

Übungsblatt 3

Felix Kleine Bösing

October 28, 2024

Aufgabe 1

Es sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper K gegeben:

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

$$x + z = 0$$

Bestimmen Sie die Lösungen dieses Gleichungssystems, falls:

(a) $K = \mathbb{C}$

Schritt 1: Aus der dritten Gleichung folgt:

$$x = -z$$

Schritt 2: Einsetzen von $x = -z$ in die anderen Gleichungen:

$$-z + y + z = 0 \implies y = 0$$

$$-z - 0 - z = 0 \implies z = 0$$

Schritt 3: Damit ist:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Die Lösung über \mathbb{C} ist daher nur die triviale Lösung:

$$(0, 0, 0)$$

(b) $K = \mathbb{F}_2$

Da wir uns in \mathbb{F}_2 befinden, sind die einzigen möglichen Werte für die Variablen 0 und 1. Anders gesagt müssen wir in \mathbb{F}_2 hier mod 2 anwenden. Das bedeutet für die Multiplikation und Addition, dass:

$$1 + 1 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad -1 = 1$$

Schritt 1: Aus der dritten Gleichung $x + z = 0$ folgt in \mathbb{F}_2 , dass

$$x = z$$

Schritt 2: Setzen wir $x = z$ in die erste Gleichung $x + y + z = 0$ ein:

$$z + y + z = 0 \implies 2z + y = 0$$

Da in \mathbb{F}_2 $2z = 0$ ist, bleibt:

$$y = 0$$

Schritt 3: Nun wissen wir, dass $y = 0$ ist, und $x = z$ gilt. Also gibt es zwei mögliche Fälle:

- Wenn $z = 0$, dann ist $x = 0$. Die Lösung ist:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

- Wenn $z = 1$, dann ist $x = 1$. Die Lösung ist:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1)$$

Zusammenfassung: Über \mathbb{F}_2 gibt es zwei Lösungen:

$$(0, 0, 0) \quad \text{und} \quad (1, 0, 1)$$

Aufgabe 2

Gesucht sind alle komplexen Zahlen $z = x + iy$, die die Gleichung $z^2 = z_0$ erfüllen, wobei $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$.

Schritt 1: Wir berechnen das Quadrat von z :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Dies muss gleich $z_0 = a + ib$ sein, also ergeben sich die beiden Gleichungen für jeweils den Real- und Imaginärteil:

$$x^2 - y^2 = a \quad (1), \quad 2xy = b \quad (2)$$

Schritt 2: Lösen der Gleichung $2xy = b$ nach y :

$$y = \frac{b}{2x} \quad \text{für } x \neq 0$$

Schritt 3: Einsetzen von y in die Gleichung $x^2 - y^2 = a$:

$$x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \implies x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

Multiplizieren mit $4x^2$ um den Bruch zu eliminieren:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

Setze $u = x^2$, um die quadratische Gleichung zu lösen:

$$4u^2 - 4au - b^2 = 0$$

Die Lösung per Mitternachtsformel ist:

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Schritt 4: Bestimmen von x und y :

$$x = \pm \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \frac{b}{2x}$$

Lösungen: Es gibt vier Lösungen für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{2\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}} \right)$$

Aufgabe 3

Es sei (G, \cdot) eine Gruppe. Wir zeigen, dass die Aussagen (a), (b) und (c) für eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ äquivalent sind.

Beweis: (a) impliziert (b)

Angenommen, H erfüllt die Bedingungen von (a), d.h. für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Nun zeigen wir, dass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ gilt. Da nach (a) $h_2^{-1} \in H$, gilt durch die Abgeschlossenheit der Gruppenoperation auch $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$. Somit ist (b) erfüllt.

Beweis: (b) impliziert (c)

Angenommen, H erfüllt die Bedingung (b), d.h. für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

Da $h_2 \in H$, gilt auch $h_2^{-1} \in H$. Da H unter Inversenbildung abgeschlossen ist, ist H eine Gruppe. Somit gilt auch (c).

Beweis: (c) impliziert (a)

Angenommen, H ist eine Gruppe. Wir müssen zeigen, dass $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$. Da H eine Gruppe ist, gilt per Definition die Abgeschlossenheit der Operation und die Inversenbildung, also ist (a) erfüllt.

Fazit: Die Aussagen (a), (b) und (c) sind äquivalent.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Menge $F = \{0, 1, a, b\}$, für die gezeigt werden soll dass höchstens eine Körperstruktur auf F definiert werden kann, sodass: - 0 das neutrale Element der Addition ist. - 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.

1. Anforderungen an einen Körper

Ein Körper ist eine algebraische Struktur, in der die folgenden Eigenschaften erfüllt sein müssen:

- Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation.
- Existenz von neutralen Elementen der Addition und Multiplikation.
- Existenz von additiven und multiplikativen Inversen.
- Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation.
- Distributivität der Multiplikation über die Addition.

Da F nur vier Elemente hat, wird ein Körper mit genau diesen Eigenschaften als der endliche Körper \mathbb{F}_4 bezeichnet, falls er existiert.

2. Additionstabelle

Da 0 das neutrale Element der Addition ist, muss gelten:

$$x + 0 = x \quad \text{für alle } x \in F.$$

Weiterhin erwarten wir, dass jedes Element ein additives Inverses hat. Das bedeutet, dass für jedes $x \in F$ ein $y \in F$ existiert, sodass:

$$x + y = 0.$$

Da F vier Elemente hat und die Addition kommutativ ist, können wir die Tabelle teilweise wie folgt ausfüllen:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0		
a	a		0	
b	b			0

Nun müssen wir die übrigen Einträge so ausfüllen, dass jedes Element nur einmal pro Zeile und Spalte auftritt (da wir die Struktur eines endlichen Körpers mit Addition erwarten). Ein sinnvolles Ausfüllen ergibt:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

3. Multiplikationstabelle

Da 1 das neutrale Element der Multiplikation ist, muss gelten:

$$x \cdot 1 = x \quad \text{für alle } x \in F.$$

Für die Multiplikation muss außerdem jedes von 0 verschiedene Element ein Inverses besitzen, sodass das Produkt dieser Elemente mit ihrem Inversen 1 ergibt.

Wir starten mit den einfachsten Einträgen der Tabelle: - $x \cdot 0 = 0$ für jedes $x \in F$. - $x \cdot 1 = x$ für jedes $x \in F$, da 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.

Damit erhalten wir die folgende partielle Multiplikationstabelle:

\cdot	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a		
b	0	b		

Da die Multiplikation kommutativ ist und jedes Element (außer 0) ein Inverses haben muss, ergänzen wir die Tabelle so, dass für a und b gilt: - $a \cdot b = 1$, damit a und b gegenseitig Inverse sind. - $a \cdot a = b$ und $b \cdot b = a$, um die restlichen Plätze in der Tabelle auszufüllen.

Die vollständige Multiplikationstabelle sieht dann wie folgt aus:

\cdot	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

4. Eindeutigkeit der Lösung

In einem Körper müssen alle von 0 verschiedenen Elemente ein multiplikatives Inverses haben. Da F nur vier Elemente hat, müssen a und b die Inversen voneinander sein, um sicherzustellen, dass alle von 0 verschiedenen Elemente multiplikative Inversen besitzen. Dies legt fest, dass:

$$a \cdot b = 1.$$

Zusätzlich müssen die Elemente a und b bei der Multiplikation untereinander und mit sich selbst Kombinationen ergeben, die konsistent mit den Körperaxiomen sind. Insbesondere muss gelten:

$$a \cdot a = b$$

und

$$b \cdot b = a.$$

References