

1 Übungsblatt 1

1.1 Aufgabe 1.1

Aufgabe: Bestimmen Sie, ob die folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme sind.

Annahmen:

1. Der Zusammenhang zwischen den Variablen der Lösungsmenge muss linear sein.
2. Lineare Gleichungssysteme können grundsätzlich drei verschiedene Lösungsmengen haben (Hier visualisiert im \mathbb{R}^2 -Raum):
 - (a) Keine Lösung (Geraden im \mathbb{R}^2 -Raum verlaufen parallel zueinander, sind aber nicht dieselbe Gerade).
 - (b) Eine Lösung (Geraden schneiden sich in einem Punkt).
 - (c) Unendlich viele Lösungen (Geraden sind identisch).

a) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Gegeben ist eine Menge mit einem Vektor der von t abhängig ist. Jedoch ist die zweite Komponente des Vektors nicht streng linear, sondern affin-linear durch den konstanten Term $+1$. Daher kann diese Menge keine Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sein.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Die beiden Komponenten x und y des Vektors haben eine quadratische Abhängigkeit zueinander $y = x^2$. Damit kann diese Teilmenge keine Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sein.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Die Menge umfasst einen Vektor mit festen Werten wodurch lineare Abhängigkeit zwischen den Variablen des LGS gegeben ist. Geometrisch

gesehen würde es sich daher um einen Schnittpunkt zwischen den beiden Geraden des Gleichungssystems handeln. Somit kann diese Teilmenge eine Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sein.

$$\text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Diese Menge umfasst zwei Vektoren. Da die Lösungsmenge eines LGS entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen enthalten muss, kann diese Menge keine Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sein.

1.2 Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie drei reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$, sodass das folgende lineare Gleichungssystem über \mathbb{R} eindeutig, mehrdeutig bzw. überhaupt nicht lösbar ist:

$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ 4x + ay &= 2 \end{aligned}$$

Über die Determinante der Koeffizientenmatrix des LGS lässt sich die Eindeutigkeit der Lösung bestimmen. Ist die Determinante 0 gibt es keine eindeutige Lösung. Ist die Determinante ungleich 0 gibt es eine eindeutige Lösung.

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix} = a \cdot a - 4 \cdot 1 = a^2 - 4$$

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2.$$

Damit ist das LGS nicht eindeutig lösbar für $a = 2$ und $a = -2$. Setzt man nun $a = 2$ ein erhält man das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit 2 der ersten Gleichung und anschließender Subtraktion der zweiten Gleichung erhält man:

$$0x + 0y = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Da dies eine wahre Aussage ist, folgt daraus, dass das LGS unendlich viele Lösungen hat. Geometrisch betrachtet handelt es sich um die gleiche Gerade, wodurch es unendlich viele "Schnittpunkte" gibt.

Für $a = -2$ ergibt sich folgende Gleichung für das LGS:

$$-2x + y = 1$$

$$4x - 2y = 2$$

Durch Multiplikation mit 2 und Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten erhält man:

$$0 = 4$$

Da dies eine falsche Aussage ist, folgt daraus, dass das LGS keine Lösung hat. Geometrisch betrachtet handelt es sich um parallele Geraden, die sich nicht schneiden. Daraus folgt, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -2$ und $a \neq 2$, das LGS eindeutig lösbar ist, für $a = 2$ unendlich viele Lösungen hat und für $a = -2$ keine Lösung hat.

1.3 Aufgabe 1.3

(a) Geometrische Bedeutung der möglichen Lösungen

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

mit Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$.

Wir betrachten hier einen Raum mit drei Dimensionen, in dem die Variablen x , y und z die Achsen bilden. Dementsprechend handelt es sich bei jeder der drei Gleichungen um eine Ebene im Raum.

1. Keine Lösung: Die Ebenen liegen parallel zueinander im Raum
2. Eine Lösung: Die Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt
3. Unendlich viele Lösungen: Mindestens zwei der Ebenen sind identisch oder parallel zueinander. Dies führt dazu, dass mindestens eine Gerade als Schnittmenge der Ebenen existiert und somit unendlich viele Schnittpunkte existieren.

(b) Lösen des folgenden Gleichungssystems

$$6x + 5y + 3z = 1$$

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x - 2y - 2z = 8$$

Um das Gleichungssystem zu lösen, wenden wir den Gauß-Algorithmus an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{6}$ und Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{23}{6} \\ 2 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{3}$ und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -3 & \frac{23}{3} \end{array}\right)$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $-\frac{22}{7}$ und Subtraktion der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{138}{7} \end{array}\right)$$

Daraus folgt, dass:

$$-\frac{10}{7}z = \frac{138}{70} \Rightarrow z = -\frac{69}{5}.$$

Durch Einsetzen von z in die zweite Gleichung erhält man:

$$\frac{7}{6}y = \frac{23}{6} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{69}{5}\right) \Rightarrow y = \frac{161}{15}$$

Durch Einsetzen von y und z in die erste Gleichung erhält man:

$$6x = 1 - 5 \cdot \frac{46}{5} - 3 \cdot -\frac{69}{5} \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Ergebnis: Die drei Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt der durch diesen Vektor beschrieben ist:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{46}{5} \\ \frac{69}{5} \end{pmatrix}$$

1.4 Aufgabe 1.4

Es soll gezeigt werden, welche von $(0, 0, 0)$ verschiedenen Lösungsmengen ein Gleichungssystem unter Berücksichtigung zweier Bedingungen haben kann. Zunächst berechnen wir hierfür die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems um daraus eine Aussage über die Lösbarkeit des Gleichungssystems abzuleiten.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix} = 1 + a^3 + b^3 - 3ab$$

Unter der ersten Bedingung $a = b = 1$ ergibt sich folgende Aussage:

$$1 + 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Daraus folgt, dass es keine eindeutige Lösung gibt. Betrachtet man das Gleichungssystem unter dieser Bedingung, so ergibt sich für alle drei Gleichungen:

$$x + y + z = 0$$

Hinsichtlich der Lösungsmenge bedeutet dies, dass es unendlich viele Lösungen gibt, da es sich jeweils um dieselbe Ebene handelt. Unter der

zweiten Bedingung $a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -b - 1$ ergibt sich folgende Aussage:

$$1 + (-b - 1)^3 + b^3 - 3b \cdot (-b - 1) = b^3 - b^3 - 3b^2 - 3b - 1 + 3b^2 + 3b + 1 = 0$$

Auch unter dieser Bedingung gibt es keine eindeutige Lösung, sodass es entweder keine oder unendlich viele Lösungen gibt. Da die Ebenen weder identisch noch parallel zueinander sind, gibt es per ausschussverfahren unendlich viele Lösungen im Sinne von Schnittgeraden zwischen den Ebenen.