Übungsblatt 3

Felix Kleine Bösing

October 25, 2024

Aufgabe 1

Es sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper K gegeben:

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

$$x + z = 0$$

Bestimmen Sie die Lösungen dieses Gleichungssystems, falls:

(a) $K = \mathbb{C}$

Schritt 1: Aus der dritten Gleichung folgt:

$$x = -z$$

Schritt 2: Einsetzen von $x = -z$ in die anderen Gleichungen:

$$-z + y + z = 0 \implies y = 0$$

$$-z - 0 - z = 0 \implies z = 0$$

Schritt 3: Damit ist:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Die Lösung über $\mathbb{C}$ ist daher nur die triviale Lösung:

$$(0, 0, 0)$$

(b) $K = \mathbb{F}_2$

Da wir uns in $\mathbb{F}_2$ befinden, sind die einzigen möglichen Werte für die Variablen 0 und 1. Anders gesagt müssen wir in $\mathbb{F}_2$ die Gleichungen mod 2 betrachten. Das bedeutet für die Multiplikation und Addition, dass:

$$1 + 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 1$$

Schritt 1: Aus der dritten Gleichung $x + z = 0$ folgt in $\mathbb{F}_2$, dass

$$x = z$$

Schritt 2: Setzen wir $x = z$ in die erste Gleichung $x + y + z = 0$ ein:

$$z + y + z = 0 \implies 2z + y = 0$$

Da in $\mathbb{F}_2$ $2z = 0$ ist, bleibt:

$$y = 0$$

Schritt 3: Nun wissen wir, dass $y = 0$ ist, und $x = z$ gilt. Also gibt es zwei mögliche Fälle:

- Wenn $z = 0$, dann ist $x = 0$. Die Lösung ist:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

- Wenn $z = 1$, dann ist $x = 1$. Die Lösung ist:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1)$$

Zusammenfassung: Über $\mathbb{F}_2$ gibt es zwei Lösungen:

$$(0, 0, 0) \quad \text{und} \quad (1, 0, 1)$$

Aufgabe 2

Gesucht sind alle komplexen Zahlen $z = x + iy$, die die Gleichung $z^2 = z_0$ erfüllen, wobei $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$.

Schritt 1: Wir berechnen das Quadrat von z:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Dies muss gleich $z_0 = a + ib$ sein, also ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$x^2 - y^2 = a \quad (1), \quad 2xy = b \quad (2)$$

Schritt 2: Lösen der Gleichung $2xy = b$ nach y:

$$y = \frac{b}{2x} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Schritt 3: Einsetzen von y in die Gleichung $x^2 - y^2 = a$:

$$x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \implies x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

Multiplizieren mit $4x^2$ ergibt:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

Setze $u = x^2$, um die quadratische Gleichung zu lösen:

$$4u^2 - 4au - b^2 = 0$$

Die Lösung ist:

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Schritt 4: Bestimmen von x und y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \frac{b}{2x}$$

Lösungen: Es gibt zwei Lösungen:

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\right)$$

Aufgabe 3

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Wir zeigen, dass die Aussagen (a), (b) und (c) für eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ äquivalent sind.

Beweis: (a) impliziert (b)

Angenommen, H erfüllt die Bedingungen von (a), d.h. für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Nun zeigen wir, dass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ gilt. Da nach (a) $h_2^{-1} \in H$, gilt durch die Abgeschlossenheit der Gruppenoperation auch $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$. Somit ist (b) erfüllt.

Beweis: (b) impliziert (c)
Angenommen, H erfüllt die Bedingung (b), d.h. für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.
Da $h_2 \in H$, gilt auch $h_2^{-1} \in H$. Da H unter Inversenbildung abgeschlossen ist, ist H eine Gruppe. Somit gilt auch (c).

Beweis: (c) impliziert (a)
Angenommen, H ist eine Gruppe. Wir müssen zeigen, dass $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$. Da H eine Gruppe ist, gilt per Definition die Abgeschlossenheit der Operation und die Inversenbildung, also ist (a) erfüllt.

Fazit: Die Aussagen (a), (b) und (c) sind äquivalent.

References