Hausaufgaben

PD Dr. C. Serpé *Abgabe:* 09.12.2022, 12 Uhr

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in \mathbb{R}^{>0}$ die Gleichung $x^n = a$ eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

b) Entwerfen Sie ein Programm, welches $\sqrt[3]{2}$ auf zehn Dezimalstellen genau berechnet.

Hinweis: Verwenden Sie die Intervallhalbierungsmethode, welche sich auch im Beweis des Zwischenwertsatzes wiederfindet.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen Fixpunkt hat, d. h. ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 3 *(8 Punkte)* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Funktion mit $f(a) < f(b)$. Zeigen Sie:

a) $\forall x \in (a,b) : f(a) < f(x) < f(b)$

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz

b) f ist streng monoton steigend.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil a)

Aufgabe 4 *(8 Punkte)* Für welche $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ist die Funktion

$$\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\ln(a) \cdot x)$$

streng monoton fallend und für welche streng monoton wachsend?

Begründen Sie Ihre Antwort. Verwenden Sie dabei nicht die Ableitung der Funktion.

Aufgabe 5 *(Nikolausaufgabe)* Der Nikolaus will Knecht Ruprecht, seinen persönlichen Assistenzengel und eine sehr große Dose mit Weihnachtskeksen über einen Fluss bringen. Grundsätzlich wäre das nicht so problematisch, hätte er seinen fliegenden Nikolaus-Schlitten dabei. Da sich dieser aber aktuell noch in der Weihnachtwichtel-Reparaturwerkstatt befindet, hat er nur Zugriff auf das recht kleine Nikolaus-Floß. Dieses Floß ist tatsächlich so klein, dass der Nikolaus entweder nur den Engel, Knecht Ruprecht oder die sehr große Dose mit Weihnachtskeksen hinüberfahren kann. Eine weitere Hürde besteht darin, dass in Abwesenheit des Nikolauses der Engel die Kekse isst und Knecht Ruprecht den Engel zu Tode ängstigt. Kann es der Nikolaus trotzdem schaffen, alle drei (und sich selbst) sicher über den Fluss zu bringen?
Hinweis: Jede gelöste Nikolausaufgabe ergibt eine Extrapunkt bei den Punkten der gelösten Aufgaben. Entgegen den sonstigen Gewohnheiten können Sie bei der Lösung der Nikolausaufgaben weniger auf die formale Korrektheit als vielmehr auf eine schöne und kreative Darstellung achten. Bilder und auch Reime sind dabei durchaus erwünscht. Besonders kreative Lösungen werden extra ausgezeichnet

Themen des Kurzvortrages

- Wann heißt eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ *kompakt*? Erläutern Sie die beiden Eigenschaften, die K besitzen muss, mit deren Definitionen.
- Geben Sie Beispiele für Teilmengen von $\mathbb{R}$, die
  - abgeschlossen und unbeschränkt,
  - nicht abgeschlossen und beschränkt,
  - weder noch,
  - kompakt sind.
- Zitieren Sie den Satz aus der Vorlesung, dass $f(K)$ wieder kompakt ist, wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist, und außerdem die Folgerung, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein Minimum/Maximum annimmt. Präsentieren Sie auch ein Gegenbeispiel einer stetigen Funktion f auf einem nicht kompakten Definitionsbereich D ohne Minimum und Maximum.

Vorbereitung für die Anwesenheitsübungen nächste Woche

Die Anwesenheitsübungen vertiefen die weitergehenden Eigenschaften stetiger Funktionen aus den letzten beiden Dritteln des Stetigkeitskapitels. Hierfür ist nötig, dass Sie mit stetigen Funktionen vertraut sind. Bitte bereiten Sie insbesondere den **Zwischenwertsatz** und dessen Korollar vor.