Übungsblatt 3

Felix Kleine Bösing, Juri Ernesto Humberg, Leonhard Meyer

October 31, 2024

Aufgabe 1

Teil (a)

Zeigen Sie, dass $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Beweis: Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass $\sqrt[n]{x}$ das Supremum $y \in \mathbb{R}_+$ ist, sodass $y^n \leq x$. Wir müssen zeigen, dass $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Da y das größte y ist, für das $y^n \leq x$, muss $(\sqrt[n]{x})^n = x$ gelten. Andernfalls gäbe es ein $y > \sqrt[n]{x}$, für das $y^n < x$ wäre, was der Definition von $\sqrt[n]{x}$ widerspricht. Also ergibt sich direkt:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Teil (b)

Zeigen Sie, dass $\{y \in \mathbb{R}_+ : y^n = x\} = \{\sqrt[n]{x}\}$.

Beweis: Dies zeigt, dass $\sqrt[n]{x}$ die eindeutige Lösung ist. Angenommen, es gäbe ein weiteres $y \in \mathbb{R}_+$ mit $y^n = x$ und $y \neq \sqrt[n]{x}$. Wenn $y > \sqrt[n]{x}$, dann wäre $y^n > x$, und wenn $y < \sqrt[n]{x}$, dann wäre $y^n < x$, was in beiden Fällen der Definition von $\sqrt[n]{x}$ widerspricht. Somit gilt:

$$\{y \in \mathbb{R}_+ : y^n = x\} = \{\sqrt[n]{x}\}.$$

Teil (c)

Zeigen Sie $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ und $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$.

Beweis:

1. Für $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$:

$$x^p = \prod_{i=1}^{p} x, \quad x^q = \prod_{j=1}^{q} x.$$

Wenn wir diese Produkte multiplizieren, ergibt sich:

$$x^p \cdot x^q = \left(\prod_{i=1}^{p} x\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{q} x\right) = \prod_{k=1}^{p+q} x = x^{p+q}.$$

2. Für $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$:

$$x^p = \prod_{i=1}^{p} x.$$

Dann gilt:

$$(x^p)^q = \prod_{j=1}^{q} \left(\prod_{i=1}^{p} x\right) = \prod_{k=1}^{p \cdot q} x = x^{p \cdot q}.$$

Teil (d)

Zeigen Sie $(xy)^p = x^p y^p$ und $\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$.

Beweis:

1. Für $(xy)^p = x^p y^p$:

$$(xy)^p = \prod_{i=1}^{p} (xy) = \left(\prod_{i=1}^{p} x\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{p} y\right) = x^p y^p.$$

2. Für $\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p = \prod_{i=1}^{p} \frac{x}{y} = \frac{\prod_{i=1}^{p} x}{\prod_{i=1}^{p} y} = \frac{x^p}{y^p}.$$

Teil (e)

Zeigen Sie $x < y \land p > 0 \Rightarrow x^p < y^p$.

Beweis: Wenn $x < y$ und $p > 0$, dann bleibt bei der Potenzierung die Ordnung erhalten, da die Funktion $f(t) = t^p$ für $p > 0$ monoton wachsend ist, was direkt auf den Definitionen von *sup* basiert.

$$x^p < y^p.$$

Teil (f)

Zeigen Sie $x < y \wedge p < 0 \Rightarrow x^p > y^p$.

Beweis: Da $p < 0$, kehrt sich die Ordnung beim Potenzieren um, da die Funktion $f(t) = t^p$ für $p < 0$ monoton fallend ist. Daher folgt äquivalent zu Teil (e):

$$x^p > y^p.$$

Teil (g)

Zeigen Sie $p < q \wedge x > 1 \Rightarrow x^p < x^q$.

Beweis: Da $x > 1$, $p < q$ und $f(t) = t^p$ für wächst x schneller bei q, also:

$$x^p < x^q.$$

Teil (h)

Zeigen Sie $p < q \wedge x < 1 \Rightarrow x^p > x^q$.

Beweis: Da $x < 1$, kehrt sich die Ordnung bei höheren Exponenten um, daher:

$$x^p > x^q.$$

Aufgabe 2

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$.

Teil (a)

Zeigen Sie die Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Beweis: Wir beginnen, indem wir die Ungleichung umformen. Multiplizieren beider Seiten mit 2 ergibt:

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

Da a und b nicht-negativ sind, können wir beide Seiten quadrieren, ohne die Ungleichung zu verändern:

$$(2\sqrt{ab})^2 \leq (a + b)^2,$$

was sich vereinfacht zu:

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2.$$

Durch Subtraktion von $4ab$ auf beiden Seiten erhalten wir:

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2.$$

Dies können wir als Quadrat schreiben:

$$0 \leq (a - b)^2.$$

Da $(a - b)^2 \geq 0$ immer wahr ist, folgt die gewünschte Ungleichung:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Teil (b)

Zeigen Sie, dass in der Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ genau dann Gleichheit eintritt, wenn $a = b$.

Beweis: Wir setzen $a = b$ in die Ungleichung ein und prüfen, ob dann Gleichheit gilt.

Die linke Seite der Ungleichung wird zu:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = a.$$

Die rechte Seite der Ungleichung wird zu:

$$\frac{a + b}{2} = \frac{a + a}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Damit ergibt sich die Gleichung:

$$a = a,$$

die offensichtlich wahr ist. Dies zeigt, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a = b$.

