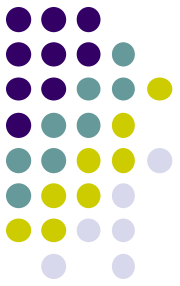


谓词逻辑初步

南京大学计算机科学与技术系



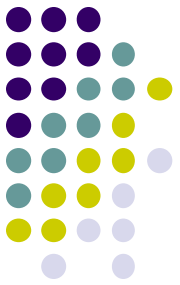
谓词逻辑(1)

- 引言
- 逻辑公式
 - 谓词
 - 量词

一阶逻辑 (**first-order logic, FOL**)

一阶谓词逻辑 (**first-order predicate logic**)

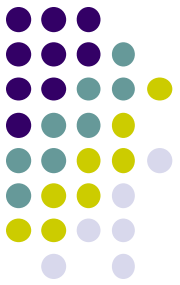
一阶谓词演算 (**first-order predicate calculus**)



引言

- 知识表示
 - $\forall n (odd(n) \rightarrow odd(n^2))$
 - $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$
// *z is uncle of x*
 - $father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$

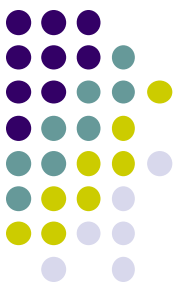
上述知识无法用命题逻辑表达！



引言

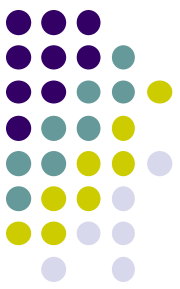
- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
 - $\forall n(\text{even}(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k (p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$
even(n) : n is a even number
p(x): x is a prime number

这个断言无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）



谓词 (Predicate)

- 如果 x 是整数, “ x 大于2”不是命题, 它的真值依赖于 x 的取值
 - 可以将 “ x 大于2”表示为 $P(x)$ 。//论域为实数
- 一元谓词 $P(\cdot)$: 给定 x , $P(x)$ 要么为真, 要么为假.
 - 如 $p(x)$: x is a prime number // x 是变量, 论域为正整数
- 二元谓词 $Q(\cdot, \cdot)$
 - 如 $Q(x, y)$: $x=y+3$ // 2个变量
 - 如 $uncle(z, x)$: z is uncle of x //论域?



逻辑公式 (formula)

原子陈述:

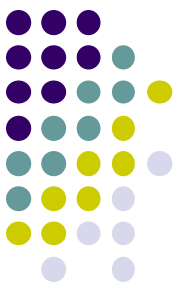
- $P(t_1, \dots, t_n)$, 其中 P 是 n 元谓词, t_i 是常量、变量或函数取值

逻辑公式 (有时称为 “陈述”):

- 原子陈述是逻辑公式;
- 若 P 是逻辑公式, x 是自由变量, 则 $\exists xP$ 和 $\forall xP$ 是逻辑公式;
- 若 P 和 Q 是逻辑公式, 则 $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$ 是逻辑公式。

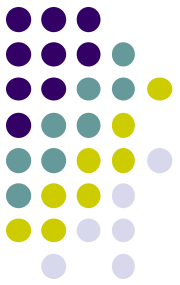
备注: 量词的优先级高于其它逻辑运算符。

举例: $\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$



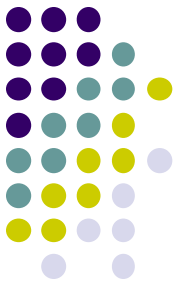
量化公式中的变元

- 约束变元
 - $\forall x \exists y (y > x)$ 是 $\forall x (\exists y (y > x))$ 简写, x 和 y 都是约束变元
 - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$, y 和 z 都是约束变元
- 自由变元
 - $\exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$, x 是自由变元
 - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y)$, x 是自由变元, 后面那个 y 也是自由变元
- 量词作用域
 - 前面那个 $\exists y$ 的作用域是 $(y > x)$
- 重命名 (约束变元)
 - $\exists y (y > x) \wedge (x + 2 > y) \equiv \exists z (z > x) \wedge (x + 2 > y)$
 - $\exists y (y > x) \wedge \exists y (x > y) \equiv \exists y (y > x) \wedge \exists z (x > z)$



