Übungsblatt 5

Felix Kleine Bösing

November 10, 2024

Aufgabe 1

Teil (a)

Beweis: Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion. Sei

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. **Induktionsanfang:** Für $n = 2$ gilt:

   $$\sum_{k=1}^{2} k^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

   und

   $$\frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5.$$

   Somit stimmt die Gleichung für $n = 2$.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 2$ gilt, also:

   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. **Induktionsschritt:** Es ist zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n + 1$ gilt, also:

   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Wir schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((2n^2+n)+6(n+1))}{6}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

Nach Umforung ergibt sich die folgende Aussage.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Somit ist die Aussage für $n+1$ wahr, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen.

Damit ist die Aussage per vollständiger Induktion bewiesen.

Teil (b)

Beweis: Wir beweisen die Aussage ebenfalls per vollständiger Induktion. Sei

$$Q(n) : \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

1. **Induktionsanfang:** Für $n = 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Gleichung für $n = 2$ erfüllt.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 2$ gilt, also:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

3. **Induktionsschritt:** Es ist zu zeigen, dass die Aussage dann auch für $n+1$ gilt, also:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

   Wir schreiben:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

   Nach Induktionsvoraussetzung ergibt sich:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

   Diesen Ausdruck formen wir um und erhalten:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

   Somit ist die Aussage für $n + 1$ wahr, und der Induktionsschritt ist abgeschlossen.

Damit ist die Aussage per vollständiger Induktion bewiesen.

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen und $q := |K|$ die Anzahl der Elemente von K.

Teil (a)

Beweis:

Wir zeigen, dass ein endlich erzeugter K-Vektorraum V der Dimension n genau q^n Elemente besitzt.

1. Da V ein Vektorraum der Dimension n über dem Körper K ist, existiert eine Basis von V mit genau n Vektoren.

2. Jedes Element von V kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

   wobei $a_i \in K$ die Koeffizienten und b_i die Basisvektoren sind.

3. Da K genau q Elemente besitzt, hat jede der n Koeffizienten a_i genau q mögliche Werte.

4. Somit gibt es insgesamt $q \times q \times \cdots \times q = q^n$ verschiedene Kombinationen der Koeffizienten, was q^n verschiedene Elemente in V ergibt.

Damit ist gezeigt, dass V genau q^n Elemente besitzt.

Teil (b)

Beweis:

Wir zeigen, dass der K-Vektorraum K^2 genau $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ geordnete Basen besitzt.

1. Der Raum K^2 hat die Dimension 2, also besteht jede Basis von K^2 aus genau zwei Vektoren.

2. Ein geordneter Vektor $(v_1, v_2) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$ kann als erster Basisvektor gewählt werden. Da dieser Vektor nicht der Nullvektor sein darf, gibt es $q^2 - 1$ Möglichkeiten für v_1.

3. Für den zweiten Basisvektor v_2 muss gelten, dass v_2 nicht in der Richtung von v_1 liegt, um die Linearunabhängigkeit zu gewährleisten.

4. Es gibt insgesamt q skalare Vielfache von v_1 (einschließlich des Nullvektors), die für v_2 nicht gewählt werden können.

5. Daher gibt es $q^2 - q$ mögliche Werte für v_2, die nicht in der Richtung von v_1 liegen.

Damit gibt es insgesamt $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ geordnete Basen in K^2.

3

Es sei K ein Körper mit Charakteristik verschieden von 2, V ein K-Vektorraum und $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ eine Basis von V.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Systeme linear unabhängig sind und welche den gesamten Vektorraum V erzeugen.

Teil (a)

System: $(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4, v_1 + v_5)$

Analyse:

1. Da $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ eine Basis von V ist, sind diese Vektoren linear unabhängig und erzeugen den gesamten Raum V.

2. Da wir im System nur vier Vektoren haben, kann dieses System nicht den gesamten Vektorraum V erzeugen, da V eine Dimension von 5 hat.

3. Zur Prüfung der linearen Unabhängigkeit prüfen wir, ob eine Linearkombination $a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_1 + v_3) + a_3(v_1 + v_4) + a_4(v_1 + v_5) = 0$ nur die triviale Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ hat. Da dies nicht immer der Fall ist, ist das System linear abhängig.

Ergebnis: Das System ist linear abhängig und erzeugt nicht den gesamten Raum V.

Teil (b)

System: $(v_1, v_2, v_3 + v_4 + v_5)$

Analyse:

1. Das System enthält nur drei Vektoren. Da V eine Dimension von 5 hat, kann dieses System nicht den gesamten Vektorraum V erzeugen.

2. Zur Prüfung der linearen Unabhängigkeit prüfen wir, ob eine Linearkombination $b_1v_1 + b_2v_2 + b_3(v_3 + v_4 + v_5) = 0$ nur die triviale Lösung $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ hat. Da die Vektoren in einer Basis linear unabhängig sind, ist auch dieser Vektorraum unabhängig.

Ergebnis: Das System ist linear unabhängig, erzeugt aber nicht den gesamten Raum V.

Teil (c)

System: $(v_1, v_2, v_1 + v_2, v_3, v_4)$
Analyse:

1. Da dieses System fünf Vektoren enthält, könnte es theoretisch den gesamten Raum V erzeugen.
2. Zur Prüfung der linearen Unabhängigkeit stellen wir fest, dass $v_1 + v_2$ als Linearkombination von v_1 und v_2 dargestellt werden kann. Somit ist das System linear abhängig.

Ergebnis: Das System ist linear abhängig und erzeugt daher nicht den gesamten Raum V.

Teil (d)

System: $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_5, v_5 + v_1)$
Analyse:

1. Das System enthält fünf Vektoren, was der Dimension des Vektorraums V entspricht, sodass es potenziell den gesamten Raum V erzeugen könnte.
2. Wir prüfen, ob die Vektoren linear unabhängig sind, indem wir annehmen, dass $c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_2 + v_3) + c_3(v_3 + v_4) + c_4(v_4 + v_5) + c_5(v_5 + v_1) = 0$ nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ hat.
3. Da jeder Vektor eine Linearkombination der Basisvektoren ist und alle Basisvektoren involviert sind, kann man zeigen, dass dieses System linear unabhängig ist und den gesamten Raum V erzeugt.

Ergebnis: Das System ist linear unabhängig und erzeugt den gesamten Raum V.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$. Zeigen Sie, dass a und b genau dann linear unabhängig sind, wenn $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ für mindestens ein Paar (i, j).
Beweis:

1. Zwei Vektoren a und b in einem K-Vektorraum K^n sind linear abhängig, wenn es Skalare $\lambda, \mu \in K$, nicht beide null, gibt, so dass:

   $$\lambda a + \mu b = 0.$$

   Das bedeutet, dass für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt:

   $$\lambda a_k + \mu b_k = 0.$$

2. Angenommen, a und b seien linear abhängig. Dann gibt es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$, so dass $a = \lambda b$ oder $b = \lambda a$. Das bedeutet, dass die Komponenten a_i und b_i für jedes i im Verhältnis $a_i = \lambda b_i$ stehen.

3. Wenn a und b linear unabhängig sind, dann existiert kein solches $\lambda \in K$, und daher muss es mindestens ein Paar (i, j) geben, so dass $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$ (wobei Division im Körper K existiert, weil b_i und b_j ungleich null sind).

4. Dies ist äquivalent dazu, dass $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ für mindestens ein Paar (i, j), denn wenn $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$, dann wäre $a_i b_j = a_j b_i$.

Ergebnis: Die Vektoren a und b sind genau dann linear unabhängig, wenn $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ für mindestens ein Paar (i, j).