基本概念

离散数学—图论初步

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

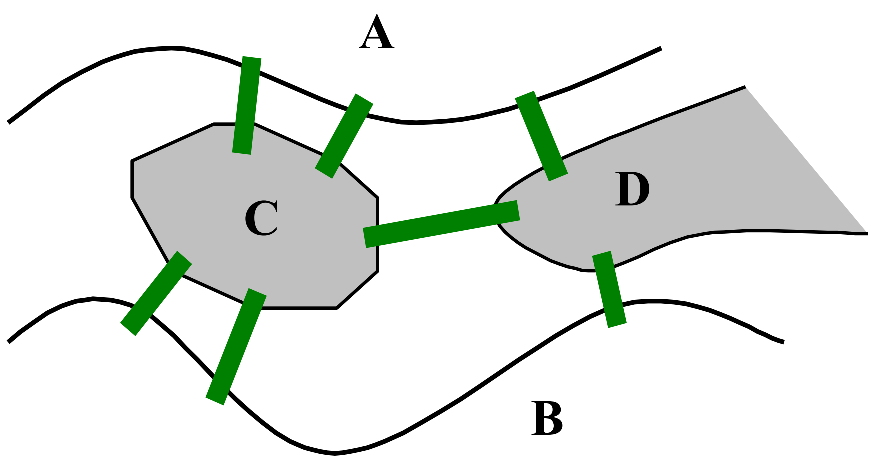
- 图的定义
- 用图建模

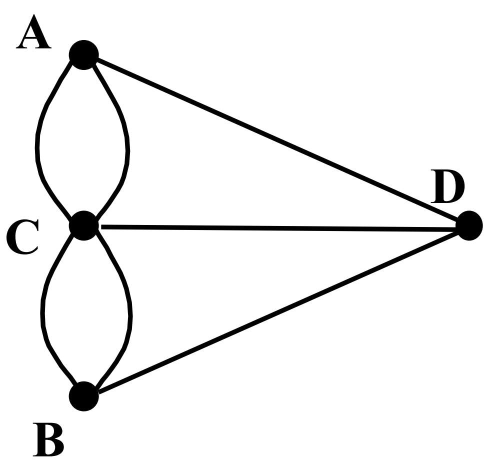
下次课：

- 图的表示
- 图的运算
- 图的同构

Königsberg七桥问题

- **问题的抽象：**
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”

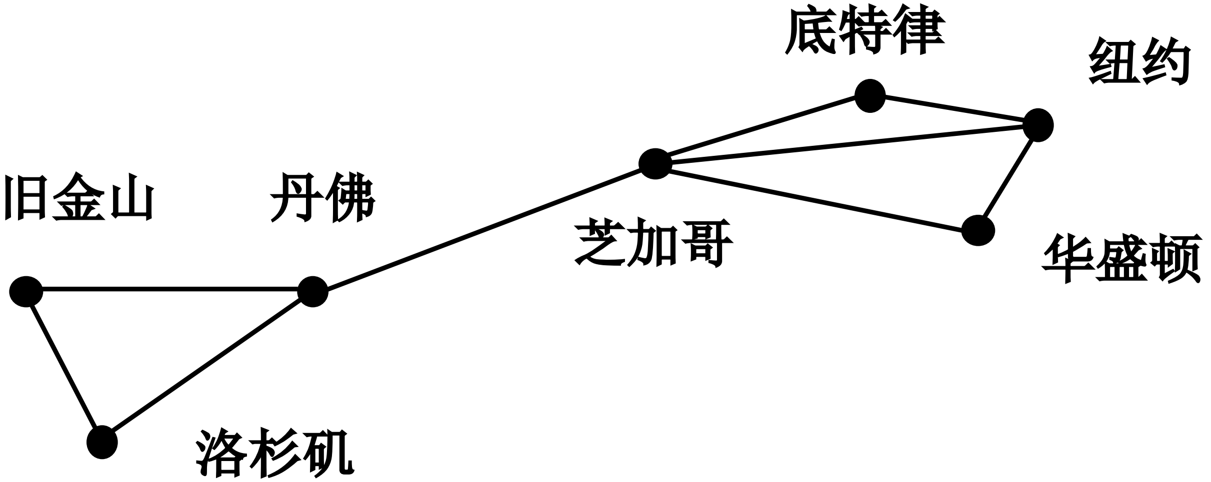




图的定义 Graph

φ常常省略，写作：$G = (V, E)$

- 图G是一个三元组：$G = (V, E, \varphi)$
  - V是非空顶点集，E是边集，且 $V \cap E = \phi$;
  - $\varphi: E \rightarrow P(V)$, 且$\forall e \in E$. $1 \leq |\varphi(e)| \leq 2$. $\varphi(e)$称为边 e 的端点集.
- 举例（数据中心、通信链接）

