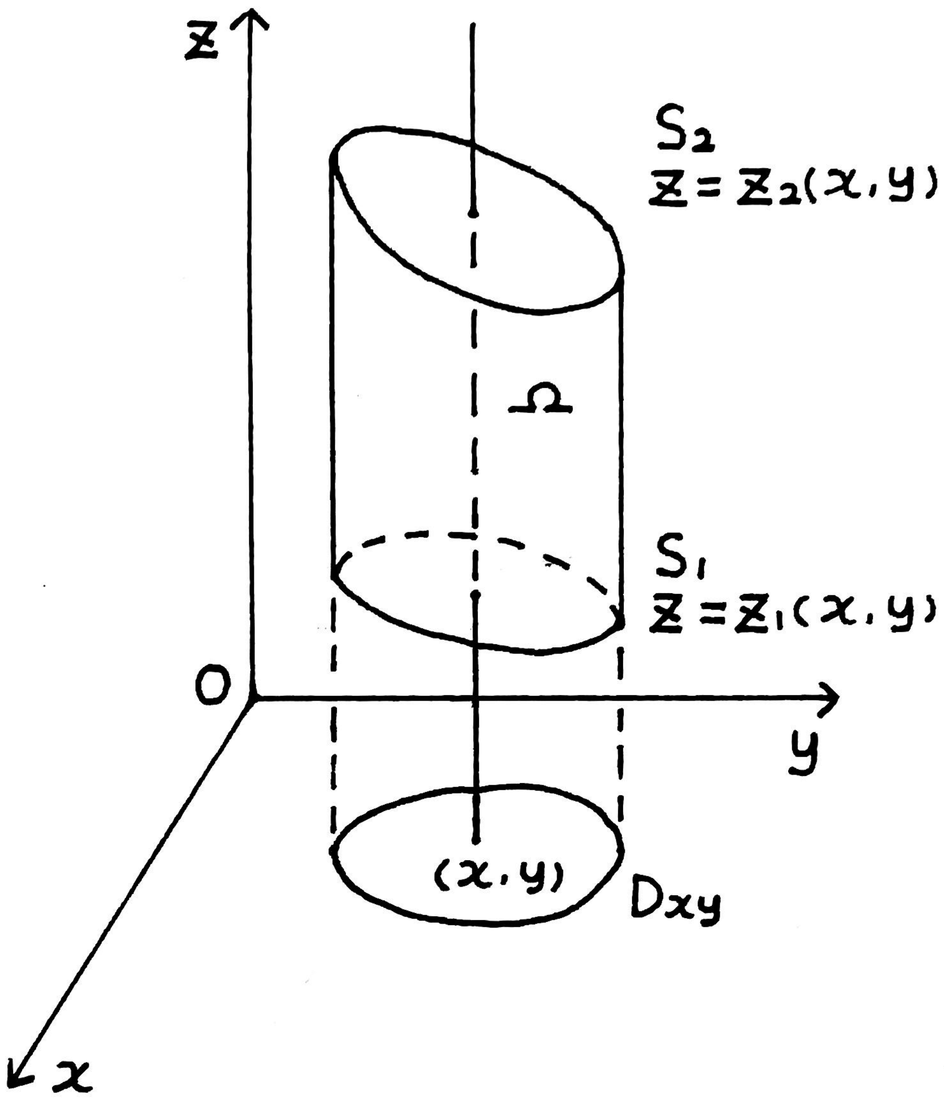
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy},\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$$

D_{xy}是Ω在xOy平面上的投影区域

$z_1(x, y)$，$z_2(x, y)$是过点$(x, y, 0)$平行于z轴的直线

与Ω的边界曲面S_1，S_2交点的z坐标值



第十讲：三重积分 > 先一后二法

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}，\text{计算}\iiint_{\Omega} z^2\,dxdydz$$

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y)\in D_{xy},-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\}\qquad D_{xy}=\{(x,\ y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$$

$$\iiint_{\Omega} z^2\,dxdydz=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z^2\,dz=\frac{2}{3}\iint_{D_{xy}}\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)^3 dxdy\qquad \text{令}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ar\cos\theta\\ br\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\iint_{D_{xy}}\left(c\sqrt{1-r^2}\right)^3 abrdrd\theta=\frac{2}{3}abc^3\iint_{D_{xy}}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 rdrd\theta$$

$$=\frac{2}{3}abc^3\int_0^1\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3 rdr\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2}{3}abc^3\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\pi=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

