最短通路问题

离散数学—图论初步

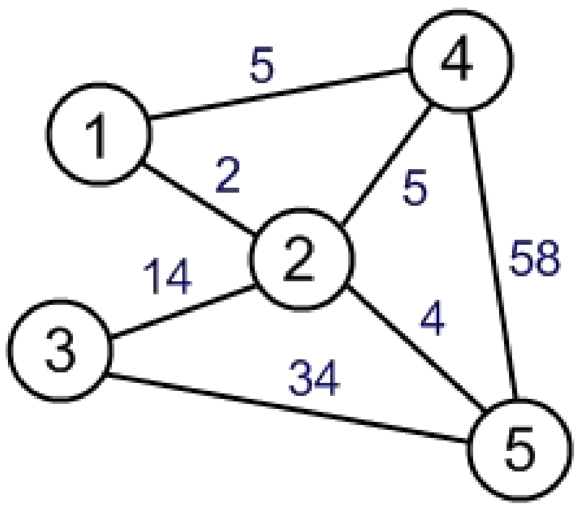
南京大学计算机科学与技术系

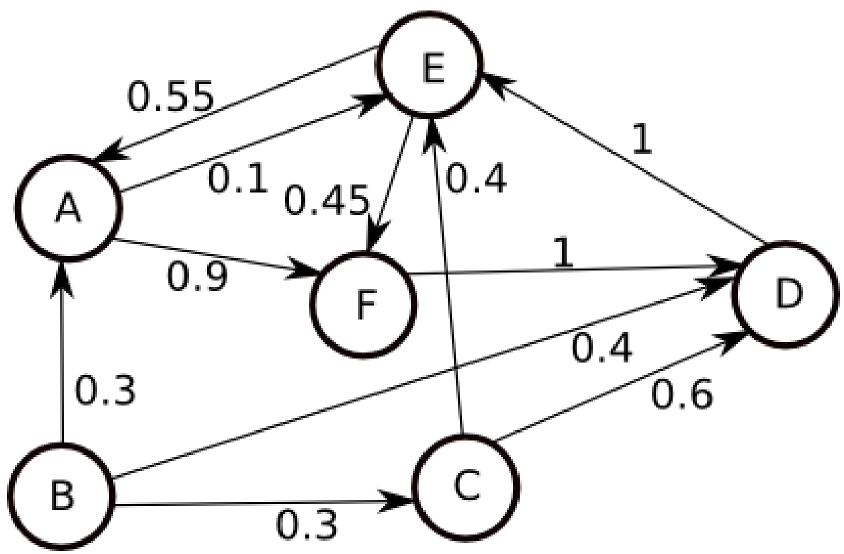
内容提要

- 引言
- **Dijkstra算法**
- 旅行商问题（**TSP**）

带权图与最短通路问题

- 带权图：三元组 (V, E, W)，(V, E)是图，W是从E到非负实数集的一个函数。$W(e)$表示边e的权。
- 一条通路上所有边的权的和称为该通路的长度。





带权图与最短通路问题

- 带权图中两点之间长度最小的通路称为两点之间的最短通路，不一定是唯一的。

- 单源点最短路问题

  给定带权图 $G(V, E, W)$并指定一个源点，确定该源点到图中其它任一顶点的最短路（长度和路径）。

Dijkstra最短路径的算法思想(1959)

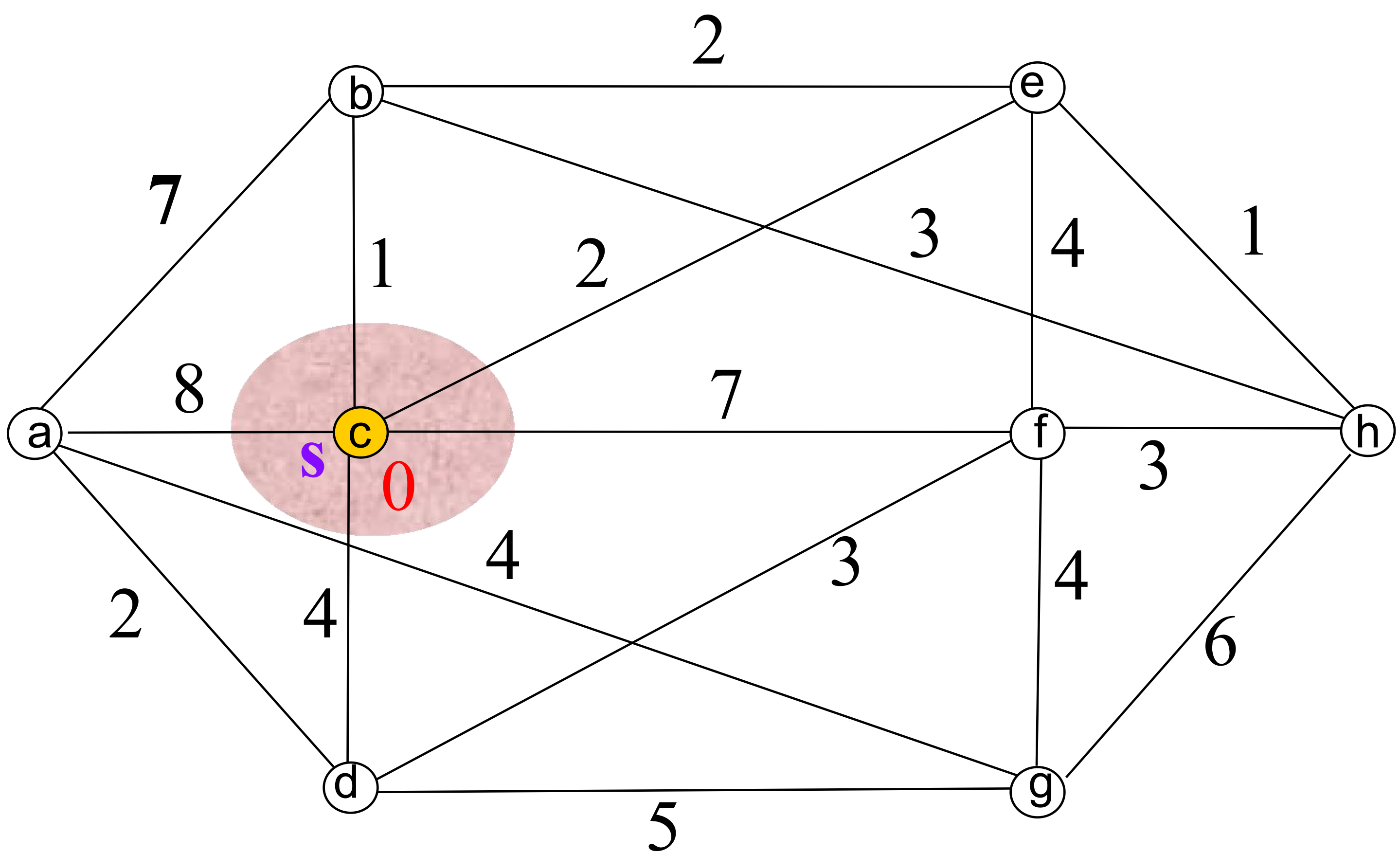
- 源点s到顶点v的最短路径若为s…uv, 则s…u是s到u的最短路径。
- (n-1)条最短路径按照其长度的非减次序求得，设它们的相应端点分别为$u_1, \ldots u_{n-1}$，最短路径长度记为$d(s, u_i)$， $i=1,\ldots n-1$.
- 假设前i条最短路径已知，第(i+1)条最短路径长度:

