Ejercicio 2

Un nodo dispone de dos enlaces de salida, uno de capacidad C_1 y otro de capacidad C_2. A dicho nodo llegan paquetes que siguen un proceso de Poisson con tasa λ y que son retransmitidos a través de los dos enlaces. La longitud de dichos paquetes varía según una distribución exponencial de media l=1000 bits.

Primeramente, suponer que cada enlace de salida, con su correspondiente cola de almacenamiento, se modela con una cola M/M/1.

a) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2$=2.500.000 bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, los paquetes que llegan al sistema se envían por los dos enlaces indistintamente (50% por un enlace y 50% por el otro). Realizar los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), para $0<\lambda<10000$ paquetes/seg.

b) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores C_1=4.000.000 bps y C_2=1.000.000 bps. En este caso, los paquetes no se distribuyen igual por los dos enlaces, sino que el 80% de los paquetes se encamina por el enlace más rápido (el de capacidad C_1=4.000.000 bps), mientras que el 20% de los paquetes por el más lento (el de capacidad C_2=1.000.000 bps). Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los del apartado a) ($0<\lambda<10000$ paquetes/seg).

A continuación, se tienen en cuenta una serie de suposiciones diferentes: ahora, ambos enlaces comparten una misma cola de almacenamiento finita. El sistema completo (enlaces + cola de almacenamiento) tiene espacio para 10 paquetes. Con estas nuevas suposiciones, el sistema de comunicaciones descrito se modela mediante una cola M/M/2/10 con la particularidad de que los servidores pueden tener distintas tasas de servicio.

c) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso $C_1=C_2$=2.500.000 bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, se ocupa cualquiera de los dos enlaces indistintamente. Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los de los apartados a) y b) ($0<\lambda<10000$ paquetes/seg).

d) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores C_1=4.000.000 bps y C_2=1.000.000 bps. En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, el 80% de las veces se ocupa el enlace más rápido (el de capacidad C_1=4.000.000 bps), mientras que en el 20% de las ocasiones se ocupa el más lento (el de capacidad C_2=1.000.000 bps). Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los de los apartados a) b) y c) ($0<\lambda<10000$ paquetes/seg).

e) En el caso en que C_1=4.000.000 bps y C_2=1.000.000 bps, ¿cuál es la probabilidad de ocupación de cada uno de los enlaces?

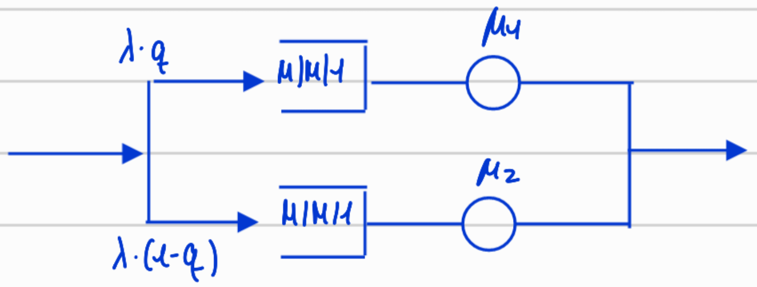
A) M/M/1 y $C_1 = C_2$

a) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso C_1=C_2=2.500.000 bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, los paquetes que llegan al sistema se envían por los dos enlaces indistintamente (50% por un enlace y 50% por el otro). Realizar los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), para 0<λ<10000 paquetes/seg.

$\ell = 1000$ bits $\quad \lambda_1 = 2000$ paq/s $\quad \lambda_3 = 10000$ paq/s

$C_1 = C_2 = 2500000$ bps $\quad \lambda_2 = 5000$ paq/s $\quad q = 0{,}5$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{C_1}{\ell} = \frac{C_2}{\ell} = \frac{2500000}{1000} = 2500 \text{ paq/s}$$