第十讲：三重积分 > 先二后一法

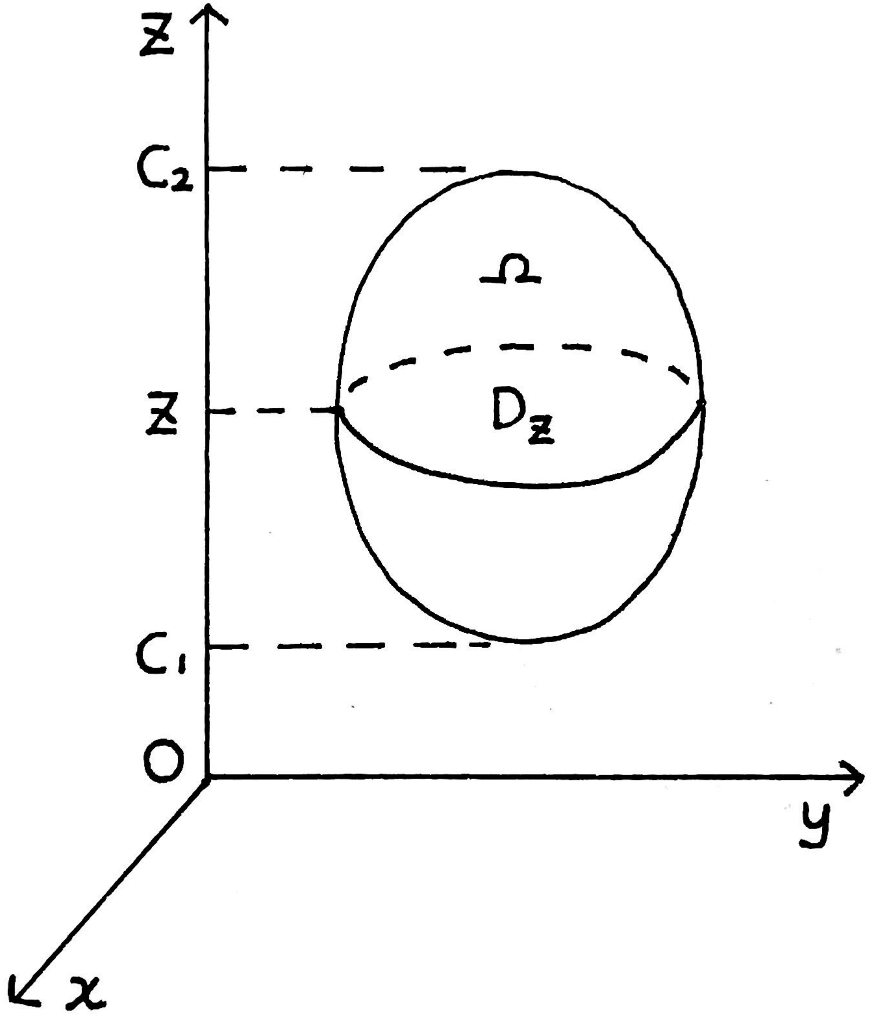
先二后一法（截面法）：先计算一个二重积分，再计算一个定积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z,\ c_1 \le z \le c_2\}$

$[c_1, c_2]$是Ω在z轴上的投影区间

D_z是平面$Z = z$与Ω相截的区域



应用最多的情形：

被积函数$f(x,y,z) = h(z)$

D_z的面积只与z有关，D_z的面积$= g(z)$

$$\iiint\limits_{\Omega} h(z)\,dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} h(z)\,dxdy = \int_{c_1}^{c_2} h(z)g(z)\,dz$$

第十讲：三重积分 > 先二后一法

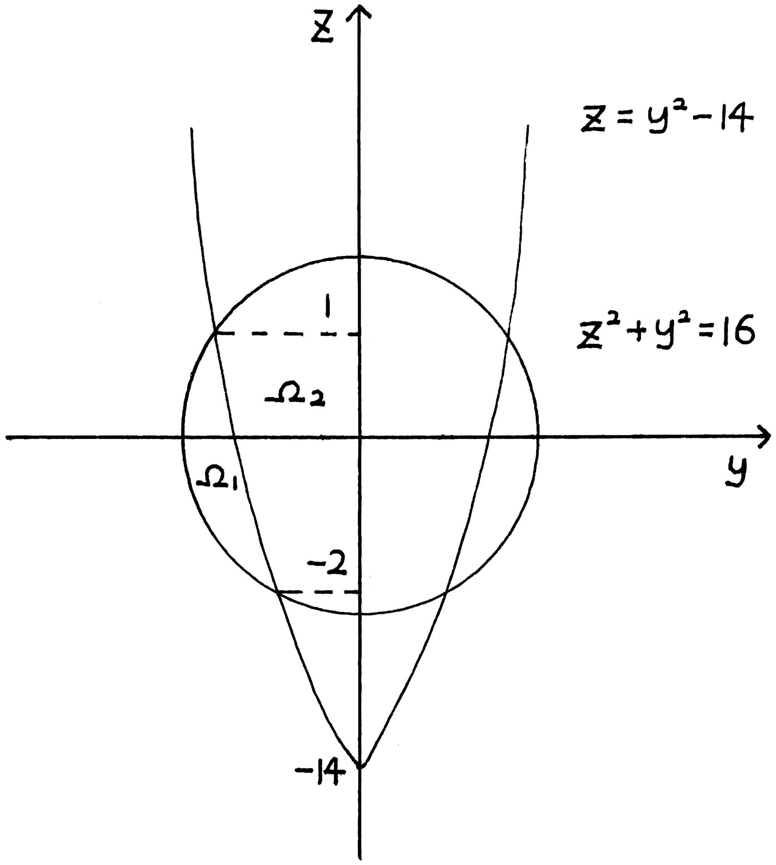
$\Omega=\{(x,y,z)\big|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz$