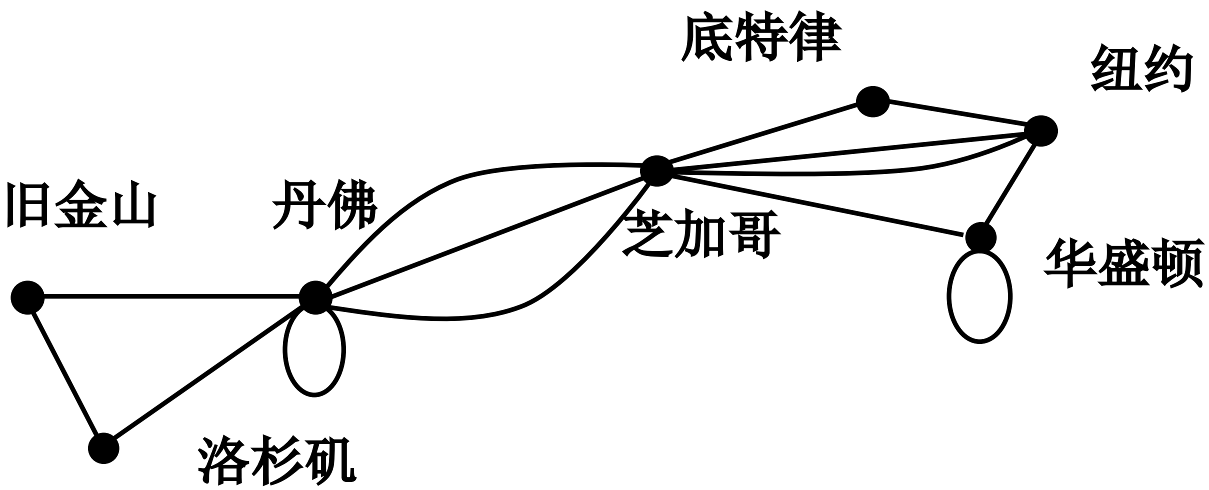


图的定义（续）

- 图$G = (V, E, \varphi)$是简单图，如果
  - 每条边有2个端点，即： $\forall e \in E. |\varphi(e)| = 2$，并且
  - 不同边有不同端点集，即：如果$e_1 \neq e_2$，则$\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$
- 图$G = (V, E, \varphi)$是伪图，如果
  - 存在一条只有1个端点的边，即: $\exists e_0 \in E. |\varphi(e_0)| = 1$，或者
  - 有两条边具有相同的端点集，即:$\exists\ e_1 \neq e_2. \varphi(e_1)=\varphi(e_2)$

