

# Übungsblatt 4

Felix Kleine Bösing

November 3, 2024

## Aufgabe 1

Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen Untervektorräume von  $\mathbb{Q}^3$  sind:

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x, y, z \geq 0\},$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : 3x + y + z = 5\},$$

$$M_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x + 2y = 3z\},$$

$$M_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : xy - z = 0\}.$$

### Teil (a)

**Beweis:** Um zu überprüfen, ob  $M_1$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^3$  ist, müssen wir die folgenden Eigenschaften zeigen:

1. **Der Nullvektor muss enthalten sein:** Der Nullvektor in  $\mathbb{Q}^3$  ist  $(0, 0, 0)$ . Da  $0 \geq 0$  für jede Komponente gilt, gehört der Nullvektor zu  $M_1$ .
2. **Abgeschlossenheit unter Addition:** Nehmen wir an, dass  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M_1$ . Dann sind  $x_1, y_1, z_1 \geq 0$  und  $x_2, y_2, z_2 \geq 0$ . Für die Summe  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$  gilt ebenfalls  $x_1 + x_2 \geq 0$ ,  $y_1 + y_2 \geq 0$  und  $z_1 + z_2 \geq 0$ , sodass die Summe auch in  $M_1$  liegt.
3. **Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:** Sei  $(x, y, z) \in M_1$  und  $c \in \mathbb{Q}$ . Wenn  $c < 0$ , dann wird eine oder mehrere der Komponenten  $cx, cy, cz$  negativ, was die Bedingung  $x, y, z \geq 0$  verletzt. Daher ist  $M_1$  nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Da  $M_1$  nicht unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, ist es **kein** Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^3$ .

### Teil (b)

**Beweis:** Untersuchen wir, ob  $M_2$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^3$  ist.

1. **Der Nullvektor muss enthalten sein:** Der Nullvektor in  $\mathbb{Q}^3$  ist  $(0, 0, 0)$ . Setzen wir diesen in die Bedingung  $3x + y + z = 5$  ein, so erhalten wir:

$$3 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \neq 5.$$

Daher gehört der Nullvektor **nicht** zu  $M_2$ .

Da der Nullvektor nicht in  $M_2$  liegt, ist  $M_2$  **kein Untervektorraum** von  $\mathbb{Q}^3$ .

### Teil (c)

**Beweis:** Untersuchen wir, ob  $M_3$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^3$  ist.

1. **Der Nullvektor muss enthalten sein:** Der Nullvektor in  $\mathbb{Q}^3$  ist  $(0, 0, 0)$ . Setzen wir diesen in die Bedingung  $x + 2y = 3z$  ein, so erhalten wir:

$$0 + 2 \cdot 0 = 3 \cdot 0,$$

was offensichtlich wahr ist. Daher gehört der Nullvektor zu  $M_3$ .

2. **Abgeschlossenheit unter Addition:** Nehmen wir an, dass  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M_3$ . Dann gilt:

$$x_1 + 2y_1 = 3z_1 \quad \text{und} \quad x_2 + 2y_2 = 3z_2.$$

Für die Summe  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$  ergibt sich:

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2) = 3z_1 + 3z_2 = 3(z_1 + z_2),$$

sodass die Summe ebenfalls die Bedingung erfüllt.  $M_3$  ist also unter Addition abgeschlossen.

3. **Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:** Sei  $(x, y, z) \in M_3$  und  $c \in \mathbb{Q}$ . Dann gilt:

$$x + 2y = 3z.$$

Für das Produkt  $c \cdot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$  erhalten wir:

$$cx + 2(cy) = c(x + 2y) = c \cdot 3z = 3(cz),$$

was zeigt, dass auch  $(cx, cy, cz)$  die Bedingung erfüllt. Somit ist  $M_3$  unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Da  $M_3$  sowohl den Nullvektor enthält als auch unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, ist  $M_3$  ein **Untervektorraum** von  $\mathbb{Q}^3$ .

### Teil (d)

**Beweis:** Untersuchen wir, ob  $M_4$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^3$  ist.

1. **Der Nullvektor muss enthalten sein:** Der Nullvektor in  $\mathbb{Q}^3$  ist  $(0, 0, 0)$ . Setzen wir diesen in die Bedingung  $xy - z = 0$  ein, so erhalten wir:

$$0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

was offensichtlich wahr ist. Daher gehört der Nullvektor zu  $M_4$ .