量化公式的真假

- $\forall x$ (全称量词)
 - $\forall x P(x)$ 为真 *iff* 对所有的 x , $P(x)$ 为真
//论域, domain of discourse
- $\exists x$ (存在量词)
 - $\exists x P(x)$ 为真 *iff* 存在某个 x , $P(x)$ 为真 //论域
- $\forall x (x > 2)$ 为假, $\exists x (x > 2)$ 为真 //论域为实数
- $\forall x \exists y (y > x)$ 为真, $\exists y \forall x (y > x)$ 为假 //论域为实数



多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

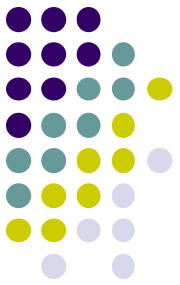
举例： $P(x, y)$ 表示 $x+y=y+x$ 。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$

举例： $P(x, y)$ 表示 $x=y+1$ 。

- $\forall x \exists y P(x, y)$ 与 $\exists y \forall x P(x, y)$ 不一定等价

举例： $P(x, y)$ 表示 “ $y > x$ ”。



语义蕴涵

- $\varphi_1 \models \varphi_2$ iff $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ 永真

一般情形

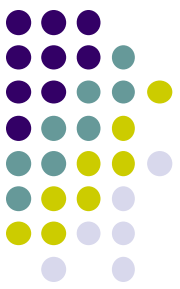
- $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ iff $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi)$ 永真

一阶逻辑公式的永真性判定有相当的难度！

$$\forall n(\text{even}(n) \wedge (n > 2) \rightarrow \exists m \exists k (p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)))$$

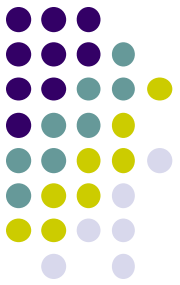
哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（domain of discourse）：**无限**与有限，天壤之别



将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意实数的平方都是正数
 - $\forall x P(x)$, 其中 $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$, 论域为实数
- 所有美国人都吃汉堡包
 - $\forall x C(x)$, 其中 $C(x)$ 表示 “ x 吃汉堡包”, 论域为美国人
 - $\forall x (A(x) \rightarrow C(x))$ // 论域为人类
 - $A(x)$ 表示 “ x 是美国人”, $C(x)$ 表示 “ x 吃汉堡包”
- 有的政治家是诚实的
 - $P(x)$ 表示 “ x 是政治家”, $H(x)$ 表示 “ x 是诚实的”
 - $\exists x (P(x) \wedge H(x))$ // 外层的 $()$ 不能缺



将自然语言翻译成逻辑公式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x 是这个班上的学生

$C(x)$: x 学过微积分课程

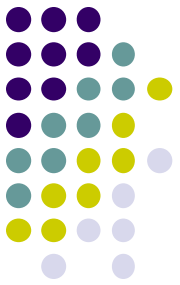
$\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\forall x (S(x) \rightarrow V(x, c) \vee V(x, m))$

其中， c 代表“加拿大”， m 代表“墨西哥”，

$V(x, y)$ 表示“ x 访问过（去过） y ”



小结

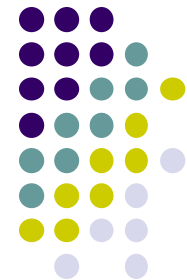
- 逻辑公式

- 原子公式（谓词：由具体应用需求而定）
- 量化公式（量词： \forall ， \exists ）
- 逻辑运算符（ \neg ， \wedge ， \vee ， \rightarrow ）

