中值定理与不等式

一. 考试内容

1. 介值定理:

设 $y=f(x)\in C_{[a,b]}$， $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$， $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，

若 $m\le C\le M$，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

【注】 $y=f(x)\in C_{[a,b]}$, $a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$, $\lambda_i\ge 0, i=1,2,\cdots,n$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，

则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

推论： 设 $y=f(x)\in C_{[a,b]}$，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

【注】 用于证明方程根的存在性. 即 $f(x)=0$ 有根.

2. 微分中值定理

(1) 罗尔定理：设 $y=f(x)\in C_{[a,b]}$，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则

$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

几何意义 水平切线.

【注】 用于证明导函数有根. 即 $f'(x)=0$， $f''(x)=0,\cdots$ 有根.

(2) 拉格朗日中值定理：设 $y=f(x)\in C_{[a,b]}$，在 (a,b) 内可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使

得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

【注】①a,b 大小关系不影响等式. ξ 在 a,b 之间.

②$\xi=a+\theta(b-a),\theta\in(0,1)$， $f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a)$

③当 $f(a)=f(b)$ 时，就是罗尔定理.

④**几何意义** 切线与割线平行.

（3）柯西定理：设函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处都不等于零，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

【注】证明有两个函数，一个中值的等式.

（4）泰勒公式

泰勒定理：如果函数 $y=f(x)$ 在包含点 $x=x_0$ 的一个邻域内具有直到 $n+1$ 阶的导数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

取 $x_0=0$，得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f'(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

称为麦克劳林公式. 余项可以写作 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 $0<\theta<1$.

【注】如果函数 $y=f(x)$ 在包含点 $x=x_0$ 的一个开区间 (a,b) 内具有直到 n 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的带佩阿诺型余项的 n 阶泰勒公式.

麦克劳林公式还可以写作

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f'(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$，余项是一个比 x^n 高阶的无穷小.

常用展开式

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\,,\quad \sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k-1})$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})\,,\quad \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\quad+o(x^n)\,,$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^k}{k!}+o(x^n)\,.$$

【注】证明含有高阶导数的等式及不等式，解决极限问题.

【例】计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

【解】 用带 Peano 余项的泰勒公式计算极限.

在点 $x=0$ 展开，得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\,,\ e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\ln(1-2x)=-2x-2x^2+o(x^2)$$

代入得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}=\frac{1}{24}\,.$$

【例】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n}),\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})]$

3. **积分中值定理**：若 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a\,,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)\,.$$

【注】 ① ξ 可以在开区间内取到. 通过辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 证明.

② （023、4）若 $f(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a\,,b]$ 上可积且定号, 则 $\xi\in[a\,,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx\,.$$

二．题型与例题

1. 证明$\exists\xi\in[a,b]$或(a,b)，使得$f(\xi)=0,[f(\xi)=C]$. 或$f(x)=0$有根.

方法：用介值定理或零点定理.

【例 1】$y=f(x)\in C_{[a,b]}$，$f(a),f(b)$分别是$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值, 证明：$\exists\xi\in[a,b],\ni\int_a^b f(x)dx=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$.

【证明】令$F(x)=f(a)(x-a)+f(b)(b-x)$,

因为$F'(x)=f(a)-f(b)>0$,所以，$F(x)\nearrow$,

其最小值与最大值分别为$f(b)(b-a),f(a)(b-a)$,又$f(b)\le f(x)\le f(a)$,

所以，$F(a)=f(b)(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le f(a)(b-a)=F(b)$,

由介值定理$\exists\xi\in[a,b],\ni\int_a^b f(x)dx=F(\xi)=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$.

【例 2】设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，证明：

存在$\xi\in(0,1),\ni f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$.

2. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0,[f''(\xi)=0,\cdots]$.

方法：用罗尔定理，费尔马引理

（1）$f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$.

(2) $f(a)=f(c)=f(b)$

$$\Rightarrow\exists\xi_1\in(a,c),\ni f'(\xi_1)=0;\exists\xi_2\in(c,b),\ni f'(\xi_2)=0$$

$$\Rightarrow\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),\ni f''(\xi)=0.$$

【例 3】设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在开区间$(0,3)$内存在二阶导数，且$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$.

（Ⅰ）证明：存在$\eta\in(0,2)$，使得$f(\eta)=f(0)$；

（Ⅱ）证明：存在$\xi\in(0,3)$，使得$f''(\xi)=0$.

【证明】（Ⅰ）因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，

记 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，则 $F(x)\in C_{[0,2]}$，在 $(0,2)$ 可导，由拉格朗日中值定理存在存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2F'(\eta)=2f(\eta)$，所以 $2f(0)=2f(\eta)$，即 $f(\eta)=f(0)$.