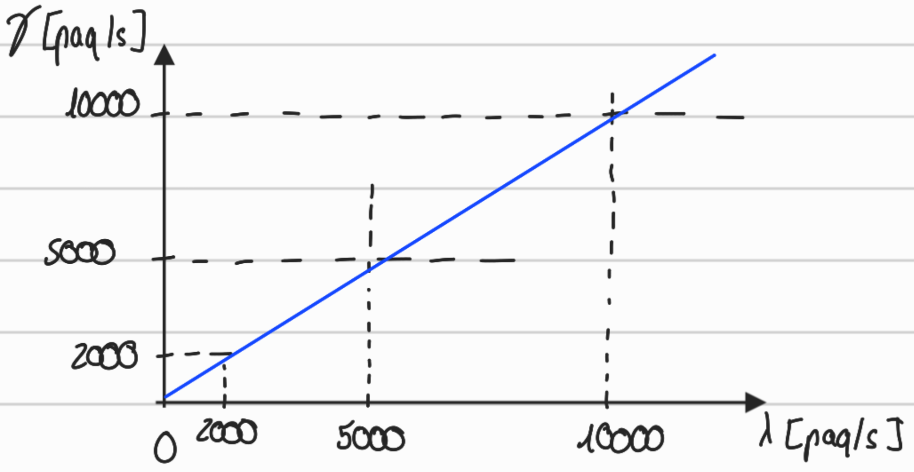


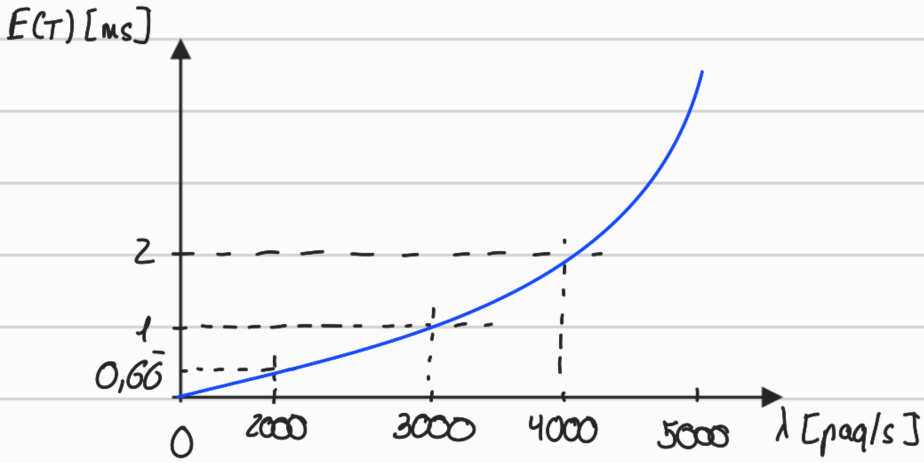
$$E(T) = q \cdot E(T_1) + (1-q) \cdot E(T_2) = q \cdot \frac{1}{\mu_1 - q\cdot\lambda} + (1-q) \cdot \frac{1}{\mu_2 - (1-q)\lambda}$$

En M/M/1 : $\gamma = \lambda$

- $\gamma_1 = \lambda_1 = 2000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = 6{,}6\bar{6} \cdot 10^{-4}\,s = 0{,}6\bar{6}$ ms
- $\gamma_2 = \lambda_2 = 5000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = \infty$
- $\gamma_3 = \lambda_3 = 10000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = \infty$

Graficas:





B) M/M/1 y $C_1 \neq C_2$

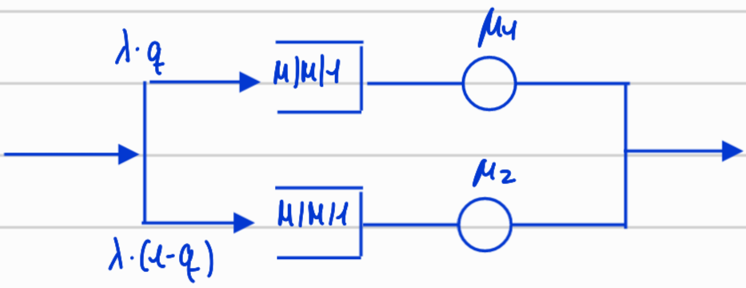
b) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores C_1=4.000.000 bps y C_2=1.000.000 bps. En este caso, los paquetes no se distribuyen igual por los dos enlaces, sino que el 80% de los paquetes se encamina por el enlace más rápido (el de capacidad C_1=4.000.000 bps), mientras que el 20% de los paquetes por el más lento (el de capacidad C_2=1.000.000 bps). Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los del apartado a) (0<λ<10000 paquetes/seg).