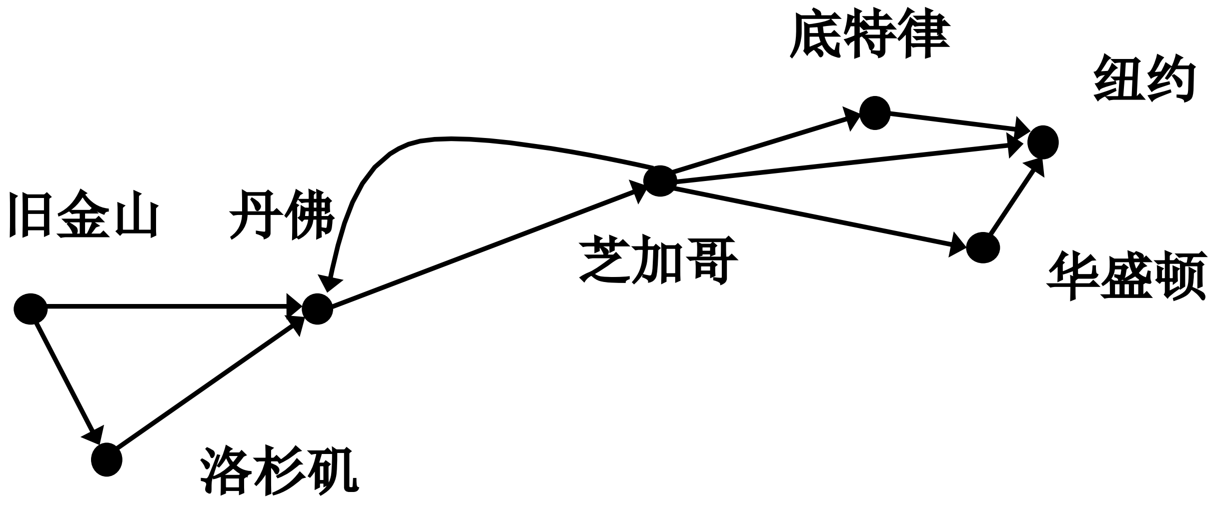
图的定义（续）

- 伪图（包含环或者多重边）示例



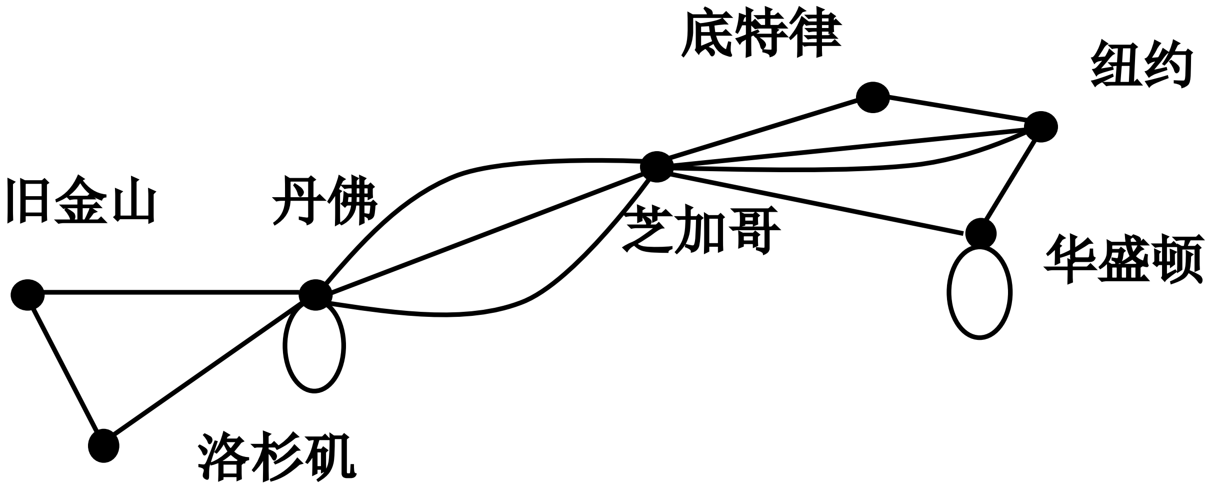
图的定义（有向图）

- 有向图G是一个三元组：G= (V, E, φ)
  - V是非空顶点集，E是有向边（弧）集，且V∩E=ϕ;
  - φ:E→V×V, 若φ(e)=(u, v), 则u和v分别称为e的起点和终点.
- 举例（简单有向图）



图的术语

- 无向图$G = (V, E, \varphi)$, $\varphi(e)=\{u, v\}$
  - u和v在G里邻接（相邻）
  - e关联（连接）顶点u和v
- 图G中顶点v的度, deg(v)， $d_G(v)$
  - 与该顶点关联的边数，环为顶点的度做出双倍贡献。



握手定理

- 无向图G有m条边，n个顶点$v_1, \ldots v_n$.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- 推论：无向图中<u>奇数度顶点</u>必是偶数个。

