# Übungsblatt 6

Felix Kleine Bösing, Juri Ernesto Humberg, Leonhard Meyer

November 27, 2024

## Aufgabe 1

Untersuchen wir die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen gegebenenfalls ihre Werte:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \quad \text{und} \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

### (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

**Beweis:** Diese Reihe ist eine sogenannte teleskopische Reihe, da sich viele Terme gegenseitig aufheben. Untersuchen wir dies genauer:

1. Die allgemeine Partialsumme der Reihe lautet:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Schreiben wir die Summanden explizit aus:

$$S_N = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} \right)$$

2. Es wird deutlich, dass sich die meisten Terme $\frac{1}{n+2}$ für $n \leq N - 2$ gegenseitig aufheben. Übrig bleiben:

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

3. Betrachten wir den Grenzwert der Partialsumme für $N \to \infty$:

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} - \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+2}$$

Da $\frac{1}{N+1} \to 0$ und $\frac{1}{N+2} \to 0$, bleibt:

$$\lim_{N \to \infty} S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Ergebnis:** Die Reihe konvergiert, und ihr Wert ist $\frac{3}{2}$.

**(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

**Beweis:** Diese Reihe ist eine geometrische Reihe der Form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n \quad \text{mit } a = 1 \text{ und } r = \frac{2}{3}.$$

1. Eine geometrische Reihe konvergiert, wenn $|r| < 1$. Da hier $|r| = \frac{2}{3} < 1$, ist die Reihe konvergent.

2. Die Summe einer geometrischen Reihe ergibt sich aus der Formel:

$$S = \frac{ar}{1 - r}$$

Für die gegebene Reihe ist $a = 1$ und $r = \frac{2}{3}$. Somit:

$$S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

**Ergebnis:** Die Reihe konvergiert, und ihr Wert ist 2.

## Zusammenfassung:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$: Konvergiert, Wert ist $\frac{3}{2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$: Konvergiert, Wert ist 2.

## Aufgabe 2

Untersuchen wir die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

**(a)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!}$

**Schritt 1: Ist $(a_k)$ eine Nullfolge?** Die allgemeinen Glieder der Reihe sind $a_k = \frac{2}{k!}$.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k!} = 0$$

Da $(a_k)$ eine Nullfolge ist, prüfen wir weiter.

**Schritt 2: Ist $(a_k)$ alternierend?** Nein, alle Glieder sind positiv.

**Schritt 3: Quotientenkriterium anwenden.** Berechnen wir den Grenzwert:

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{(k+1)!}}{\frac{2}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)\cdot k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

Da $q < 1$, konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

**Fazit:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!}$ konvergiert absolut.

**(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$

**Schritt 1: Ist $(a_k)$ eine Nullfolge?** Die allgemeinen Glieder der Reihe sind $a_k = \frac{k+4}{k^2-3k+1}$. Für $k \to \infty$:

$$a_k \sim \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

$(a_k)$ ist eine Nullfolge. Wir prüfen weiter.

**Schritt 2: Ist $(a_k)$ alternierend?** Nein, alle Glieder sind positiv.

**Schritt 3: Vergleich mit der harmonischen Reihe.** Da $a_k \sim \frac{1}{k}$ und die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch die gegebene Reihe nach dem Minorantenkriterium.

**Fazit:** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$ divergiert.

**(c)** $\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2-3k}$

**Schritt 1: Ist $(a_k)$ eine Nullfolge?** Die allgemeinen Glieder der Reihe sind $a_k = \frac{1}{k^2-3k}$. Für $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

$(a_k)$ ist eine Nullfolge. Wir prüfen weiter.

**Schritt 2: Ist $(a_k)$ alternierend?** Ja, die Vorzeichen wechseln durch den Faktor $(-1)^k$.

**Schritt 3: Prüfen wir das Leibniz-Kriterium.** Die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums sind:

1. $a_k \to 0$ für $k \to \infty$: Dies gilt, wie oben gezeigt.
2. $a_k$ ist monoton fallend: Für $k \geq 4$ wächst der Nenner $k^2 - 3k$ streng monoton, also ist $a_k$ streng monoton fallend.

Da beide Bedingungen erfüllt sind, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

**Fazit:** Die Reihe $\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2-3k}$ konvergiert.

**(d)** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$

**Schritt 1: Ist $(a_k)$ eine Nullfolge?** Die allgemeinen Glieder der Reihe sind:

$$a_k = \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$$

Betrachten wir den Bruch:

$$\frac{2k+3}{3k+2} = \frac{2+\frac{3}{k}}{3+\frac{2}{k}} \to \frac{2}{3} \quad \text{für } k \to \infty$$

Somit:

$$a_k = \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

$(a_k)$ ist eine Nullfolge.