谓词、变量和量词的引入，增强了逻辑表达能力

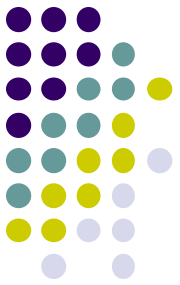
- 语义蕴涵

- 可归结为判断逻辑公式的永真性
- 论域的无限性，加深了推理的困难



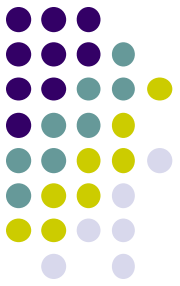
谓词逻辑(2)

- 常用逻辑等价式
- 基于规则的推理
- FOL的一些定论



常用逻辑等价式

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x)$: 对所有实数 x , 其平方是正数 // $P(x)$ 表示 $x^2 > 0$
- 否定: 存在某个实数 x , 其平方不是正数。
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\exists x P(x)$: 存在实数 x , x 的平方是正数.
- 否定: 对任意实数 x , 其平方不是正数

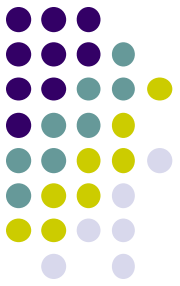


常用逻辑等价式

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$

反向蕴涵×：是奇数或偶数

- $(\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x)) \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\models (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$
- $\forall x(P(x) \vee R) \equiv (\forall xP(x)) \vee R$
- $\exists x(P(x) \wedge R) \equiv (\exists xP(x)) \wedge R$

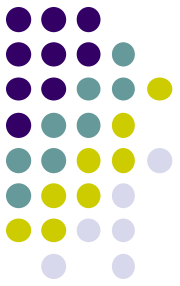


常用逻辑等价式（可以证明）

- $\forall x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \forall xP(x)$ $\forall x(\neg R \vee P(x)) \equiv \neg R \vee (\forall xP(x))$
- $\exists x(R \rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\exists xP(x)) \rightarrow R$
- $\exists x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\forall xP(x)) \rightarrow R$

$$\exists x(\neg P(x) \vee R) \equiv (\exists x \neg P(x)) \vee R \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee R$$

注意：这里 x 不在 R 中出现

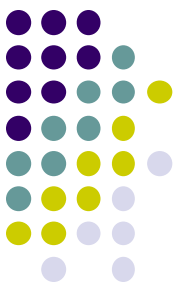


前束范式 (Prenex Normal Form)

$\forall x (x \leq 0 \vee \exists y (y > 0 \wedge x = y^2))$ // 不是前束范式

$\forall x \exists y (x \leq 0 \vee (y > 0 \wedge x = y^2))$ // 前束析取范式

有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF (PDNF/PCNF)



转化为前束范式（举例说明）

$$\begin{aligned} & \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) \\ \equiv & \neg \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \vee \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) \quad (\text{消去} \rightarrow) \\ \equiv & \forall z(\forall x \neg Q(x, z) \wedge \forall x \neg P(x)) \vee (\exists x P(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x)) \quad (\text{内移} \neg) \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x (P(x) \vee \forall z \neg Q(z, x)) \quad (\text{简化}) \\ \equiv & \forall z \forall x (\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists y (P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) \quad (\text{重命名}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y)) \quad (\text{前移量词}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \quad (\text{前移量词}) \\ \equiv & \forall z \forall x \exists y \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y))) \end{aligned}$$

前束合取范式PCNF



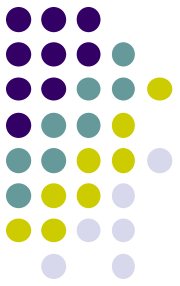
前束合取范式（举例说明）

$$\underline{\forall z \forall x \exists y} \forall w ((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)))$$

$$\underline{\forall x \forall y \forall z} ((\neg B(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee U(z, x)) \wedge (\neg F(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee G(z, x)))$$

$$brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$$

$$father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$$



Prolog (Programming in Logic)