$$d(s, u_{i+1})=\min\{d(s, u_j) +W(u_j, u_{i+1})| \ j=1,\ldots i\}$$

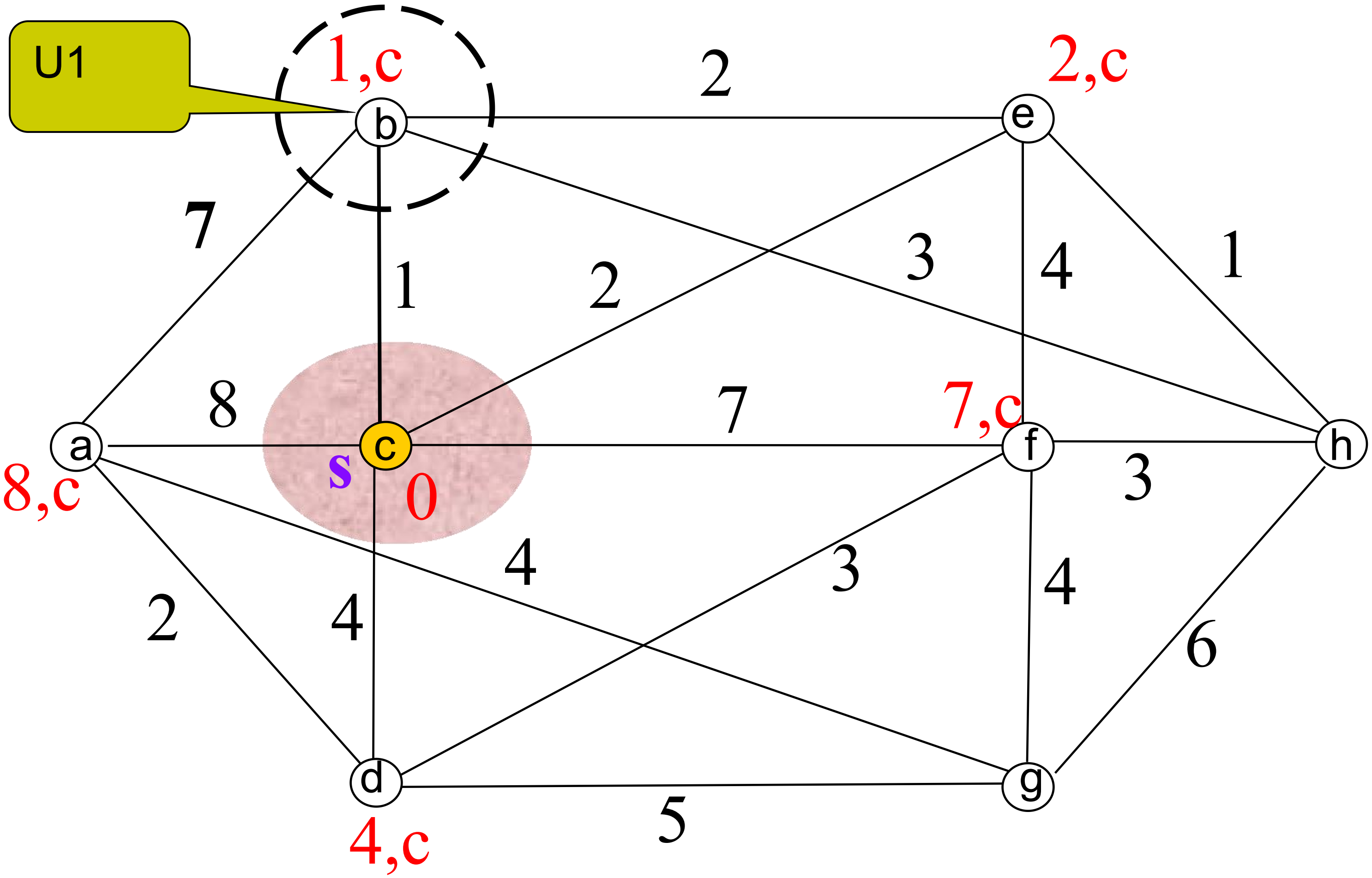
求最短路径的Dijkstra算法

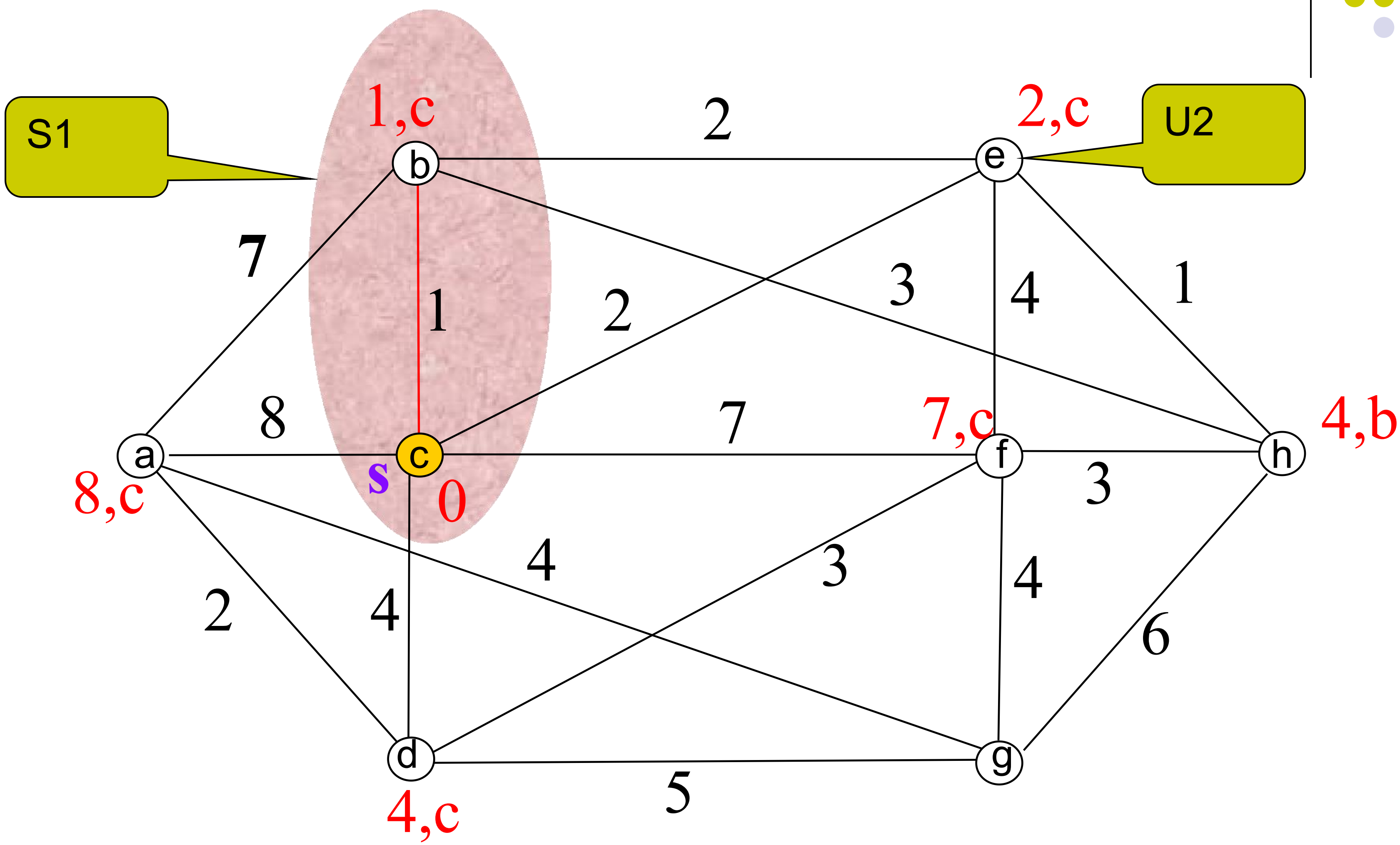
- 输入：连通带权图G，$|V_G|=n$, 指定顶点$s \in V_G$
- 输出：每个顶点v的标注$(L(v), u)$, 其中：
  - $L(v)$即从s到v的最短路径长度（目前可得的）
  - u是该路径上v前一个顶点。

