Gruppe $\boxed{\textbf{17}}$ Philipp Hochmann, 356148
Berechenbarkeit & Komplexität Felix Kiunke, 357322

Blatt 5

Aufgabe 5.2

Zu widerlegen:

$$\overline{\mathbf{H}_\varepsilon} \leq \mathbf{H}_\varepsilon \tag{1}$$

$$\mathbf{H}_\varepsilon \leq \overline{\mathbf{H}_\varepsilon} \tag{2}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\mathbf{H}_\varepsilon$ rekursiv aufzählbar ist und dass $\overline{\mathbf{H}_\varepsilon}$ *nicht* rekursiv aufzählbar ist. Des Weiteren wurde gezeigt, dass

$$L_1 \leq L_2 \text{ und } L_2 \text{ rekursiv aufzählbar} \implies L_1 \text{ rekursiv aufzählbar.}$$

Damit ist die (1) widerlegt: $\mathbf{H}_\varepsilon$ ist rekursiv aufzählbar, $\overline{\mathbf{H}_\varepsilon}$ allerdings nicht, was einen Widerspruch zu dieser Aussage darstellen würde. Damit kann (1) nicht gelten. □

Keine Ahnung, wie man die (2) widerlegt :(

Aufgabe 5.3

(a)

Gegeben sei die Sprache

$$A_{62} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens zwei Wörter der Länge höchstens } 62\}$$

Diese Sprache ist nicht entscheidbar, also **nicht rekursiv**.

Beweis. mit dem Satz von Rice. Sei

$$\mathcal{S} = \{f_M \mid \exists (w_1, w_2) \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*, |w_1| \leq 62, |w_2| \leq 62 : f_M(w_1) = 1 \wedge f_M(w_2) = 1\}$$

Dann ist $\mathcal{S}$ nicht leer, denn eine passende Funktion f_M existiert, zum Beispiel die Funktion zur Turingmaschine, die alle Wörter aus $\{0,1\}^*$ akzeptiert. Außerdem ist $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da nicht alle Turingmaschinen die gewünschte Bedingung erfüllen.

Damit ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens zwei Wörter der Länge höchstens } 62\} \\ &= A_{62} \end{aligned}$$

und somit ist A_{62} nach Satz von Rice nicht entscheidbar. □

Allerdings ist A_{62} **rekursiv aufzählbar**.

Beweis. Wir konstruieren einen Aufzähler A zur TM M, der auf zwei Bändern für $i = 1, 2, 3, \ldots$ jeweils i Schritte für alle Wörter $\{w_1, \ldots, w_{\min\{i,62\}}\}$ simuliert. Dabei sind die für die beiden Bänder gewählten Eingabewörter aus dieser Menge unabhängig voneinander. Die Kombinationen sind analog zum Diagonalverfahren abzählbar. Auf beiden Bändern wird jeweils die Turingmaschine M simuliert. Wenn in einem Schritt beide Bänder akzeptieren, wird auf dem Drucker $\langle M \rangle$ ausgegeben.

Anschließend konstruieren wir einen weiteren Aufzähler A', der für $i' = 1, 2, 3, \ldots$ jeweils i' Schritte des obigen Aufzählers A für alle möglichen Gödelnummern der Länge i' ausführt. Jede Ausgabe von A wird auch von A' ausgegeben. Damit gibt A' alle Gödelnummern aus der Sprache A_{62} aus.

Da die Konstruktion eines Aufzählers möglich ist, ist A_{62} rekursiv aufzählbar. □

(b)

Gegeben sei die Sprache

$$B_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens ein Wort}\}$$

Diese Sprache ist ebenfalls **nicht rekursiv**.

Beweis. mit dem Satz von Rice. Sei

$$\mathcal{S} = \{f_M \mid \exists w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = 1\}$$

Dann ist $\mathcal{S}$ nicht leer, denn eine passende Funktion f_M existiert, zum Beispiel die Funktion zur Turingmaschine, die alle Wörter aus $\{0,1\}^*$ akzeptiert. Außerdem ist $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da z.B. die Funktion zur Turingmaschine, die alle Wörter verwirft, nicht in $\mathcal{S}$ ist.

Damit ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens ein Wort}\} \\ &= B_1 \end{aligned}$$

und somit ist B_1 nach Satz von Rice nicht entscheidbar. □

Allerdings ist auch B_1 **rekursiv aufzählbar**.

Beweis. Wir konstruieren wieder einen Aufzähler, der für $i = 1, 2, 3, \ldots$ alle Wörter $\{w_1, \ldots, w_i\}$ für i Schritte simuliert, wobei diese Wörter als Gödelnummern mit anschließenden Eingabewörtern betrachtet werden und ungültige Gödelnummern zuvor verworfen bzw. ignoriert werden. Wenn eine dieser Simulationen akzeptiert, wird die entsprechende Gödelnummer auf dem Drucker ausgegeben (wobei das dazugehörige Eingabewort natürlich nicht mit ausgegeben wird).

Dieser Aufzähler gibt also alle Gödelnummern aus B_1 aus. Da ein Aufzähler existiert, ist B_1 offentsichtlich rekursiv aufzählbar. □