Gruppe $\boxed{17}$
Berechenbarkeit & Komplexität

Philipp Hochmann, 356148
Felix Kiunke, 357322

Blatt 4

Aufgabe 4.1

Man konstruiere eine unendliche Matrix $(A_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ mit

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_i \ \langle M_j\rangle \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Angenommen, es existiert eine Turingmaschine M_k, die $L_{self} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ verwirft } \langle M\rangle\}$ erkennt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{1. Fall: } & A_{k,k} = 0 \overset{\text{Def. A}}{\Longrightarrow} M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \text{ nicht } \Longrightarrow \\ & \langle M_k\rangle \in L_{self} \implies M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \implies A_{k,k} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Fall: } & A_{k,k} = 1 \overset{\text{Def. A}}{\Longrightarrow} M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \Longrightarrow \\ & \langle M_k\rangle \notin L_{self} \implies M_k \text{ akzeptiert } \langle M_k\rangle \text{ nicht } \implies A_{k,k} = 0 \end{aligned}$$

Dies führt zum Widerspruch, M_k kann also nicht existieren. Damit ist L_{self} nicht entscheidbar.

Aufgabe 4.2

(a)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{H}_{\text{never}}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Sei $\mathcal{S}_1 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \perp\}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_1) &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_1\} \\ &= \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist $\mathbf{H}_{\text{never}}$ damit nicht entscheidbar. $\square$

(b)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{S}_{15}$ ist entscheidbar.

Keine Ahnung :($\square$

(c)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{L}_{\mathbb{P}}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Sei $\mathcal{S}_3 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\}$

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_3) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_3\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid L(M) = \mathbb{P}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist damit $\mathbf{L}_{\mathbb{P}}$ nicht entscheidbar (das liegt daran, dass für eine Maschine M, die auf einigen oder allen Eingaben nicht hält, nicht entschieden werden kann, ob $L(M) = \mathbb{P}$ ist). $\square$

(d)

Zu zeigen oder widerlegen: $\mathbf{L}_{\text{comp}}$ ist entscheidbar.

Widerlegung mit Satz von Rice:

Wähle M_2 beliebig aber fest. Sei dann

$$\mathcal{S}_4 = \{f_M \mid \forall w \in \{0,1\}^* : f_M(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \notin L(M_2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}_3) &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}_4\} \\ &= \{\langle M \rangle \mid L(M) = \overline{L(M_2)}\} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rice ist damit $\mathbf{L}_{comp}$ für beliebige M_2 nicht entscheidbar, also ist das Problem insgesamt ebenfalls nicht entscheidbar.

$\square$