

1.(12 分) 请用谓词逻辑表示下列各语句, 并证明结论的正确性, 请写清推理过程。

已知:(1) 每位计算机系的同学都要修离散数学.(2) 每位修离散数学且又对统计感兴趣的同学都会选修博弈论或者概率论.(3) 大二的同学无法选修博弈论.(4) 李小花同学是计算机系同学, 目前不是大二, 同时对统计学感兴趣  
结论: 李小花同学将会选修概率论课程

2.(10 分) 设  $R$  是集合  $A$  上的二元关系, 证明: $R$  是反对称的当且仅当  $R \cap \bar{R} \subseteq I_A$ .

3.(10 分) 证明: 任意给定 52 个整数, 其中必有 2 个数它们的和或者差是 100 的倍数.

4.(12 分) 设函数  $f: N \rightarrow N, g: N \rightarrow N, h: N^2 \rightarrow N$ . 对于任意的  $x, y \in N$ , 满足:

$$f(h(x, y)) = x, g(h(x, y)) = y.$$

试证明: 任意  $i \in N$ , 方程  $f(x) = i$  的解的集合与自然数集  $N$  等势.

5.(12 分) 试证明: 对于任意的整数  $n > 2$ , 一定存在一个集合  $A_n$  包含  $n$  个不同的正整数, 使得该集合的所有 ( $n$  个) 元素之和能被每个元素整除.

6.(10 分) 试求共有多少组整数  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  满足:

(1)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ , 且  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 4, x_4 \geq -1$ ;

(2)  $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 22$ , 且  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ .

7.(12 分) 现有一个含 4 个红球和 6 个黑球的盒子:

(1) 随机从盒中有放回地摸出 2 个球, 求摸到 2 个红球的概率;

(2) 随机从盒中不放回地摸出 3 个球, 求摸到红球的概率;

(3) 随机从盒中摸出 1 个球观察颜色后放回, 然后向盒中加入 10 个与刚才摸到的颜色同色的球; 随后再从盒中随机摸出 1 个球, 求第二次摸到红球的概率;

(4) 若 (3) 中第二次摸到了红球, 求第一次摸到的是红球的概率.

8.(10 分) 某次会议共有 2005 位数学家参加, 每位数学家 2 至少有 1337 位合作者, 求证: 可以找到 4 名数学家, 他们之中每 2 个人都互相合作过.

9.(12 分) 设集合  $A = \{(0, 0), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ ,  $R = \{((a, b), (c, d)) | a \leq c \wedge b \geq d\}$ .

- (1) 证明关系  $R$  是  $A$  上的偏序关系;
- (2) 画出偏序集  $(A, R)$  的哈斯图;
- (3) 写出偏序集  $(A, R)$  的极小元, 最小元, 极大元, 最大元;
- (4) 判断偏序集  $(A, R)$  是否构成格并说明理由.