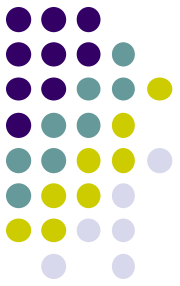


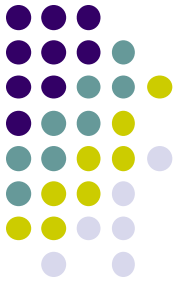
图的表示与同构

南京大学计算机科学与技术系



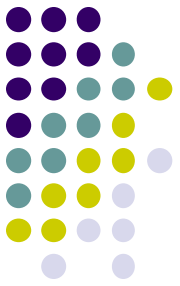
内容提要

- 图的表示
- 邻接矩阵的运算
- 图的同构



图的表示

- 邻接矩阵
- 邻接表
- 关联矩阵



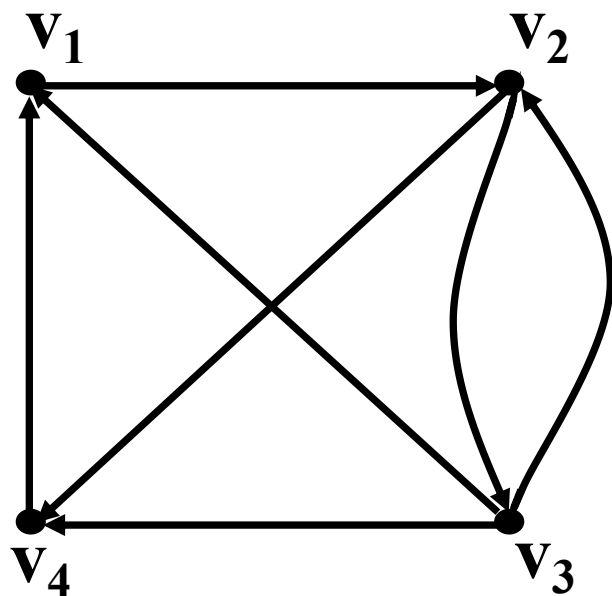
邻接矩阵 (*adjacency matrix*)

- 简单有向图 $G = (V, E, \varphi)$, 设 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 。
- $A(G) = [a_{ij}]$ 称为 G 的邻接矩阵 ($n \times n$ 阶矩阵) , 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } v_i \text{ 邻接到 } v_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$\exists e \in E. \varphi(e) = (v_i, v_j)$

