Übungsblatt 7

Felix Kleine Bösing

November 26, 2024

Aufgabe 7.1

Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

Teil (a)

Wir berechnen $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

Beweis:
Da f linear ist, gilt für beliebige Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2),$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind. Wir stellen $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination der gegebenen Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ dar.

1. Für $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ lösen wir das Gleichungssystem:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$a - 3b = 1, \quad 2a = 0$$

Aus $2a = 0$ folgt $a = 0$. Einsetzen in $a - 3b = 1$ ergibt $b = -\frac{1}{3}$. Somit gilt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 0\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3}\cdot f\left(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

2. Für $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ lösen wir:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Dies ergibt die Gleichungen:

$$a - 3b = 0, \quad 2a = 1$$

Aus $2a = 1$ folgt $a = \frac{1}{2}$. Einsetzen in $a - 3b = 0$ ergibt $b = \frac{1}{6}$. Somit gilt:

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)+\frac{1}{6}\cdot f\left(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Teil (b)

Wir untersuchen, ob f injektiv und/oder surjektiv ist.

Beweis:

1. **Injektivität:**
Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern nur den Nullvektor enthält, d.h. $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
Um den Kern zu bestimmen, lösen wir:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \mathbf{0},$$

was mit der Darstellung von f äquivalent ist zu:

$$x\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + y\cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbf{0}$$

Einsetzen der Ergebnisse aus Teil (a):

$$x\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir das Gleichungssystem:

$$-y = 0,$$
$$x + \frac{1}{2}y = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $x = 0$. Somit ist $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, und f ist injektiv.

2. **Surjektivität:**

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv, wenn ihr Bild $\mathrm{im}(f)$ den gesamten Zielraum $\mathbb{R}^2$ umfasst, d.h. $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Das Bild von f ist der von $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ aufgespannte Unterraum. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind (ihre Determinante ist ungleich null), spannen sie $\mathbb{R}^2$ auf. Somit ist f surjektiv.

Schlussfolgerung:

Die Abbildung f ist sowohl injektiv als auch surjektiv, d.h. f ist bijektiv.

Teil (c)

Wir beschreiben, was f mit einem gegebenen Vektor macht.

Beschreibung:

Die Abbildung f transformiert Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gemäß der durch $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ definierten Transformation. Diese Transformation entspricht einer Kombination aus einer Drehung und einer Streckung/Scherung.

Skizze:

Zur Veranschaulichung können wir die Bilder der Basisvektoren und die von ihnen aufgespannten Bereiche skizzieren. Damit wird sichtbar, wie f den Raum transformiert. (Hier wird eine schematische Darstellung empfohlen, die die Transformation von Basisvektoren zeigt.)

Aufgabe 7.2

Sei K ein Körper.

Teil (a)

Aufgabe: Gibt es eine K-lineare Abbildung $\varphi : K^4 \to K^2$ mit 1-dimensionalem Kern?

Beweis:

1. Nach dem Dimensionssatz gilt für eine K-lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$:
$$\dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) = n$$

2. Für $\varphi : K^4 \to K^2$ bedeutet dies:
$$\dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi) = 4$$

3. Da der Zielraum K^2 ist, gilt $\dim \operatorname{im}(\varphi) \leq 2$. Falls $\dim \ker(\varphi) = 1$, folgt:
$$1 + \dim \operatorname{im}(\varphi) = 4 \implies \dim \operatorname{im}(\varphi) = 3$$

4. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da der Zielraum nur Dimension 2 hat. Daher kann es keine solche Abbildung geben.

Teil (b)

Aufgabe: Seien $V, W \subset K^5$ Untervektorräume mit $\dim V = 3$ und $\dim W = 4$. Zeigen Sie $\dim(V \cap W) \geq 2$.
Beweis:

1. Für zwei Untervektorräume V und W eines Vektorraums K^n gilt die Dimensionsformel:
$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

2. Da $V + W \subseteq K^5$, gilt:
$$\dim(V + W) \leq 5$$

3. Setzen wir die bekannten Dimensionen ein:
$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$
Das ergibt:
$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) \geq 3 + 4 - 5 = 2$$

4. Damit folgt $\dim(V \cap W) \geq 2$.

Aufgabe 7.3

Sei K ein Körper.

Teil (a)

Aufgabe: Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $f : K \to K$.
Beweis:

1. Eine lineare Abbildung $f : K \to K$ ist vollständig durch das Bild des Elements $1 \in K$ definiert, da f linear ist und für alle $\lambda \in K$:
$$f(\lambda) = \lambda \cdot f(1)$$
2. Bezeichnen wir $f(1) = c$ mit $c \in K$, dann ist die Abbildung durch $f(\lambda) = c\lambda$ für alle $\lambda \in K$ gegeben.
3. Somit ist jede lineare Abbildung $f : K \to K$ eine Multiplikation mit einem festen Skalar $c \in K$.

Teil (b)

Aufgabe: Seien $a, b \in K$. Betrachten Sie $f : K^2 \to K$ mit $f(x, y) = ax+by$. Bestimmen Sie eine Basis von
$$\ker f = \{(x, y) \in K^2 : f(x, y) = 0\}$$
Wann ist f surjektiv?
Beweis:

1. Der Kern von f ist definiert durch die Gleichung:
$$f(x, y) = ax + by = 0$$
2. Um den Kern zu bestimmen, lösen wir diese Gleichung nach y auf (falls $b \neq 0$):
$$y = -\frac{a}{b}x$$
3. Der Kern ist dann der Untervektorraum
$$\ker f = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\},$$
wobei $b \neq 0$ vorausgesetzt wird. Falls $b = 0$, ist $f(x, y) = ax$, und der Kern ist
$$\ker f = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Eine Basis des Kerns hängt also von den Werten von a und b ab:
   - Falls $b \neq 0$, ist $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ eine Basis von $\ker f$.
   - Falls $b = 0$, ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\ker f$.
5. f ist surjektiv, wenn der Bildraum von f ganz K ist. Dies ist der Fall, wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, da mindestens einer der beiden Koeffizienten ungleich Null sein muss, um alle Werte in K zu erzeugen.

Aufgabe 7.4

Sei f ein Endomorphismus des Vektorraumes V mit $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ Komplementärräume in V sind.

Beweis:

1. Zunächst zeigen wir, dass $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$, also
$$V = \ker(f) + \operatorname{im}(f) \quad \text{und} \quad \ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$$
2. Zeigen von $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$:
   (a) Sei $v \in V$. Da $f^2 = f$, ist f idempotent, das heißt:
   $$f(v) \in \operatorname{im}(f) \quad \text{und} \quad v - f(v) \in \ker(f),$$
   da
   $$f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0$$
   (b) Somit lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als Summe schreiben:
   $$v = f(v) + (v - f(v)),$$
   wobei $f(v) \in \operatorname{im}(f)$ und $v - f(v) \in \ker(f)$. Also gilt $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.
3. Zeigen von $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$:
   (a) Sei $v \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$. Dann gilt:
   $$v \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \quad \text{und} \quad v \in \operatorname{im}(f) \implies \exists w \in V : v = f(w)$$

(b) Einsetzen von $v = f(w)$ in $f(v) = 0$ ergibt:

$$f(v) = f(f(w)) = f(w) = v \implies v = 0$$

(c) Also ist $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$.

4. Da $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$ und $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \{0\}$, folgt:

$$V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f),$$

und somit sind $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ Komplementärräume in V.

References