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，且 $f(0)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$，由连续函数介值定理，

存在 $\eta_1\in[2,3]$，使得 $f(\eta_1)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$.

$f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在开区间 $(0,3)$ 内存在二阶导数，由 $f(0)=f(\eta)=f(\eta_1)$ 及罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,\eta_1)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 4】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明：

（I）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（II）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

【证明】(I) 因为 $f(1)>0$，又由极限的保号性及 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知在 $x=0$ 的右邻域 $0<x<\delta$ 内 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，而 $x>0$ 所以 $f(x)<0$, 显然 $f(\dfrac{\delta}{2})<0$，由题设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，从而 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，有连续函数的零点定理可知存在 $\xi\in(\dfrac{\delta}{2},1)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$. 即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

（II）由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知 $f(0)=0$, 又 $f(\xi)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 由罗尔定理：存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)=0$.

设 $F(x)=f(x)f'(x)$, 则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，由罗尔定理：存在

$\eta_1 \in (0,\eta), \eta_2 \in (\eta,\xi)$，使得 $F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$，即方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根. .

【注】连续函数零点定理+罗尔定理

【例 5】设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$

试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【证 1】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, \quad 0\le x\le \pi$；则有 $F(0)=F(\pi)=0$，又因为

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

所以有 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F(\xi)\sin\xi=0$，否则，$F(x)\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内或恒正或恒负，均与 $\int_0^\pi F(x)\sin xdx=0$ 矛盾，而 $\sin\xi$ 在 $(0,\pi)$ 内不为零，所以 $F(\xi)=0$，从而 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$，$\xi\in(0,\pi)$，对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔定理，知存在 $\xi_1\in[0,\xi],\xi_2\in[\xi,\pi]$，使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【证 2】 由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 知存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，使得 $f(\xi_1)=0$.否则，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内或恒正或恒负，均与 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 矛盾.

若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 仅有一个实根，由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 可知 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 内与 (ξ_1,π) 内反号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内，$f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$，于是由 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 内单调递减可知：

$$0=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx>0$$

矛盾，从而，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少还有一根，即存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi),\xi_1\ne\xi_2$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【例 6】设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，试证必存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=0.$

【证明】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0\Leftrightarrow f(0)=0, f'(0)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导， $f(0)=f(1)=0$,由罗尔定理知，必存在 $\xi_1\in(0,1)$ ，使 $f'(\xi_1)=0.$

$f'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上连续，在 $(0,\xi_1)$ 内可导， $f'(0)=f(\xi_1)=0$,由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$ ，使 $f''(\xi)=0.$

【注】 $f(1)+f(2)+f(3)=9$ ， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x)-2]}{x}=0$

【例 7】设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导， x_1 与 x_2 是 (a,b) 内的两点， $g(x)$ 由下式定义：

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, & x\neq x_1\\ f'(x_1), & x=x_1\end{cases}$$

证明：对 $f'(x_1)$ 与 $g(x_2)$ 之间的任何值 μ , 在 x_1 与 x_2 之间至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi)=\mu.$

【证明】不妨设 $x_1<x_2$ ，因为 $\lim\limits_{x\to x_1}g(x)=f'(x_1)$ ，可见 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由介值定理知，存在 $\eta\in[x_1,x_2], g(\eta)=\mu.$

又根据拉格朗日中值定理，有

$$\exists\xi\in(x_1,\eta)\subset(x_1,x_2)，使\quad f'(\xi)=\frac{f(\eta)-f(x_1)}{\eta-x_1}=g(\eta)=\mu.$$

【例 8】(071,2） 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 内二阶可导，且存在相等的最大值，由 $f(a)=g(a)$ ， $f(b)=g(b)$ ，证明：

（1）存在 $\eta\in(a,b)$, 使得 $f(\eta)=g(\eta)$;

（2）（073,4）存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析】由所证结论 $f''(\xi)=g''(\xi)$ 可联想到构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ ，然后根据题设条件利用罗尔定理证明.

【证明】令 $F(x)=f(x)-g(x)$ ，则 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且

$F(a)=F(b)=0$.

（1）若 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内同一点 c 取得最大值，则 $f(c)=g(c)\Rightarrow F(c)=0$，

于是由罗尔定理可得，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再利用罗尔定理，可得　存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（2）若 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内不同点 c_1,c_2 取得最大值，则 $f(c_1)=g(c_2)=M$，于是

$$F(c_1)=f(c_1)-g(c_1)>0,F(c_2)=f(c_2)-g(c_2)<0,$$

于是由零值定理可得，存在 $c_3\in(c_1,c_2)$，使得 $F(c_3)=0$

于是由罗尔定理可得，存在 $\xi_1\in(a,c_3),\xi_2\in(c_3,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再利用罗尔定理，可得 ，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【注】对命题为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明，一般利用以下两种方法：

方法一：验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，利用极值存在的必要条件或费尔马定理可得证；

方法二：验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在包含 $x=\xi$ 于其内的区间上满足罗尔定理条件.

3. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $G[\xi,f(\xi),f'(\xi),\cdots]=0$.

方法：（1）$\xi\to x$，$G[x,f(x),f'(x),\cdots]=0$

（2）恒等变形，便于积分，得 $F[x,f(x)]=C$ 或 $F[x,f(x)]=C_1x+C_2$.

（3）辅助函数 $F[x,f(x)]$

记住以下函数的求导公式是有益的：

$$F(x)=e^{\pm kx}f(x),e^{\pm f(x)}g(x),f(x)g(x),\frac{g(x)}{f(x)},f(x)\int_a^x g(t)dt,\int_a^x f(t)dt\int_a^x g(t)dt$$

$$\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt,\quad f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$$

【例 9】(013) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx, k>1$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

【分析】 $\xi\to x$

【证明】 令 $F(x)=xe^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续. 用定积分中值定理,

$\exists\xi\in[0,\frac{1}{k}]\subset[0,1)$，使得

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx=k\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1)\frac{1}{k}=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1)$$

$$\Rightarrow \xi_1e^{-\xi_1}f(\xi_1)=e^{-1}f(1)\text{，即 } F(\xi_1)=F(1)$$

用罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

【例 10】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，

$f(\frac{1}{2})=1$.

（1）证明：存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

（2）证明：存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

【证明】(1) 设 $F(x)=f(x)-x\in C_{[\frac{1}{2},1]}$，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，

$F(1)=f(1)-1=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$, 由零点定理, $\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$, $\ni F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

(2) 设 $F(x)=e^{-x}[f(x)-x]\in C_{[0,\xi]}$, 在 $(0,\xi)$ 可导，$F(0)=F(\xi)$，由拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(0,\xi)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

【例 11】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f(0)=f(1)=0$，则存在 $\xi\in(0,1)$，

使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

【证明 1】设 $F(x)=f'(x)(1-x)^2$，

$f(0)=f(1)=0$．根据罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使 $f'(c)=0$．

从而 $F(c)=F(1)$．根据罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$．

【证明 2】 设 $F(x)=f(x)(1-x)$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二次可导，

且 $F(0)=F(1)=0$．根据罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使 $F'(c)=0$．

又 $F'(x)=f'(x)(1-x)-f(x)$，所以 $F'(1)=0$．在区间 $[c,1]$ 上对 $F'(x)$ 用罗尔定理，存在 $\xi\in(c,1)$ 使 $F''(\xi)=0$．因为 $F''(x)=f''(x)(1-x)-2f'(x)$，

所以 $f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$．整理即得结果.

4. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $G[a,b,f(a),f(b),f(\xi),f'(\xi),\cdots]=0$ 或 $G[a,b,f(a),g(a),f(b),g(b),f(\xi),g(\xi),f'(\xi),g'(\xi),\cdots]=0$.

方法：**直接用拉格朗日中值定理和柯西中值定理（要求 a,b 分离）**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

【例 12】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，其中 $0<a<b$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得（1）(964) $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi+f(\xi)$.

(2) $\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=(b-a)\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$，其中，$f(x)>0$.

(3) $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^{n-1}[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]$.

(4) $bf(a)-af(b)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](b-a)$.

(5) $ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$.

(6) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

（7） $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$.

(8) $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$. $g(x)\neq 0$

5. 证明$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$G[\xi,\eta,f(\xi),g(\eta),f'(\xi),g'(\eta),\cdots]=0$.

方法:两次用拉格朗日中值定理或柯西中值定理，化为单介值问题

【例 13】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{f(\eta)+\eta f'(\eta)}=\dfrac{a+b}{2\eta}$.

【分析】 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi+f(\xi)$，则

$$\frac{bf(b)-af(a)}{(b-a)f(\eta)+\eta f'(\eta)}=\frac{a+b}{2\eta}，即\frac{bf(b)-af(a)}{(b^2-a^2)}=\frac{f(\eta)+\eta f'(\eta)}{2\eta}$$

$F(x)=xf(x),G(x)=x^2$

【例 14】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导, 且 $0\le a\le b\le\dfrac{\pi}{2}$. 证明：至少存在两点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$.

【证明】设 $g_1(x)=\sin x$， $g_2(x)=\cos x$ 由柯西定理，$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\dfrac{f'(\xi)}{\cos\xi}$， $\dfrac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=-\dfrac{f'(\eta)}{\sin\eta}$，比较两式，得

$\dfrac{f'(\xi)}{\cos\xi}(\sin b-\sin a)=-\dfrac{f'(\eta)}{\sin\eta}(\cos b-\cos a)$，即 $f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\dfrac{\sin\eta}{\cos\xi}$.