傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

函数项级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1\,,\ \cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos 2x\,,\ \sin 2x\,,\ \cdots,\ \cos nx\,,\ \sin nx\,,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0 .

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0 \qquad (n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx=\frac{1}{2}\big[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\big]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\big]\mathrm{d}\,x=0\ (k\neq n)$$

同理可证： $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n\,)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$f\cdot g=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \qquad f\cdot g=0 \Longleftrightarrow f\perp g$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分不等于 0． 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}}$$

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，

如果$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$a_0 = ?$ $a_k = ?$ $b_k = ?$

二、函数展开成傅里叶级数

定理 2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证: 由定理条件，对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\pi$$ (利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 $\sin kx$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数 $f(x)$的**傅里叶系数；** 以$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数** .

定理3 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数, 并满足**狄利克雷**(Dirichlet)**条件**:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

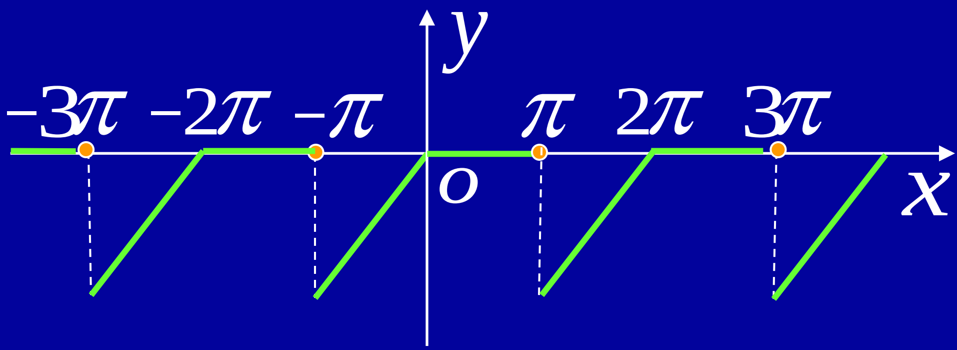
则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 .

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx \mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + (\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+ (\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

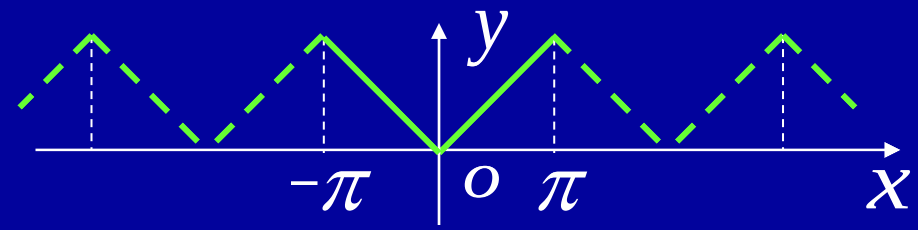
$$+ (\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq (2k-1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\dfrac{0+(-\pi)}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

例2. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数 .

解: 将 $f(x)$延拓成以 2π为周期的函数 $F(x)$, 则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0 \quad , & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots \right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$\because \ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$, $\therefore \ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$

又 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

三、正弦级数和余弦级数

1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

定理4．对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数, 它的傅里叶系数为

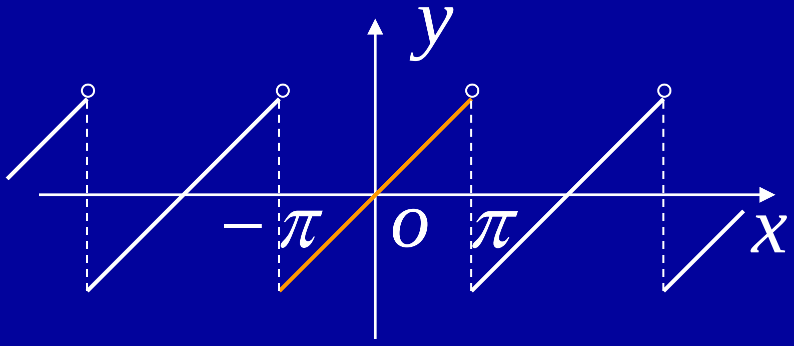
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数 , 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例3. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



