Übungsblatt 4

Felix Kleine Bösing

November 3, 2024

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ mit $z^3 = 1$. Sie müssen beweisen, dass Sie keine Lösungen übersehen haben. Zeichnen Sie Ihre Lösungen im $\mathbb{R}^2$.

Teil (a)

Beweis: Um die komplexen Zahlen z zu bestimmen, für die $z^3 = 1$ gilt, können wir die Aufgabe in die folgenden Schritte unterteilen:

1. Schreiben wir z in der Polarform: Sei $z = r \cdot e^{i\theta}$, wobei $r = |z|$ der Betrag und $\theta = \arg(z)$ das Argument von z ist.

2. Da $z^3 = 1$, muss gelten:
$$(r \cdot e^{i\theta})^3 = 1$$
$$r^3 \cdot e^{i3\theta} = 1$$

3. Da der Betrag $|1| = 1$ ist, muss auch $r = 1$ sein, damit $r^3 = 1$ erfüllt ist. Somit ist z eine Zahl auf dem Einheitskreis, d.h., $|z| = 1$.

4. Für das Argument ergibt sich die Gleichung $3\theta = 2\pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ ist, da $e^{i3\theta} = e^{i2\pi k}$.

5. Daraus folgt:
$$\theta = \frac{2\pi k}{3}$$
für $k = 0, 1, 2$.

6. Die Lösungen für z sind also:

$$z_0 = e^{i \cdot 0} = 1$$

$$z_1 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diese drei Werte erfüllen $z^3 = 1$, und es gibt keine weiteren Lösungen, da die Argumente $\theta = \frac{2\pi k}{3}$ für $k = 0, 1, 2$ alle möglichen Lösungen darstellen.

Zeichnung: Die Lösungen $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind gleichmäßig auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene verteilt und bilden ein regelmäßiges Dreieck. In der Zeichnung im $\mathbb{R}^2$-Koordinatensystem sind dies die Punkte $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

References