一、变量可分离方程

如果一阶微分方程可以化为下列形式：

$$g(y)\,\mathrm{d}\,y = f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

则称原方程为变量可分离的方程。

运用积分方法即可求得变量可分离方程的通解：

$$\int g(y)\,\mathrm{d}\,y = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

积分的结果 $y = y(x, C)$ 就是原方程的通解 。

其中C 为积分后出现的任意常数。

将一个方程化为变量分离方程并求出其通解的过程，称为分离变量法。

例

求方程 $(1+y^2)\,\mathrm{d}x + y(x-1)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解。

解

方程两边同除以 $(x-1)(1+y^2)$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-1} = -\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}。$$

两边同时积分，得

$$\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \ln|C|,$$

即

$$|x-1|\sqrt{1+y^2} = |C|。$$

故所求通解为

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+y^2}} + 1。$$

因为只求通解，所以不必再讨论了。

你认为还需要讨论吗？为什么？

二、齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

齐次方程

变量代换 $y=ux$

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

变量分离方程

代入原方程，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$$

例　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解。

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，

于是，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\frac{1}{\tan x}=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|,$$

即　$$\sin u=Cx,$$

故原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$。

例. 求 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解.

分析: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y-4}{x+y-1}$ 齐次?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y-4}{x+y-1} \xrightarrow[\substack{x=X+h \\ y=Y+k}]{\text{变换}} \frac{dY}{dX} = -\frac{2X+Y}{X+Y}$$

非齐次 (h, k为待定常数) 齐次

$h=?$ $k=?$

$$2x+y-4 = 2(X+h)+(Y+k)-4 = 2X+Y\underbrace{+2h+k-4}_{0}$$

$$x+y-1 = (X+h)+(Y+k)-1 = X+Y\underbrace{+h+k-1}_{0}$$

∴ 求解 $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ 得 h, k.

例. 求 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y-4}{x+y-1}}$$

解: 由 $\begin{cases}2x+y-4=0\\x+y-1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix}x=X+h\\y=Y+k\end{matrix}}$$

令 $x=X+3$, $y=Y-2$, 得 $\dfrac{dY}{dX}=-\dfrac{2X+Y}{X+Y}$

$$\boxed{\frac{dY}{dX}=-\frac{2X+Y}{X+Y}}$$

$$=-\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$$

令 $u=\dfrac{Y}{X}$, 则 $Y=Xu$, $\dfrac{dY}{dX}=u+X\dfrac{du}{dX}$

$\therefore\ u+X\dfrac{du}{dX}=-\dfrac{2+u}{1+u}$

分离变量: $-\dfrac{u+1}{u^2+2u+2}du=\dfrac{dX}{X}$

积分得 $\ln|C|-\frac{1}{2}\ln|u^2+2u+2|=\ln|X|$

$$\frac{|C|}{\sqrt{u^2+2u+2}}=|X|$$

$\sqrt{u^2+2u+2}\,|X|=|C|$ $\quad(u^2+2u+2)X^2=C^2$

$$Y^2+2XY+2X^2=C^2$$

$$(y+2)^2+2(x-3)(y+2)+2(x-3)^2=C^2$$

$\therefore$ 通解为 $2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C_1$

例1. 求 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-2z+3}{2x-4z-3}$ 的通解.

分析：由 $\begin{cases} \underbrace{x-2z}+3=0 \\ \underbrace{2x-4z}_{\text{系数成比例}}-3=0 \end{cases}$ 无法求出 h,k.

令 $u=x-2z$，则 $\dfrac{du}{dx}=1-2\dfrac{dz}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}$

代入得：$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+3}{2u-3}$ 可分离变量

$(3-2u)du=9dx$

积分得 $3u-u^2=9x+C$

∴通解为 $3(x-2z)-(x-2z)^2=9x+C$.

