

Übungsblatt 5

Felix Kleine Bösing

November 10, 2024

Aufgabe 1

Teil (a)

Beweis: Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion. Sei

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. **Induktionsanfang:** Für $n = 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^2 k^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

und

$$\frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5.$$

Somit stimmt die Gleichung für $n = 2$.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 2$ gilt, also:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. **Induktionsschritt:** Es ist zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt, also:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Wir schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((2n^2+n)+6(n+1))}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

Nach Umformung ergibt sich die folgende Aussage.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Somit ist die Aussage für $n+1$ wahr, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen.

Damit ist die Aussage per vollständiger Induktion bewiesen.

Teil (b)

Beweis: Wir beweisen die Aussage ebenfalls per vollständiger Induktion.
Sei

$$Q(n) : \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

1. **Induktionsanfang:** Für $n=2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Gleichung für $n=2$ erfüllt.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 2$ gilt, also:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

3. **Induktionsschritt:** Es ist zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt, also:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Wir schreiben:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Diesen Ausdruck formen wir um und erhalten:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Somit ist die Aussage für $n + 1$ wahr, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen.

Damit ist die Aussage per vollständiger Induktion bewiesen.

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen und $q := |K|$ die Anzahl der Elemente von K .

Teil (a)

Beweis:

Wir zeigen, dass ein endlich erzeugter K -Vektorraum V der Dimension n genau q^n Elemente besitzt.

1. Da V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper K ist, existiert eine Basis von V mit genau n Vektoren.
2. Jedes Element von V kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

wobei $a_i \in K$ die Koeffizienten und b_i die Basisvektoren sind.

3. Da K genau q Elemente besitzt, hat jede der n Koeffizienten a_i genau q mögliche Werte.
4. Somit gibt es insgesamt $q \times q \times \cdots \times q = q^n$ verschiedene Kombinationen der Koeffizienten, was q^n verschiedene Elemente in V ergibt.

Damit ist gezeigt, dass V genau q^n Elemente besitzt.

Teil (b)

Beweis:

Wir zeigen, dass der K -Vektorraum K^2 genau $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ geordnete Basen besitzt.

1. Der Raum K^2 hat die Dimension 2, also besteht jede Basis von K^2 aus genau zwei Vektoren.
2. Ein geordneter Vektor $(v_1, v_2) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$ kann als erster Basisvektor gewählt werden. Da dieser Vektor nicht der Nullvektor sein darf, gibt es $q^2 - 1$ Möglichkeiten für v_1 .
3. Für den zweiten Basisvektor v_2 muss gelten, dass v_2 nicht in der Richtung von v_1 liegt, um die Linearunabhängigkeit zu gewährleisten.
4. Es gibt insgesamt q skalare Vielfache von v_1 (einschließlich des Nullvektors), die für v_2 nicht gewählt werden können.
5. Daher gibt es $q^2 - q$ mögliche Werte für v_2 , die nicht in der Richtung von v_1 liegen.

Damit gibt es insgesamt $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ geordnete Basen in K^2 .

References