Übungsblatt 5

Felix Kleine Bösing, Juri Ernesto Humberg, Leonhard Meyer

November 13, 2024

Aufgabe 1

Teil (a)

Beweis: Wir wollen zeigen, dass die Folge

$$\left(\sqrt[n]{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gegen 1 konvergiert.

1. **Hypothese und Idee des Beweises:** Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1.$$

   Wir beginnen mit dem Spezialfall $k = 1$, wie im Hinweis vorgeschlagen, und verallgemeinern dann das Ergebnis für beliebige $k \in \mathbb{N}$.

2. **Betrachte den Fall $k = 1$:** In diesem Fall lautet die Folge

$$a_n = \sqrt[n]{n}.$$

   Wir schreiben a_n um:

$$a_n = n^{\frac{1}{n}}.$$

   Wir behaupten, dass $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

3. **Beweis durch Grenzwertbestimmung:** Um den Grenzwert von $n^{\frac{1}{n}}$ zu berechnen, betrachten wir den natürlichen Logarithmus von a_n:

$$\ln(a_n) = \ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(n).$$

   Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

4. **Grenzwert von $\frac{\ln(n)}{n}$:** Da der Zähler $\ln(n)$ langsamer wächst als der Nenner n, können wir L'Hôpital's Regel anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

   Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = 0.$$

   Da $\ln(a_n) \to 0$, folgt $a_n \to e^0 = 1$.

5. **Verallgemeinerung auf beliebiges $k \in \mathbb{N}$:** Für $k > 1$ betrachten wir die Folge

$$a_n = \sqrt[n]{n^k} = (n^k)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{k}{n}}.$$

   Analog zum Fall $k = 1$ betrachten wir den natürlichen Logarithmus:

$$\ln(a_n) = \frac{k}{n} \ln(n).$$

   Auch hier gilt, dass $\frac{k}{n} \ln(n) \to 0$ für $n \to \infty$, wie zuvor gezeigt.

6. **Schlussfolgerung:** Da $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass die Folge $\left(\sqrt[n]{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gegen 1 konvergiert.