图的术语（续）

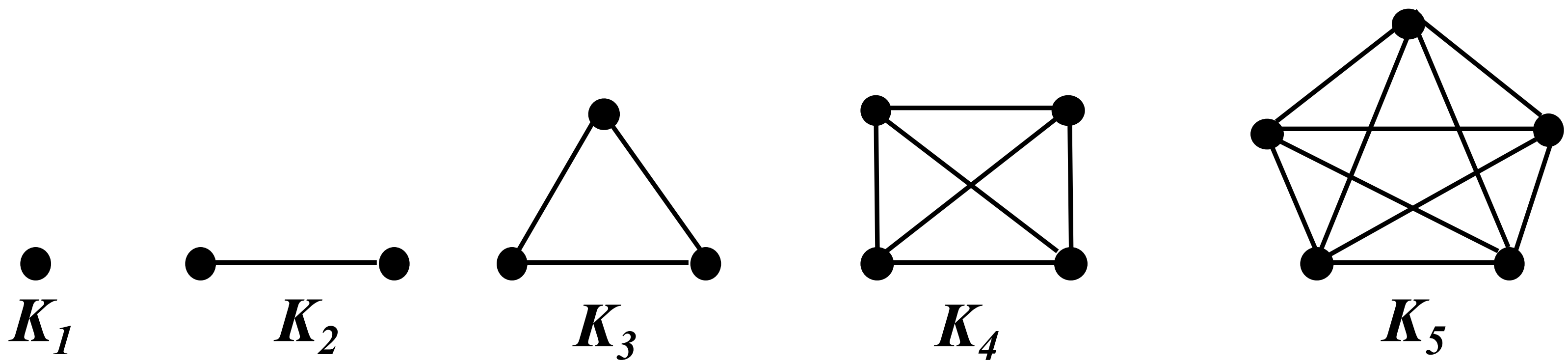
- 有向图$G=(V, E, \varphi)$, $\varphi(e)=(u, v)$
  - u是e的起点，v是e的终点
  - 假设 $u\neq v$，u邻接到v，v从u邻接
- 有向图中顶点的出度和入度
  - $d_G^+(v)$ = 以v为始点的边的条数， $\deg^+(v)$
  - $d_G^-(v)$ = 以v为终点的边的条数， $\deg^-(v)$
- 有向图中各顶点的出度之和等于入度之和。

$$\Sigma_{v\in V}\, deg^+(v) = \Sigma_{v\in V}\, deg^-(v) = |E|$$

- 有向图的底图

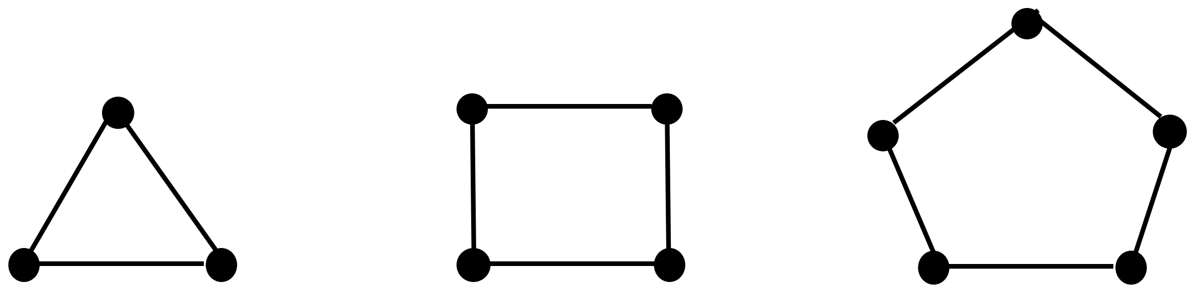
特殊的简单图（完全图）

- 若简单图G中任意两点均相邻，则称为完全图。记为K_n, 其中n是图中顶点数。
  - K_n中每个顶点皆为n-1度，总边数为n(n-1)/2。
  - 边数达到上限的简单图。