- 若 z 是 y 的兄弟，且 y 是 x 的父亲，则 z 是 x 的叔叔。

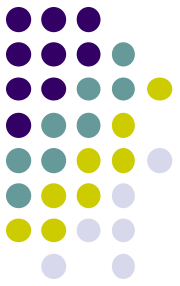
- $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

$uncle(z, x) \text{ :- } brother(z, y), father(y, x)$

- 事实

- $brother(Klopp, Karl)$
- $brother(Klinsmann, Karl)$
- $brother(Karl, Loew)$
- $father(Karl, Neuer)$

- 查询: $? \text{ } uncle(z, Neuer)$



量词相关的“自然演绎规则”

$\forall x P(x)$

$\therefore P(c)$

全称例示

$P(c)$ 对任意的 c

$\therefore \forall x P(x)$

全称生成

$\exists x P(x)$

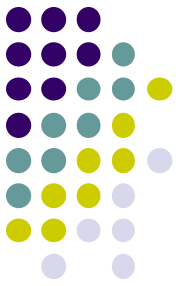
$\therefore P(c)$ 对于某个 c

存在例示

$P(c)$ 对某个 c

$\therefore \exists x P(x)$

存在生成



量词相关的“自然演绎规则”

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} \forall x e.$$

消去任意

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}}{\forall x \phi} \forall x i.$$

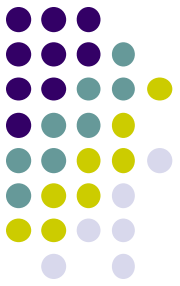
全称引入

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} \exists x e.$$

存在消除

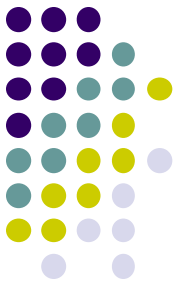
$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} \exists x i.$$

存在引入



基于规则的推理（举例）

- 前提
 - 在这个班上的某个学生没有读过这本书
 - 班上的每个人都通过了第一门考试
- 结论：通过第一门考试的某个人没有读过这本书
- $C(x)$: x 在这个班上
- $B(x)$: x 读过这本书了
- $P(x)$: x 通过了第一门考试
 - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
 - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
 - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$



基于规则的推理（举例）

$$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \rightarrow P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

因为 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ //这是前提

根据存在例示，有某个 a ， $C(a) \wedge \neg B(a)$ 成立。

根据化简，得到 $C(a)$ 成立， $\neg B(a)$ 成立。

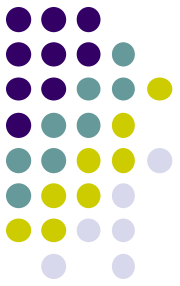
因为 $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ //这是前提

根据全称例示，得到 $C(a) \rightarrow P(a)$

根据假言推理，得到 $P(a)$

根据合取律，得到 $P(a) \wedge \neg B(a)$

根据存在生成，得到 $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

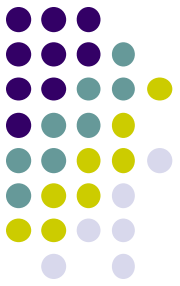


一阶谓词逻辑的定论

自然演绎规则（含量词相关的）是正确的、完备的

不可判定的（Undecidable）

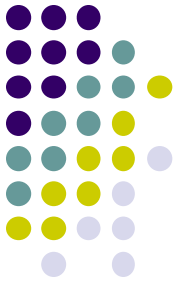
No program exists which, given any ϕ , **decides whether** $\models \phi$



小结

- 常用逻辑等价式
- 前束范式
 - 转化方法
 - 逻辑公式的复杂性
- 基于规则的推理
 - 量词相关的“自然演绎规则”
 - 自然演绎规则的正确性与完备性
- 一阶谓词逻辑的不可判定性及推理复杂性

Q&A



欢迎提问