$\ell = 1000$ bits $\quad \lambda_1 = 2000$ paq/s $\quad \lambda_3 = 10000$ paq/s

$C_1 = 4000000$ bps $\quad \lambda_2 = 5000$ paq/s $\quad q = 0{,}8$

$C_2 = 1000000$ bps

$$\mu_1 = \frac{C_1}{\ell} = \frac{4000000}{1000} = 4000 \text{ paq/s} \qquad \mu_2 = \frac{C_2}{\ell} = \frac{1000000}{1000} = 1000 \text{ paq/s}$$

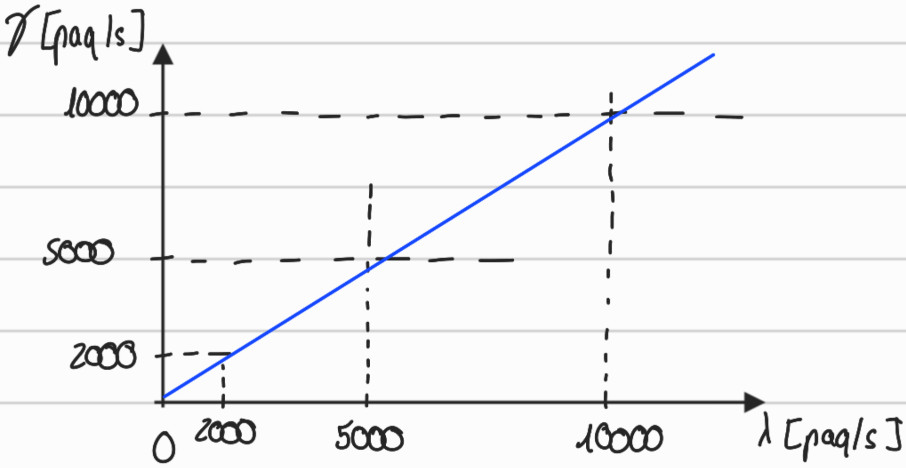


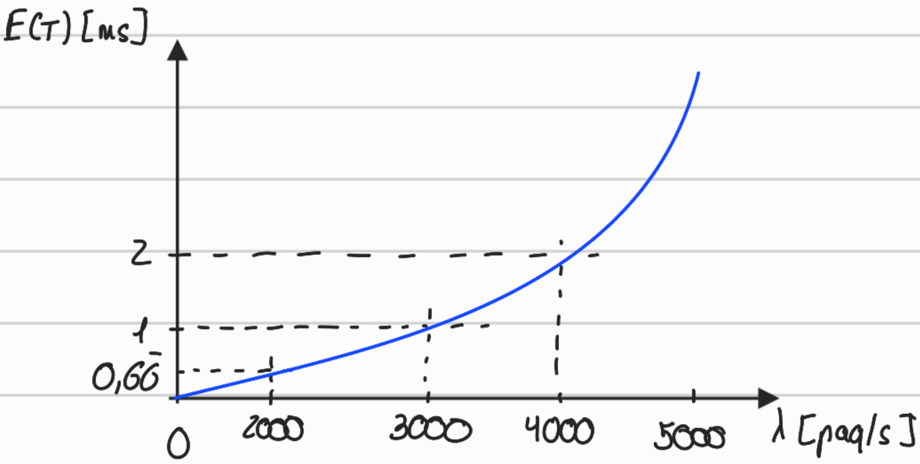
$$E(T) = q \cdot E(T_1) + (1-q)\cdot E(T_2) = q \cdot \frac{1}{\mu_1 - q\cdot\lambda} + (1-q)\cdot\frac{1}{\mu_2 - (1-q)\lambda}$$