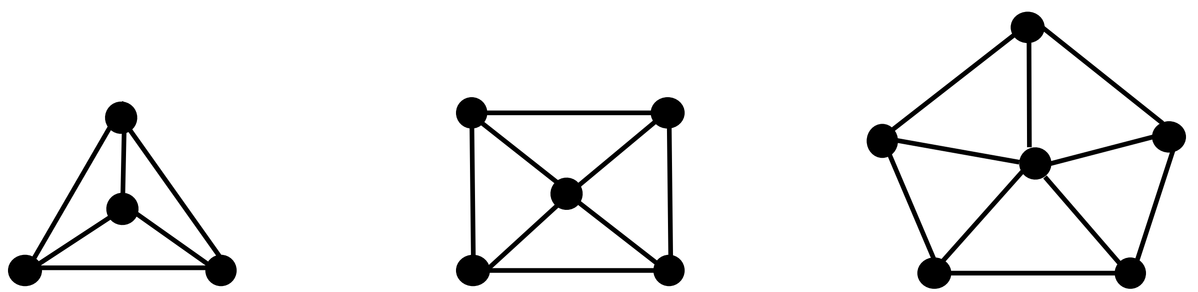
特殊的简单图（圈图与轮图）

Cycle



C_3 C_4 C_5

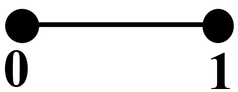
Wheel



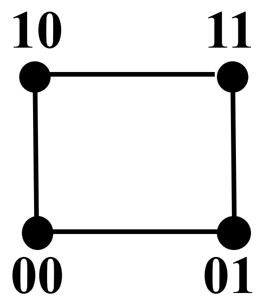
W_3 W_4 W_5

特殊的简单图（立方体图）

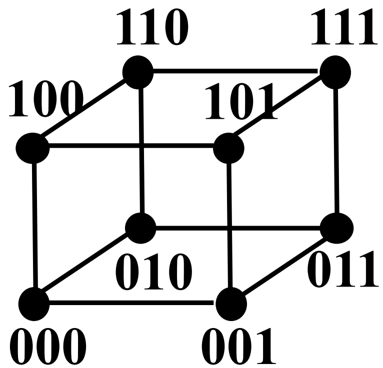
n-cube



Q_1



Q_2



Q_3

正则图：顶点度相同的简单图

子图

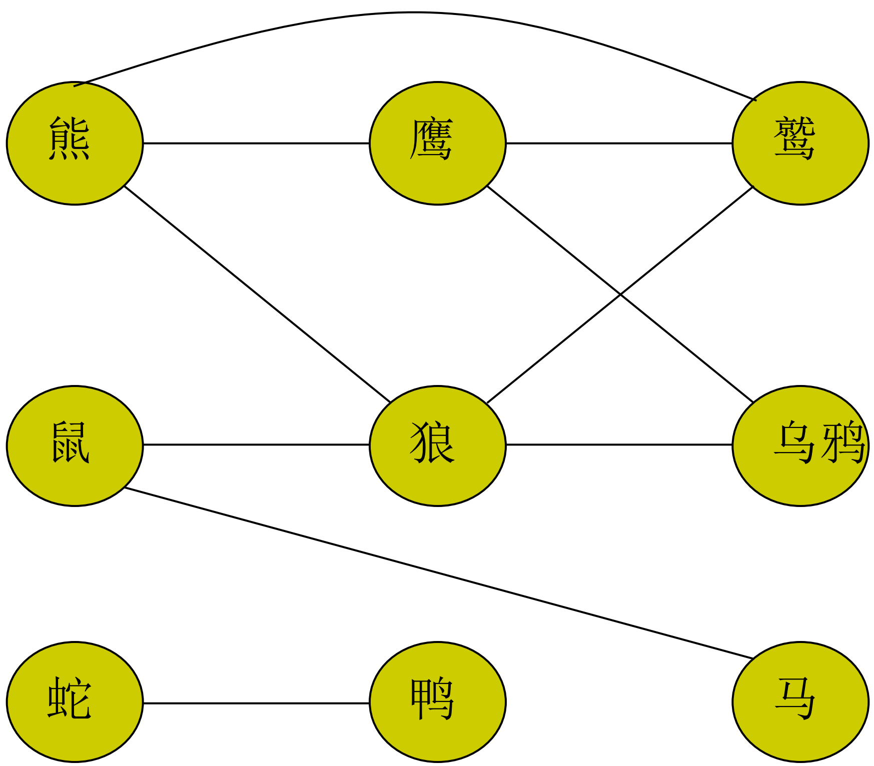
- 设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$, 如果$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则称G'是G的子图。
- 如果$V' \subset V$, 或者$E' \subset E$, 则称为真子图。
- 诱导(导出)子图：可以由顶点集的子集，或者由边集的子集导出一个子图。

