

Blatt 10

Aufgabe 10.1

(a)

MSS-E

Eingabe: m Maschinen, n Jobs mit Laufzeiten p_1, \dots, p_n , Schranke b für die beste Lösung

zulässige Lösungen: 1 wenn es eine Zuteilung $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ der Jobs auf die Maschine gibt, wobei $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j:s(j)=i} p_j \leq b$, 0 sonst.

(b)

Die Eingabe von SUBSET-SUM sei $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$.

Die Reduktionsabbildung generiert folgende Eingabe an **MSS-E**:

2 Maschinen, $N + 2$ Jobs mit Laufzeiten $a_1, \dots, a_N, 2A - b, A + b$ und Schrank $2A$ wobei $A = \sum_{i=1}^N a_i$. Diese Abbildung ist *trivialerweise* polynomiell.

Beweis (*Korrektheit*)

Eingabe Lösung von SUBSET-SUM \implies Abbildung auf Lösung von **MSS-E**:

Wenn es eine Teilmenge der Zahlen a_1, \dots, a_N mit Summenwert b gibt, so gibt es auch Menge an Jobs, die hintereinander b lange laufen.

\implies Wir können diese zusammen mit dem Job, der $2A - b$ lange läuft, auf einer der beiden Maschinen laufen lassen.

\implies Diese Maschine läuft $2A$ lang.

\implies Da sich die Gesamtlänge aller Jobs zu $4A$ aufaddiert, muss die andere Maschine auch $2A$ lange laufen

\implies Die Schranke wird nicht überschritten

\implies Eingabe Lösung von **MSS-E**

Eingabe Lösung von **MSS-E** \implies Eingabe Lösung von SUBSET-SUM:

Keine der beiden Maschinen läuft länger als $2A$

\implies Beide Maschinen laufen $2A$ lang, da insg. alle Jobs $4A$.

- \Rightarrow Der Job, welcher $A + b$ lange läuft, läuft nicht auf der selben Maschine, wie der $2A - b$ -Job.
- \Rightarrow Es gibt Jobs, die Zusammen b lange laufen
- \Rightarrow Es gibt Zahlen, die sich zu b aufsummieren
- \Rightarrow Eingabe Lösung für SUBSET-SUM

Aufgabe 10.2

1. 3-PARTITION ist in NP, da die drei Mengen an Indizes als Verifikation für die Lösung angegeben werden können.
2. Als NP-Vollständige Sprache wird PARTITION gewählt.
3. Reduktionsabbildung: Man füge der Eingabe a_1, \dots, a_N noch $\lfloor A/2 \rfloor$ hinzu, wobei $A = \sum_{i=1}^N a_i$.
4. Sowohl $|w|$ als auch Aufsummieren der Zahlen liegt in $\mathcal{O}(N \cdot \log(\max_{i \in [1, N]} a_i))$. Daher ist der Algorithmus polynomiell.
5. Korrektheit
 a_1, \dots, a_N hat Lösung bzgl. PARTITION \Rightarrow Es gibt zwei Teilmengen, welche sich jeweils zu $A/2$ aufsummieren $\Rightarrow A$ ist gerade \Rightarrow Diese beiden Teilmenge sowie die neu eingefügte Zahl $\lfloor A/2 \rfloor = A/2$ summieren sich alle zu $A/2$. \Rightarrow Da die Gesamtsumme der Zahlen für 3-PARTITION $\frac{3}{2}$ ist, sind diese drei Teilmengen eine Lösung.

$a_1, \dots, a_N, \lfloor A/2 \rfloor$ hat Lösung bzgl. 3-PARTITION $\Rightarrow A$ ist gerade, da $a_1, \dots, a_N = A$ und sich deshalb zwei Partitionen finden müssen, die den Wert $A/2$ haben. \Rightarrow hat Lösung bzgl. PARTITION

Aufgabe 10.3

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen ;)