En M/M/1 : $\gamma = \lambda$

- $\gamma_1 = \lambda_1 = 2000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = 6{,}6\bar{6}\cdot 10^{-4}$ s $= 0{,}6\bar{6}$ ms
- $\gamma_2 = \lambda_2 = 5000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = \infty$
- $\gamma_3 = \lambda_3 = 10000$ paq/s $\longrightarrow E(T) = \infty$

Graficas:





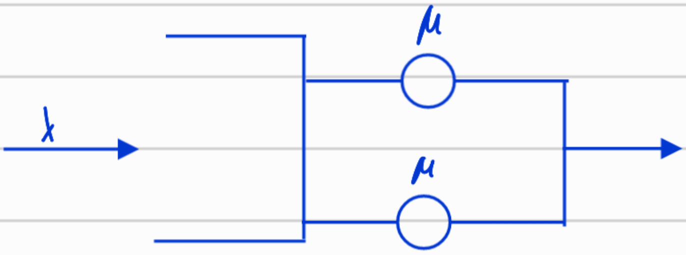
c) $M/M/2/\infty$ y $C_1 = C_2$

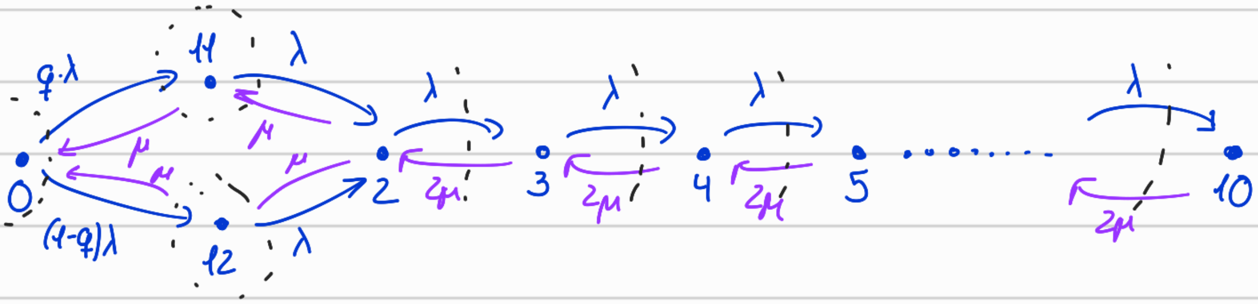
c) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso C_1=C_2=2.500.000 bps (esto es, los 2 enlaces tienen las mismas características). En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, se ocupa cualquiera de los dos enlaces indistintamente. Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los de los apartados a) y b) (0<λ<10000 paquetes/seg).

$\ell = 1000$ bits $\lambda_1 = 2000$ paq/s $\lambda_3 = 10000$ paq/s

$C_1 = C_2 = 2500000$ bps $\lambda_2 = 5000$ paq/s $q = 0{,}5$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{C_1}{\ell} = \frac{C_2}{\ell} = \frac{2500000}{1000} = 2500 \text{ paq/s}$$





12 incognitas: $p_0, p_{11}, p_{12}, p_2, p_3, p_4, p_5 \cdots p_{10}$

Ecuaciones :

$$p_0+p_{11}+p_{12}+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9+p_{10}=1$$

$$q\cdot\lambda\cdot p_0 + (1-q)\cdot\lambda\cdot p_0 = \mu\cdot p_{11}+\mu\cdot p_{12}$$

$$\lambda p_{11}+\mu p_{11} = q\cdot\lambda\cdot p_0+\mu\cdot p_2$$

$$\lambda p_{12}+\mu p_{12} = (1-q)\cdot\lambda\cdot p_0+\mu\cdot p_2$$

$$\lambda\cdot p_2 = 2\mu\cdot p_3 \;,\; \lambda\cdot p_3 = 2\mu\cdot p_4 \;,\; \lambda\cdot p_4 = 2\mu\cdot p_5 \;,\; \lambda\cdot p_5 = 2\mu\cdot p_6 \;,\; \lambda\cdot p_6 = 2\mu\cdot p_7 \;,\; \lambda\cdot p_7 = 2\mu\cdot p_8$$

