

Ejercicio 2

Un nodo dispone de dos enlaces de salida, uno de capacidad C_1 y otro de capacidad C_2 . A dicho nodo llegan paquetes que siguen un proceso de Poisson con tasa λ y que son retransmitidos a través de los dos enlaces. La longitud de dichos paquetes varía según una distribución exponencial de media $l=1000$ bits.

Primeramente, suponer que cada enlace de salida, con su correspondiente cola de almacenamiento, se modela con una cola M/M/1.

- Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2=2.500.000$ bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, los paquetes que llegan al sistema se envían por los dos enlaces indistintamente (50% por un enlace y 50% por el otro). Realizar los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, para $0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg.
- Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores $C_1=4.000.000$ bps y $C_2=1.000.000$ bps. En este caso, los paquetes no se distribuyen igual por los dos enlaces, sino que el 80% de los paquetes se encamina por el enlace más rápido (el de capacidad $C_1=4.000.000$ bps), mientras que el 20% de los paquetes por el más lento (el de capacidad $C_2=1.000.000$ bps). Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los del apartado a) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).

A continuación, se tienen en cuenta una serie de suposiciones diferentes: ahora, ambos enlaces comparten una misma cola de almacenamiento finita. El sistema completo (enlaces + cola de almacenamiento) tiene espacio para 10 paquetes. Con estas nuevas suposiciones, el sistema de comunicaciones descrito se modela mediante una cola M/M/2/10 con la particularidad de que los servidores pueden tener distintas tasas de servicio.

- Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2=2.500.000$ bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, se ocupa cualquiera de los dos enlaces indistintamente. Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los de los apartados a) y b) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).
- Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores $C_1=4.000.000$ bps y $C_2=1.000.000$ bps. En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, el 80% de las veces se ocupa el enlace más rápido (el de capacidad $C_1=4.000.000$ bps), mientras que en el 20% de las ocasiones se ocupa el más lento (el de capacidad $C_2=1.000.000$ bps). Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los de los apartados a) b) y c) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).
- En el caso en que $C_1=4.000.000$ bps y $C_2=1.000.000$ bps, ¿cuál es la probabilidad de ocupación de cada uno de los enlaces?

$$A) \mu/m/l \quad \text{y} \quad c_1 = c_2$$

- a) Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2=2.500.000$ bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, los paquetes que llegan al sistema se envían por los dos enlaces indistintamente (50% por un enlace y 50% por el otro). Realizar los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, para $0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg.

$$\ell = 1000 \text{ bits}$$

$$\lambda_c = 2000 \text{ fm}/\text{s}$$

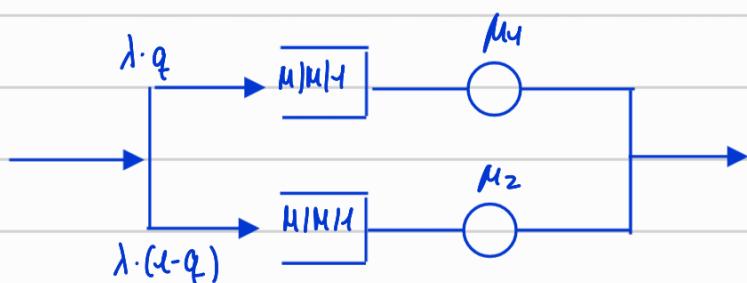
$$k_3 = 10000 \text{ pag/s}$$

$$C_L = C_R = 2500000 \text{ bps}$$

$$\lambda_2 = 5000 \text{ nm/s}$$

$$q = 0,5$$

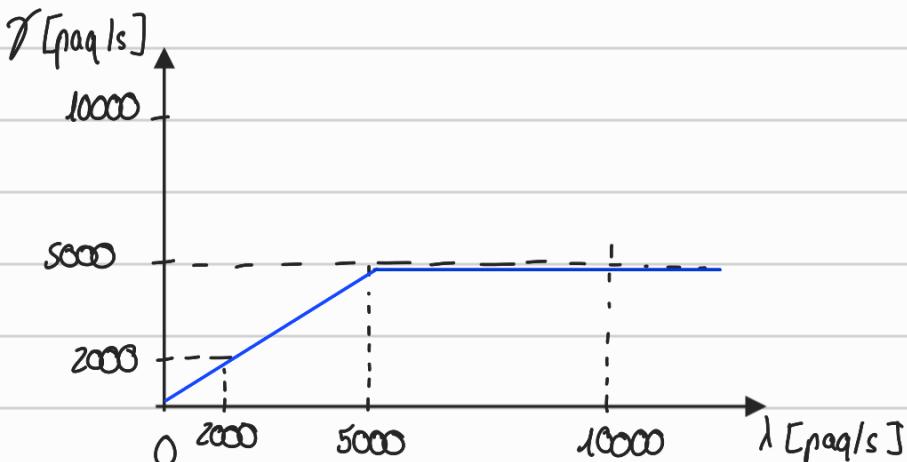
$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{C_1}{\rho} = \frac{C_2}{\rho} = \frac{2500000}{1000} = 2500 \text{ pag/s} \rightarrow T_{\text{thmax}} = 2 \cdot 2500 = 5000 \text{ pag/seg}$$