$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,-c\le z\le c\}\qquad D_z=\{(x,y)|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}\}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dxdydz=\int_{-c}^{c} z^2\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_{-c}^{c} z^2\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\pi dz=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

第十讲：三重积分 > 先二后一法

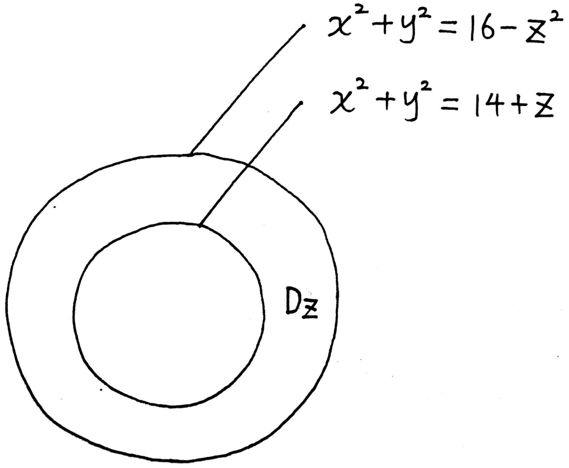
曲面$z=x^2+y^2-14$将球体$x^2+y^2+z^2\le 16$分成两个部分，分别求出这两个部分的体积



$$\Omega_1=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,-2\le z\le 1\}\qquad D_z=\{(x,y)|z+14\le x^2+y^2\le 16-z^2\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_1}dxdydz=\int_{-2}^{1}dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_{-2}^{1}[(16-z^2)\pi-(z+14)\pi]dz=\pi\int_{-2}^{1}(2-z-z^2)dz=\frac{9}{2}\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega_2}dxdydz=\frac{4\pi}{3}\cdot 4^3-\frac{9}{2}\pi=\frac{485}{6}\pi$$



曲面$z=2\sqrt{x^2+y^2}$将球体$x^2+y^2+(z-2)^2\le 1$分成两个部分，分别求出这两个部分的体积

曲面$(z+1)^2=x^2+y^2$将球体$x^2+y^2+z^2\le 4$分成三个部分，分别求出这三个部分的体积

第十讲：三重积分 > 交换积分次序

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$$

先二后一法 先一后二法

三重积分的次序交换转换成二重积分的次序交换

改变其积分次序为其它所有可能的积分次序

$z\to y\to x\Rightarrow z\to x\to y\Rightarrow x\to z\to y\Rightarrow x\to y\to z\Rightarrow y\to x\to z\Rightarrow y\to z\to x$

$z\to y\to x\Rightarrow z\to x\to y$ 先一后二法

$$I=\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz \quad D_{xy}=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$$

$$=\int_0^1 dy\int_y^1 dx\int_0^{xy} f(x,y,z)dz \quad D_{xy}=\{(x,y)|0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$$

$z\to x\to y\Rightarrow x\to z\to y$ 先二后一法

$$I=\int_0^1 dy\iint_{D_y} f(x,y,z)dxdz \quad D_y=\{(x,z)|y\le x\le 1,0\le z\le xy\}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} dz\int_{\frac{z}{y}}^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_y^1 f(x,y,z)dx$$

$$D_y=\{(x,z)|y^2\le z\le y,\frac{z}{y}\le x\le 1\}\cup\{(x,z)|0\le z\le y^2,\ y\le x\le 1\}$$

第十讲：三重积分 > 交换积分次序

$$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} dz\int_{\frac{z}{y}}^{1} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_0^{y^2} dz\int_y^1 f(x,y,z)dx$$

