MDL Lista 2, Paweł Zmarzły 314569

Zadanie 2

Treść

Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

Rozwiązanie

Wezmę n-elementowy zbiór N, m-elementowy zbiór M i k-elementowy zbiór K. Niech dla tych zbiorów zachodzi $M \subseteq K \subseteq N$.

$\binom{n}{k}$ to liczba możliwości wybrania zbioru K, tż. $K \subseteq N$.

W lewej stronie równania liczymy ilość możliwości wykonania następujących wyborów:

- Wybieramy zbiór K, tż. $K \subseteq N$.
- Wybieramy zbiór M, tż. $M \subseteq K$.

Mamy więc ilość sposobów, na jakie możemy wybrać zbiory N, K, M ($M \subseteq K \subseteq N$).

W prawej stronie równania, mamy $|N \setminus M| = n - m$ oraz $|K \setminus M| = k - m$. Liczymy więc ilość możliwości wykonania wyborów:

- Wybieramy zbiór M, tż. $M \subseteq N$.
- Wybieramy zbiór $K \setminus M$, tż. $K \setminus M \subseteq N \setminus M$.

Ponieważ $M \subseteq K$, to $K = (K \setminus M) \cup M$, i tę stronę równania również możemy interpretować jako liczbę sposobów wybrania zbiorów N, K, M.

Zadanie 6

Treść

Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci f: {1, 2, …, n} → {1, 2, …, n}.

Rozwiązanie

Funkcja niemalejąca może być reprezentowana ciągiem liczb a_i, reprezentującym przyrost funkcji między kolejnymi argumentami. Gdy dziedziną jest {1, 2, …, n}, to $a_i = f(i+1) - f(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dla wyrażenia $f(0)$ przyjmuję wartość 1.

Wtedy na przykład funkcja f: $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 4$, $n = 4$ ma reprezentację 0201.

Chcąc ustalić możliwe ciągi a_i, mamy sytuację analogiczną do umieszczania kulek w szufladach. Kulki oznaczę jako + (zwiększający wartość o 1), szufladki będą reprezentować wyrazy a_i oraz dodatkową liczbę „po prawej od wykresu funkcji”, bo funkcja nie musi osiągnąć maksymalnego przyrostu (dodatkową szufladkę można uznać za „kosz na śmieci” na kulki).

Dla powyższego przykładu funkcji f reprezentacja kulkami to: 0 | ++ | 0 | + | 0

Dla funkcji stałej $g(x) = 2, n = 3$: + | 0 | 0 | +

Mamy $n - 1$ kulek, $n + 1$ szuflad. Stosujemy wzór poznany na wykładzie i otrzymujemy odpowiedź:

$$\binom{n - 1 + n + 1 - 1}{n + 1 - 1} = \binom{2n - 1}{n}$$

Zadanie 7

Treść

Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Rozwiązanie

Aby przejść po takiej szachownicy, wieża musi przejść n pól w prawo i n pól w górę. Załóżmy, że w każdym kroku skacze o 1 pole – nie zmienia to trasy. Można ten proces przedstawić tak:

Wieża idzie od lewej do prawej w n krokach po 1 kolumnie. W każdej kolumnie może przejść o od zera do n pól w górę. Ostatecznie musi przejść n łącznie pól w górę.

Możemy rozpatrzyć to jako problem umieszczania kul w szufladkach. Kule reprezentują przesunięcia wieży o 1 pole w górę, łącznie jest ich n. Szufladki reprezentują kolumny szachownicy, w których będzie znajdywać się wieża (łącznie $n+1$ – szachownica ma $n+1$ rzędów i $n+1$ kolumn).

Liczba możliwości to

$$\binom{n+(n+1)-1}{(n+1)-1} = \binom{2n}{n}$$

Teraz z równania z 3. zadania otrzymujemy

$$\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

Wiedząc, że $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, mamy oczekiwane

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Zwinięta suma to $\binom{2n}{n}$.

Zadanie 8

Treść

Sprawdź prawdziwość relacji.

Rozwiązanie

$n^2 \in O(n^3)$ – TAK

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$
$$n^2 \in o(n^3) \Rightarrow n^2 \in O(n^3)$$

$n^3 \in O(n^{2.99})$ – NIE

$$\neg(\exists_{c>0}\exists_{n_0\in N}\forall_{n\geq n_0} f(n) \leq cg(n)) \Leftrightarrow \forall_{c>0}\forall_{n_0\in N}\exists_{n\geq n_0} f(n) > cg(n)$$

Weźmy dowolne $c > 0$ oraz $n_0 \in N$. Pokażmy, że istnieje takie $n \geq n_0$, że $f(n) > cg(n)$.

$$f(n) > cg(n)$$
$$n^3 > cn^{2.99}$$
$$n^{0.01} > c$$
$$n \geq (2c)^{100} \Rightarrow n^{0.01} \geq ((2c)^{100})^{0.01} = 2c > c$$

Zatem możemy wziąć $n = max\{(2c)^{100}, n_0\}$.

$2^{n+1} \in O(2^n)$ – TAK

$$c = 2, n_0 = 0, n \in N$$
$$c2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$
$$2^{n+1} = c2^n \Rightarrow 2^{n+1} \leq c2^n$$

$(n+1)! \in O(n!)$ – NIE

Weźmy dowolne $c > 0$ oraz $n_0 \in N$. Pokażmy, że istnieje takie $n \geq n_0$, że $f(n) > cg(n)$.

$$f(n) > cg(n)$$
$$(n+1)! > cn!$$
$$n+1 > c$$
$$n \geq c \Rightarrow n+1 \geq c+1 > c$$

Zatem możemy wziąć $n = max\{\lceil c \rceil, n_0\}$.

$log_2 n \in O(\sqrt{n})$ – TAK

Korzystając z reguły de L'Hopitala:

$$lim_{n\to\infty}\frac{log_2 n}{\sqrt{n}} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{ln(2)n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{ln(2)n} = lim_{n\to\infty}\frac{2}{ln(2)\sqrt{n}} = 0$$

$$log_2 n \in o(\sqrt{n}) \Rightarrow log_2 n \in O(\sqrt{n})$$

$\sqrt{n} \in O(log_2 n)$ – NIE

Weźmy dowolne $c > 0$ oraz $n_0 \in N$. Pokażmy, że istnieje takie $n \geq n_0$, że $f(n) > cg(n)$.

$$f(n) > cg(n)$$
$$n^{1/2} > c \cdot log_2 n$$
$$\frac{n^{1/2}}{log_2 n} > c$$

c jest wartością stałą. Korzystając z reguły de L’Hopitala:

$$lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{log_2 n} = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{ln(2)n}} = lim_{n\to\infty}\frac{ln(2)n}{2\sqrt{n}} = lim_{n\to\infty}\frac{ln(2)\sqrt{n}}{2} = \infty$$

Czyli z definicji rozbieżności, znajdziemy takie n_1, że dla każdego $n \geq n_1$ zachodzi $f(n) > cg(n)$. Zatem możemy wziąć $n = max\{n_0, n_1\}$.

Zadanie 9

Treść

Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż, że:

a. Jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$

b. $f(n) = O(g(n))$ wtw gdy $g(n) = \Omega(f(n))$

c. $f(n) = \Theta(g(n))$ wtw gdy $g(n) = \Theta(f(n))$

Rozwiązanie

Ad. a. Załóżmy, że $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$.

$$\exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$
$$\exists_{c'>0}\exists_{n_0' \in N}\forall_{n \geq n_0'} g(n) \leq c'h(n)$$

Weźmy $n'' = max\{n_0, n_0'\}$. Wtedy

$$f(n'') \leq cg(n'') \leq cc'h(n'')$$
$$\exists_{c''=cc'>0}\exists_{n_0''=max\{n_0,n_0'\} \in N}\forall_{n \geq n_0''} f(n) \leq c''h(n)$$
$$f(n) = O(h(n))$$

Ad. b. Poniższe linie są równoważne:

$$f(n) = O(g(n))$$
$$\exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$
$$\exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} \frac{f(n)}{c} \leq g(n)$$
$$\exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} g(n) \geq \frac{f(n)}{c}$$
$$\exists_{c'=\frac{1}{c}>0}\exists_{n_0'=n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0'} g(n) \geq c'f(n)$$
$$g(n) = \Omega(f(n))$$

Ad. c. Załóżmy, że $f(n) = \Theta(g(n))$. Wtedy $f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$. Korzystając z własności z podpunktu b., $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ oraz $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$. Czyli $g(n) = \Theta(f(n))$.

Analogicznie załóżmy, że $g(n) = \Theta(f(n))$. Wtedy $g(n) = O(f(n)) \wedge g(n) = \Omega(f(n))$. Korzystając z własności z podpunktu b., $g(n) = O(f(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ oraz $g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$. Czyli $f(n) = \Theta(g(n))$.

Zadanie 10

Treść

Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że k < l. Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

Rozwiązanie

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0$$
$$g(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0$$

Chcemy: $lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_k x^k}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0} + \frac{a_{k-1} x^{k-1}}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0} + \ldots + \frac{a_0}{g(x)}$$
$$= \frac{a_k}{b_l x^{l-k} + b_{l-1} x^{l-k-1} + \ldots + b_0 x^{-k}} + \frac{a_{k-1}}{b_l x^{l-k+1} + b_{l-1} x^{l-k} + \ldots + b_0 x^{-(k-1)}} + \ldots + \frac{a_0}{g(x)}$$

Wiemy, że $l - k > 0$. Czyli przy dużych x liczniki będą stałymi, a mianowniki dużymi liczbami ujemnymi lub dodatnimi. Zatem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Więc z definicji o mamy $f(n) = o(g(n))$.