第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

关于泰勒中值定理的不等式

将$f(\alpha)$在β处展开

α，β是区间端点a，b或区间中点$\frac{a+b}{2}$或极值点(包括最值点)c或任意点x

条件 结论 特殊点

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f''(x)|\le 1$，$f(x)$在区间$(0,1)$内取得最大值$\frac{1}{4}$

证明:$|f(0)|+|f(1)|<1$

将区间端点的值在最值点展开

设$f(c)=\max\limits_{0<x<1} f(x)$，$c\in(0,1)\Rightarrow f'(c)=0$

$$f(0)=f(c)-cf'(c)+\frac{c^2}{2}f''(\xi_1)\qquad 0<\xi_1<c$$

$$f(1)=f(c)+(1-c)f'(c)+\frac{(1-c)^2}{2}f''(\xi_2)\qquad c<\xi_2<1$$

$$|f(0)|=\left|\frac{1}{4}+\frac{c^2}{2}f''(\xi_1)\right|\le\frac{1}{4}+\frac{c^2}{2}|f''(\xi_1)|\le\frac{1}{4}+\frac{c^2}{2}$$

$$|f(1)|=\left|\frac{1}{4}+\frac{(1-c)^2}{2}f''(\xi_2)\right|\le\frac{1}{4}+\frac{(1-c)^2}{2}|f''(\xi_2)|\le\frac{1}{4}+\frac{(1-c)^2}{2}$$

$$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\frac{c^2+(1-c)^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{(c+1-c)^2-2c(1-c)}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

$f(x)$二次可微，$f(0)=f(1)=0,\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=2$，证明：$\min\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\le -16$

设$f(c)=\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)$，$c\in[0,1]\Rightarrow c\in(0,1)\Rightarrow f'(c)=0$

将区间端点的值在最值点展开

$$f(0)=f(c)-cf'(c)+\frac{c^2}{2}f''(\xi_1) \qquad 0<\xi_1<c$$

$$f(1)=f(c)+(1-c)f'(c)+\frac{(1-c)^2}{2}f''(\xi_2) \qquad c<\xi_2<1$$

$$\Rightarrow f''(\xi_1)=-\frac{4}{c^2} \quad f''(\xi_2)=-\frac{4}{(1-c)^2}$$

c与$1-c$当中必有一个$\le\dfrac{1}{2}$ $\qquad -\dfrac{4}{c^2}$与$-\dfrac{4}{(1-c)^2}$当中必有一个$\le-\dfrac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$f''(\xi_1)$与$f''(\xi_2)$当中必有一个≤ -16

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a, b)$，使得

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)|$$

在区间端点展开

f(?)　　待定x　f(x)

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi_1)\qquad a<\xi_1<x$$

$$f(x)=f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{1}{2}(x-b)^2 f''(\xi_2)\qquad x<\xi_1<b$$

$$0=f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(x-b)^2 f''(\xi_2)$$

$$|f(a)-f(b)|=\left|\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(x-b)^2 f''(\xi_2)\right|\le\frac{1}{2}(x-a)^2|f''(\xi_1)|+\frac{1}{2}(x-b)^2|f''(\xi_2)|$$

$$\le\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2}|f''(\xi)|\qquad |f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}，\xi\in\{\xi_1, \xi_2\}$$

$$|f''(\xi)|\ge\frac{2}{(x-a)^2+(x-b)^2}|f(a)-f(b)|\qquad 取x=\frac{a+b}{2}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1), |f''(x)|\le 2$，证明：当$0<x<1$时，$|f'(x)|<1$

将区间端点的值在任意点展开

$$f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1) \qquad 0<\xi_1<x$$

$$f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2) \qquad x<\xi_2<1$$

$$0=f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)-\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)$$

$$|f'(x)|=\left|\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)-\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)\right|\le\frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)|+\frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|$$

$$\le(1-x)^2+x^2$$

$$=(1-x+x)^2-2x(1-x)<1$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$(+\infty,-\infty)$内二阶可导，并且$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$

证明：$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$

将任意点的值在任意点展开

$$f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2}f''(\xi_1)$$ ξ_1介于x、y之间

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_1)$$ ξ_1介于x、$x+h$之间

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(\xi_1)}{h}$$

$$|f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(\xi_1)\right|}{|h|}\le\frac{|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(\xi_1)|}{|h|}\le\frac{2M_0+\frac{h^2}{2}M_2}{|h|}$$

$$\frac{2M_0+\frac{h^2}{2}M_2}{|h|}\ge\frac{2\sqrt{2M_0\cdot\frac{h^2}{2}M_2}}{|h|}=2\sqrt{M_0M_2}$$ 当$2M_0=\frac{h^2}{2}M_2$时取等号即当$h=\pm2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$时取等号

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$(+\infty,-\infty)$内二阶可导，并且$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$

证明:$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_1)\qquad \xi_1\text{介于}x、x+h\text{之间}\qquad h>0$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_2)\qquad \xi_2\text{介于}x、x-h\text{之间}$$

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^2}{2}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))}{2h}$$

$$|f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))\right|}{2h}\le\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)}{2h}$$

$$\le\frac{2M_0+h^2M_2}{2h}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$(+\infty,-\infty)$内二阶可导，并且$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$