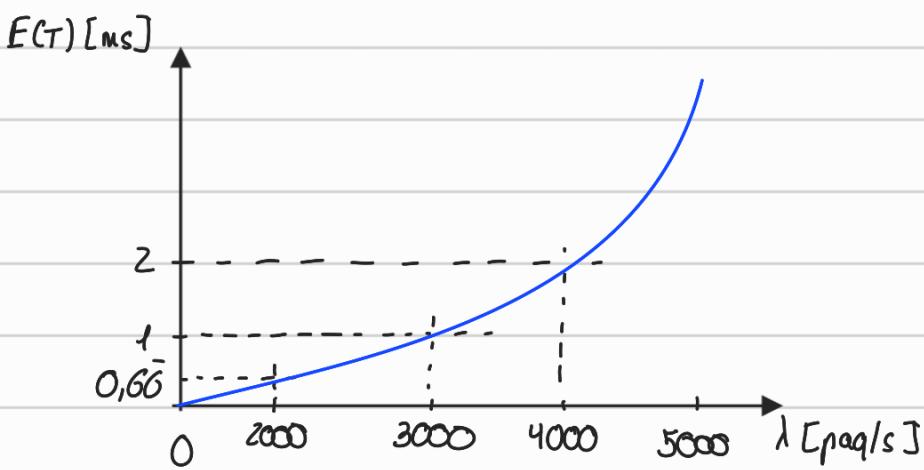


$$E(T) = q \cdot E(T_L) + (1-q) \cdot E(T_R) = q \cdot \frac{1}{\mu_L - q \cdot \lambda} + (1-q) \cdot \frac{1}{\mu_R - (1-q) \cdot \lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } M/M/1 : \gamma = \lambda \\ \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \lambda_1 = 2000 \text{ paq/s} \rightarrow E(T) = 6,66 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,66 \text{ ms} \\ \gamma_2 = \lambda_2 = 5000 \text{ paq/s} = T_{\max} \rightarrow E(T) = 10 \\ \gamma_3 = 5000 \text{ paq/s} = T_{\max} \rightarrow E(T) = \infty \end{array} \right. \\ \Rightarrow \text{Si la cola es estable} \end{array} \right.$$

Graficas:





B) M/M/1 y $C_1 \neq C_2$

- b) Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores $C_1=4.000.000$ bps y $C_2=1.000.000$ bps. En este caso, los paquetes no se distribuyen igual por los dos enlaces, sino que el 80% de los paquetes se encamina por el enlace más rápido (el de capacidad $C_1=4.000.000$ bps), mientras que el 20% de los paquetes por el más lento (el de capacidad $C_2=1.000.000$ bps). Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los del apartado a) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).

$$l = 1000 \text{ bits}$$

$$\lambda_1 = 2000 \text{ paq/s}$$

$$\lambda_3 = 10000 \text{ paq/s}$$

$$C_1 = 4000000 \text{ bps}$$

$$\lambda_2 = 5000 \text{ paq/s}$$

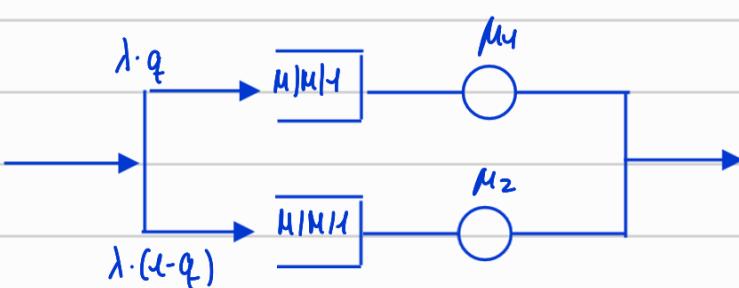
$$q = 0.8$$

$$C_2 = 1000000 \text{ bps}$$

$$\mu_1 = \frac{C_1}{l} = \frac{4000000}{1000} = 4000 \text{ paq/s}$$

$$\mu_2 = \frac{C_2}{l} = \frac{1000000}{1000} = 1000 \text{ paq/s}$$

$$T_{\max} = 4000 + 1000 = 5000 \text{ paq/s}$$



$$E(T) = q \cdot E(T_1) + (1-q) \cdot E(T_2) = q \cdot \frac{1}{\mu_1 - q \cdot \lambda} + (1-q) \cdot \frac{1}{\mu_2 - (1-q) \cdot \lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \gamma_1 = \lambda_1 = 2000 \text{ paq/s} \\ \bullet \gamma_2 = \lambda_2 = 5000 \text{ paq/s} = T_{\max} \\ \bullet \gamma_3 = 5000 \text{ paq/s} = T_{\max} \end{array} \right\} \rightarrow E(T) = 6,66 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,66 \text{ ms}$$