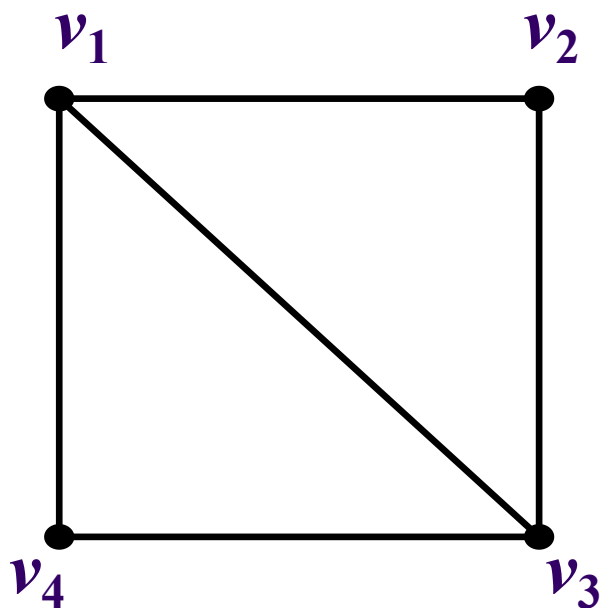
举例（邻接矩阵）



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

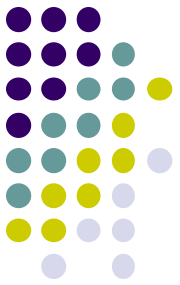


简单无向图的邻接矩阵



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

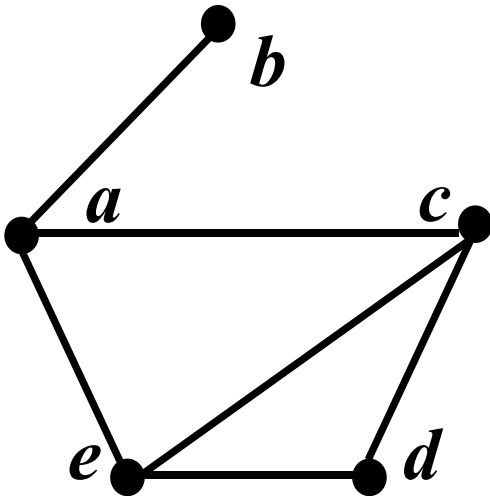
简单无向图的邻接矩阵是对称矩阵



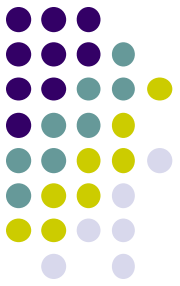
邻接表

ϕ 是单射

- 若图 $G = (V, E, \phi)$ 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。



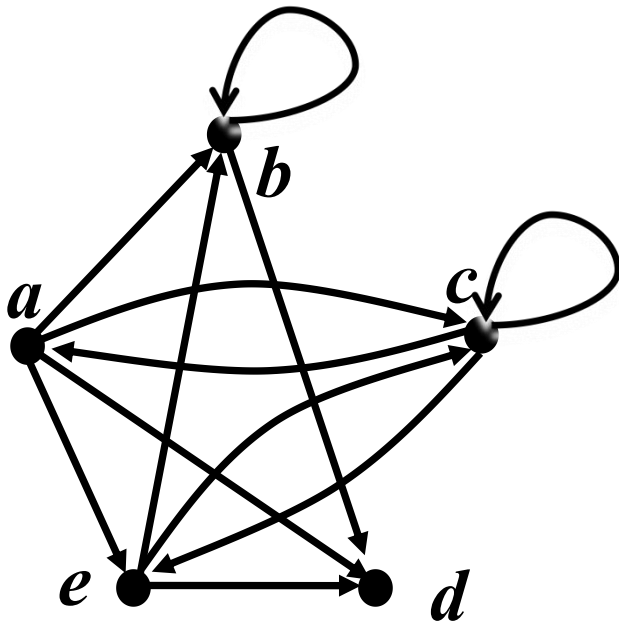
| <u>顶 点</u> | <u>相邻顶点</u> |
|------------|----------------|
| <i>a</i> | <i>b, c, e</i> |
| <i>b</i> | <i>a</i> |
| <i>c</i> | <i>a, d, e</i> |
| <i>d</i> | <i>c, e</i> |
| <i>e</i> | <i>a, c, d</i> |



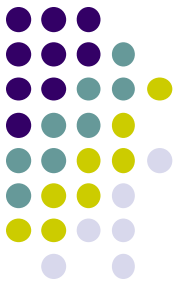
邻接表（有向图）

ϕ 是单射

- 若图 $G = (V, E, \phi)$ 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出从该顶点邻接到的顶点。



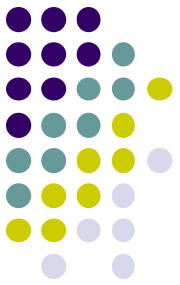
| <u>顶 点</u> | <u>相邻顶点</u> |
|------------|-------------------|
| <i>a</i> | <i>b, c, d, e</i> |
| <i>b</i> | <i>b, d</i> |
| <i>c</i> | <i>a, c, e</i> |
| <i>d</i> | |
| <i>e</i> | <i>b, c, d</i> |



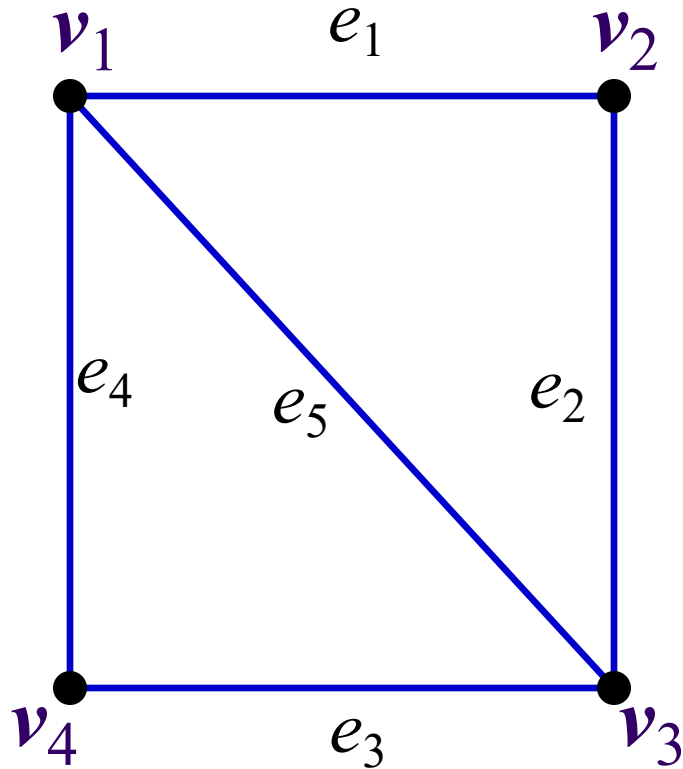
关联矩阵 (*incidence matrix*)