$$\lambda\cdot p_8 = 2\mu\cdot p_9 \;,\; \lambda\cdot p_9 = 2\mu\cdot p_{10}$$

```
In[11]:= q = 0.5;
         lambda = 2000;
         mu = 2500;
         incognitas = {p0, p11, p12, p2, p3, p4, p5, p6 , p7, p8, p9, p10};
         ecuaciones = {
            p0 + p11 + p12 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7 + p8 + p9 + p10 == 1,
            q * lambda * p0 + (1 - q) * lambda * p0 == mu * p11 + mu * p12,
            lambda * p11 + mu * p11 == q * lambda * p0 + mu * p2,
            lambda * p12 + mu * p12 == (1 - q) * lambda * p0 + mu * p2,
            lambda * p2 == 2 * mu * p3,
            lambda * p3 == 2 * mu * p4,
            lambda * p4 == 2 * mu * p5,
            lambda * p5 == 2 * mu * p6,
            lambda * p6 == 2 * mu * p7,
            lambda * p7 == 2 * mu * p8,
            lambda * p8 == 2 * mu * p9,
            lambda * p9 == 2 * mu * p10
           };

In[16]:= solucion = Solve[ecuaciones, incognitas]
                    resuelve

Out[16]= {{p0 → 0.428597, p11 → 0.171439, p12 → 0.171439, p2 → 0.137151, p3 → 0.0548604,
          p4 → 0.0219442, p5 → 0.00877767, p6 → 0.00351107, p7 → 0.00140443, p8 → 0.000561771, p9 → 0.000224708, p10 → 0.0000898833}}
```

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma}$$

$$\gamma = \sum_{n=1} \mu_n \cdot p_n = \mu \cdot (p_{11} + p_{12}) + 2\mu \cdot (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10})$$

$$E(n) = \sum_{n=0} n \cdot p_n = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_{11} + 1 \cdot p_{12} + 2 \cdot p_2 + 3p_3 + 4 \cdot p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + 9p_9 + 10 \cdot p_{10}$$

Para $\lambda = 2000$ paq/s:

$\gamma = 1999,82$ paq/s

$E(n) = 1,350771$ ms

Para $\lambda = 5000$ paq/s:

$\gamma = 4523,81$ paq/s

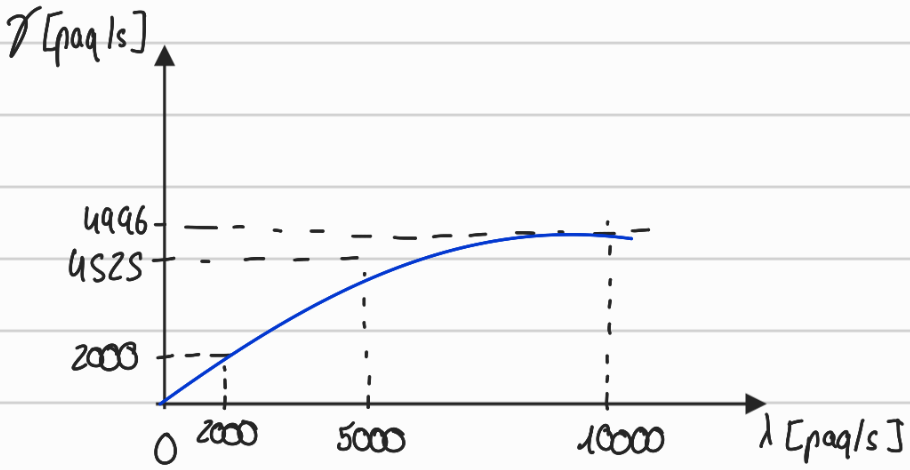
$E(n) = 5,09524$ ms

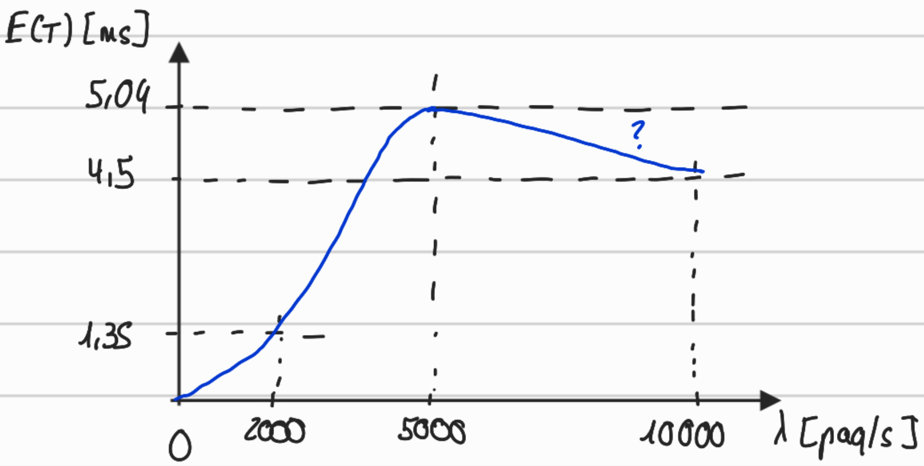
Para $\lambda = 10000$ paq/s:

$\gamma = 4996,34$ paq/s

$E(n) = 4,50281$ ms ???

Graficas:





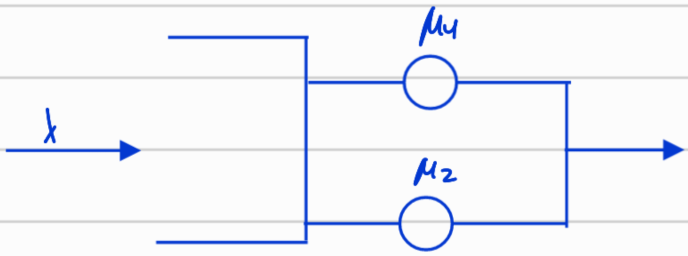
D) M/M/2/10 con $C_1 \neq C_2$

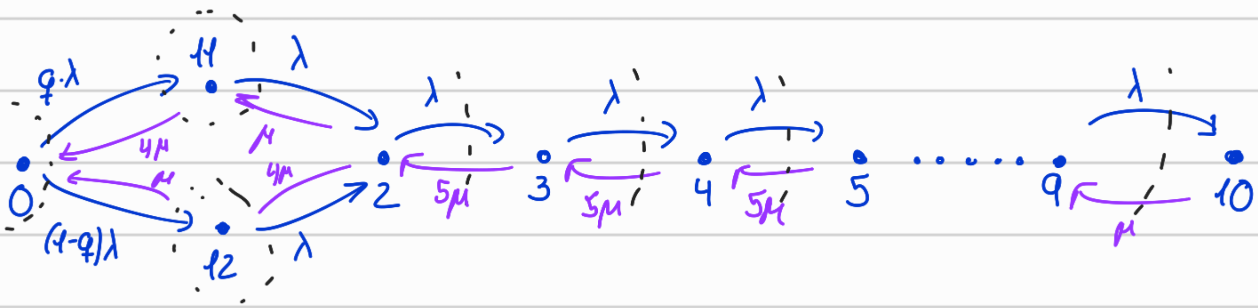
d) Calcular para tasas de entrada λ_1=2000 paquetes/seg, λ_2=5000 paquetes/seg y λ_3=10000 paquetes/seg el throughput del sistema de transmisión y el tiempo medio de un paquete en el sistema (cola de espera + enlaces) para el caso en el que los enlaces tienen diferentes capacidades, concretamente con valores C_1=4.000.000 bps y C_2=1.000.000 bps. En este caso, cuando un paquete llega al sistema y los dos enlaces están libres, el 80% de las veces se ocupa el enlace más rápido (el de capacidad C_1=4.000.000 bps), mientras que en el 20% de las ocasiones se ocupa el más lento (el de capacidad C_2=1.000.000 bps). Añadir los gráficos de throughput, γ, y tiempo medio de paquete en el sistema, E(T), de este caso sobre los de los apartados a) b) y c) (0<λ<10000 paquetes/seg).

