Gruppe $\boxed{\mathbf{17}}$ Philipp Hochmann, 356148
Berechenbarkeit & Komplexität Felix Kiunke, 357322

Blatt 6

Aufgabe 6.1

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen ;)

Aufgabe 6.2

Die PKP-Instanz ist lösbar, da folgende mögliche Lösung existiert:

$$\begin{bmatrix} bb \\ \hline bba \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aa \\ \hline ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bb \\ \hline bba \end{bmatrix} \begin{bmatrix} baab \\ \hline ab \end{bmatrix}$$

Das obere und untere Wort sind dann beide *bbaabbbaab*.

Aufgabe 6.3

(a)

Das Problem ist entscheidbar. Die Menge der möglichen Folgen mit Länge $\leq l$ ist endlich und damit auch abzählbar. Ebenso ist die Länge der oberen und unteren Gesamtwörter endlich, da die Länge der Wörter jedes Dominos endlich ist und die Anzahl der Dominos in der Folge ebenfalls endlich ist.

Damit lassen sich die oberen und unteren Wörter in endlicher Zeit vergleichen, und somit prüfen, ob die Folge korrespondiert. Da die Folgen abzählbar sind, kann man einfach nacheinander in endlicher Zeit für jede mögliche Folge prüfen, ob diese korrespondiert. Wenn eine korrespondierende Folge gibt, ist diese Variante des PKP lösbar, sonst nicht. Damit ist dieses Problem lösbar. $\square$

(b)

Da sich die Dominos nicht wiederholen können, kann jede Folge dieser PKP-Variante maximal Länge n besitzen mit $n =$ Anzahl der Dominos. Damit lässt sich dieses Problem auf das Problem aus Teilaufgabe a) reduzieren, denn die möglichen Folgen dieses Problems sind eine Teilmenge der Folgen des Problems aus (a) mit $l = n$. Da das Problem aus (a) lösbar ist, ist dieses Problem auch lösbar. $\square$

(c)

Da das Alphabet nur aus einem Zeichen besteht, korrespondiert eine Folge genau dann, wenn das obere und untere Wort gleich lang sind. Wir weisen jedem Domino die Differenz der Länge seines oberen und unteren Wortes zu, also beispielsweise $d([\frac{xx}{xxxxx}]) = -3$. Eine korrespondierende Folge besteht also offensichtlich aus Dominos, deren Differenzen summiert 0 ergeben.

Wir unterscheiden also zwei Fälle:

Wenn für alle Dominos x $d(x) < 0$ oder für alle Dominos x $d(x) > 0$ gilt, verwerfen wir. Das PKP ist dann nicht lösbar, da jede Folge von Dominos eine summierte Differenz von höchstens $-n$ im ersten Fall (mit $n =$ Länge der Folge) bzw. n im zweiten Fall hat.

Ansonsten akzeptieren wir. Wenn ein Domino x mit $d(x) = 0$ existiert, dann ist die Folge, die nur x enthält, eine Lösung. Ansonsten lassen sich zwei Dominos x und y wählen mit $d(x) < 0$ und $d(y) > 0$. Wenn man nun x $d(y)$-mal legt und danach y $-d(x)$-mal, ist die summierte Differenz dieser Folge $d(x) * d(y) + d(y) * (-d(x)) = d(x) * d(y) - d(y) * d(x) = 0$. Damit korrespondiert diese Folge und es existiert eine Lösung für das PKP. Es ist also lösbar.

Es lässt sich also nur durch Betrachten der Dominos feststellen, ob das PKP lösbar ist. Damit ist diese PKP-Variante ebenfalls entscheidbar. $\square$

Aufgabe 6.4

Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$. Folgendes WHILE-Programm berechnet f:

$x_0 := x_0 + 1;$
WHILE $x_2 \neq 0$ DO
    $x_3 := x_0 + 0;$
    $x_0 := x_5 + 0;$
    WHILE $x_3 \neq 0$ DO
        $x_4 := x_1 + 0;$
        WHILE $x_4 \neq 0$ DO
            $x_0 := x_0 + 1;$
            $x_4 := x_4 - 1$
        END;
        $x_3 := x_3 - 1$
    END;
    $x_2 := x_2 - 1$
END

Zuerst wird x_0 mit $1 = (x_1)^0$ inititalisiert. Anschließend wird in der äußersten Schleife x_2-mal x_1 mit x_0 multipliziert, wobei das Ergebnis jedesmal wieder in x_0 geschrieben wird. Also wird in jedem Durchlauf $x_0 := x_1 \cdot x_1^{x_2-1}$ gesetzt, wobei $x_1^{x_2-1}$ eben genau der vorige Wert von x_0 ist. Dabei wird x_2 in jeder Runde heruntergezählt.

In der zweiten Schleife wird dann x_0 mit x_1 multipliziert. Dazu wird x_1 x_0-mal. Die Addition wird direkt auf x_0 durchgeführt, weswegen x_0 zuerst in eine neue Variable geschrieben werden muss. Ebenso wird x_1 vorher in eine neue Variable kopiert, da der ursprüngliche Wert für die weiteren Schleifendurchläufe erhalten bleiben muss.