- 无向图 $G = (V, E, \varphi)$ ，不妨设 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ， $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 。
- $M(G) = [m_{ij}]$ 称为 G 的关联矩阵 ($n \times m$ 阶矩阵), 其中
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } e_j \text{ 关联 } v_i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$v_i \in \varphi(e_j)$
- 无向图 G 可以是伪图（含自环或多重边）。



举例（关联矩阵）



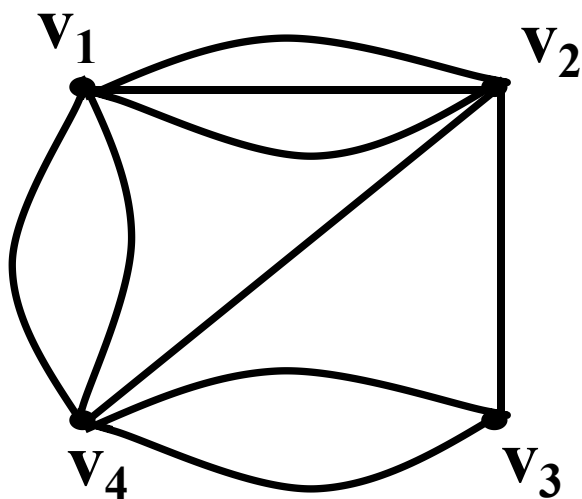
$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

并不直接适合于有向图

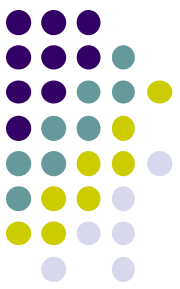


关于邻接矩阵

- 通常，邻接矩阵中的元素为0和1，称为布尔矩阵。
- 邻接矩阵也可表示包含多重边的图，此时的矩阵不是布尔矩阵。

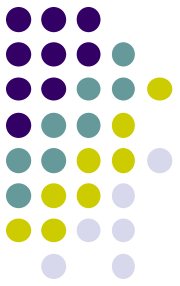


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



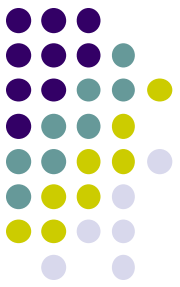
关于邻接矩阵

- 当有向图中的有向边表示关系时，邻接矩阵就是关系矩阵。无向图的邻接矩阵是对称的。
- 图的邻接矩阵表示，顶点的次序并不紧要，行与行、列与列进行相应交换，可得到另一个矩阵。
 - 两个简单有向图，对应两个邻接矩阵，若对某一矩阵行与行、列与列之间的相应交换后得到的矩阵与另一矩阵相同，则这两个图同构。



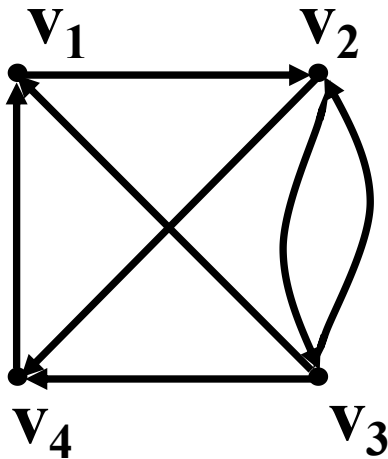
内容提要

- 图的表示
- 邻接矩阵的运算
- 图的同构



邻接矩阵的运算

- 顶点的度（以有向图为例）
 - 行中1的个数就是行中相应顶点的出度
 - 列中1的个数就是列中相应顶点的入度



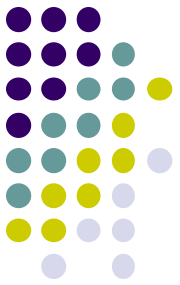
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Deg}^+(1)=1, \text{Deg}^-(1)=2$$