$x\to z\to y\Rightarrow x\to y\to z$ 先一后二法

$$I=\iint\limits_{D_{yz}^1} dydz\int_{\frac{z}{y}}^{1} f(x,y,z)dx+\iint\limits_{D_{yz}^2} dydz\int_y^1 f(x,y,z)dx \quad D_{yz}^1=\{(y,z)|0\le y\le 1,\ y^2\le z\le y\}\ D_{yz}^2=\{(y,z)|0\le y\le 1,0\le z\le y^2\}$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^{\sqrt{z}} dy\int_{\frac{z}{y}}^{1} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_y^1 f(x,y,z)dx \quad D_{yz}^1=\{(y,z)|0\le z\le 1,\ z\le y\le\sqrt{z}\}\ D_{yz}^2=\{(y,z)|0\le z\le 1,\sqrt{z}\le y\le 1\}$$

$x\to y\to z\Rightarrow y\to x\to z$ 先二后一法

$$I=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z^1} f(x,y,z)dxdy+\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z^2} f(x,y,z)dxdy \quad D_z^1=\{(x,y)|z\le y\le\sqrt{z},\frac{z}{y}\le x\le 1\}\ D_z^2=(x,y)|\sqrt{z}\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_{\frac{z}{x}}^{\sqrt{z}} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dy\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_{\sqrt{z}}^{x} f(x,y,z)dy \quad D_z^1=\{(x,y)|\sqrt{z}\le x\le 1,\frac{z}{x}\le y\le\sqrt{z}\}\ D_z^2=(x,y)|\sqrt{z}\le x\le 1,\sqrt{z}\le y\le x\}$$

$$=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x,y,z)dy$$

第十讲：三重积分 > 交换积分次序

$$\int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x, y, z) dy$$

$y \to x \to z \Rightarrow y \to z \to x$ 先一后二法

$$I = \iint\limits_{D_{xz}} dzdx \int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x, y, z) dy \quad D_{xz} = \{(x, z) | 0 \le z \le 1, \sqrt{z} \le x \le 1\}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_{\frac{z}{x}}^{x} f(x, y, z) dy \quad D_{xz} = \{(x, z) | 0 \le x \le 1, 0 \le z \le x^2\}$$

第十讲：三重积分 > 交换积分次序

计算 $\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y \cos(x-1)^3\, dx$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y \cos(x-1)^3\, dx = \int_0^1 dz \iint_{D_z} \cos(x-1)^3\, dxdy \quad D_z = \{(x,\ y)|0 \le y \le z, 0 \le x \le y\}$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_x^z \cos(x-1)^3\, dy \quad D_z = \{(x,\ y)|0 \le x \le z,\ x \le y \le z\}$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z (z-x)\cos(x-1)^3\, dx$$

$$= \iint_{D_{zx}} (z-x)\cos(x-1)^3\, dzdx \quad D_{zx} = \{(x,\ z)|0 \le z \le 1, 0 \le x \le z\}$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 (z-x)\cos(x-1)^3\, dz \quad D_{zx} = \{(x,\ z)|0 \le x \le 1,\ x \le z \le 1\}$$

$$= \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}\cos(x-1)^3\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin(x-1)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{\sin 1}{6}$$

$$\int_x^1 (z-x)\cos(x-1)^3\, dz = \left[\left(\frac{1}{2}z^2 - xz\right)\cos(x-1)^3\right]_x^1 = \frac{1}{2}(x-1)^2\cos(x-1)^3$$

第十讲：三重积分 > 交换积分次序

计算 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 ye^{z^4}dz$

$$\int_0^z \frac{1}{2}(z^2-x^2)e^{z^4}dx = e^{z^4}\left[\frac{1}{2}\left(z^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^z = \frac{1}{3}z^3e^{z^4}$$

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 ye^{z^4}dz$$

$$=\int_0^1 dx\iint_{D_x} ye^{z^4}dydz \quad D_x=\{(y,z)|x\le y\le 1,\ y\le z\le 1\}$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_x^z ye^{z^4}dy \quad D_x=\{(y,z)|x\le z\le 1,\ x\le y\le z\}$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1 \frac{1}{2}(z^2-x^2)e^{z^4}dz$$

$$=\iint_{D_{xz}}\frac{1}{2}(z^2-x^2)e^{z^4}dxdz \quad D_{xz}=\{(x,z)|0\le x\le 1,\ x\le z\le 1\}$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^z \frac{1}{2}(z^2-x^2)e^{z^4}dx \quad D_{xz}=\{(x,z)|0\le z\le 1,0\le x\le z\}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{3}z^3e^{z^4}dz=\left[\frac{1}{12}e^{z^4}\right]_0^1=\frac{e-1}{12}$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 柱面坐标

