Übungsblatt 1

Felix Kleine Bösing

October 17, 2024

Aufgabe 1

Wir haben hier jeweils zwei/drei Aussagen, die nur die Ausprägungen wahr oder falsch annehmen können. Dementsprechen müssen wir nur vier/acht mögliche Fälle prüfen und können mit einer Wahrheitstabelle die Äquivalenz beweisen.

(a) $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Da die Spalten für $\neg(A \land B)$ und $\neg A \lor \neg B$ identisch sind, schließen wir daras, dass:

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$

(b) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Da die Spalten für $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ identisch sind, schließen wir, dass:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

(c) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Da die Spalten für $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ identisch sind, schließen wir daraus, dass:

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Menge M. Für jedes Element $x \in M$ bezeichne $A(x)$ eine gegebene Aussage. Zeigen Sie:

(a) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$

Wir beweisen, dass:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$$

- Die linke Seite $\neg(\forall x \in M : A(x))$ besagt, dass es nicht wahr ist, dass $A(x)$ für alle $x \in M$ gilt. Das bedeutet, dass es mindestens ein $x \in M$ geben muss, für das $A(x)$ nicht gilt.
- Die rechte Seite $\exists x \in M : \neg A(x)$ besagt genau das: Es existiert ein $x \in M$, für das $A(x)$ nicht wahr ist.

Da beide Seiten dasselbe ausdrücken, gilt die Äquivalenz:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$$

(b) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$

Wir beweisen, dass:

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$$

Wir wissen bereits aus 1b), dass:

$$A \to B \iff \neg B \to \neg A$$

sowie Äquivalenz aus zwei Implikationen besteht:

$$A \iff B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$$

Nehmen wir nun an, dass 2a) wahr ist, dann gilt:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$$

Daraus folgt, dass wir die Aussagen von 2a vertauschen und negieren können und erhalten:

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$$

Womit die Äquivalenz bewiesen ist.

Aufgabe 3

(a)

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\}$$

$$A = \{n \in X \mid 2(n-13)(n-3) < 0\}$$
$$B = \{n \in X \mid \exists m \in \mathbb{N}, m^2 = n\}$$
$$C = \{n \in X \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$$

Die Mengen ergeben sich daher wie folgt:

Die Menge A ergibt sich aus allen natürlichen Zahlen n im Intervall $[1, 100]$, für die die Ungleichung $2(n-13)(n-3) < 0$ gilt. Die Nullstellen der Ungleichung liegen bei $n = 3$ und $n = 13$. Für Werte zwischen 3 und 13 ist $2(n-13)(n-3)$ negativ und die Ungleichung somit wahr.

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Die Menge B umfasst alle natürlichen Zahlen n im Intervall $[1, 100]$, für die es eine natürliche Zahl m gibt, sodass $m^2 = n$. Da die Quadratzahlen im Intervall $[1, 100]$ die Zahlen $(1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2)$ sind, ergibt sich:

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

Die Menge C umfasst alle natürlichen Zahlen n im Intervall $[1, 100]$, die durch 2 teilbar sind.

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 100\}$$

Bestimmen Sie die Mengen:
1. $(A \cup B) - C$: Union von A und B mit Differenz von C.

$$(A \cup B) = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

$$(A \cup B) - C = \{1, 5, 7, 9, 11, 25, 49, 81\}$$

2. $A \cup (B - C)$: Vereinigung von A und der Differenz von B und C.

$$B - C = \{1, 9, 25, 49, 81\}, \quad A \cup (B - C) = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 25, 49, 81\}$$

3. $(B \cap A) - C$: Schnittmenge von B uund A mit Differenz von C.

$$B \cap A = \{4, 9\}, \quad (B \cap A) - C = \{9\}$$

4. $B \cap (A - C)$: Schnittmenge von B und der Differenz von A und C.

$$A - C = \{5, 7, 9, 11\}, \quad B \cap (A - C) = \{9\}$$

(b) De Morgansche Regeln

$$i) X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

$$ii) X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$$

Beweis für (i):

Die Menge links des Gleichheitszeichens besteht aus allen Elementen von X, die nicht in der Schnittmenge von Y und Z enthalten sind. Anders könnte man schreiben $x \in X \wedge (x \notin Y \vee x \notin Z$. Der Ausdruck in Klammern evaluiert zu wahr, wenn x mindestens in einer der beiden Mengen nicht existiert. Oder ander ausgedrückt: $(x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in X \wedge x \notin Z)$. Womit wir beim Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens angekommen sind.

Beweis für (ii): Die Menge links des Gleichheitszeichens besteht aus allen Elementen von X, die nicht in der Vereinigungsmenge von Y und Z enthalten sind. Anders könnte man schreiben $x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z$. Für x muss gelten, dass es weder in Y noch in Z enthalten sein darf. Oder wie es rechts des Gleichheitszeichens ausgedrückt ist: $(x \in X \wedge x \notin Y) \wedge (x \in X \wedge x \notin Z)$. Den Ausdruck $xinX$ können wir in beiden Teilen der Konjunktion rausziehen und so die Äquivalenz zeigen.

Aufgabe 4

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Für $A \subseteq X$ setzen wir $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$.

(ii) Für $B \subseteq Y$ setzen wir $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Wir prüfen die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Diese Aussage ist **wahr**.

Begründung: Das Urbild von $A \cap B$ unter f besteht aus allen $x \in X$, für die $f(x) \in A \cap B$ gilt. Das bedeutet, dass $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$, was genau dem Schnitt der Urbilder entspricht:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Diese Aussage ist **wahr**.

Begründung: Das Urbild von $A \cup B$ unter f besteht aus allen $x \in X$, für die $f(x) \in A \cup B$ gilt. Das bedeutet, dass $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$, was genau der Vereinigung der Urbilder entspricht:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

(c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Diese Aussage ist **falsch**.

Gegenbeispiel: Angenommen, f ist nicht injektiv. Sei $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1 \neq x_2$, wobei $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$. Dann gilt:

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Aber:

$$f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$$

Das zeigt, dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$, wenn f nicht injektiv ist.

(d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Diese Aussage ist **wahr**.

Begründung: Das Bild von $A \cup B$ unter f besteht aus allen $f(x)$ für $x \in A \cup B$, was dem Bild der Vereinigung $f(A) \cup f(B)$ entspricht:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$