离散数学（2023）作业 03 - 证明方法

离散数学教学组

Problem 1

用推理规则证明：如果 $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall x\,(\neg Q(x) \vee S(x))$，$\forall x\,(R(x) \to \neg S(x))$ 和 $\exists x\,\neg P(x)$ 为真，则 $\exists x\,\neg R(x)$ 为真。即：

$$\{\forall x\,(P(x) \vee Q(x)), \forall x\,(\neg Q(x) \vee S(x)), \forall x\,(R(x) \to \neg S(x)), \exists x \neg P(x)\} \vdash \exists x\,\neg R(x)$$

Problem 2

用推理规则证明：如果 $\forall x\,(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x\,(P(x) \wedge R(x))$ 为真，则 $\forall x\,(R(x) \wedge S(x))$ 为真。即：

$$\{\forall x\,(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x))), \forall x\,(P(x) \wedge R(x))\} \vdash \forall x\,(R(x) \wedge S(x))$$

Problem 3

用不失一般性的概念证明当 x 和 y 是奇偶性相反的整数时，$x^2 - x \cdot y - y^2$ 是一个奇整数。

Problem 4

用分情形证明法证明：对任意实数 a, b, c 有 $\min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c)$。

Problem 5

证明所有正整数 $n = 4m + 3$（m 为自然数）都不能写成两个整数的平方和。

Problem 6

两个实数 x 和 y 的平方均值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

Problem 7

请证明，对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$，其中 $a \neq 0$，关于 x 的方程 $ax + b = c$ 的解唯一。

Problem 8

试证明对于任意实数 x，存在一个唯一的 n 和 ϵ 令 $x = n - \epsilon$，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 且 $\epsilon \in [0, 1)$。

Problem 9

证明方程 $2x^2 + 5y^2 = 14$ 没有 x 和 y 的整数解。

Problem 10

证明或驳斥存在一个有理数 x 和无理数 y 令 x^y 是无理数。