Gruppe $\boxed{\textbf{17}}$
Berechenbarkeit & Komplexität

Philipp Hochmann, 356148
Felix Kiunke, 357322

Blatt 4

Aufgabe 4.1

Man konstruiere eine unendliche Matrix $(A_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \ \langle M_j\rangle \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Angenommen, es existiert eine Turingmaschine M_k, die $L_{self} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ verwirft } \langle M\rangle\}$ erkennt. Dann gilt:

$$\text{1. Fall: } A_{k,k} = 0 \overset{\text{Def. A}}{\Longrightarrow} M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \text{ nicht } \Longrightarrow$$
$$\langle M_k\rangle \in L_{self} \implies M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \implies A_{k,k} = 1$$

$$\text{2. Fall: } A_{k,k} = 1 \overset{\text{Def. A}}{\Longrightarrow} M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \Longrightarrow$$
$$\langle M_k\rangle \notin L_{self} \implies M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \text{ nicht} \implies A_{k,k} = 0$$

Dies führt zum Widerspruch, M_k kann also nicht existieren. Damit ist L_{self} nicht entscheidbar.

Aufgabe 4.2

(a)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{H}_{\text{never}}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Sei $\mathcal{S}_1 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \bot\}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_1) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_1\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist $\mathbf{H}_{\text{never}}$ damit nicht entscheidbar. $\square$

(b)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{S}_{15}$ ist entscheidbar.

Angenommen, q_{15} ist Endzustand.

Dann lässt sich zu einer beliebigen Gödelnummer $\langle M \rangle$ eine Turingmaschine M' konstruieren, die zuerste die Eingabe 101 vom Band löscht und anschließend $\langle M \rangle$ normal ausführt (analog zur Universellen TM). Damit verhält sich M' auf 101 so wie M auf ε.

Wenn $\mathcal{S}_{15}$ nun existieren würde, könnte man es auf M' anwenden. Da man damit wüsste, ob M' den Endzustand q_{15} erreicht, wüsste man, ob die Maschine hält und hätte somit das spezielle Halteproblem H_ε gelöst. Dieses ist jedoch, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, nicht entscheidbar. Durch diesen Widerspruch ist also auch $\mathcal{S}_{15}$ nicht entscheidbar. $\square$

(c)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{L}_\mathbb{P}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Sei $\mathcal{S}_3 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\}$

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_3) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_3\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid L(M) = \mathbb{P}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist damit $\mathbf{L}_\mathbb{P}$ nicht entscheidbar (das liegt daran, dass für eine Maschine M, die auf einigen oder allen Eingaben nicht hält, nicht entschieden werden kann, ob $L(M) = \mathbb{P}$ ist). $\square$

(d)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{L}_{\text{comp}}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Wähle M_2 beliebig aber fest. Sei dann

$$\mathcal{S}_4 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \notin L(M_2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_3) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_4\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid L(M) = \overline{L(M_2)}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist damit $\mathbf{L}_{comp}$ für beliebige M_2 nicht entscheidbar, also ist das Problem insgesamt ebenfalls nicht entscheidbar.

$\square$

Aufgabe 4.3

(a)

Idee: Unterprogrammtechnik, zuerst wird w geschrieben, dann Kopf zurückgesetzt, dann M ausgeführt. Formal:

$$\begin{aligned} M &= (Q_M, \{0,1\}, \Gamma, \delta_M, q_{0_M}, B, \bar{q}) \\ M_w^* &= (Q_w \cup Q_M, \{0,1\}, \Gamma, \delta \cup \delta_M, q_0, B, \bar{q}) \end{aligned}$$

wobei

$$Q_w = \{q_1 \dots q_n\} \text{ für } w = w_1 w_2 w_3 \dots w_n$$

und

$$\begin{array}{c|c} \delta & \text{B} \\ \hline q_i & (q_{i+1}, w_i, R) \end{array} \; \forall i \in [1, n-1] \subseteq \mathbb{N},$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \delta & 0 & 1 & \text{B} \\ \hline q_n & (q_{0_M}, 0, N) & (q_{0_M}, 1, N) & (q_{0_M}, B, N) \end{array}$$

(b)

Idee: Gödelnummer um Übergänge ergänzen, die vorher w schreiben.

N sei eine Zweibandmaschine. Im ersten Band steht $\langle M_k \rangle$, im zweiten w, was mit einer einfachen Vorverarbeitung des Eingabewortes geschehen kann. Nun fängt N an, w Zeichen für Zeichen durchzugehen, und hinter dem einleitenden 111 der Original-Nummer auf Band 1 folgendes zu schreiben: bei $w_i = X_j$, wobei $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B$, schreibe $0^i 1 0^j 1 0^{i+1} 1 0^j 1000$. Dies entspricht dem Gödel-Code von q_i nach q_{i+1}, wobei das eingelesene Zeichen geschrieben wird und der Lesekopf nach rechts bewegt wird. Diese Codes müssen natürlich durch 11 getrennt werden.

Ist w auf Band 2 komplett durchlaufen, müssen die alten Zustandsnummern der restlichen Gödelnummer erhöht werden, weil sich durch das Hinzufügen neuer Zustände die Nummerierung geändert hat. Dies macht man, indem man immer bei jedem Zustand so viele Nullen hinzufügt, wie man vorher neue Zustände eingeführt hat (n Stück plus die, die man braucht, den Lesekopf wieder zurückzuschieben). Das Endergebnis steht dann auf Band 1.