用图建模

图模型

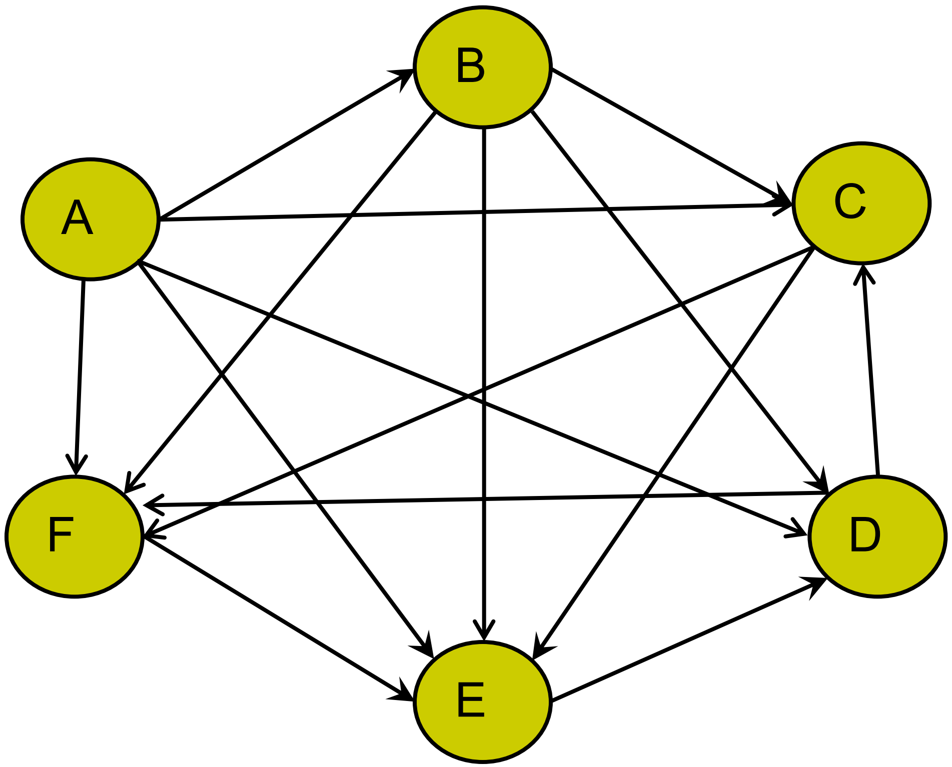
- 交通网络
  - 航空、公路、铁路
- 信息网络
  - 万维网图（Web Graph）
  - 引用图（Citation Graph）
- 社会网络
  - 熟人关系图
  - 合作图，好莱坞图
  - 呼叫图
- 体育（循环赛的图模型）