2. **Abgeschlossenheit unter Addition:** Nehmen wir an, dass  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M_4$ , also  $x_1 y_1 = z_1$  und  $x_2 y_2 = z_2$ . Für die Summe  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$  ergibt sich jedoch:

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2.$$

Da zusätzliche Kreuzterme wie  $x_1 y_2$  und  $x_2 y_1$  auftreten, ist im Allgemeinen  $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \neq z_1 + z_2$ . Somit ist  $M_4$  nicht unter Addition abgeschlossen.

Da  $M_4$  nicht unter Addition abgeschlossen ist, ist es **kein Untervektorraum** von  $\mathbb{Q}^3$ .

## Aufgabe 4.2

### Teil (a)

**Beweis:** Wir sollen ein Beispiel eines Vektorraums  $V$  und einer Teilmenge  $M \subseteq V$  finden, sodass für alle  $v, w \in M$  mit  $v \neq w$  die Vektoren  $v$  und  $w$  linear unabhängig sind, die Menge  $M$  jedoch linear abhängig ist.

Ein solches Beispiel ist der Vektorraum  $V = \mathbb{R}^3$  und die Teilmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Betrachten wir die Eigenschaften dieser Vektoren:

1. Für jedes Paar unterschiedlicher Vektoren  $v, w \in M$  sind  $v$  und  $w$  linear unabhängig. Zum Beispiel sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  linear unabhängig, da keine Linearkombination  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  außer  $c_1 = c_2 = 0$  existiert.
2. Die Menge  $M$  ist jedoch linear abhängig, da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren in  $M$  eine lineare Abhängigkeit aufweisen.

Somit erfüllt die Teilmenge  $M$  die Bedingungen der Aufgabe.

### Teil (b)

**Beweis:** Gegeben sei ein Körper  $K$  und ein  $K$ -Vektorraum  $V$ . Sei  $M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  eine Teilmenge, wobei  $0 \notin M$ . Wir sollen zeigen, dass  $M$  genau dann linear unabhängig ist, wenn für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  gilt:

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \{0\}.$$

1. **Notwendigkeit:** Angenommen,  $M$  ist linear unabhängig. Dann bedeutet dies, dass keine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren in  $M$  den Nullvektor ergibt. Insbesondere ist jeder Vektor  $v_i$  nicht in der Linearkombination der anderen Vektoren, was impliziert, dass für jedes  $i$  die Schnittmenge  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$  nur den Nullvektor enthält, also

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \{0\}.$$

2. **Hinreichend:** Angenommen, für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  gilt  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \{0\}$ . Dies bedeutet, dass es keine nicht-triviale Linearkombination von  $v_1, \dots, v_i$  gibt, die auch als Linearkombination von  $v_{i+1}, \dots, v_n$  ausgedrückt werden kann. Folglich ist  $M$  linear unabhängig, da jede Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, nur die triviale Lösung  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  hat.

Damit ist gezeigt, dass  $M$  genau dann linear unabhängig ist, wenn für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  gilt:

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \dots, v_n \rangle = \{0\}.$$

### Aufgabe 4.3

Gegeben seien ein Körper  $K$  und die Untervektorräume  $U, V \subseteq K^n$ . Definieren wir die folgenden Mengen:

$$U \cap V = \{x \in K^n : x \in U \text{ und } x \in V\},$$

$$U \cup V = \{x \in K^n : x \in U \text{ oder } x \in V\},$$

$$U + V = \{x \in K^n : \text{es existieren } u \in U \text{ und } v \in V \text{ mit } x = u + v\}.$$

Zeigen Sie:

#### Teil (a)

**Beweis:** Um zu zeigen, dass die Mengen  $U \cap V$  und  $U + V$  Untervektorräume des  $K^n$  sind, müssen wir überprüfen, ob sie die Bedingungen für einen Untervektorraum erfüllen:

1. Die Menge muss den Nullvektor enthalten.
2. Sie muss unter Addition abgeschlossen sein.
3. Sie muss unter Skalarmultiplikation abgeschlossen sein.