证明:$|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$

$$\frac{2M_0+h^2M_2}{2h}\ge\frac{2\sqrt{2M_0\cdot h^2M_2}}{2h}=\sqrt{2M_0M_2}$$ 当$2M_0=h^2M_2$时取等号即当$h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$时取等号

$$|f'(x)|\le\frac{2M_0+h^2M_2}{2h}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$(+\infty,-\infty)$内二阶可导，并且$|f(x)|\le M_0$，$|f'''(x)|\le M_3$

证明:$|f'(x)|\le\sqrt[3]{\dfrac{9M_0^2M_3}{8}}$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)\qquad x<\xi_1<x+h\qquad h>0$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(\xi_2)\qquad x-h<\xi_2<x$$

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))}{2h}$$

$$|f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))\right|}{2h}\le\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^3}{6}(|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|)}{2h}$$

$$\le\frac{2M_0+\frac{h^3}{3}M_3}{2h}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

设函数$f(x)$在$(+\infty,-\infty)$内二阶可导，并且$|f(x)|\le M_0$，$|f'''(x)|\le M_3$

证明:$|f'(x)|\le \sqrt[3]{\dfrac{9M_0^2M_3}{8}}$

$$\frac{2M_0+\frac{h^3}{3}M_3}{2h}=\frac{M_0}{h}+\frac{h^2M_3}{6}=\frac{M_0}{2h}+\frac{M_0}{2h}+\frac{h^2M_3}{6}\ge 3\sqrt[3]{\frac{M_0}{2h}\cdot\frac{M_0}{2h}\cdot\frac{h^2M_3}{6}}=\sqrt[3]{\frac{9M_0^2M_3}{8}}$$

当$\dfrac{M_0}{2h}=\dfrac{M_0}{2h}=\dfrac{h^2M_3}{6}$时取等号即当$h=\sqrt[3]{\dfrac{3M_0}{M_3}}$时取等号

$$|f'(x)|\le\frac{2M_0+\frac{h^3}{3}M_3}{2h}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

下凸函数的加权琴生不等式

设$f''(x)\ge 0$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$且$\lambda_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$

则$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

设$x_0=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$

i 若$x_k\ne x_0$ $f(x_k)=f(x_0)+(x_k-x_0)f'(x_0)+\dfrac{(x_k-x_0)^2}{2}f''(\xi_k)$ ξ_k介于x_k、x_0之间

$\Rightarrow f(x_k)\ge f(x_0)+(x_k-x_0)f'(x_0)\Rightarrow\lambda_kf(x_k)\ge\lambda_kf(x_0)+\lambda_k(x_k-x_0)f'(x_0)$

ii 若$x_k=x_0$ $f(x_k)=f(x_0)+(x_k-x_0)f'(x_0)$ $\Rightarrow\lambda_kf(x_k)=\lambda_kf(x_0)+\lambda_k(x_k-x_0)f'(x_0)$

故总有$\lambda_kf(x_k)\ge\lambda_kf(x_0)+\lambda_k(x_k-x_0)f'(x_0)$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_kf(x_k)\ge f(x_0)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k+f'(x_0)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x_k-x_0)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\lambda_kf(x_k)\ge f(x_0)\qquad\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x_k-x_0)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_0=x_0-x_0=0$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

下凸函数的加权琴生不等式

设$f''(x)\ge 0$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$且$\lambda_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$

则$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

上凸函数的加权琴生不等式

设$f''(x)\le 0$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$且$\lambda_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$

则$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\ge\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

下凸函数的琴生不等式

设$f''(x)\ge 0$则$f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

上凸函数的琴生不等式

设$f''(x)\le 0$则$f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

均值不等式：$x_k>0$，则$\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\ge\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ge\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}$

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\ge\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\ge\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

设$f(x)=x^2$，$f''(x)=2>0$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\Leftrightarrow\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}$$

设$f(x)=\ln x$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ge\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\Leftrightarrow\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}\le\frac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n}$$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

$0<x_k<\pi \quad k=1,2,\cdots,\ n$ 记$x_0=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明：$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{x_k}\le\left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^n$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{x_k}\le\left(\frac{\sin x_0}{x_0}\right)^n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\sin x_k}{x_k}\le n\ln\frac{\sin x_0}{x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{\sin x_k}{x_k}\le\ln\frac{\sin x_0}{x_0}$$

设$f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\cot x-\dfrac{1}{x}$ $\quad f''(x)=-\csc^2 x+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}<0$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

$a，b>0，p，q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明：$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\Leftrightarrow\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{q}\ln b\le\ln\left(\frac{1}{p}\cdot a+\frac{1}{q}\cdot b\right)$$

设$f(x)=\ln x$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

第五讲：微分与不等式 > 泰勒中值定理

正数p，q，r满足$2p=q+r$，证明：$\dfrac{p^{q+r}}{q^q r^r}\le 1$

$$\frac{p^{q+r}}{q^q r^r}\le 1\Leftrightarrow p^{q+r}\le q^q r^r\Leftrightarrow\left(\frac{q+r}{2}\right)^{q+r}\le q^q r^r\Leftrightarrow (q+r)\ln\frac{q+r}{2}\le q\ln q+r\ln r$$

$$\Leftrightarrow\frac{q+r}{2}\ln\frac{q+r}{2}\le\frac{q\ln q+r\ln r}{2}$$

设$f(x)=x\ln x$，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$