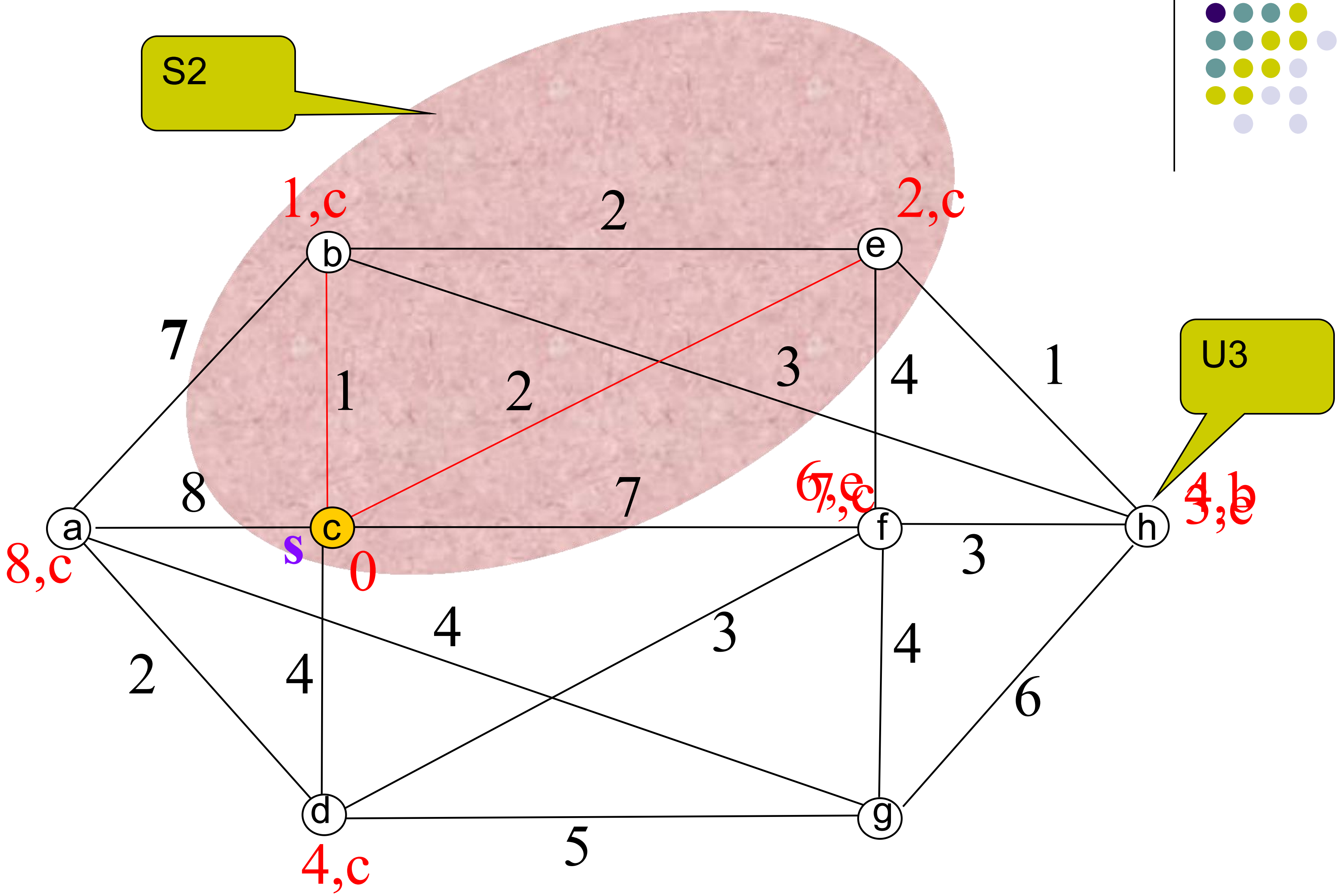
求最短路的一个例子

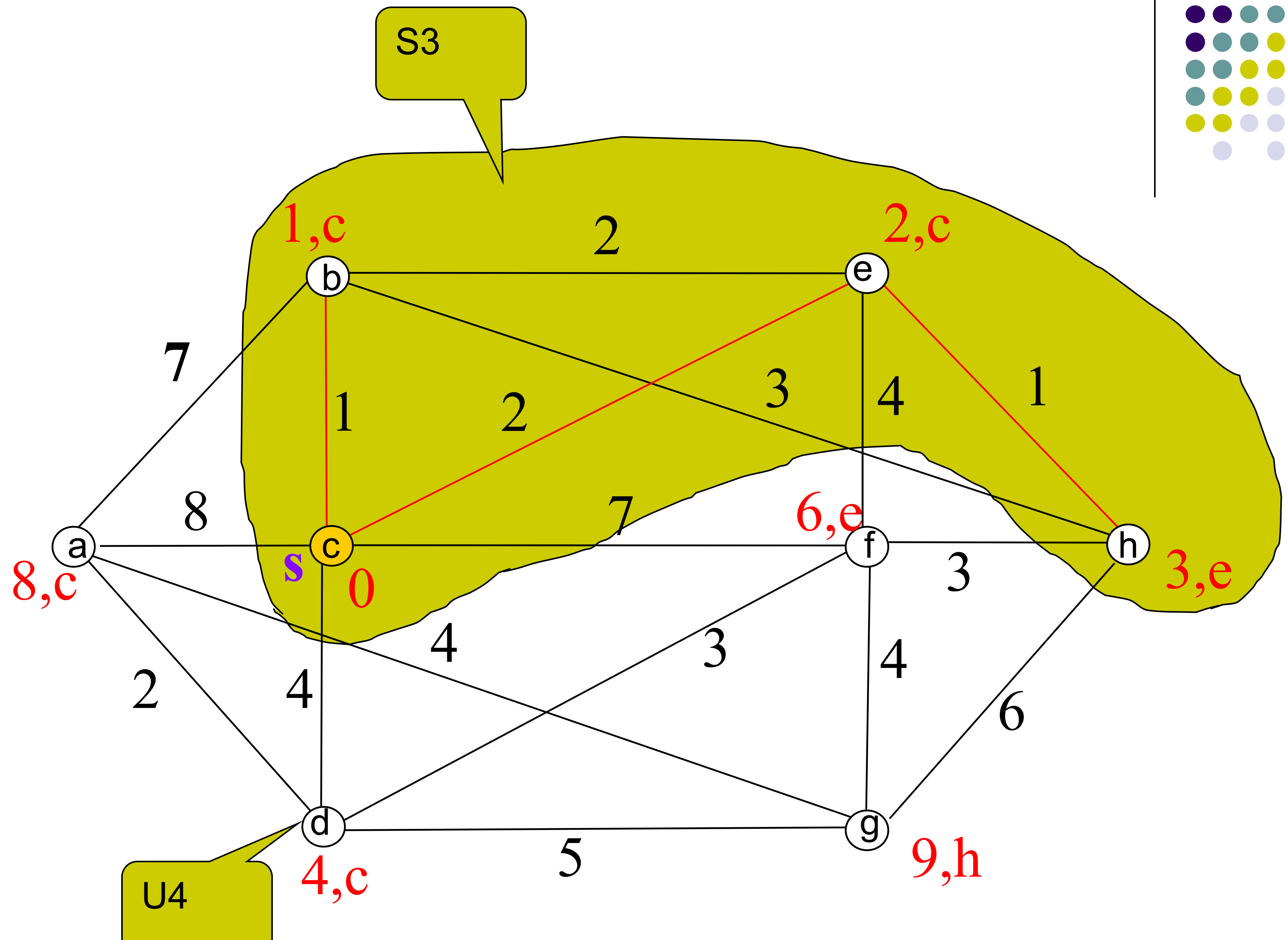


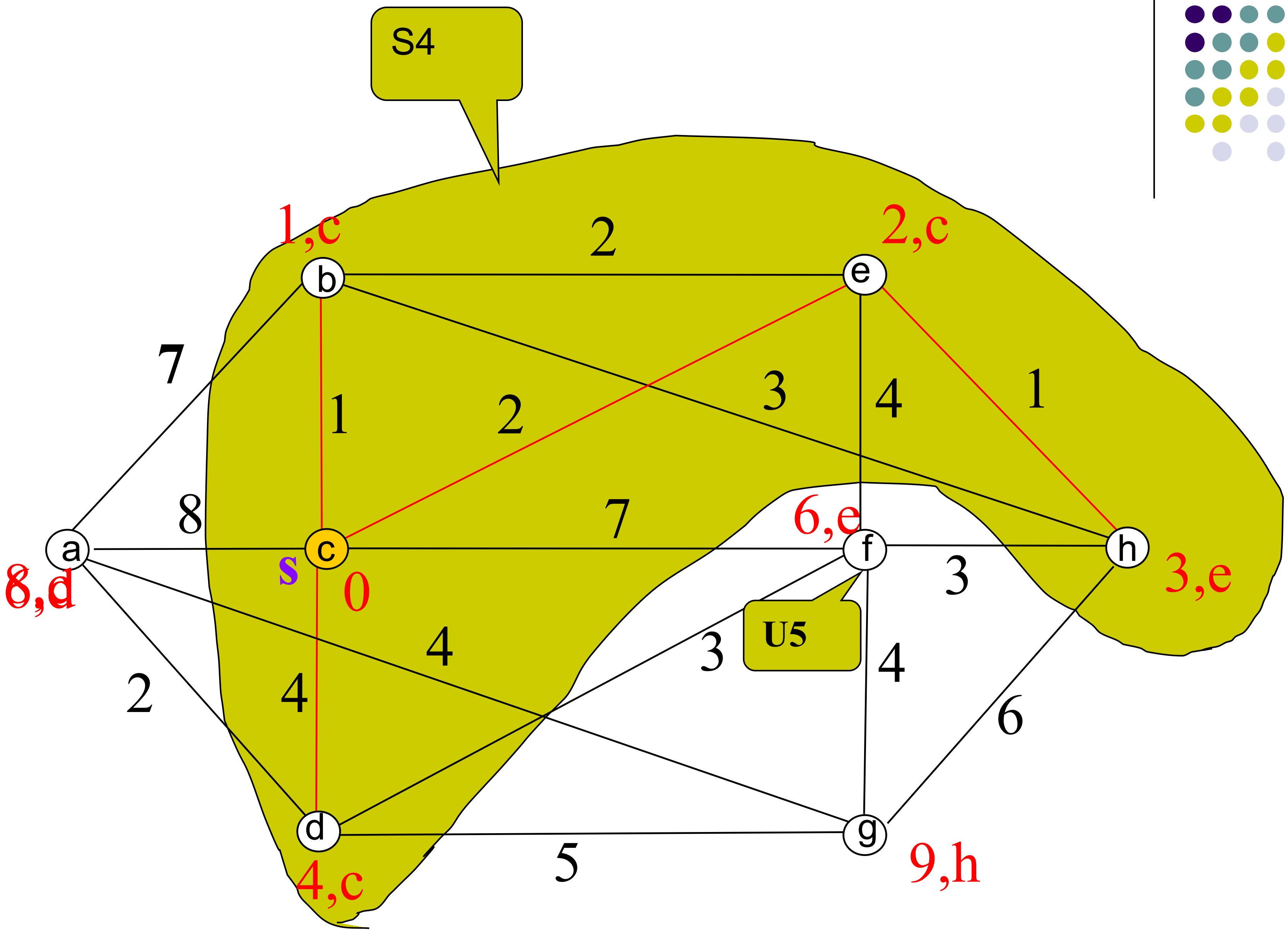
求最短路的一个例子




S1
U2
1,c
2,c
7,c
4,b
8,c
4,c
0
s
a
b
c
d
e
f
g
h
2
7
1
2
3
4
1
8
7
3
4
2
4
3
4
6
5

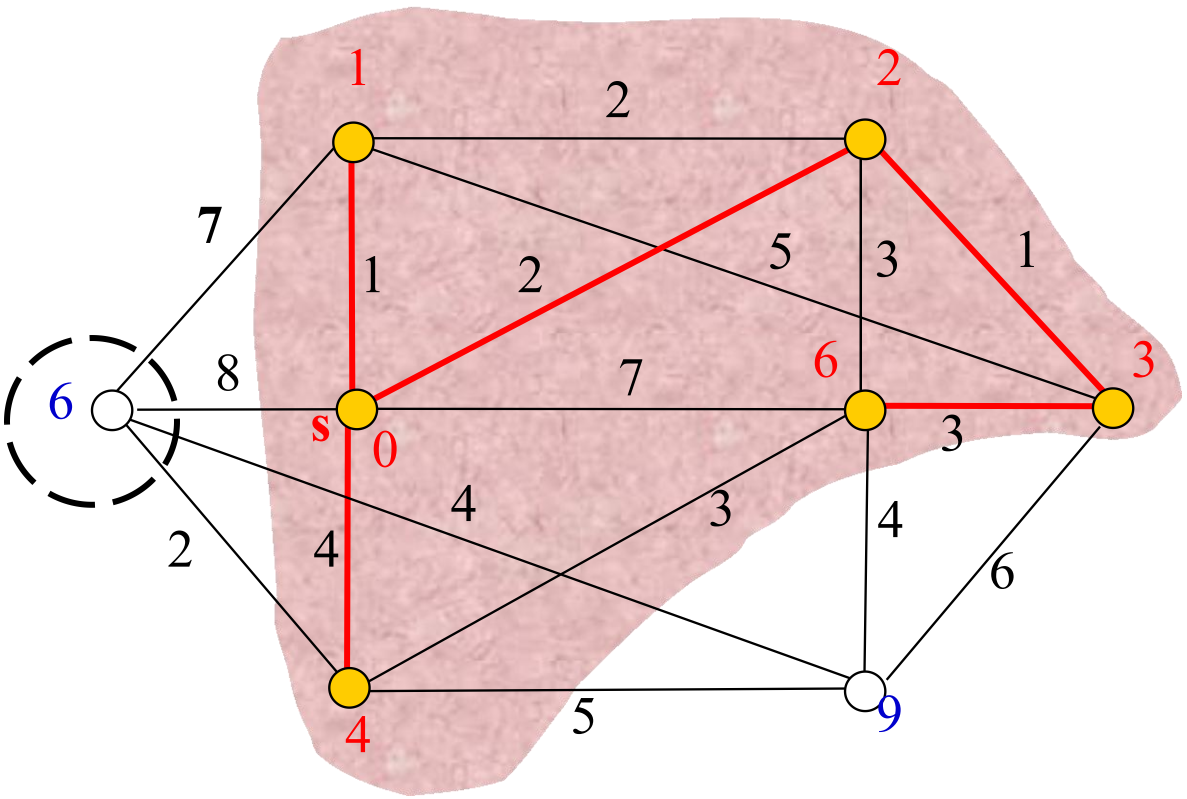

S2
U3
1,c
2,c
8,c
4,c
6,e
7,c
4,b
3,e
s
0
a
b
c
d
e
f
g
h


S3
1,c
2
2,c
b
e
7
1
2
3
4
1
8
7
6,e
a
c
f
h
s
0
8,c
3
3,e
4
3
2
4
4
6
d
g
5
4,c
9,h
U4

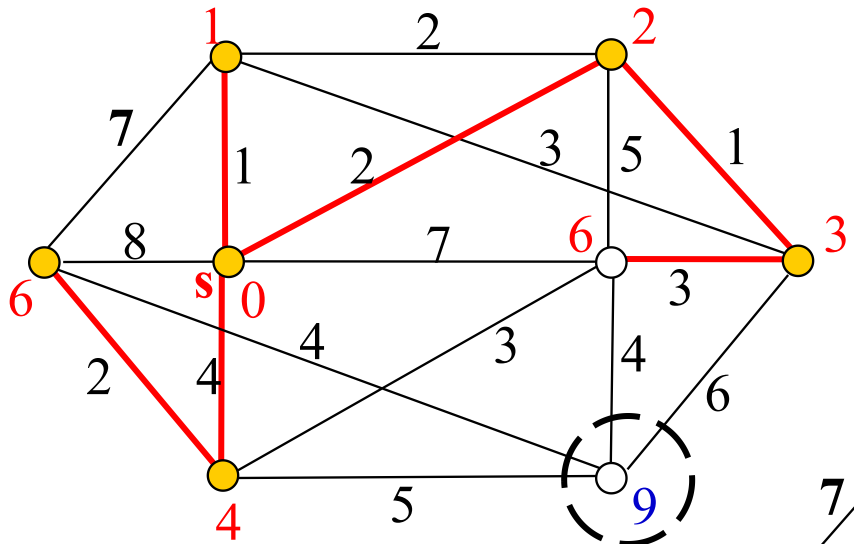


S4
1,c
2,c
b
e
2
7
1
2
3
4
1
8
7
6,e
a
c
f
h
s
0
8,d
3
3,e
U5
4
3
4
2
4
6
d
g
5
4,c
9,h

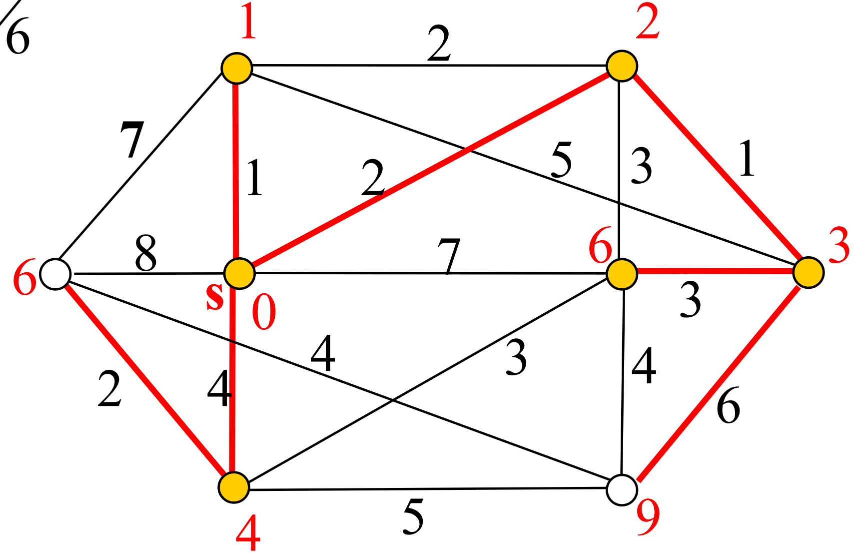
求最短路的一个例子(续)



求最短路的一个例子(续)



1
2
7
1
2
3
5
1
8
7
6
3
s
0
6
3
4
3
4
2
4
6
5
9
4



1
2
2
7
1
2
5
3
1
6
8
7
6
3
s
0
3
4
3
4
2
4
6
5
9
4

Dijkstra算法的描述

1．初始化：$i=0$, $S_0=\{s\}$, $L(s)=0$, 对其它一切$v\in V_G$, 将$L(v)$ 置为∞。若$n=1$，结束。

2．$\forall v\in S_i'=V_G-S_i$, 比较$L(v)$和$L(u_i)+W(u_i, v)$的值 ($u_i\in S_i$)

如果$L(u_i)+W(u_i, v)<L(v)$, 则将v的标注更新为$(L(u_i)+W(u_i, v), u_i)$，

即：$L(v)=\min\{ L(v), \min_{u\in S_i}\{L(u)+W(u,v)\} \}$

3. 对所有S_i'中的顶点，找出具有最小$L(v)$的顶点v, 作为u_{i+1}

4．$S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$

5. $i = i+1$; 若$i=n-1$, 终止。否则：转到第2步。

Dijkstra算法的分析

- 可终止性
  - 计数控制
- 正确性

  需证明当算法终止时

  - L(v)=d(s, v)对一切v成立。
  - 由标记中的诸u_i确定的路径是一条最短路径

    (这里$d(s,v)$是s到v的最短路径长度，即距离。)
- 复杂性
  - $O(|V|^2)$，对边稀疏的情况可进一步优化。

求所有结点间的最短距离？

- Floyd-Warshall 算法 $|V|^3$

求所有结点间的最短距离？
All-Pairs Shortest Paths

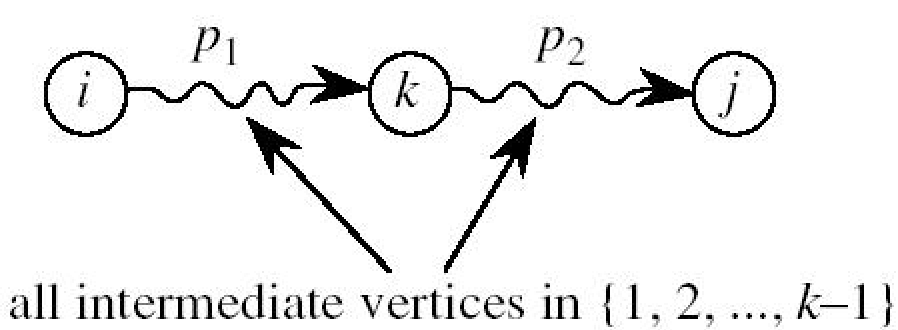
- Given a directed graph $G = (V, E)$, weight function $w : E \rightarrow R$, $|V| = n$.
- Assume no negative weight cycles.
- Goal: create an $n \times n$ matrix of shortest-path distances $\delta(u, v)$.
- We'll see how to do in $O(V^3)$ in all cases, with no fancy data structure.

All Pairs Shortest Path – Floyd-Warshall Algorithm

- Dynamic programming approach.
- Use optimal substructure of shortest paths: *Any subpath of a shortest path is a shortest path.*
- Create a 3-dimensional table:
  - Let $d_{ij}^{(k)}$ –shortest path weight of any path from i to j where all intermediate vertices are from the set {1,2, …, k}.
  - Ultimately, we would like to know the values of $d_{ij}^{(n)}$.

Computing $d_{ij}^{(k)}$

- Base condition: $d_{ij}^{(0)} = ?$
  - $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$.
- For k>0:
  - Let $p=\langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ be a shortest path from vertex i to vertex j with all intermediate vertices in {1,2, …, k}.
  - If k is *not* an intermediate vertex, then all intermediate vertices are in {1,2, …, k-1}.
  - If k *is* an intermediate vertex, then p is composed of 2 shortest subpaths drawn from {1,2, …, k-1}.



Recursive Formulation for $d_{ij}^{(k)}$

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\ , \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\ . \end{cases}$$

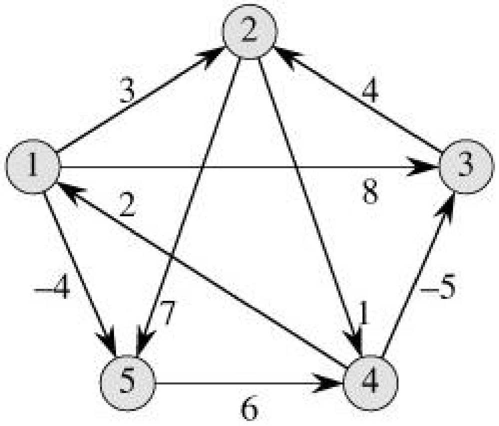
Algorithm

$$
\begin{array}{l}
\textsc{Floyd-Warshall}(W, n) \\
D^{(0)} \leftarrow W \\
\textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n \\
\quad \textbf{do for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \\
\quad\quad \textbf{do for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \\
\quad\quad\quad \textbf{do } d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) \\
\textbf{return } D^{(n)}
\end{array}
$$

- Running time = ?
  - $O(n^3)$.
- Memory required = ?
  - $O(n^2)$ (if we drop the superscripts).

Example

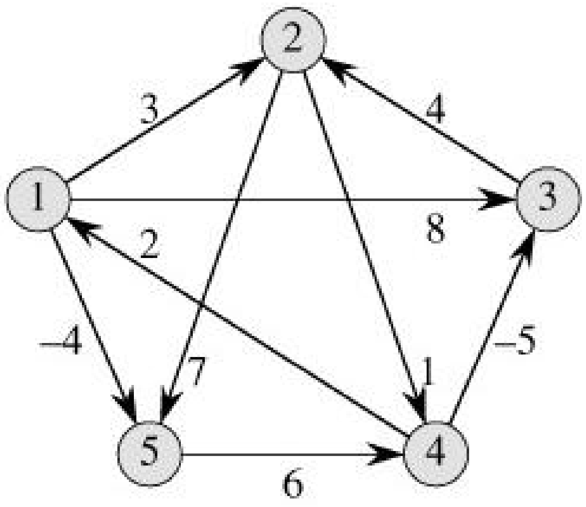
$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$



$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 1

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

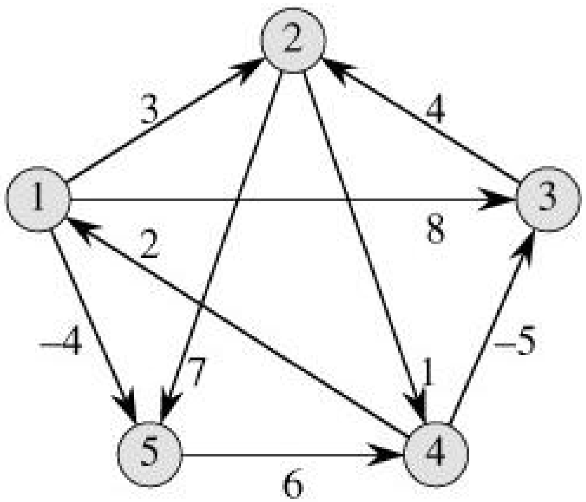


$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 2

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

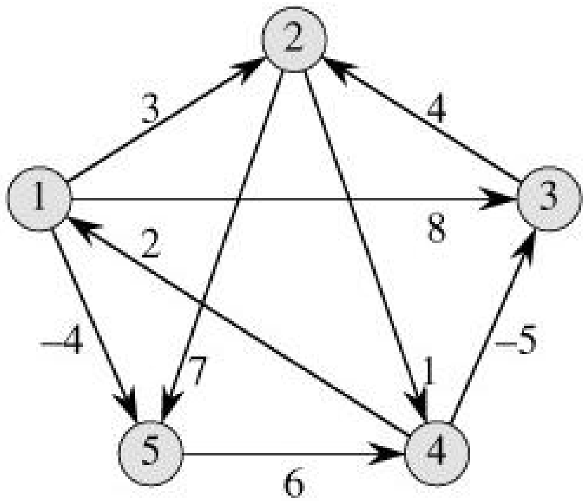


$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 3

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

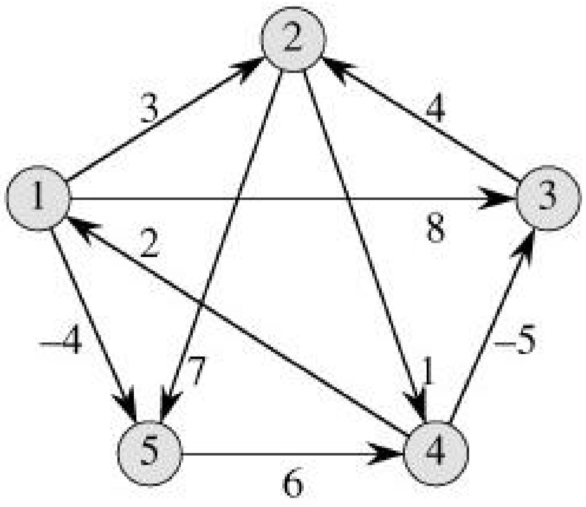


$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 4

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

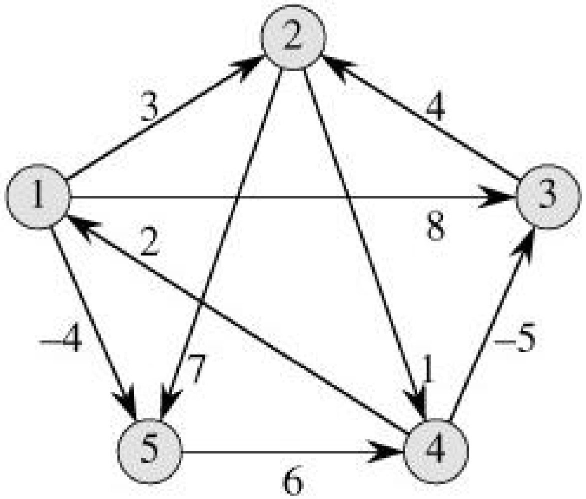


$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 5

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$



$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

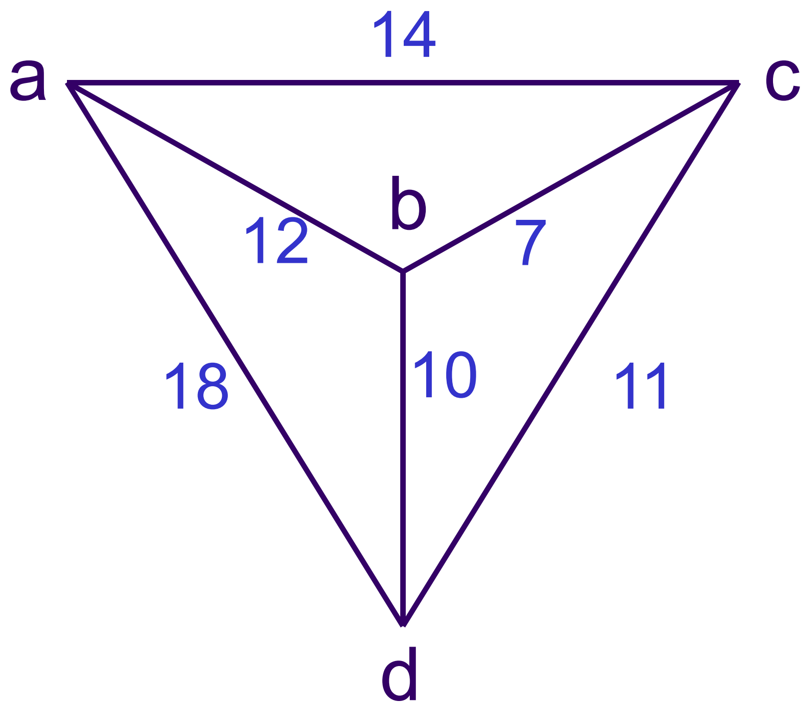
旅行商问题 (Travelling Salesman Problem, TSP)

- n个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它n-1城市各一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
- 数学模型：
  - 无向带权图G：顶点对应于城市，边对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示。
  - 问题的解：权最小的哈密尔顿回路。
  - G是带权完全图，总共有(n-1)!/2条哈密尔顿回路。因此，问题是如何从这(n-1)!/2条中找出最短的一条。

(含25个顶点的完全图中不同的哈密尔顿回路有约3.1×10^{23}条，若机械地检查，每秒处理10^9条，需1千万年。)

旅行商问题

- 一个货郎（销售员）生活在城市a，假定访问的城市是d, b, c，然后回到a，求完成这次访问的最短路径的距离.



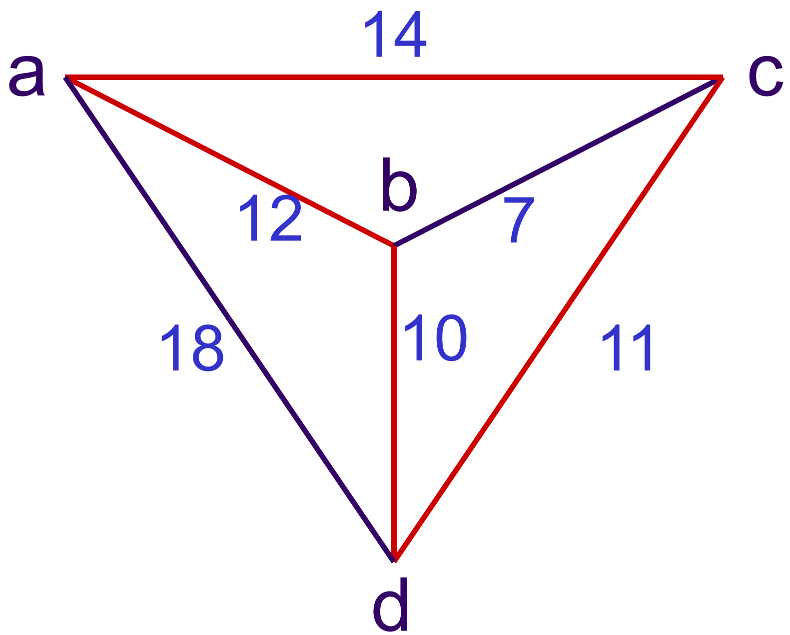
旅行商问题

- 解：列出哈密尔顿回路, 并求其距离：

  （1）（abcda）＝（12+7+11+18）＝48

  （2）（acbda）＝（14+7+10+18）＝49

  （3）（abdca）＝（12+10+11+14）＝47



旅行商问题

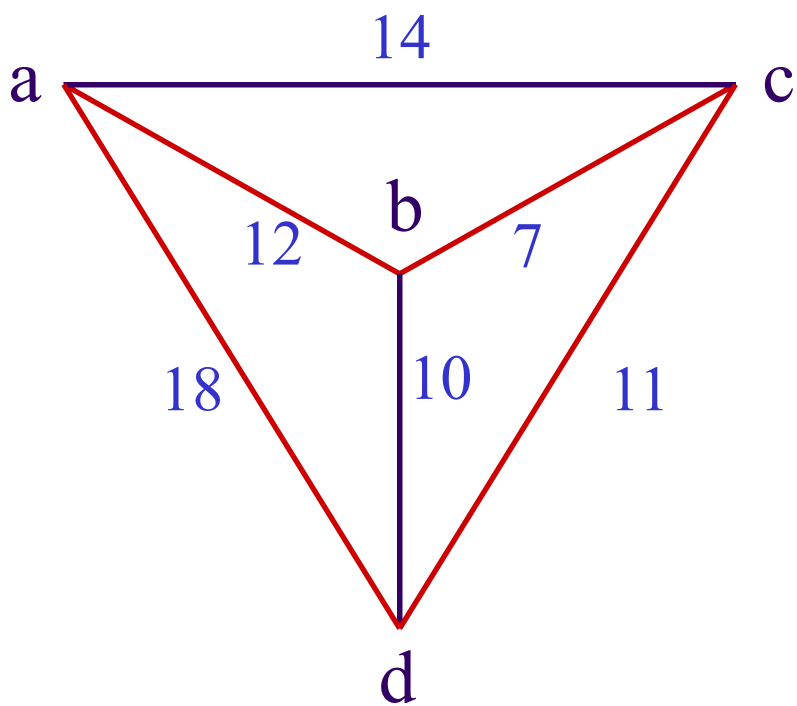
- 哈密尔顿回路（路径）的最短路径问题！
- 下面介绍一种最邻近算法：

（1）选择任一顶点作为始点，找出离始点距离最小的顶点，形成一条边的初始路径；

（2）设u是最新加到这条路径上的顶点，从不在这条路径上的所有顶点中选择一个与u距离最小的顶点, 把连接u与此结点的边加入路径中；重复执行直到G中的各顶点均含在这条路径中。

旅行商问题

（3）把始点到最后加入的顶点的边放入路径中得到一条哈密尔顿回路，并为近似最短的哈密尔顿回路.



旅行商问题(TSP)的研究进展

- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法?
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的近似算法
  - 保证: $W \le W' \le cW$ $(c=3/2)$, 误差为50%
- 实际应用中，已有好的算法能够在几分钟内处理1000个节点的规模，误差在2%。

编程 练习

- 问题描述： 给你n个点，m条无向边，每条边都有长度d>0，给你起点s终点t，要求使用Dijkstra算法输出起点到终点的最短距离及对应的一条最短路径。如果起点和终点之间没有通路，则输出距离∞ 。

编程要求

- **输入**
  - 输入n和m，顶点的编号是1~n。
  - 接着的m行，每行3个数 a,b,d，表示a和b之间有一条长度为d的边。
  - 最后一行是两个数 s,t：表示起点和终点的编号。以0 0 表示输入结束。(1<n<=1000, 0<m<100000, s != t)
- **输出**
  - 输出第一行最短距离，第二行最短路径的顶点序列。

样例输入：

```
3 2
1 2 5
2 3 4
1 3
0 0
```

样例输出：

```
9
1 2 3
```