计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dv$

其中(V)是由$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$及$z\ge 0$所围的空间图形 （第十届初赛）

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix}$

$$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4\Rightarrow r^2\ge 4-(z-2)^2\Rightarrow r\ge\sqrt{4-(z-2)^2}$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9\Rightarrow r^2\le 9-(z-1)^2\Rightarrow r\le\sqrt{9-(z-1)^2}$$

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{(V)}r^2\cdot rdrd\theta dz \quad (V)=\{(r,\ \theta,\ z)|\sqrt{4-(z-2)^2}\le r\le\sqrt{9-(z-1)^2},0\le z\le 4\}$$

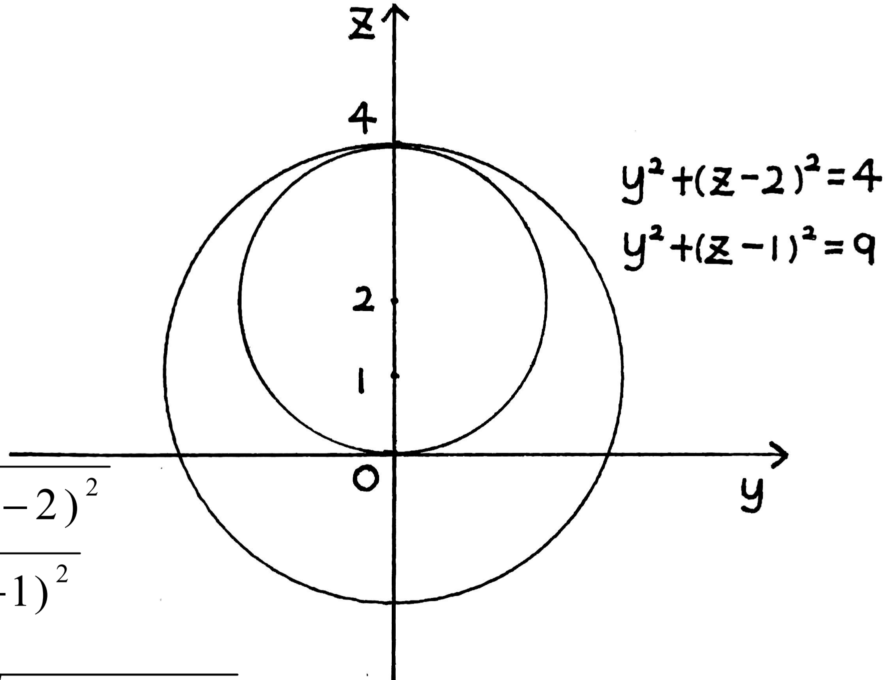
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 dz\int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}}r^3dr$$

$$=2\pi\int_0^4\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{9-(z-1)^2}\right)^4-\left(\sqrt{4-(z-2)^2}\right)^4\right]dz$$

$$=2\pi\int_0^4\frac{1}{4}\left\{\left[9-(z-1)^2\right]^2-\left[4-(z-2)^2\right]^2\right\}dz$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4\left[81-18(z-1)^2+(z-1)^4-16+8(z-2)^2-(z-2)^4\right]dz=\frac{256}{3}\pi$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 柱面坐标



计算三重积分 $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dv$

其中(V)是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$ 及 $z\ge 0$

令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\z\end{bmatrix}$

$$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4\Rightarrow r^2\ge 4-(z-2)^2\Rightarrow r\ge\sqrt{4-(z-2)^2}$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9\Rightarrow r^2\le 9-(z-1)^2\Rightarrow r\le\sqrt{9-(z-1)^2}$$

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dv=\iiint\limits_{(V)}r^2\cdot rdrd\theta dz\quad (V)=\{(r,\theta,z)|\sqrt{4-(z-2)^2}\le r\le\sqrt{9-(z-1)^2},0\le z\le 4\}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 dz\int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}}r^3dr$$