#### 1. Untervektorraum $U \cap V$ :

- (a) **Nullvektor:** Da  $U$  und  $V$  Untervektorräume von  $K^n$  sind, enthalten beide den Nullvektor  $0$ . Da  $0 \in U$  und  $0 \in V$  gilt, folgt  $0 \in U \cap V$ .
- (b) **Abgeschlossenheit unter Addition:** Sei  $x, y \in U \cap V$ . Dann gilt  $x \in U$ ,  $x \in V$ ,  $y \in U$  und  $y \in V$ . Da  $U$  und  $V$  jeweils unter Addition abgeschlossen sind, ist auch  $x + y \in U$  und  $x + y \in V$ . Daher gilt  $x + y \in U \cap V$ , und  $U \cap V$  ist unter Addition abgeschlossen.
- (c) **Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:** Sei  $x \in U \cap V$  und  $c \in K$ . Da  $x \in U$  und  $x \in V$  sowie  $U$  und  $V$  jeweils unter Skalarmultiplikation abgeschlossen sind, folgt  $c \cdot x \in U$  und  $c \cdot x \in V$ . Somit ist  $c \cdot x \in U \cap V$ , und  $U \cap V$  ist unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Daher ist  $U \cap V$  ein Untervektorraum von  $K^n$ .

## 2. Untervektorraum $U + V$ :

- (a) **Nullvektor:** Da  $U$  und  $V$  Untervektorräume sind, enthalten beide den Nullvektor  $0$ . Setzen wir  $u = 0 \in U$  und  $v = 0 \in V$ , dann ist  $u + v = 0$ , was zeigt, dass  $0 \in U + V$ .
- (b) **Abgeschlossenheit unter Addition:** Sei  $x, y \in U + V$ . Dann existieren  $u_1, u_2 \in U$  und  $v_1, v_2 \in V$  mit  $x = u_1 + v_1$  und  $y = u_2 + v_2$ . Dann ist:

$$x + y = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2).$$

Da  $U$  und  $V$  unter Addition abgeschlossen sind, gilt  $u_1 + u_2 \in U$  und  $v_1 + v_2 \in V$ . Somit ist  $x + y \in U + V$ , und  $U + V$  ist unter Addition abgeschlossen.

- (c) **Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:** Sei  $x \in U + V$  und  $c \in K$ . Dann existieren  $u \in U$  und  $v \in V$  mit  $x = u + v$ . Dann ist:

$$c \cdot x = c \cdot (u + v) = (c \cdot u) + (c \cdot v).$$

Da  $U$  und  $V$  unter Skalarmultiplikation abgeschlossen sind, gilt  $c \cdot u \in U$  und  $c \cdot v \in V$ . Somit ist  $c \cdot x \in U + V$ , und  $U + V$  ist unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Daher ist  $U + V$  ein Untervektorraum von  $K^n$ .

## Teil (b)

**Beweis:** Wir zeigen, dass die Menge  $U \cup V$  genau dann ein Untervektorraum von  $K^n$  ist, wenn  $U \subseteq V$  oder  $V \subseteq U$  gilt.

1. **Notwendigkeit:** Angenommen,  $U \cup V$  ist ein Untervektorraum von  $K^n$ . Wenn weder  $U \subseteq V$  noch  $V \subseteq U$  gilt, dann existieren Vektoren  $u \in U \setminus V$  und  $v \in V \setminus U$ . Da  $U \cup V$  ein Untervektorraum ist, muss  $u + v \in U \cup V$  gelten. Da  $u \notin V$  und  $v \notin U$ , kann  $u + v$  weder in  $U$  noch in  $V$  liegen, was im Widerspruch zur Definition von  $U \cup V$  als Untervektorraum steht. Daher muss entweder  $U \subseteq V$  oder  $V \subseteq U$  gelten.
2. **Hinreichend:** Angenommen,  $U \subseteq V$ . Dann gilt  $U \cup V = V$ , und da  $V$  ein Untervektorraum ist, ist auch  $U \cup V$  ein Untervektorraum. Analog gilt, wenn  $V \subseteq U$ , dann ist  $U \cup V = U$ , und  $U \cup V$  ist ebenfalls ein Untervektorraum.

