Gruppe $\boxed{\textbf{17}}$
Berechenbarkeit & Komplexität

Philipp Hochmann, 356148
Felix Kiunke, 357322

Blatt 3

Aufgabe 3.1

1. Prüfe, ob Wort der Form 0^n1^m (Aufwand: n Schritte). Wenn nicht, verwerfe.

2. Solange mindestens eine unmarkierte 0 und eine unmarkierte 1 auf dem Band sind:
   Markiere jede zweite 0 und jede zweite 1. (Aufwand: n)
   Prüfe, ob Anzahl unmarkierter Symbole gerade. Wenn nicht, verwerfe. (Aufwand: n)

3. Sind alle Symbole markiert? Wenn nicht: verwerfe, sonst akzeptiere. (Aufwand: n)
   Die Schleife kann höchstens $log(n)$ mal laufen, da die Anzahl Symbole bei jedem Durchlauf halbiert wird. Deshalb ist die Gesamtzahl der Arbeitsschritte in $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$

Aufgabe 3.2

```
 1: CLOAD 2
 2: STORE 1
 3: CLOAD 0
 4: STORE 2
 5: CLOAD N
 6: DIV   2
 7: STORE 3
 8: CLOAD 1
 9: ADD 2
10: LOAD 3
11: IF c(0) ≤ 2 GOTO 6
12: END
```

Es wird zuerst c(1) $=$ 2 und c(2) $=$ 0, c(0) $=$ N gesetzt. Dann wird so lange N durch c(1) $=$ 2 dividiert, wie $N \leq 2$ ist. Wie oft dividiert wurde, wird in c(2) gespeichert. Das Ergebnis $\lfloor log_2(n) \rfloor$ steht also in Register c(2).

Aufgabe 3.3

Um die Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^*$ zu zeigen, zeigen wir zunächst, dass für eine gegebene Länge n die Menge der Wörter dieser Länge $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist.

Für $n = 0$ ist die Menge der Wörter offensichtlich $\{\varepsilon\}$.

Für $n = 1$ ist die Menge der Wörter einfach $\mathbb{N}$. Per Induktion konstruieren wir für alle $n \geq 1$ die entsprechenden Wortmengen. Dabei verwenden wir das Diagonalverfahren, das auch zum Beweis der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen verwendet werden kann. Wie bei den rationalen Zahlen konstruieren wir also eine Aufzählung auf das kartesische Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Der erste Eintrag der entstehenden Tupel (x, i) ist jeweils eine neue Stelle, während der zweite Eintrag für das i-te Wort der Menge $\mathbb{N}^{n-1}$ steht. Das entstehende Wort ist also die Konkatination von x und dem i-ten nächstkürzeren Wort. Das funktioniert, da $\mathbb{N}^{n-1}$ wegen der Induktion ebenfalls abzählbar ist. Die genaue Abzählreihenfolge ist dabei beliebig.

Um zu zeigen, dass die Vereinigung dieser (jeweils abzählbaren) Mengen ebenfalls abzählbar ist, verwenden wir erneut das Diagonalverfahren und konstruieren wieder eine Aufzählung für $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Hierbei steht der erste Eintrag der Tupel der Form (n, i) dieses kartesischen Produktes für die Länge n der Wörter. Der zweite Eintrag steht für das i-te Wort in $\mathbb{N}^n$, was ja wie oben gezeigt abzählbar ist. Eine Ausnahme muss bei $n = 0$ gemacht werden, da diese $\mathbb{N}^0$ ja 1-elementig ist. Daher steht dort jedes i für das leere Wort. Die genaue Zählreihenfolge dieser Konstruktion ist auch hier egal.

Damit haben wir eine Art der Abzählung von $\mathbb{N}^*$ definiert. Also ist diese Menge abzählbar. $\square$

Aufgabe 3.4

(a)

Diese Sprache ist entscheidbar.

Um sie zu entscheiden, konstruiert man eine modifizierte Universelle Turingmaschine, die M auf der Eingabe w ausführt und auf einem weiteren Band die Schritte mitzählt (zum Beispiel indem dieser Lesekopf bei jedem Schritt um eine Stelle nach rechts bewegt wird). Wenn der Endzustand von M erreicht wird, schreibt die Universelle Maschine 1 aufs erste Band und geht ihrerseits in den Endzustand über. Wenn vorher der 42. Schritt gezählt wird, schreibt sie 0 aufs erste Band und endet. Damit ist die Sprache in endlich vielen Schritten entschieden. $\square$

(b)

Diese Sprache ist nicht entscheidbar.

Wenn es eine Maschine gäbe, die entscheidet, ob M nach mindestens 42 Schritten auf der Eingabe hält, so könnte diese auch das allgemeine Halteproblem entscheiden. Dazu würde man zur zu untersuchenden Maschine M' eine weitere Maschine M'' konstruieren, die erst 42 „no-op“-Schritte ausführt und anschließend in den Startzustand von M' übergeht. Damit könnte das allgemeine Halteproblem gelöst werden.

Da das Halteproblem nach VL nicht lösbar ist, ist dies ein Widerspruch. Somit kann eine solche Maschine, die $H_{\geq 42}$ entscheidet, nicht existieren. $\square$