En M/M/1: $\gamma = \lambda$

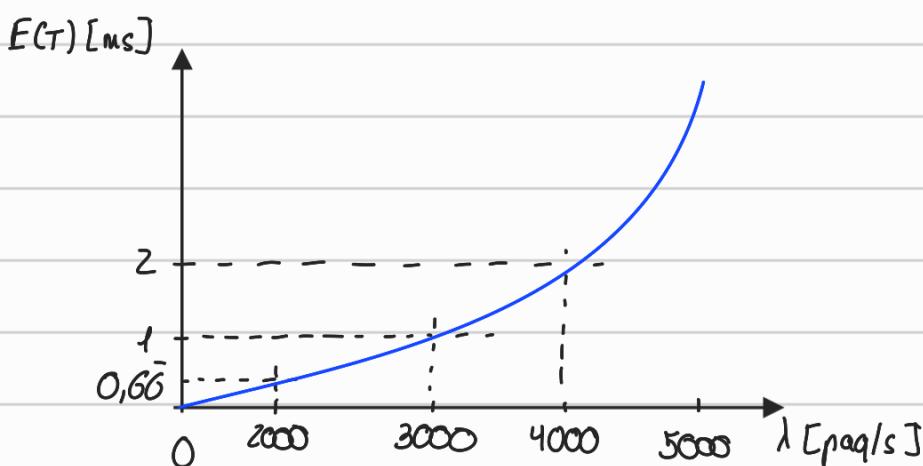
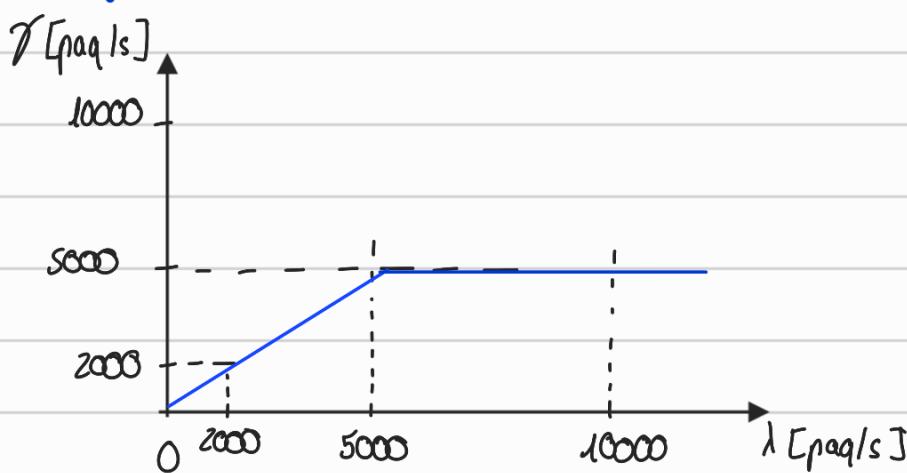
$\rightarrow E(T) = 6,66 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,66 \text{ ms}$

$\rightarrow E(T) = 6,66 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,66 \text{ ms}$

$\rightarrow E(T) = 6,66 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,66 \text{ ms}$

Si la cola es estable

Graficas:



c) $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ y $C_1 = C_2$

- c) Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2=2.500.000$ bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, se ocupa cualquiera de los dos enlaces indistintamente. Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los de los apartados a) y b) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).

