Optimisation
Cours PPMD
TP du 18 novembre 2024

Le but de ce TP est de vous faire pratiquer le filtrage de Kalman et le lissage RTS pour l'exemple de la trajectoire d'un mobile en 2D. Ce TP est largement inspiré d'un TP monté par Xavier Collilieux.

Première étape : écriture du modèle espace-état

On mesure, grâce à un capteur de positionnement, les positions horizontales (E^{obs},N^{obs}) d'un mobile, sur un intervalle de temps donné, avec un pas de temps constant δt.

Proposer un premier modèle espace-état permettant d'accéder à la trajectoire du véhicule, et pour lequel le vecteur d'état X ne contient que les positions Est et Nord de ce dernier.

Afin d'améliorer le modèle dynamique, proposer, dans un second temps, une équation d'état qui permette d'inclure des paramètres de vitesse constants (non observés) dans le vecteur d'état.

Deuxième étape : examen rapide des fichiers de données

Vous disposez de deux fichiers de données :

- mesures_vraies.dat qui contient la trajectoire simulée sans bruit (temps, position en Est et position en Nord) ;
- mesures_bruitees.dat qui contient la trajectoire simulée à laquelle on a ajouté du bruit (temps, position en Est, position en Nord, écart-type sur la position en Est et écart-type sur la position en Nord).

Afficher les deux trajectoires sur un même graphique.

Troisième étape : implémentation du filtrage de Kalman

Le pas de temps dans le fichier est constant, égal à 0.5 unité de temps. On vous propose donc de prendre δt=0.5 comme pas du filtre.

Commencer par implémenter les différentes matrices nécessaires pour le filtre de Kalman, et pour lesquelles vous remarquerez qu'il n'y a pas de variation temporelle[1], en suivant les notations du modèle espace-état suivant :

$$\begin{cases} X_{t+1} & = & A_t X_t + \varepsilon_t \\ Y_t & = & C_t X_t + \eta_t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_t & \rightarrow & N(0, Q_t) \\ \eta_t & \rightarrow & N(0, R_t) \\ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_l) & = & 0 \ si \ t \neq l \\ cov(\eta_t, \eta_l) & = & 0 \ si \ t \neq l \\ cov(\varepsilon_t, \eta_l) & = & 0 \\ E(X_0 | -1) & = & X_0 \\ \Sigma_{0|-1} & = & \Sigma_0 \end{cases}$$

1 Ce qui revient à dire que ces matrices peuvent être définies en-dehors de la boucle qui va gérer le filtrage de Kalman.

Pour la matrice Qt, on vous propose d'utiliser la matrice $Q_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mod}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{mod}^2 \end{bmatrix}$, σ_{mod} étant un écart-type pouvant varier (cf. quatrième étape du TP).

Pour initialiser le filtre, on vous propose d'utiliser les deux premières valeurs lues dans le fichier mesures_bruitees.dat pour les positions, et la valeur 0 pour les vitesses, avec un écart-type de 10 pour les quatre valeurs.

Implémenter une boucle permettant d'opérer le filtre de Kalman sur l'ensemble des mesures du fichier mesures_bruitees.dat, en prenant bien garde de sauvegarder les états filtrés successifs, et en utilisant les équations suivantes :

Résumé - Filtre de Kalman

$$\begin{cases} X_{t+1} & = & A_t X_t + \varepsilon_t \\ Y_t & = & C_t X_t + \eta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_t & \rightarrow & N(0, Q_t) \\ \eta_t & \rightarrow & N(0, R_t) \\ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_l) & = & 0 \ si \ t \neq l \\ cov(\eta_t, \eta_l) & = & 0 \ si \ t \neq l \\ cov(\varepsilon_t, \eta_l) & = & 0 \\ E(X_0 | -1) & = & X_0 \\ \Sigma_{0|-1} & = & \Sigma_0 \end{cases}$$

Prédiction

$$\hat{X}_{t+1|t} = A_t \hat{X}_{t|t}$$
$$\Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t^T + Q_t$$

Mise à jour

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t^T \left(C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + R_t \right)^{-1} \quad (gain)$$
$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t \left(Y_t - C_t \hat{X}_{t|t-1} \right)$$
$$\Sigma_{t|t} = \left(I_p - K_t C_t \right) \Sigma_{t|t-1}$$

Au temps 0

$$\hat{X}_{0|-1} = X_0 \quad \text{et} \quad \Sigma_{0|-1} = \Sigma_0$$

Quatrième étape : lancements du filtrage de Kalman

Effectuer trois lancements du filtrage de Kalman, avec trois valeurs de σ_{mod} différentes : 0.1, 1.0 et 10.0.

Pour chacun des trois lancements, faire un graphique similaire à celui de l'étape 2, en affichant en plus la trajectoire filtrée. Commenter les résultats obtenus.

Cinquième étape : filtrage de Kalman et lissage RTS

Reprendre le calcul avec la valeur 1.0 pour σ_{mod} , et en opérant, en plus du filtrage de Kalman, un lissage RTS comme suit.

Le lissage RTS s'opère en deux étapes :

- un filtrage de Kalman sur la base des équations précédentes, au cours duquel on stocke les états prédits et mis à jour, ainsi que leurs EMQ associées, soit $\hat{X}_{t|t}$, $\hat{X}_{t+1|t}$, $\Sigma_{t|t}$ et $\Sigma_{t+1|t}$, et les matrices de transition A_t ;
- un calcul des états lissés $\hat{X}_{t|T}$ et de leurs EMQ associées $\Sigma_{t|T}$, en partant du dernier état calculé avec le filtre ($\hat{X}_{T|T}$, $\Sigma_{T|T}$), avec, pour $t \in \{T-1, \cdots, 1\}$:

Lissage RTS

$$\begin{cases} F_t & = & \underbrace{\Sigma_{t|t}}_{filtrage} \cdot \underbrace{A_t^T}_{filtrage} \cdot \underbrace{\Sigma_{t+1|t}^{-1}}_{filtrage} \\ \underbrace{\hat{X}_{t|T}}_{lissage} & = & \underbrace{\hat{X}_{t|t}}_{filtrage} + F_t \left(\underbrace{\hat{X}_{t+1|T}}_{lissage} - \underbrace{\hat{X}_{t+1|t}}_{filtrage} \right) \\ \underbrace{\Sigma_{t|T}}_{lissage} & = & \underbrace{\Sigma_{t|t}}_{filtrage} + F_t \left(\underbrace{\Sigma_{t+1|T}}_{lissage} - \underbrace{\Sigma_{t+1|t}}_{filtrage} \right) F_t^T \end{cases}$$

Faire un graphique similaire à celui de l'étape 2, en affichant en plus la trajectoire lissée.