Aufgabe 3

Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien folgende Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert:

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Beweis: Um zu zeigen, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist, müssen wir folgende Eigenschaften nachweisen: Abgeschlossenheit der Operationen, Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation, Existenz neutraler und inverser Elemente sowie das Distributivgesetz.

1. **Abgeschlossenheit der Addition und Multiplikation:**
   Sei $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   Für die Addition gilt:
   $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$
   Da $a, a' \in \mathbb{R}$ und $b, b' \in \mathbb{R}$, ist auch $a + a' \in \mathbb{R}$ und $b + b' \in \mathbb{R}$. Somit liegt $(a + a', b + b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und die Addition ist abgeschlossen.

   Für die Multiplikation gilt:
   $$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$
   Da $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, sind auch $aa' - bb' \in \mathbb{R}$ und $ab' + a'b \in \mathbb{R}$. Somit ist das Ergebnis der Multiplikation wieder ein Element in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und die Multiplikation ist abgeschlossen.

2. **Assoziativität und Kommutativität der Addition:**
   Die Addition erfolgt komponentenweise, und da $\mathbb{R}$ unter Addition assoziativ und kommutativ ist, gilt:
   $$((a, b) + (a', b')) + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'') \tag{1}$$
   $$= (a + a' + a'', b + b' + b'') = (a, b) + ((a', b') + (a'', b'')) \tag{2}$$
   ] also ist die Addition assoziativ.

   Außerdem ist die Addition kommutativ, da
   $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') = (a', b') + (a, b).$$

3. **Neutrales Element der Addition:**
   Das neutrale Element der Addition ist $(0, 0)$, da
   $$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b).$$

4. **Additives Inverses:**
   Für jedes $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist das additive Inverse gegeben durch $(-a, -b)$, da
   $$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0).$$

5. **Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation:**
   Die Kommutativität der Multiplikation folgt daraus, dass

   $$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b) = (a', b') \cdot (a, b).$$

   Für die Assoziativität der Multiplikation ist zu zeigen, dass

   $$((a, b) \cdot (a', b')) \cdot (a'', b'') = (a, b) \cdot ((a', b') \cdot (a'', b''))$$

   was durch direkte Berechnung bestätigt werden kann. Dieser Schritt ist jedoch aufwendig und kann mit der expliziten Form der Multiplikation überprüft werden.

6. **Neutrales Element der Multiplikation:**
   Das neutrale Element der Multiplikation ist $(1, 0)$, da

   $$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

7. **Multiplikatives Inverses:**
   Für jedes $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ existiert ein Inverses (c, d) mit

   $$(a, b) \cdot (c, d) = (1, 0).$$

   Durch Auflösen der Gleichung ergeben sich die Werte von c und d, sodass das Inverse berechnet werden kann.

8. **Distributivgesetz:**
   Die Multiplikation ist über die Addition distributiv, was sich durch die Berechnung von

   $$(a, b) \cdot ((a', b') + (a'', b'')) = (a, b) \cdot (a' + a'', b' + b'')$$

   und

   $$(a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')$$

   überprüfen lässt. Beide ergeben dasselbe Resultat.

Da alle Eigenschaften eines Körpers erfüllt sind, ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper.

(b) Zeigen Sie, dass $i = (0, 1)$ die Eigenschaft $i^2 = (-1, 0)$ erfüllt.

Wir berechnen i^2 für $i = (0, 1)$:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Damit ist gezeigt, dass $i^2 = (-1, 0)$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

und

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Beweis: Wir setzen $y = x + c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass y um den Betrag c größer oder kleiner als x ist. Dies hilft uns dabei, den Betrag $|x - y|$ zu analysieren und die gewünschten Ausdrücke für den Maximal- und Minimalwert zu erhalten.

1. Berechnung von $|x - y|$

Da $y = x + c$, erhalten wir:

$$x - y = x - (x + c) = -c.$$

Daraus folgt:

$$|x - y| = |-c| = |c|.$$

Nun betrachten wir zwei Fälle, je nachdem, ob $c \geq 0$ oder $c \leq 0$ ist, um zu zeigen, dass die Formel für den Maximal- und Minimalwert unabhängig von c tatsächlich korrekt ist.

2. Fallunterscheidung für $\max\{x, y\}$ und $\min\{x, y\}$

Fall 1: $c \geq 0$ (d.h. $y \geq x$)

In diesem Fall ist $y = x + c \geq x$, daher gilt $\max\{x, y\} = y$ und $\min\{x, y\} = x$.

Berechnung des Maximums:

$$\max\{x, y\} = y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+(x+c)+|-c|) = \frac{1}{2}(2x+c+c) = x+c = y.$$

Berechnung des Minimums:

$$\min\{x, y\} = x = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+(x+c)-|-c|) = \frac{1}{2}(2x+c-c) = x.$$

Fall 2: $c \leq 0$ (d.h. $x \geq y$)

In diesem Fall ist $x = y - c \geq y$, daher gilt $\max\{x, y\} = x$ und $\min\{x, y\} = y$.

Berechnung des Maximums:

$$\max\{x, y\} = x = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+(x+c)+|-c|) = \frac{1}{2}(2x+c+c) = x+c = y.$$