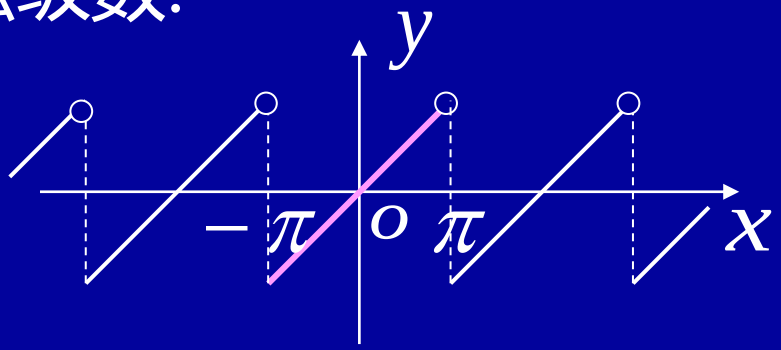
$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:



$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

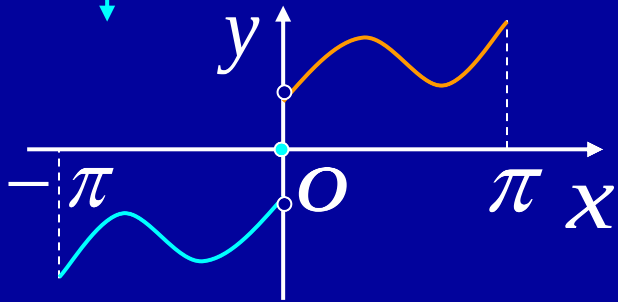
$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq(2k+1)\pi\,,k=0,\pm1\,,\cdots)$$

2. 在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

$f(x),\ \ x \in [0, \pi]$

奇延拓

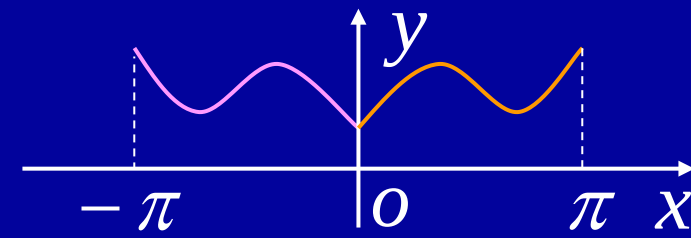


$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓



$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展成余弦级数

例4. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

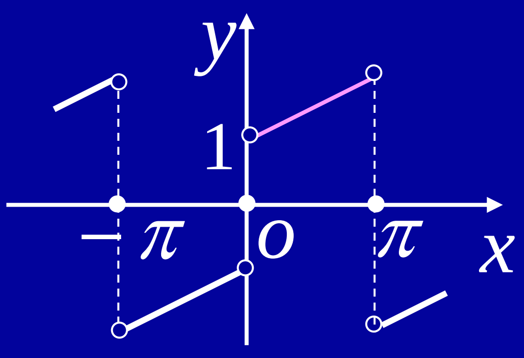
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

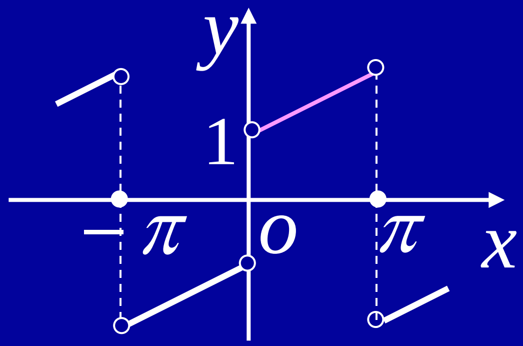
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



因此得

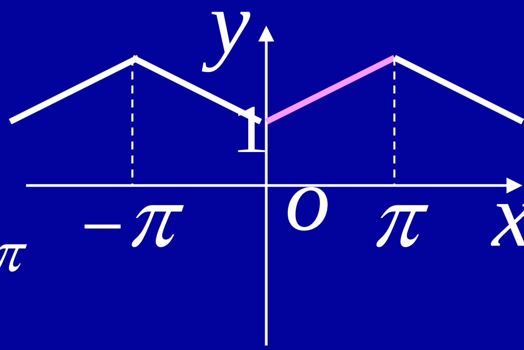
$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$, 级数的和为0 , 与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$



$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

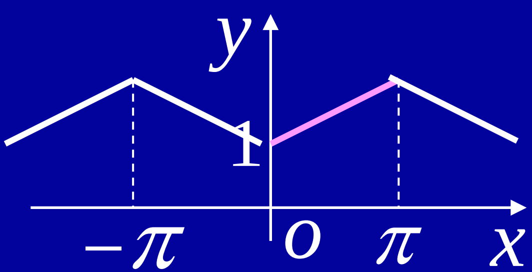
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$