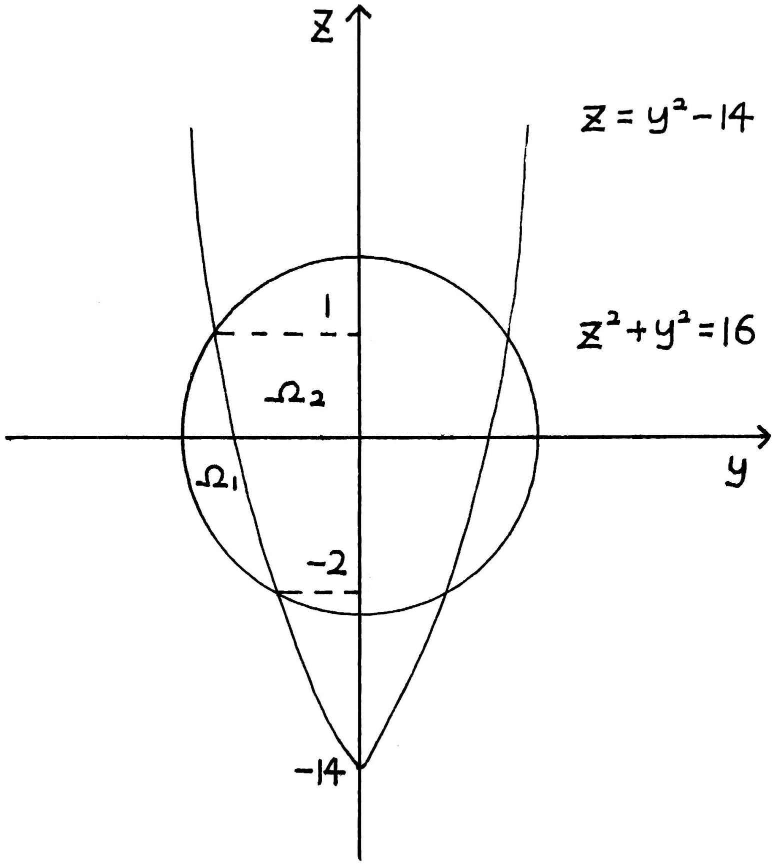
$$=2\pi\int_0^4\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{9-(z-1)^2}\right)^4-\left(\sqrt{4-(z-2)^2}\right)^4\right]dz$$

$$=2\pi\int_0^4\frac{1}{4}\left\{[9-(z-1)^2]^2-[4-(z-2)^2]^2\right\}dz$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^4[81-18(z-1)^2+(z-1)^4-16+8(z-2)^2-(z-2)^4]dz=\frac{256}{3}\pi$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 柱面坐标

曲面$z=x^2+y^2-14$将球体$x^2+y^2+z^2\le 16$分成两个部分，分别求出这两个部分的体积



令$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\z\end{bmatrix}$ $\quad z=x^2+y^2-14\Rightarrow r^2=z+14\Rightarrow r=\sqrt{z+14}$

$x^2+y^2+z^2=16\Rightarrow r^2=16-z^2\Rightarrow r=\sqrt{16-z^2}$

$$\iiint_{\Omega_1}dxdydz=\iiint_{\Omega_1}rdrd\theta dz\quad \Omega_1=\{(r,\ \theta,\ z)|\sqrt{z+14}\le r\le\sqrt{16-z^2},-2\le z\le 1\}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-2}^{1}dz\int_{\sqrt{z+14}}^{\sqrt{16-z^2}}rdr$$

$$=2\pi\int_{-2}^{1}\frac{1}{2}[(16-z^2)-(z+14)]dz=\pi\int_{-2}^{1}(2-z-z^2)dz$$

$$=\pi\left[2z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\pi$$

$$\iiint_{\Omega_2}dxdydz=\frac{4\pi}{3}\cdot 4^3-\frac{9}{2}\pi=\frac{485}{6}\pi$$

曲面$z=2\sqrt{x^2+y^2}$将球体$x^2+y^2+(z-2)^2\le 1$分成两个部分，分别求出这两个部分的体积

曲面$(z+1)^2=x^2+y^2$将球体$x^2+y^2+z^2\le 4$分成三个部分，分别求出这三个部分的体积

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$ 其中Ω是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分 （第十一届初赛）

$x，y，z\ge 0\Rightarrow r\sin\varphi\cos\theta，r\sin\varphi\sin\theta，r\cos\varphi\ge 0\Rightarrow \cos\theta,\sin\theta,\cos\varphi\ge 0\Rightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]，\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy\Rightarrow r^4=2r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\Rightarrow r^2=\sin 2\theta\sin^2\varphi\Rightarrow r=\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}\Rightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}]$

$\Omega=\{(r，\varphi，\theta)|r\le\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta},0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\sin\varphi\cos\theta\\r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\frac{r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}r^3\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}\left(\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}\right)^4d\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta\sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{72}$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标 > 球心的选取

$\Omega=\{(x，y，z)|x^2+y^2+z^2\le 2\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

以(0,0,0)为球心
以(1,1,0)为球心

令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\sin\varphi\cos\theta\\r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}$ $\Omega=\{(r，\varphi，\theta)|r\le\sqrt{2},0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}=\iiint\limits_{\Omega}\frac{r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta}{r^2-2r\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)+2}$$