三、一阶线性微分方程

形如

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的方程称为一阶线性微分方程。

当 $q(x) \equiv 0$ 时，方程称为一阶齐次线性方程。

当 $q(x) \not\equiv 0$ 时，方程称为一阶非齐次线性方程。

习惯上，称

$$y' + p(x)y = 0$$

为方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

所对应的齐次方程。

一阶齐线性方程的解

方程 $y' + p(x)y = 0$ 是一个变量可分离方程。

运用分离变量法，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x, \quad (y \neq 0),$$

两边积分，得

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

$y = 0$ 对应于 $C = 0$。

故

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}。$$

表示一个原函数

记 $C = \pm e^{C_1}$，得一阶齐线性方程的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}。$$

一阶非齐线性方程的解

比较两个方程：

$$y' + p(x)y = 0，\qquad y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

$$y' + p(x)y = q(x)。\qquad y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

“常数变易法” 经常用来由齐次问题推出相应的非齐次问题。

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令 $y = C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，则

$$y' = (C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x})' = C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

将 y 及 y' 的表达式代入方程中，得

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}p(x) = q(x),$$

故 $$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x),$$

即 $$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

上式两边积分，求出待定函数

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C \qquad (C\text{为任意常数})。$$

代入 $y=C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$中，得一阶非齐线性 方程的通解为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)。$$

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

例　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解。

不是线性方程

解　**原方程可以改写为**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=y^2,$$

这是一个以 y 为自变量的一阶非齐线性方程，其中

$$p(y)=-\frac{1}{y},\quad q(y)=y^2,$$

故原方程的通解为

$$x=e^{-\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}\left(\int y^2 e^{\int(-\frac{1}{y})\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\frac{1}{2}y^3+Cy\text{。}$$

四、伯努利方程

形如

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq 0, 1)$$

的方程称为伯努利方程。

令 $u = y^{1-n}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

代入伯努利方程后，可将其化为一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

于是，原方程的通解为

$$y^{1-n}$$

$$u = e^{-\int (1-n)p(x)\mathrm{d}x}\left(\int (1-n)q(x)e^{\int (1-n)p(x)\mathrm{d}x}dx + C\right)$$ 。

$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \xrightarrow{变换}$ 线性方程？

$y^{-n}y' + p(x)\underbrace{\boxed{y^{1-n}}}_{u} = q(x)$

令 $u = y^{1-n}$，则 $\frac{du}{dx} = (1-n)\underbrace{y^{-n}\frac{dy}{dx}}$

$\therefore y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}$ 代入得

$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + p(x)u = q(x)$

即 $\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ 线性.

例 求方程 $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ 的通解，其中 $y \geq 0$，$x \neq 0$。

解 这是 $n = \frac{1}{2}$，$p(x) = -\frac{4}{x}$，$q(x) = x$ 的伯努利方程。

令 $u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$，则

$$u = e^{-\int (1-n)p(x)\mathrm{d}x}\left(\int (1-n)q(x)e^{\int (1-n)p(x)\mathrm{d}x}dx + C\right)。$$

$$= e^{-\int (-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}\left(\int \frac{x}{2}e^{\int (-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right),$$

从而，原方程的通解为

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2。$$

五、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称 $$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

为全微分方程 .

判别: P, Q **在某单连通域D内有连续一阶偏导数,** **则**

① **为全微分方程** $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

2. 由 $\mathrm{d}\,u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例. 求解

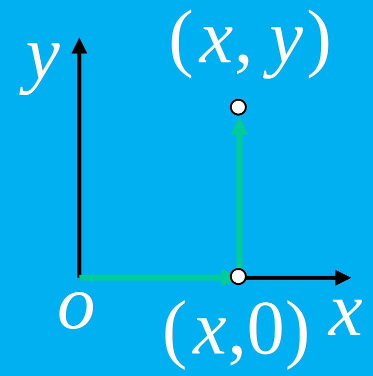
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, **故这是全微分方程.**

取 $x_0=0,\ y_0=0,$ **则有**

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$