$\ell = 1000$ bits $\qquad \lambda_1 = 2000$ paq/s $\qquad \lambda_3 = 10000$ paq/s

$C_1 = C_2 = 2500000$ bps $\qquad \lambda_2 = 5000$ paq/s $\qquad q = 0{,}5$

$\mu_1 = 4000$ paq/s , $\mu_2 = 1000$ paq/s $\longrightarrow$ $\mu_1 = 4\cdot\mu_2$





12 incognitas: $p_0, p_{11}, p_{12}, p_2, p_3, p_4, p_5 \cdots p_{10}$

Ecuaciones:

$p_0+p_{11}+p_{12}+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9+p_{10} = 1$

$q\cdot\lambda\cdot p_0 + (1-q)\cdot\lambda\cdot p_0 = 4\mu\cdot p_{11} + \mu p_{12}$

$\lambda p_{11} + 4\mu p_{11} = q\cdot\lambda\cdot p_0 + \mu\cdot p_2$

$\lambda p_{12} + \mu p_2 = (1-q)\cdot\lambda\cdot p_0 + 4\mu p_2$

$\lambda\cdot p_2 = 5\mu\cdot p_3$, $\lambda\cdot p_3 = 5\mu\cdot p_4$, $\lambda\cdot p_4 = 5\mu\cdot p_5$, $\lambda\cdot p_5 = 5\mu\cdot p_6$, $\lambda\cdot p_6 = 5\mu\cdot p_7$, $\lambda\cdot p_7 = 5\mu\cdot p_8$

$\lambda\cdot p_8 = 5\mu\cdot p_9$, $\lambda\cdot p_9 = 5\mu\cdot p_{10}$

```
q = 0.5;
lambda = 10000;
mu = 2500;
incognitas = {p0, p11, p12, p2, p3, p4, p5, p6 , p7, p8, p9, p10};
ecuaciones = {
    p0 + p11 + p12 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6  + p7 + p8 + p9 + p10 == 1,
    q * lambda * p0  + (1 - q) * lambda * p0  == 4 * mu * p11 + mu * p12,
    lambda * p11  + 4 * mu * p11  == q * lambda * p0 + mu * p2,
    lambda * p12  + mu * p12  == (1 - q) * lambda * p0 + 4 * mu * p2,

    lambda * p2  == 5 * mu * p3,
    lambda * p3  == 5 * mu * p4,
    lambda * p4  == 5 * mu * p5,
    lambda * p5  == 5 * mu * p6,
    lambda * p6  == 5 * mu * p7,
    lambda * p7  == 5 * mu * p8,
    lambda * p8  == 5 * mu * p9,
    lambda * p9  == 5 * mu * p10
  };

solucion = Solve[ecuaciones, incognitas]
           resuelve

{{p0 → 0.0822516, p11 → 0.0411258, p12 → 0.164503, p2 → 0.164503, p3 → 0.131603,
  p4 → 0.105282, p5 → 0.0842256, p6 → 0.0673805, p7 → 0.0539044, p8 → 0.0431235, p9 → 0.0344988, p10 → 0.027599}}
```

Para $\lambda = 2000$ paq/s:
$\gamma = 1082{,}09$ paq/s
$E(n) = 0{,}75465$ ms

Para $\lambda = 5000$ paq/s:
$\gamma = 2364{,}68$ paq/s
$E(n) = 1{,}71875$ ms

Para $\lambda = 10000$ paq/s:
$\gamma = 4074{,}67$ paq/s
$E(n) = 4{,}05784$ ms

Graficas: