Gruppe $\boxed{17}$
Berechenbarkeit & Komplexität

Philipp Hochmann, 356148
Felix Kiunke, 357322

Blatt 8

Aufgabe 8.3

Im folgenden wird gezeigt, dass es eine Abbildung V und ein Polynom p gibt, sodass gilt:

$$x \in \text{3-C}\textsc{olorability} \iff \exists |y| \leq p(|x|) : V \text{ akzeptiert } y\#x.$$

Ein Graph mit n Knoten kann mit einer Adjazenzmatrix in n^2 Zeichen aus $0, 1$ kodiert werden, d.h. $|x| = \mathcal{O}(n^2)$. Das Zertifikat der Lösung sei eine Liste an Farben in der Reihenfolge der Knoten. Bei 3 Farben kann jede Farbe mit 2 Bits kodiert werden: 00, 11 oder 01. Es gilt daher $|y| = \mathcal{O}(n)$.

$$p(x) = x, \text{ da } x \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Verifikation der Lösung, die durch y beschrieben wird: Sei $y_n \in 00, 11, 01$ der Farbwert des n-ten Knotens und $x_{i,j} \in 0, 1$ ein Element aus der Adjazenzmatrix.

for $i = 1..n$ do
for $j = 1..n$ do
if $x_{i,j} = 1$ and $i > j$
if $y_i = y_j$ REJECT
end if
end for
end for ACCEPT

Da dieser Algorithmus n^2 viele Schritte benötigt und Lesen aus y mit polynomialem Zeitverlust mit einem zweiten Band simuliert werden kann, ist dies ein Algorithmus in Polynomialzeit.

Aufgabe 8.4

NP $\subseteq$ NP':
Sei L $\in$ NP, d.h. es existiert eine NTM M mit L(M)=L und Polynom p mit $t_M(n) \leq p(n)$.

Man konstruiere eine NTM M', welche die Berechnung nach p(n) (für n=|w|) Schritten abbricht und sich sonst wie M verhält. Es gilt $t'_{M'} \leq p(n)$, da es auf keinem Wort der Länge n einen Pfad länger p(n) geben kann. Der kürzeste akzeptierende Pfad bleibt hierbei erhalten, da er nicht länger als p(n) sein kann. Also gilt $L(M') = L$ und deshalb L $\in$ NP'.

NP' $\subseteq$ NP:
Sei L $\in$ NP, d.h. es existiert eine NTM M' mit $L(M') = L$ und Polynom p mit $t'_{M'}(n) \leq p(n)$. Dann ist $t_{M'} \leq p(n)$, da alle Pfade polynomiell beschränkt sind, insbesondere auch der kürzeste akzeptierende. Daher L $\in$ NP.

NP' $\subseteq$ NP $\wedge$ NP $\subseteq$ NP' $\implies$ NP' = NP.