**Schritt 2: Ist $a_k$ eine Potenzfolge?** Ja, $a_k = \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$. Prüfen wir das Wurzelkriterium:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2k+3}{3k+2} = \frac{2}{3} < 1$$

Da der Grenzwert kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium.

**Fazit:** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$ konvergiert absolut.

## Zusammenfassung

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!}$: Konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$: Divergiert nach dem Minorantenkriterium.

(c) $\sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2-3k}$: Konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$: Konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium.

## Aufgabe 3

### (a) Zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

**Beweis:** Um die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ zu zeigen, verwenden wir den Wurzelkriterium (Cauchy-Kriterium).

1. Die allgemeinen Glieder der Reihe sind $a_k = \frac{1}{k!}$. Wir prüfen, ob

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

gilt.

2. Für $a_k = \frac{1}{k!}$ erhalten wir:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$$

Da $k!$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ ist, wächst $k!$ exponentiell mit $k$. Somit gilt:

$$\sqrt[k]{k!} \to \infty \quad \text{für } k \to \infty$$

und

$$\frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$$

3. Daher ist:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 0 < 1$$

4. Nach dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

**Ergebnis:** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

## (b) Zeigen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Beweis:** Wir beweisen die beiden Ungleichungen separat.

1. Erste Ungleichung:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Wir verwenden die Binomialentwicklung für $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Dabei ist der Binomialkoeffizient definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Um zu zeigen, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, vergleichen wir die Terme der beiden Summen. Für jedes $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

Der Faktor $\frac{n!}{(n-k)!}$ im Zähler wächst bei kleinen $k$, wird jedoch durch den Nenner $n^k$ dominiert, sobald $k$ größer wird. Daher ist:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

Summieren wir diese Terme über $k = 0, 1, \ldots, n$, ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

2. Zweite Ungleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Wir erweitern die Summe bis $n+1$, indem wir die Bernoulli-Ungleichung verwenden:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Wie zuvor ist $\binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \geq \frac{1}{k!}$ für jedes $k \leq n$. Die zusätzlichen Terme der Summe für $k = n+1$ sorgen dafür, dass die Ungleichung erhalten bleibt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Schlussfolgerung:** Beide Ungleichungen sind gezeigt, und daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**(c) Folgern wir, dass $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gilt, wobei $e$ die Eulersche Zahl ist.**

**Beweis:** Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ nach Teil (a) konvergiert und wir in Teil (b) gezeigt haben, dass:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

folgt für $n \to \infty$, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ denselben Grenzwert hat wie die bekannten Annäherungen an $e$:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Somit ist:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

**Ergebnis:** Die Reihendarstellung für $e$ ist bewiesen.

## Aufgabe 4

Zeigen wir, dass die Eulersche Zahl $e$ irrational ist. *Hinweis: Verwenden wir die Reihendarstellung von $e$:*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

**Beweis:** Wir zeigen, dass $e$ irrational ist, indem wir annehmen, $e$ sei rational, und daraus einen Widerspruch herleiten.

1. Annahme: Rationalität von $e$: Nehmen wir an, $e$ sei rational. Das bedeutet, dass $e$ als Bruch $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$.

2. Reihendarstellung von $e$: Die Zahl $e$ lässt sich als unendliche Summe schreiben:

   $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

   Für eine endliche Approximation betrachten wir:

   $$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_N$$

wobei $R_N$ der Restterm der Reihe ist:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

3. Abschätzung des Restterms: Um $R_N$ abzuschätzen, beachten wir, dass für $n \geq N+1$ gilt:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(N+1)!}$$

Somit gilt für den Restterm:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \dots$$

Dies kann weiter vereinfacht werden zu:

$$R_N \leq \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \dots\right)$$

Da die Fakultät $(N+1)!$ im Nenner sehr schnell wächst, ist $R_N$ für große $N$ extrem klein. Insbesondere gilt für $R_N$:

$$R_N < \frac{1}{(N+1)!}$$

4. Widerspruchsbeweis: Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung $e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_N$ mit $q!(N+1)!$, wobei $q!$ die Fakultät des Nenners aus $\frac{p}{q}$ ist, ergibt sich:

$$q!(N+1)! \cdot e = q!(N+1)! \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + q!(N+1)! \cdot R_N$$

Der erste Term $q!(N+1)! \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ ist eine ganze Zahl, da $q!$ die Nenner der Summanden teilt. Der zweite Term $q!(N+1)! \cdot R_N$ kann jedoch niemals eine ganze Zahl sein, da $R_N < \frac{1}{(N+1)!}$. Das bedeutet, dass:

$$q!(N+1)! \cdot R_N < 1$$

Da $q!(N+1)! \cdot R_N$ eine ganze Zahl sein müsste, entsteht ein Widerspruch.

**Schlussfolgerung:** Unsere Annahme, dass $e$ rational sei, führt zu einem Widerspruch. Daher ist $e$ irrational.