Quantenkryptographie (Teil 2) - Verschränkungsmaß

Prof. Dr. Jörg Hettel

Hochschule Kaiserslautern

Fachbereich Informatik

Agenda

Wie kann Verschränkung charakterisiert werden?

- Frage: Gibt es verschiedene Stärken von Verschränkung?
  - Falls ja, wie kann die Verschränkungsstärke bestimmt werden?

- Benötigt wird ein Maß, mit dem die Stärke einer Verschränkung angegeben werden kann.
  - Wir beschränken uns hier auf bi-partite Systeme.
  - Grundlegende Randbedingungen:
    - Separierbare Systeme: Wert 0
    - Maximalverschränkte Systeme: Wert 1
    - Symmetrisch, Basisunabhängig, …

Einfaches Maß für 2-Qubit-System

- Bedingung, damit ein allgemeines 2-Qubit-System separierbar ist, lautete

$$|\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2 \stackrel{?}{=} c_{00}\,|00\rangle + c_{01}\,|01\rangle + c_{10}\,|10\rangle + c_{11}\,|11\rangle$$

separierbar $\Rightarrow$ $\boxed{c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}}$

$$c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

Concurrence: $C = 2 \cdot\ |c_{00}\, c_{11}\ - c_{01}c_{10}|$

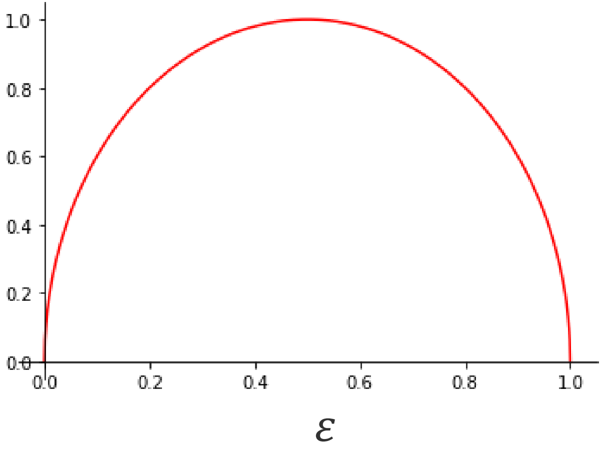
Zwei-Qubit-System

- Schmidt-Darstellung für ein Zwei-Qubit-System

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1-\varepsilon}\,|0\rangle_A\,|0\rangle_B + \sqrt{\varepsilon}\,|1\rangle_A\,|1\rangle_B\,, \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

- Verschränkungsmaß

$$C(|\Psi\rangle) = 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$



Bell-Zustände

- Für den Bell-Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

erhält man

$$C(|\Psi\rangle) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

- Bell-Zustände sind maximal verschränkt!

Bemerkung: Separierbarer Zustand

- Bei einem separierbaren Zwei-Qubit-System

$$|\Psi\rangle = (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

lassen sich immer Basisvektoren finden, sodass

$$|\Psi\rangle = 1 \cdot \, |b_1\rangle|b_2\rangle + 0 \cdot \, \left|b_1^\perp\rangle|b_2^\perp\right\rangle$$

mit

$$|b_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$$
$$|b_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$$

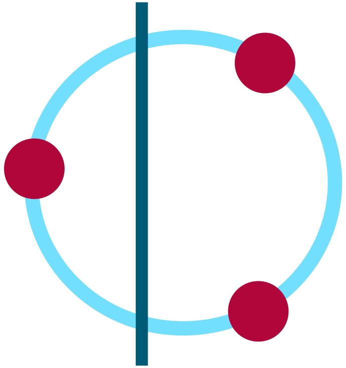
- Somit gilt

$$C(|\Psi\rangle) = 2\sqrt{1 \cdot 0} = 0$$

GHZ-Zustand

- Ein GHZ-Zustand ist ein verschränktes Drei-Qubit-System
- "Bi-Partitionierung" des Systems

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|000\rangle + |111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\,|00\rangle + |1\rangle\,|11\rangle \Big)
\end{aligned}
$$



Schmidt-Darstellung

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|b_1\rangle\,|b_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|b_1^\perp\rangle\,|b_2^\perp\rangle$$

mit

$$
\begin{aligned}
|b_1\rangle &= |0\rangle \qquad & |b_1^\perp\rangle &= |1\rangle \\
|b_2\rangle &= |00\rangle \qquad & |b_2^\perp\rangle &= |11\rangle
\end{aligned}
$$

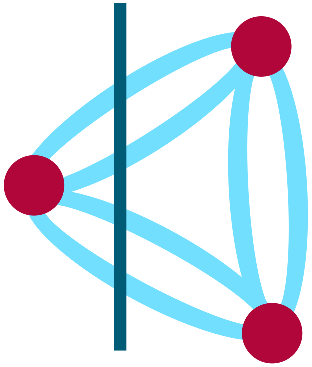
Concurrence

$$C(|\Psi\rangle) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

W-Zustand

- Ein W-Zustand ist ein verschränktes Drei-Qubit-System
- "Bi-Partitionierung" des Systems

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|0\rangle\,|01\rangle + |0\rangle\,|10\rangle + |1\rangle\,|00\rangle \Big)
\end{aligned}
$$



Schmidt-Darstellung

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|b_1\rangle\,|b_2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|b_1^\perp\rangle\,|b_2^\perp\rangle$$

mit

$$
\begin{aligned}
|b_1\rangle &= |0\rangle & |b_1^\perp\rangle &= |1\rangle \\
|b_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) & |b_2^\perp\rangle &= |00\rangle
\end{aligned}
$$

Concurrence

$$C(|\Psi\rangle) = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428$$

Berechnung mit Qiskit

```
import qiskit.quantum_info as qi
import numpy as np
```

```
# Bell-Zustand
psi = np.array([1,0,0,1])/np.sqrt(2)
psi_ERP = qi.Statevector(psi)

print("Bell state: ")
psi_ERP.draw(output='latex')
```

Bell state:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|11\rangle$$

```
C_ERP = qi.concurrence(psi_ERP)
print("Concurrence : {:>3f}".format(C_ERP))
```

Concurrence : 1.000000

```
# W-Zustand (in Schmidt-Normalform)
# Wird als bi-partites System formuliert
psi = np.array([np.sqrt(2/3),0,0,np.sqrt(1/3)])
psi_W = qi.Statevector(psi)

print("W-Zustand als bi-partites System (A|BC) in der Schmidt-Darstellung")
psi_W.draw(output='latex')
```

W-Zustand als bi-partites System (A|BC) in der Schmidt-Darstellung

$$\frac{\sqrt{6}}{3}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{3}|11\rangle$$

```
C_W = qi.concurrence(psi_W)
print("Concurrence : {:>3f}".format(C_W))
```

Concurrence : 0.942809

Zusammenfassung

- Es gibt verschiedene Verschränkungsstärken.
  - Es gibt verschiedene Verschränkungsmaße.
    - Noch aktiver Forschungsgegenstand, insbesondere für Mehr-Qubit-Systeme.
  - Es wurde hier nur die Verschränkung zwischen zwei Teilsystemen diskutiert.

- Bei reinen (bi-partiten) Zuständen werden wir das Concurrence-Maß nutzen.
  - Concurrence-Maß kann aus den Schmidt-Koeffizienten abgeleitet werden.

Vielen Dank
für die Aufmerksamkeit!

Prof. Dr. Jörg Hettel
Hochschule Kaiserslautern
Fachbereich Informatik