$$l = 1000 \text{ bits}$$

$$\lambda_1 = 2000 \text{ paq/s}$$

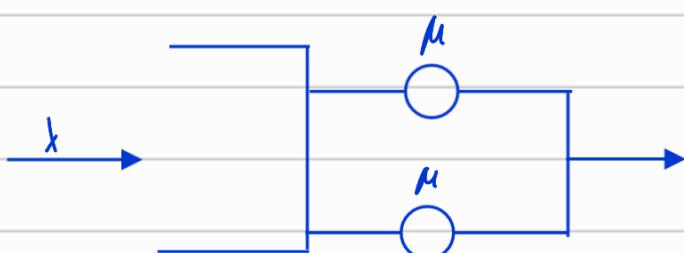
$$\lambda_3 = 10000 \text{ paq/s}$$

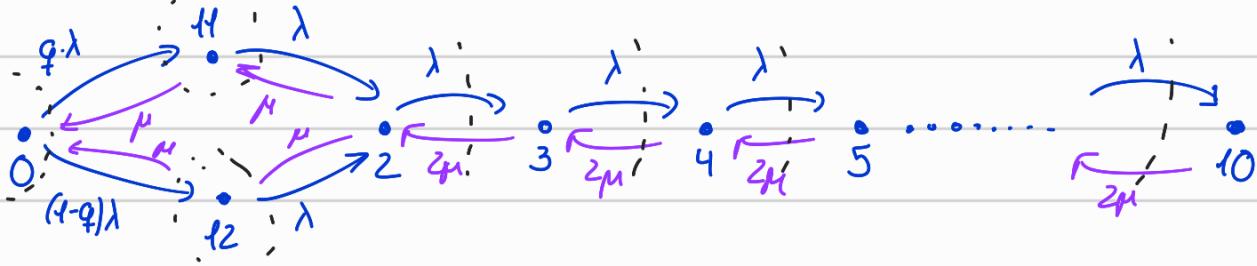
$$C_1 = C_2 = 2500000 \text{ bps}$$

$$\lambda_2 = 5000 \text{ paq/s}$$

$$q = 0.5$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{C_1}{l} = \frac{C_2}{l} = \frac{2500000}{1000} = 2500 \text{ paq/s}$$





12 incógnitas: $p_0, p_{11}, p_{12}, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$

Ecuaciones:

$$p_0 + p_{11} + p_{12} + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = 1$$

$$q \cdot \lambda \cdot p_0 + (1-q) \cdot \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_{11} + \mu \cdot p_{12}$$

$$\lambda p_{11} + \mu p_{12} = q \cdot \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2$$

$$\lambda p_{12} + \mu p_{12} = (1-q) \cdot \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2$$

$$\lambda \cdot p_2 = 2\mu \cdot p_3, \quad \lambda \cdot p_3 = 2\mu \cdot p_4, \quad \lambda \cdot p_4 = 2\mu \cdot p_5, \quad \lambda \cdot p_5 = 2\mu \cdot p_6, \quad \lambda \cdot p_6 = 2\mu \cdot p_7, \quad \lambda \cdot p_7 = 2\mu \cdot p_8$$

$$\lambda \cdot p_8 = 2\mu \cdot p_9, \quad \lambda \cdot p_9 = 2\mu \cdot p_{10}$$

```
In[11]:= q = 0.5;
lambda = 2000;
mu = 2500;
incognitas = {p0, p11, p12, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10};
ecuaciones = {
  p0 + p11 + p12 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7 + p8 + p9 + p10 == 1,
  q * lambda * p0 + (1 - q) * lambda * p0 == mu * p11 + mu * p12,
  lambda * p11 + mu * p11 == q * lambda * p0 + mu * p2,
  lambda * p12 + mu * p12 == (1 - q) * lambda * p0 + mu * p2,
  lambda * p2 == 2 * mu * p3,
  lambda * p3 == 2 * mu * p4,
  lambda * p4 == 2 * mu * p5,
  lambda * p5 == 2 * mu * p6,
  lambda * p6 == 2 * mu * p7,
  lambda * p7 == 2 * mu * p8,
  lambda * p8 == 2 * mu * p9,
  lambda * p9 == 2 * mu * p10
};
```

```
In[16]:= solucion = Solve[ecuaciones, incognitas]
    |resuelve
```

```
Out[16]= {{p0 → 0.428597, p11 → 0.171439, p12 → 0.171439, p2 → 0.137151, p3 → 0.0548604,
  p4 → 0.0219442, p5 → 0.00877767, p6 → 0.00351107, p7 → 0.00140443, p8 → 0.000561771, p9 → 0.000224708, p10 → 0.0000898833}}]
```

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma}$$

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \cdot p_n = \mu \cdot (p_{11} + p_{12}) + 2\mu \cdot (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10})$$

$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 + 6 \cdot p_6 + 7 \cdot p_7 + 8 \cdot p_8 + 9 \cdot p_9 + 10 \cdot p_{10}$$

Para $\lambda = 2000 \text{ pag/s}$:

$$\gamma = 1000,82 \text{ pag/s}$$

$$E(n) = 1,350271 \text{ ms}$$

Para $\lambda = 5000 \text{ pag/s}$:

$$\mathcal{D} = 4523,81 \text{ pag/s}$$

$$E(n) = 5,09524 \text{ ms}$$

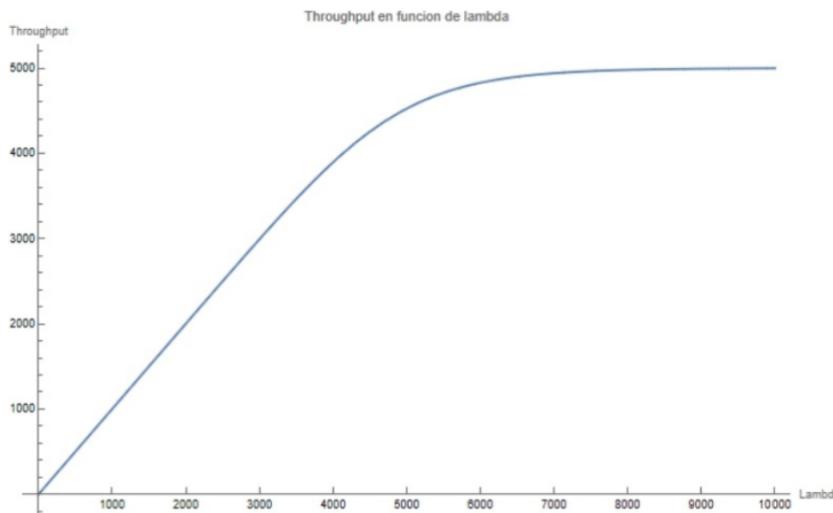
Para $\lambda = 10000 \text{ pag/s}$:

$$\mathcal{D} = 4998,34 \text{ pag/s}$$

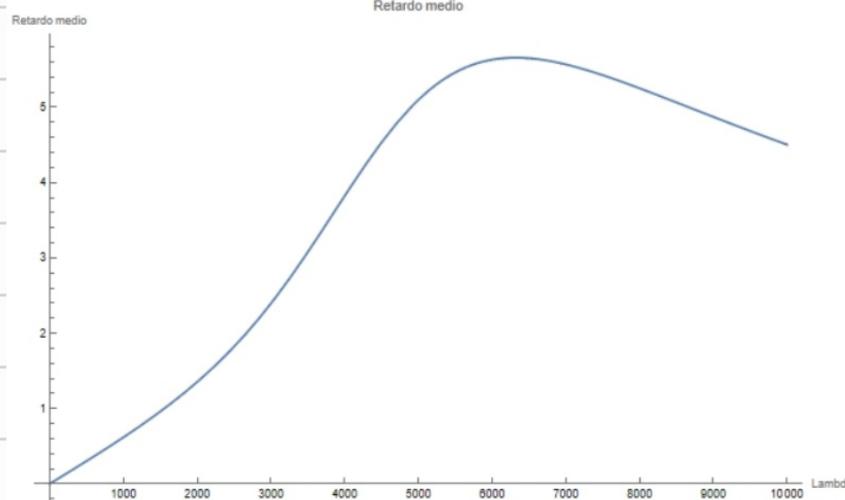
$$E(n) = 4,50281 \text{ ms } ???$$

Graficas:

```
Plot[calcularTh[lambda, mu, q], {lambda, 0, 10000}, Ticks → {Range[1000, 10000, 1000], Automatic}, PlotLabel → "Throughput en funcion de lambda", AxesLabel → {"Lambda", "Throughput"}, PlotRange → All]
```



```
Plot[calcularEt[lambda, mu, q], {lambda, 0, 10000}, Ticks → {Range[1000, 10000, 1000], Automatic}, PlotLabel → "Retardo medio", AxesLabel → {"Lambda", "Retardo medio"}, PlotRange → All]
```



D) M/M/2/10 con $C_1 \neq C_2$

- d) Calcular para tasas de entrada $\lambda_1=2000$ paquetes/seg, $\lambda_2=5000$ paquetes/seg y $\lambda_3=10000$ paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores $C_1=4.000.000$ bps y $C_2=1.000.000$ bps. En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, el 80% de las veces se ocupa el enlace más rápido (el de capacidad $C_1=4.000.000$ bps), mientras que en el 20% de las ocasiones se ocupa el más lento (el de capacidad $C_2=1.000.000$ bps). Añadir los gráficos de throughput, γ , y tiempo medio de paquete en el sistema, $E(T)$, de este caso sobre los de los apartados a) b) y c) ($0 < \lambda < 10000$ paquetes/seg).

$$\lambda = 1000 \text{ bits}$$

$$C_1 = C_2 = 2500000 \text{ bps}$$

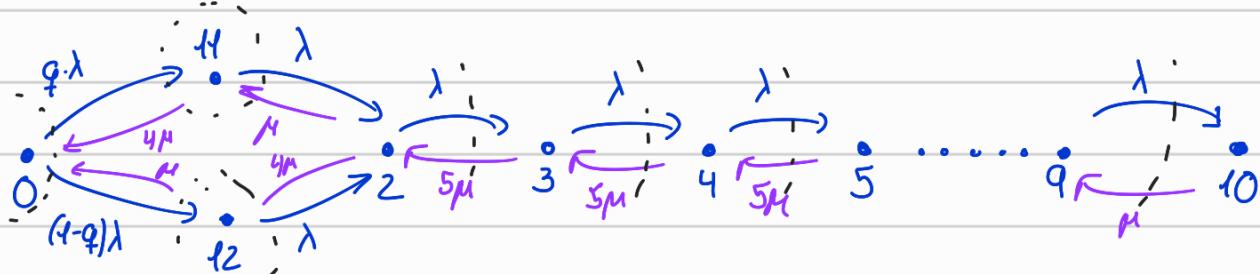
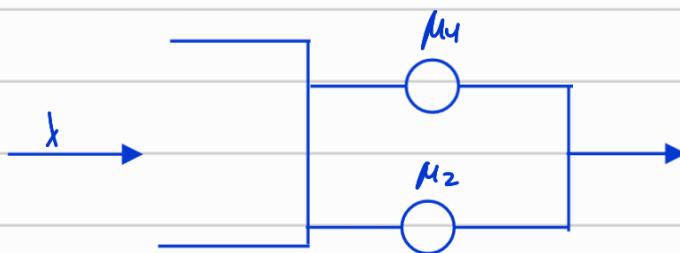
$$\lambda_1 = 2000 \text{ paq/s}$$