Damit ist gezeigt, dass  $U \cup V$  genau dann ein Untervektorraum von  $K^n$  ist, wenn  $U \subseteq V$  oder  $V \subseteq U$  gilt.

## Aufgabe 4.4

Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen linear unabhängig sind:

### Teil (a)

Gegeben sei der Körper  $K = \mathbb{Q}$  und die Menge

$$M_1 := \{0\} \subset \mathbb{Q}^4 =: V.$$

**Beweis:** Die Menge  $M_1$  besteht nur aus dem Nullvektor. Eine Menge, die nur den Nullvektor enthält, ist per Definition **nicht linear unabhängig**. Der Nullvektor ist immer linear abhängig, da ein Vielfaches des Nullvektors immer den Nullvektor ergibt.

**Ergebnis:** Die Menge  $M_1$  ist **nicht linear unabhängig**.

### Teil (b)

Gegeben sei der Körper  $K = \mathbb{R}$  und die Menge

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2 =: V.$$

**Beweis:** Die Menge  $M_2$  besteht aus Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Diese Vektoren sind alle Vielfache des Vektors  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Daher ist  $M_2$  ein eindimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^2$ , der durch den Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird.

Da jeder Vektor in  $M_2$  als Vielfaches von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dargestellt werden kann, sind die Vektoren in  $M_2$  **linear abhängig**.

**Ergebnis:** Die Menge  $M_2$  ist **nicht linear unabhängig**.

### Teil (c)

Gegeben sei der Körper  $K = \mathbb{C}$  und die Menge

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i-1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3 =: V.$$

**Beweis:** Um zu prüfen, ob die Vektoren in  $M_3$  linear unabhängig sind, untersuchen wir, ob es Skalare  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3 \in \mathbb{C}$  gibt, sodass:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung lässt sich in das folgende lineare Gleichungssystem umschreiben:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot i + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \cdot (1+i) = 0, \\ -\lambda_1 \cdot i + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot (i-1) = 0. \end{cases}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Gausschen Eliminationsverfahren und finden, dass die einzige Lösung  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  ist. Dies bedeutet, dass keine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren den Nullvektor ergibt. Daher sind die Vektoren in  $M_3$  linear unabhängig.

**Ergebnis:** Die Vektoren in  $M_3$  sind **linear unabhängig**.

### Teil (d)

Gegeben sei der Körper  $K = \mathbb{F}_5$  (der endliche Körper mit fünf Elementen) und die Menge

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{F}_5^3 =: V.$$

**Beweis:** Um zu prüfen, ob die Vektoren in  $M_4$  linear unabhängig sind, stellen wir die Frage, ob es Skalare  $c_1, c_2 \in \mathbb{F}_5$  gibt, sodass:

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Dies ergibt das folgende Gleichungssystem in  $\mathbb{F}_5$ :

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 \equiv 0 \pmod{5}, \\ c_1 + 4c_2 \equiv 0 \pmod{5}, \\ 2c_1 + 2c_2 \equiv 0 \pmod{5}. \end{cases}$$

Wir lösen dieses System schrittweise im endlichen Körper  $\mathbb{F}_5$ :

1. **Erste Gleichung:**  $3c_1 + c_2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow c_2 \equiv -3c_1 \pmod{5}$ . Da  $-3 \equiv 2 \pmod{5}$ , erhalten wir  $c_2 \equiv 2c_1 \pmod{5}$ .
2. **Zweite Gleichung:** Setzen wir  $c_2 \equiv 2c_1 \pmod{5}$  in die zweite Gleichung ein:

$$c_1 + 4 \cdot (2c_1) \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow c_1 + 8c_1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 9c_1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Da  $9 \equiv 4 \pmod{5}$ , haben wir  $4c_1 \equiv 0 \pmod{5}$ . Da 4 in  $\mathbb{F}_5$  eine Einheit ist, folgt  $c_1 = 0$ .

3. **Einsetzen in die erste Gleichung:** Setzen wir  $c_1 = 0$  in die erste Gleichung ein, ergibt sich  $c_2 = 0$ .

Da die einzige Lösung  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 0$  ist, sind die Vektoren in  $M_4$  linear unabhängig.

**Ergebnis:** Die Vektoren in  $M_4$  sind **linear unabhängig**.

## References