令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+r\sin\varphi\cos\theta\\1+r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}$

$$\iiint\limits_{\Omega'}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta}{r^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$r\le -2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)\Rightarrow 0\le -2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)\Rightarrow \cos\theta+\sin\theta\le 0\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 0\Rightarrow\theta\in[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$$

$$\Omega'=\{(r，\varphi，\theta)|r\le -2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta),\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{7\pi}{4},0\le\varphi\le\pi\}$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标 > 球心的选取

$\Omega=\{(x,\ y,\ z)|x^2+y^2+z^2\le 2\}$，计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

令$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+r\sin\varphi\cos\theta\\1+r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}$ $\Omega'=\{(r,\ \varphi,\ \theta)|r\le -2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta),\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{7\pi}{4},0\le\varphi\le\pi\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta}{r^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{-2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)}\sin\varphi dr$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\theta\int_0^{\pi}-2\sin^2\varphi(\cos\theta+\sin\theta)d\varphi=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}d\theta\int_0^{\pi}(\cos 2\varphi-1)(\cos\theta+\sin\theta)d\varphi$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}-\pi(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=[-\pi(\sin\theta-\cos\theta)]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}=2\sqrt{2}\pi$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标 > 球心的选取

$\Omega=\{(x,\ y,\ z)|x^2+y^2+z^2\le 2\}$，计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$

令$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u+1\\v+1\\w\end{bmatrix}\cdots\cdots(1)$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{dudvdw}{u^2+v^2+w^2}\quad \Omega'=\{(u,\ v,\ w)|u^2+v^2+w^2+2u+2v\le 0\}$$

令$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\sin\varphi\cos\theta\\r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}\cdots\cdots(2)$

$$\iiint\limits_{\Omega'}\frac{dudvdw}{u^2+v^2+w^2}=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta}{r^2}\quad \Omega'=\{(r,\ \varphi,\ \theta)|r\le -2\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)\}$$

$(1)(2)\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+r\sin\varphi\cos\theta\\1+r\sin\varphi\sin\theta\\r\cos\varphi\end{bmatrix}$

选取非原点的点作为球心相当于平移后选取原点作为球心

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标 > 广义球面坐标

a，b，c > 0，$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}dxdydz$

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ar\sin\varphi\cos\theta \\ br\sin\varphi\sin\theta \\ cr\cos\varphi \end{bmatrix}$ $\quad \Omega_1=\{(r,\ \varphi,\ \theta)\,|\,r\le 1\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}\sqrt{1-r^2}\cdot abcr^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr$$

$$=abc\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{abc}{4}\pi^2$$

$\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr=\int_0^1\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}d\sin\theta$ $\quad$ 记 $r=\sin\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{16}$$

第十讲：三重积分 > 换元法 > 球面坐标 > 广义球面坐标

$a，b，c>0，\Omega=\{(x，y，z)|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)}dxdydz$

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au \\ bv \\ cw \end{bmatrix}\cdots\cdots(1)\quad \Omega_1=\{(u，v，w)|u^2+v^2+w^2\le 1\}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}\sqrt{1-(u^2+v^2+w^2)}\cdot abcdudvdw$$

令 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{bmatrix}\cdots\cdots(2)\quad \Omega_1=\{(r，\varphi，\theta)|r\le 1\}$

$$\iiint\limits_{\Omega_1}\sqrt{1-(u^2+v^2+w^2)}\cdot abcdudvdw=\iiint\limits_{\Omega_1}\sqrt{1-r^2}\cdot abc\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$(1)(2)\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ar\sin\varphi\cos\theta \\ br\sin\varphi\sin\theta \\ cr\cos\varphi \end{bmatrix}$

广义球面坐标变换相当于伸缩变换后的球面坐标变换

第十讲：三重积分 > 换元法

a，b，c > 0，求平面$bcx+acy+abz=2abc$、$bx+ay=ab$、$cx+az=ac$、$cy+bz=bc$所围区域的体积

令$u=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$、$v=\frac{x}{a}+\frac{z}{c}$、$w=\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$

$bcx+acy+abz=2abc \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$ $\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2 \Rightarrow u+v+w=4$

$bx+ay=ab \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow u=1$

$cx+az=ac \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ $\qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow v=1$

$cy+bz=bc \Leftrightarrow \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow w=1$

$$J=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}=\left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}\right)^{-1}=\begin{vmatrix}1/a & 1/b & 0\\ 1/a & 0 & 1/c\\ 1/c & 1/b & 0\end{vmatrix}^{-1}=-\frac{abc}{2}$$

$$\iiint_{\Omega}dxdydz=\iiint_{\Omega'}|J|dudvdw=\frac{abc}{2}\iiint_{\Omega'}dudvdw \quad \Omega'\text{是平面}u+v+w=4、u=1、v=1、w=1\text{所围区域}$$