$$\text{Deg}^+(2)=2, \text{Deg}^-(2)=2$$

$$\text{Deg}^+(3)=3, \text{Deg}^-(3)=1$$

$$\text{Deg}^+(4)=1, \text{Deg}^-(4)=2$$

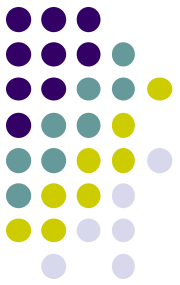


邻接矩阵的运算

- 逆图（转置矩阵）

- 设 G 的邻接矩阵为 A ，则 G 的逆图的邻接矩阵是 A 的转置矩阵，用 A^T 表示。

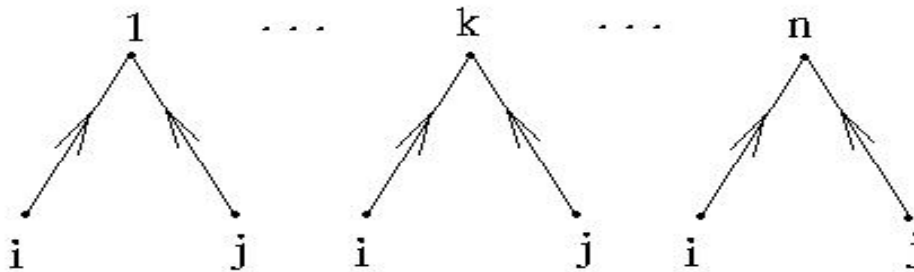
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



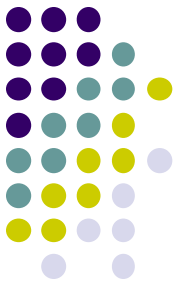
邻接矩阵的运算

$$A \times A^T = B = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times a_{jk} = a_{i1} \times a_{j1} + a_{i2} \times a_{j2} + \cdots + a_{in} \times a_{jn}$$



- b_{ij} 表示顶点*i*和顶点*j*均有边指向的那些顶点的个数；
- 若*i=j*，则 b_{ii} 表示顶点*i*的出度。



邻接矩阵的运算

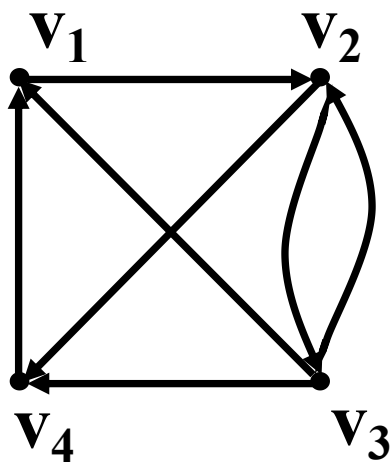
$$A^T \times A = C = [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \times a_{kj} = a_{1i} \times a_{1j} + a_{2i} \times a_{2j} + \cdots + a_{ni} \times a_{nj}$$



- C_{ij} 表示同时有边指向顶点*i*和顶点*j*的那些顶点的个数；
- 若*i=j*，则 C_{ii} 表示顶点*i*的入度。

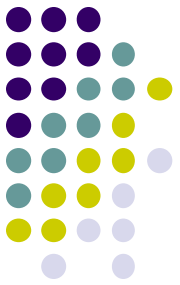
邻接矩阵的运算



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

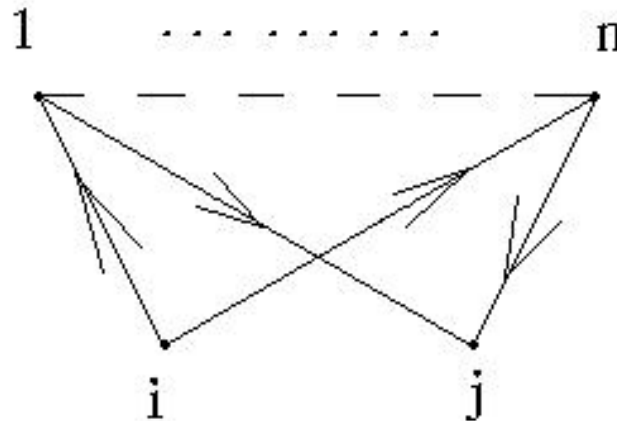
$$A^T \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