$$\lambda_2 = 5000 \text{ paq/s}$$

$$\lambda_3 = 10000 \text{ paq/s}$$

$$q = 0.5$$

$$\mu_1 = 4000 \text{ paq/s}, \mu_2 = 1000 \text{ paq/s} \rightarrow \mu_4 = 4 \cdot \mu_2$$



12 incognitas: $p_0, p_{11}, p_{12}, p_2, p_3, p_4, p_5, \dots, p_{10}$

Ecaciones:

$$p_0 + p_{11} + p_{12} + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = 1$$

$$q \cdot \lambda \cdot p_0 + (1-q) \cdot \lambda \cdot p_0 = 4\mu \cdot p_{11} + \mu \cdot p_{12}$$

$$\lambda p_{11} + 4\mu p_{12} = q \cdot \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2$$

$$\lambda p_{12} + \mu p_2 = (1-q) \cdot \lambda \cdot p_0 + 4\mu p_2$$

$$\lambda \cdot p_2 = 5\mu \cdot p_3, \lambda \cdot p_3 = 5\mu \cdot p_4, \lambda \cdot p_4 = 5\mu \cdot p_5, \lambda \cdot p_5 = 5\mu \cdot p_6, \lambda \cdot p_6 = 5\mu \cdot p_7, \lambda \cdot p_7 = 5\mu \cdot p_8$$

$$\lambda \cdot p_8 = 5\mu \cdot p_9, \lambda \cdot p_9 = 5\mu \cdot p_{10}$$

```

q = 0.5;
lambda = 10000;
mu = 2500;
incognitas = {p0, p11, p12, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10};
ecuaciones = {
    p0 + p11 + p12 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7 + p8 + p9 + p10 == 1,
    q * lambda * p0 + (1 - q) * lambda * p0 == 4 * mu * p11 + mu * p12,
    lambda * p11 + 4 * mu * p11 == q * lambda * p0 + mu * p2,
    lambda * p12 + mu * p12 == (1 - q) * lambda * p0 + 4 * mu * p2,
    lambda * p2 == 5 * mu * p3,
    lambda * p3 == 5 * mu * p4,
    lambda * p4 == 5 * mu * p5,
    lambda * p5 == 5 * mu * p6,
    lambda * p6 == 5 * mu * p7,
    lambda * p7 == 5 * mu * p8,
    lambda * p8 == 5 * mu * p9,
    lambda * p9 == 5 * mu * p10
};

solucion = Solve[ecuaciones, incognitas]

```

resuelve

```

{{p0 → 0.0822516, p11 → 0.0411258, p12 → 0.164503, p2 → 0.164503, p3 → 0.131603,
p4 → 0.105282, p5 → 0.0842256, p6 → 0.0673805, p7 → 0.0539044, p8 → 0.0431235, p9 → 0.0344988, p10 → 0.027599}}

```

Para $\lambda = 2000 \text{ paq/s}$:

$$\gamma = 1082.09 \text{ paq/s}$$

$$E(n) = 0.75465 \text{ ms}$$

Para $\lambda = 5000 \text{ paq/s}$:

$$\gamma = 2364.68 \text{ paq/s}$$

$$E(n) = 1.71875 \text{ ms}$$

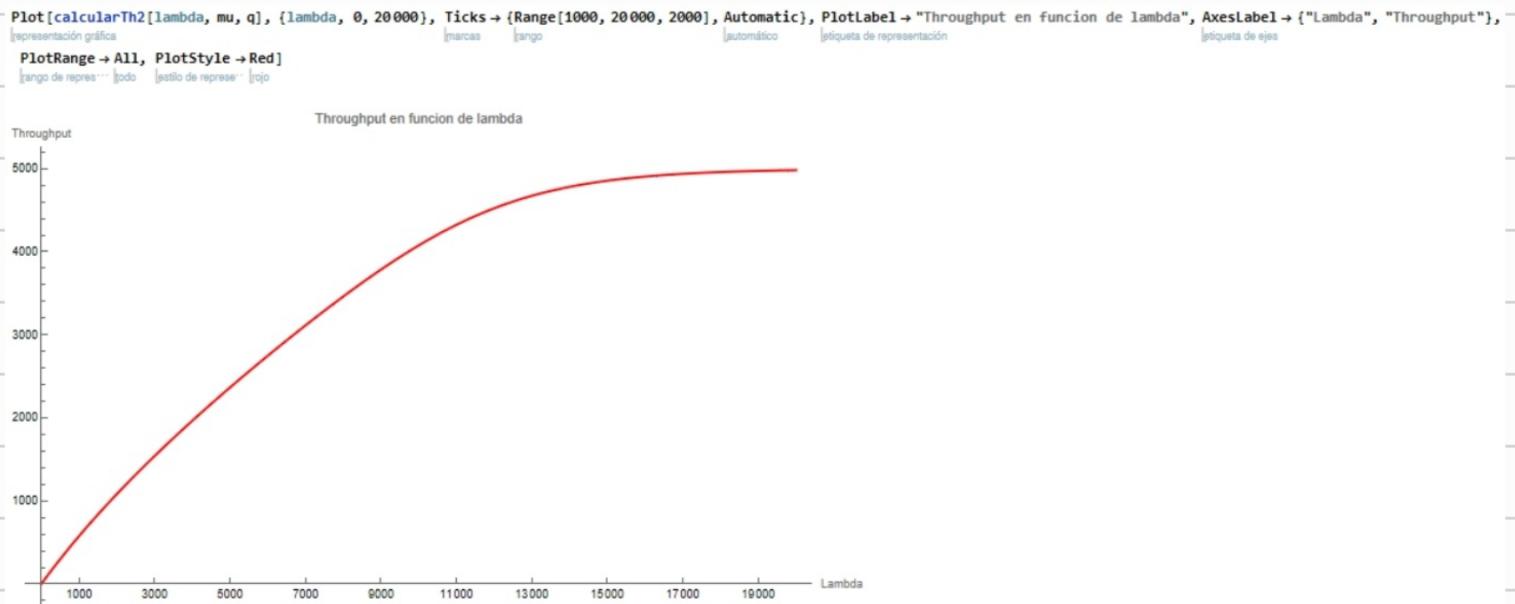
Para $\lambda = 10000 \text{ paq/s}$:

$$\gamma = 4074.67 \text{ paq/s}$$

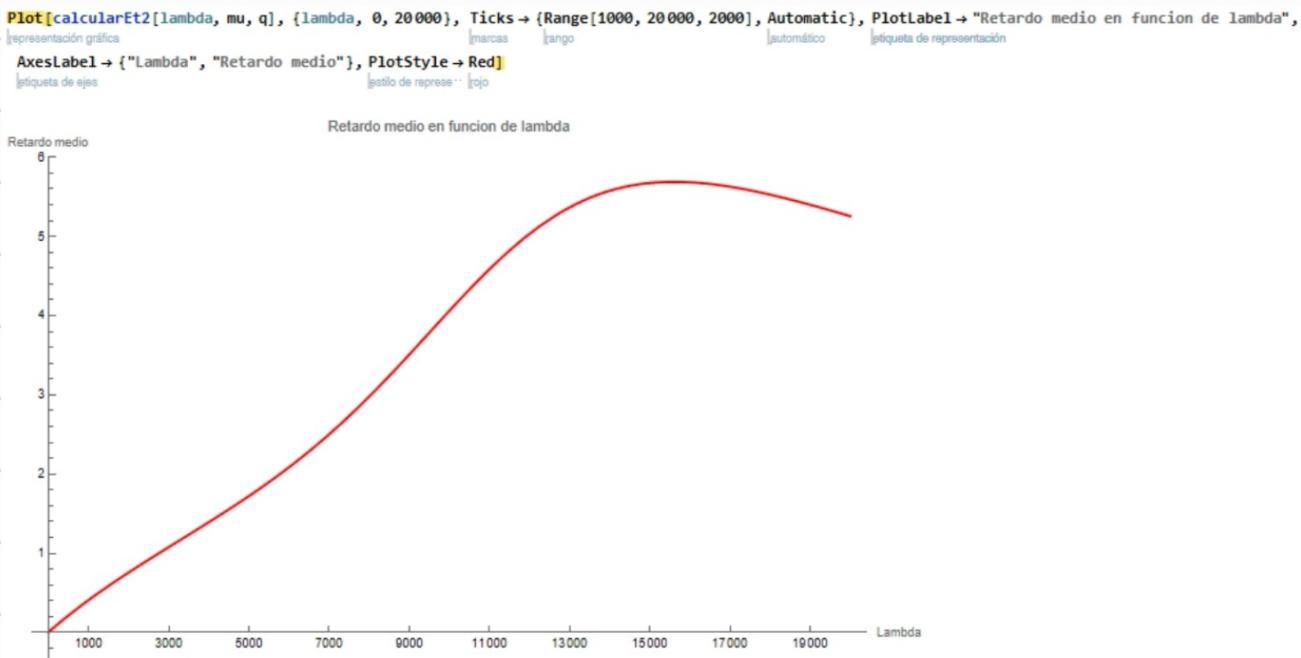
$$E(n) = 4.08781 \text{ ms}$$

Graficas:

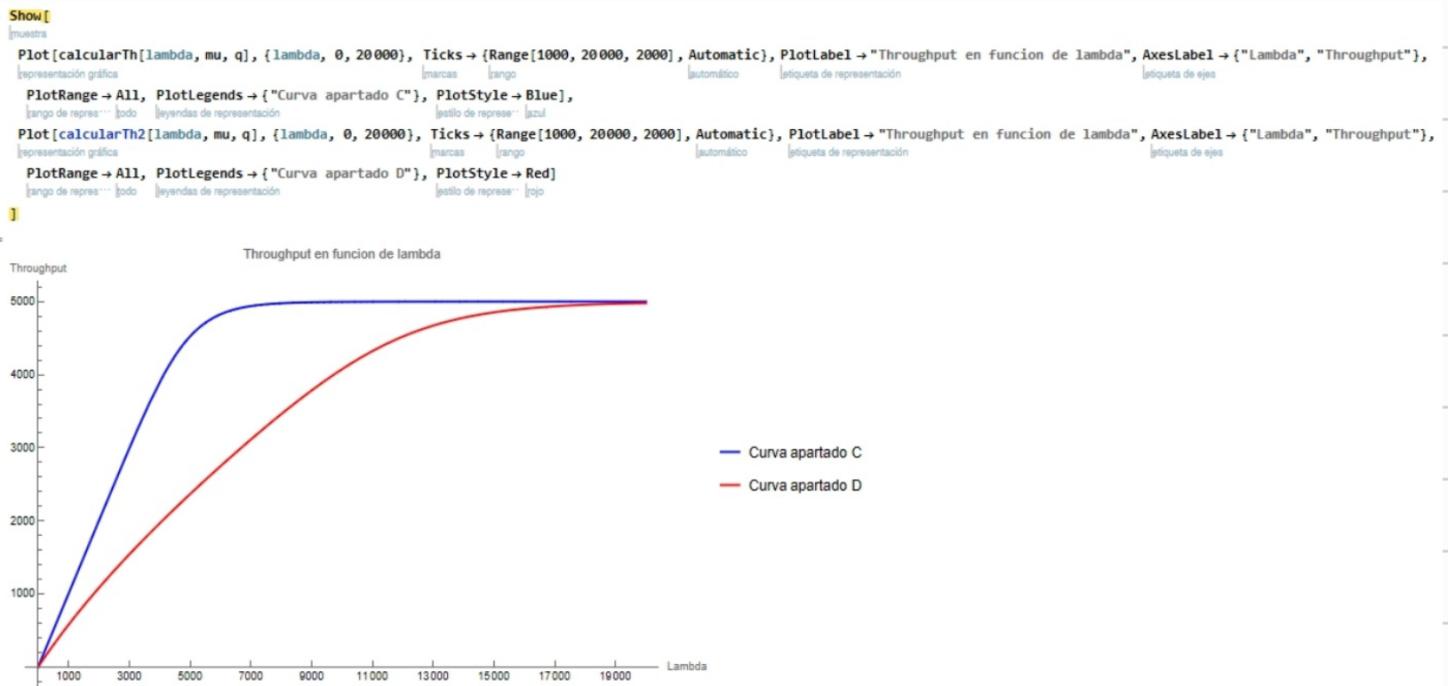
- Throughput en funcion de λ :



Retardo en función de λ :



Comparación entre los apartados C y D:



Show [

muestra

```
Plot[calcularEt[lambda, mu, q], {lambda, 0, 20000}, Ticks → {Range[1000, 20000, 2000], Automatic}, PlotLabel → "Retardo medio en función de lambda",  
|representación gráfica| marcas |rango| automático |etiqueta de representación  
AxesLabel → {"Lambda", "Retardo medio"}, PlotRange → All, PlotLegends → {"Curva apartado C"}, PlotStyle → Blue],  
|etiqueta de ejes| rango de repres.: todo |leyendas de representación| estilo de repres.: azul  
Plot[calcularEt2[lambda, mu, q], {lambda, 0, 20000}, Ticks → {Range[1000, 20000, 2000], Automatic}, PlotLabel → "Retardo medio en función de lambda",  
|representación gráfica| marcas |rango| automático |etiqueta de representación  
AxesLabel → {"Lambda", "Retardo medio"}, PlotRange → All, PlotLegends → {"Curva apartado D"}, PlotStyle → Red]  
|etiqueta de ejes| rango de repres.: todo |leyendas de representación| estilo de repres.: rojo
```

]