第十讲：三重积分 > 换元法

$a,\ b,\ c>0$，求平面$bcx+acy+abz=2abc$、$bx+ay=ab$、$cx+az=ac$、$cy+bz=bc$所围区域的体积

$\dfrac{abc}{2}\iiint\limits_{\Omega'}dudvdw$ $\quad\Omega'$是平面$u+v+w=4$、$u=1$、$v=1$、$w=1$所围区域

令$\begin{bmatrix}u'\\v'\\w'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u-1\\v-1\\w-1\end{bmatrix}$

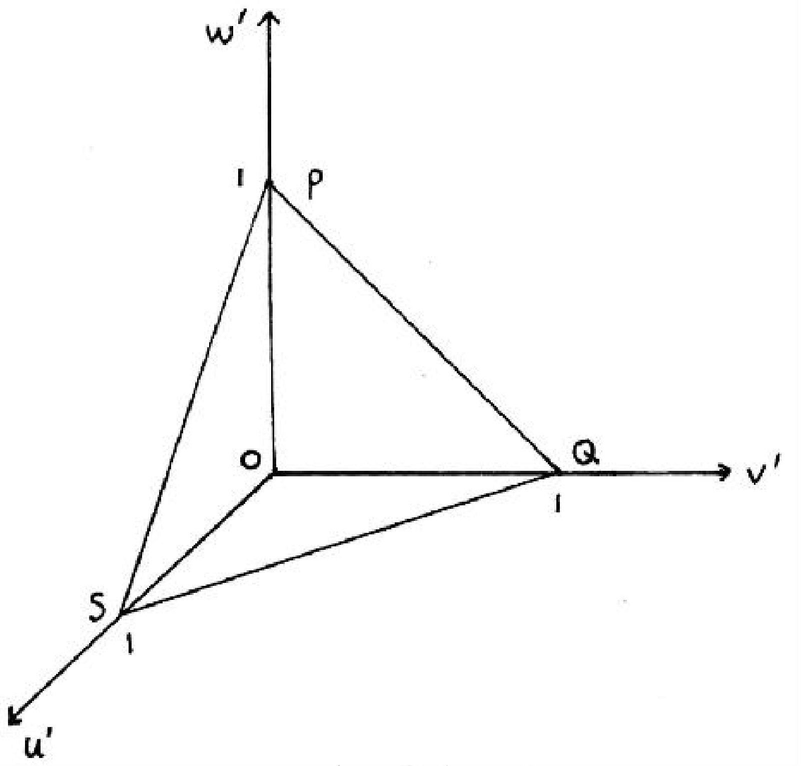
$u+v+w=4$、$u=1$、$v=1$、$w=1$

$\Rightarrow u'+v'+w'=1$、$u'=0$、$v'=0$、$w'=0$

$$\frac{abc}{2}\iiint\limits_{\Omega'}dudvdw=\frac{abc}{2}\iiint\limits_{\Omega''}du'dv'dw'$$

Ω''是平面$u'+v'+w'=1$、$u'=0$、$v'=0$、$w'=0$所围区

$$\iiint\limits_{\Omega''}du'dv'dw'=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$



第十讲：三重积分 > 换元法

$a, b>0$，$\Omega=\left\{(x, y, z)\,\middle|\, a\le\frac{xy}{z},\frac{xz}{y},\frac{yz}{x}\le b\right\}$，计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

令$u=\frac{xy}{z}$、$v=\frac{xz}{y}$、$w=\frac{yz}{x}\Rightarrow\Omega'=\{(u, v, w)|a\le u, v, w\le b\}$

$$J=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}=\left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}\right)^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2}\\ \frac{z}{y} & -\frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y}\\ -\frac{yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x}\end{vmatrix}^{-1}=-\frac{1}{4}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}(uv+uw+vw)|J|dudvdw=\frac{1}{4}\iiint\limits_{\Omega'}(uv+uw+vw)dudvdw$$

Ω'是关于平面$y=x$、$z=y$、$x=z$对称$\Rightarrow\iiint\limits_{\Omega'}uvdudvdw=\iiint\limits_{\Omega'}uwdudvdw=\iiint\limits_{\Omega'}vwdudvdw$

$$\iiint\limits_{\Omega'}uvdudvdw=\int_a^b udu\cdot\int_a^b vdv\cdot\int_a^b dw=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)\cdot(b-a)=\frac{1}{4}(b-a)^3(b+a)^2$$