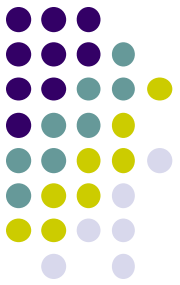
邻接矩阵的运算

$$A \times A = A^2 = D = [d_{ij}]$$

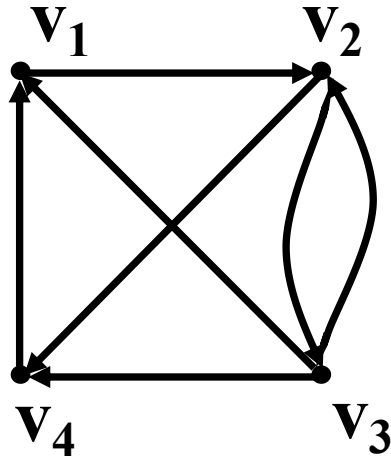
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times a_{kj} = a_{i1} \times a_{1j} + \cdots + a_{in} \times a_{nj}$$



- 若 $a_{ik} \times a_{kj} = 1$ ，则表示有 $i \rightarrow k \rightarrow j$ 长度为2的有向通路；
- d_{ij} 表示 i 和 j 之间具有长度为2的通路个数。



邻接矩阵的运算

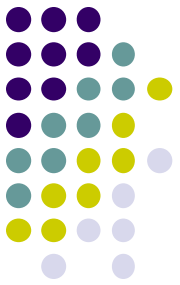


$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

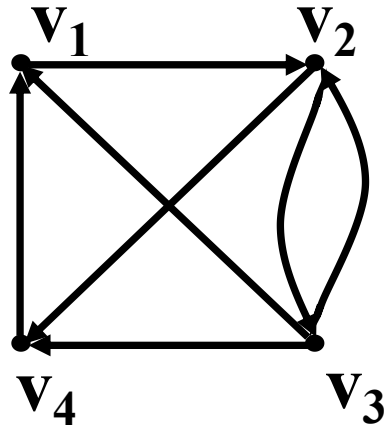
$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□ 从 $v_2 \rightarrow v_1$, 有 **二条** 长度为 2 的通路; 有 **一条** 长度为 3 的通路



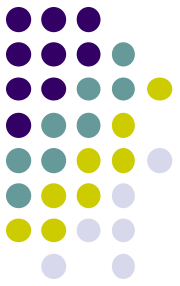
邻接矩阵的运算



$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

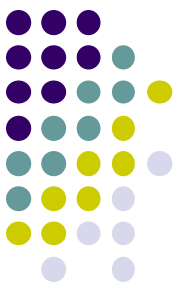
$$B_4 = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□ 长度不大于4的通路个数



内容提要

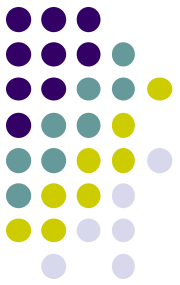
- 图的表示
- 邻接矩阵的运算
- 图的同构



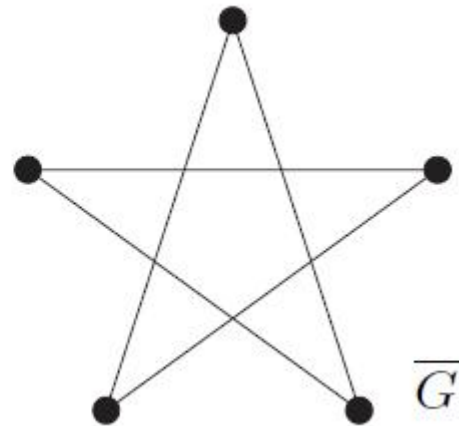
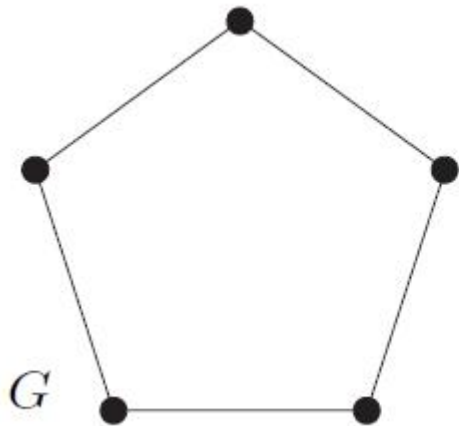
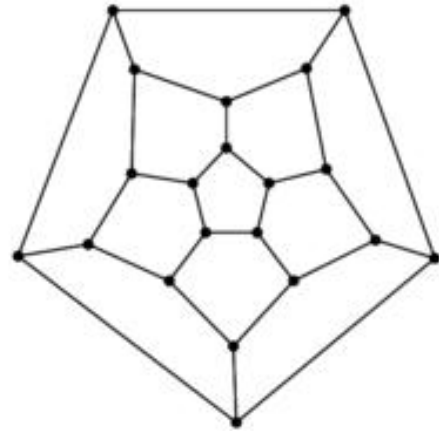
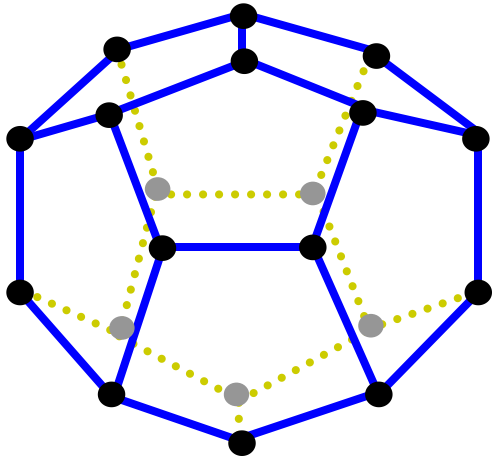
图的同构