生态系统中的动物竞争关系



是什么思考帮助我们建模？
问题的答案是什么？

循环赛的冠军是哪个队？



是什么思考帮助我们建模？
问题的答案是什么？

n个点的有向图，若满足**任意两点都有且仅有一条有向边**，就称此有向图为竞赛图。

优先图和程序并发执行

- 右边的程序有没有办法执行快一点？

s1||s2;s3||s4;s5||s6

S_1 $a := 0$

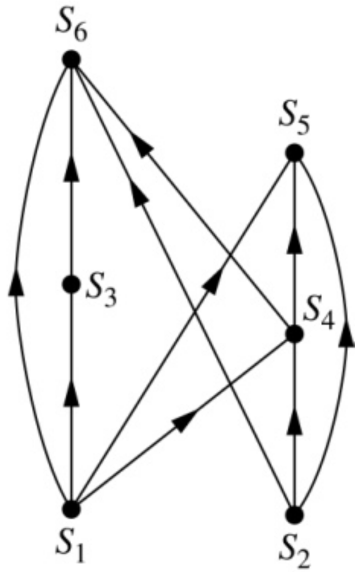
S_2 $b := 1$

S_3 $c := a + 1$

S_4 $d := b + a$

S_5 $e := d + 1$

S_6 $e := c + d$



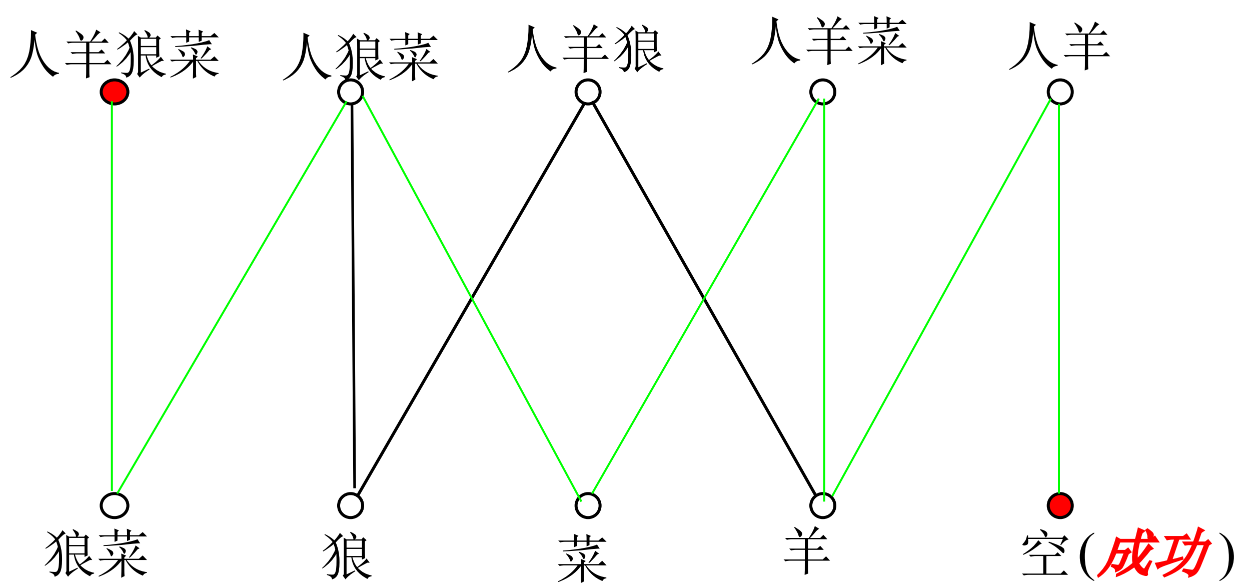
是什么思考帮助我们建模？
问题的答案是什么？

“巧渡河”问题

- 问题：人、狼、羊、菜用一条只能同时载两位的小船渡河，“狼羊”、“羊菜”不能在无人在场时共处，当然只有人能架船。
- 图模型：顶点表示“原岸的状态”，两点之间有边当且仅当一次合理的渡河“操作”能够实现该状态的转变。
- 起始状态是“人狼羊菜”，结束状态是“空”。
- 问题的解：找到一条从起始状态到结束状态的尽可能短的通路。

“巧渡河”问题的解

- 注意：在“人狼羊菜”的16种组合种允许出现的只有10种。



考试时间编排问题

- 问题：排考试时间，一方面要总时间尽可能短(假设教室没问题)，另一方面一个同学所选的任意两门课不能同时间。
- 图模型：每门课程对应一个顶点。任意两点相邻当且仅当对应的两门课程有相同的选课人。
- 解：用不同颜色给顶点着色。相邻的点不能同颜色。则最少着色数即至少需要的考试时间段数(可以将颜色相同的点所对应的课程安排在同一时间)。

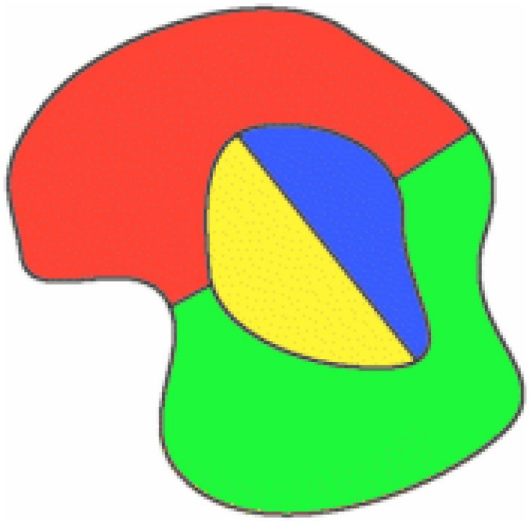
中国邮递员问题（管梅谷，1960）

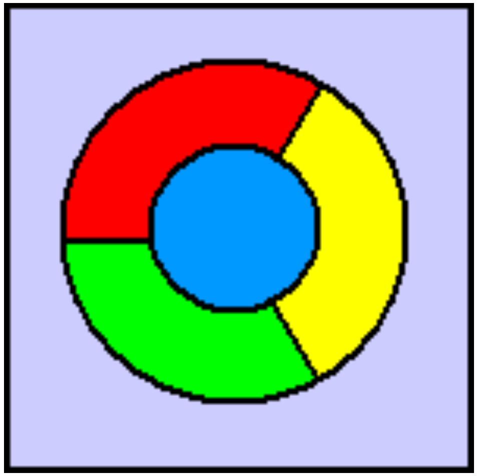
- 邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道至少一次，再回邮局，如何选择最短路线？
- Euler回路？添加重复边（权和最小）。

旅行商(TSP)问题

- n个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它n-1个城市，且只经过一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
- 最短Hamilton回路。

地图与平面图着色（四色定理）





Q&A