Gruppe $\boxed{\mathbf{17}}$
Berechenbarkeit & Komplexität

Philipp Hochmann, 356148
Felix Kiunke, 357322

Blatt 10

Aufgabe 10.1

(a)

MSS-E

Eingabe: m Maschinen, n Jobs mit Laufzeiten $p_1, \dots, p_n$, Schranke b für die beste Lösung

zulässige Lösungen: 1 wenn es eine Zuteilung $s : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ der Jobs auf die Maschine gibt, wobei $\max_{1 \le i \le m} \sum_{j:s(j)=i} p_j \le b$, 0 sonst.

(b)

Die Eingabe von SUBSET-SUM sei $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$.

Die Reduktionsabbildung generiert folgende Eingabe an **MSS-E**:
2 Maschinen, $N + 2$ Jobs mit Laufzeiten $a_1, \dots, a_N, 2A - b, A + b$ und Schrank $2A$ wobei $A = \sum_{i=1}^{N} a_i$. Diese Abbildung ist *trivialerweise* polynomiell.

Beweis *(Korrektheit)*

Eingabe Lösung von SUBSET-SUM $\Longrightarrow$ Abbildung auf Lösung von **MSS-E**:
Wenn es eine Teilmenge der Zahlen $a_1, \dots, a_N$ mit Summenwert b gibt, so gibt es auch Menge an Jobs, die hintereinander b lange laufen.
$\Longrightarrow$ Wir können diese zusammen mit dem Job, der $2A - b$ lange läuft, auf einer der beiden Maschinen laufen lassen.
$\Longrightarrow$ Diese Maschine läuft $2A$ lang.
$\Longrightarrow$ Da sich die Gesamtlänge aller Jobs zu $4A$ aufaddiert, muss die andere Maschine auch $2A$ lange laufen
$\Longrightarrow$ Die Schranke wird nicht überschritten
$\Longrightarrow$ Eingabe Lösung von **MSS-E**

Eingabe Lösung von **MSS-E** $\Longrightarrow$ Eingabe Lösung von SUBSET-SUM:
Keine der beiden Maschinen läuft länger als $2A$
$\Longrightarrow$ Beide Maschinen laufen $2A$ lang, da insg. alle Jobs $4A$.

$\implies$ Der Job, welcher $A+b$ lange läuft, läuft nicht auf der selben Maschine, wie der $2A-b$-Job.
$\implies$ Es gibt Jobs, die Zusammen b lange laufen
$\implies$ Es gibt Zahlen, die sich zu b aufsummieren
$\implies$ Eingabe Lösung für SUBSET-SUM

Aufgabe 10.2

1. 3-PARTITION ist in NP, da die drei Mengen an Indizes als Verifikation für die Lösung angegeben werden können.
2. Als NP-Vollständige Sprache wird PARTITION gewählt.
3. Reduktionsabbildung: Man füge der Eingabe $a_1, \ldots, a_N$ noch $\lfloor A/2 \rfloor$ hinzu, wobei $A = \sum_{i=1}^{N} a_i$.
4. Sowohl $|w|$ als auch Aufsummieren der Zahlen liegt in $\mathcal{O}(N \cdot log(\max_{i \in [1,N]} a_i))$. Daher ist der Algorithmus polynomiell.
5. Korrektheit
$a_1, \ldots, a_N$ hat Lösung bzgl. PARTITION $\implies$ Es gibt zwei Teilmengen, welche sich jeweils zu $A/2$ aufsummieren $\implies$ A ist gerade $\implies$ Diese beiden Teilmenge sowie die neu eingefügte Zahl $\lfloor A/2 \rfloor = A/2$ summieren sich alle zu $A/2$. $\implies$ Da die Gesamtsumme der Zahlen für 3-PARTITION $\frac{3}{2}$ ist, sind diese drei Teilmengen eine Lösung.

$a_1, \ldots, a_N, \lfloor A/2 \rfloor$ hat Lösung bzgl. 3-PARTITION $\implies$ A ist gerade, da $a_1, \ldots, a_N = A$ und sich deshalb zwei Partitionen finden müssen, die den Wert $A/2$ haben. $\implies$ hat Lösung bzgl. PARTITION

Aufgabe 10.3