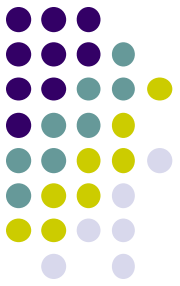
- 图同构的定义

- 设 $G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$ 是两个简单无向图。若存在双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$, u 和 v 在 G_1 中相邻当且仅当 $f(u)$ 和 $f(v)$ 在 G_2 中相邻。此时称 f 是一个同构函数。
- 设 $G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$ 是两个无向图。若存在双射 $f: V_1 \rightarrow V_2, g: E_1 \rightarrow E_2$,
 $\forall e \in E_1, \varphi_1(e)=\{u, v\}$ 当且仅当 $g(e) \in E_2, \varphi_2(g(e))=\{f(u), f(v)\}$

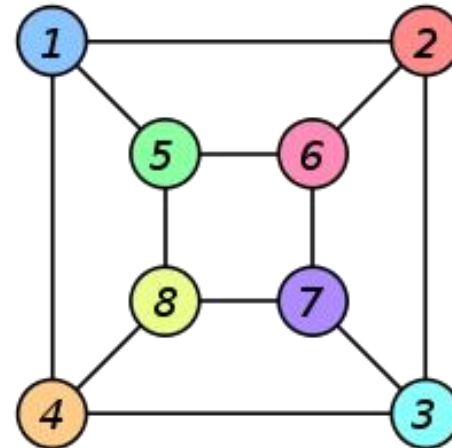
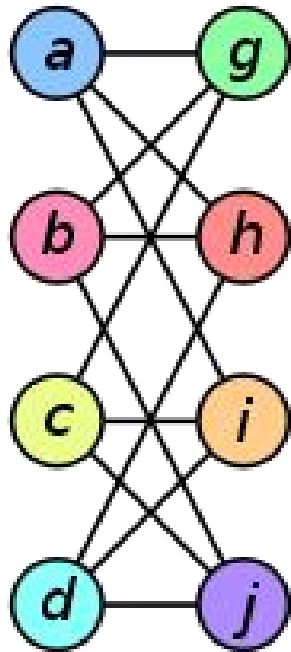


图同构的例子





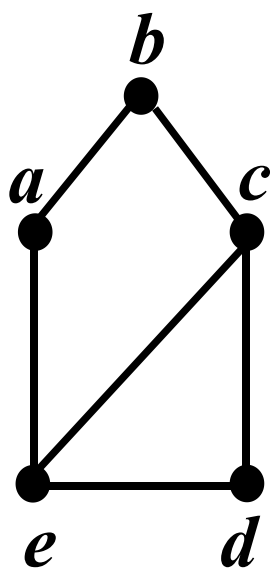
图同构的例子



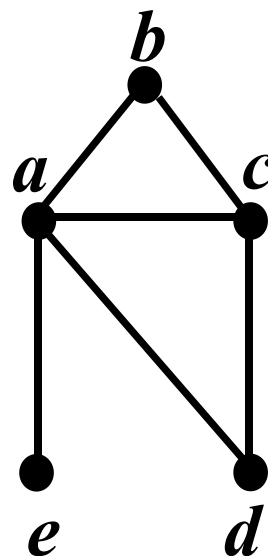


检测两个简单图是否同构

- 图同构下保持的性质称为图不变的
 - 顶点数、度序列、...
- 利用图不变的性质（**没有保持**）来推断出**不同构**



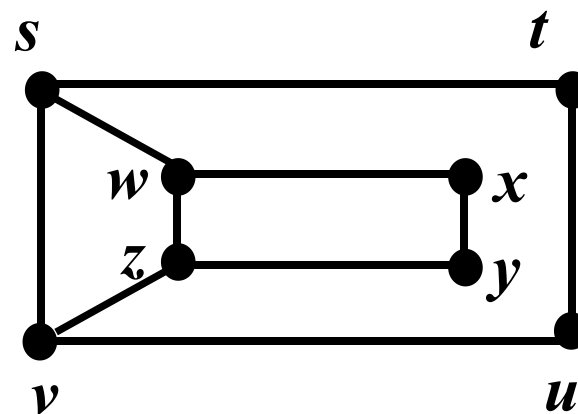
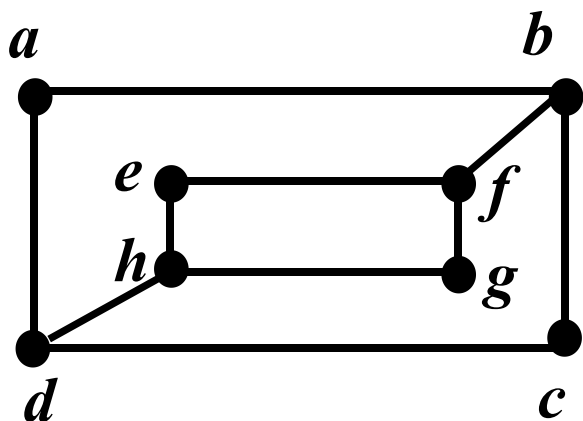
图G



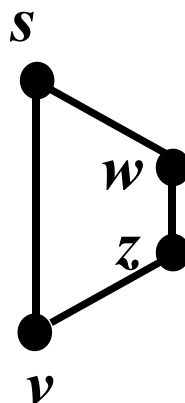
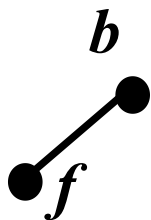
图H

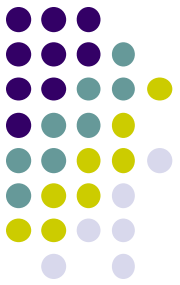


检测两个简单图是否同构



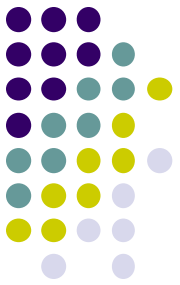
3度顶点导出子图





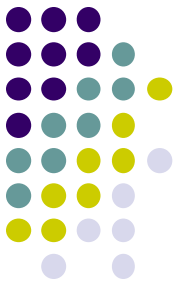
检测两个简单图是否同构

- 若图 G 与 H 同构，则对于任意自然数 k ，
 - 在 G 或 H 存在 k 度顶点的前提下， G 的 k 度顶点导出子图与 H 的 k 度顶点导出子图同构
- 若对于任意自然数 k ，在 G 或 H 存在 k 度顶点的前提下， G 的 k 度顶点导出子图与 H 的 k 度顶点导出子图同构， G 与 H 是否同构？
 - 肯定的话，请证明之。
 - 否定的话，请举反例。



“图同构”问题

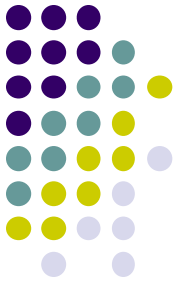
- 尚未证明：图同构问题是NP-完全的 (NP-Complete)
- 尚未找到多项式时间复杂度的算法
- Luks, 1983: $\exp(O(\sqrt{n \log n}))$
- László Babai, 2017: $(\exp((\log n)^{O(1)}))$
quasipolynomial time



“子图同构”问题

- 给定简单图 G 和 H ， G 是否与 H 的某个子图同构？
- 已经证明：子图同构问题是NP-完全的。
- 那么，对于一些特殊类型的图 G 呢？
 - K_m
 - C_m

Q&A



欢迎提问