群论部分 Lecture Notes

1　引子

1.1　模 m 剩余类与群的概念

回顾：模 m 同余是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系。

$$a \equiv b(\text{mod } m) \leftrightarrow m \mid a - b$$

因此 $\mathbb{Z}/(\text{mod } m)$ 包含 m 个等价类：

$$\begin{aligned} [0] &= \{x \mid x \equiv 0(\text{mod } m)\} = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ [1] &= \{x \mid x \equiv 1(\text{mod } m)\} = \{km + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\cdots \\ [m-1] &= \{x \mid x \equiv m-1(\text{mod } m)\} = \{km + (m-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

同余模关系有如下性质：

命题：若 $a \equiv b(\text{mod } m)$，$c \equiv d(\text{mod } m)$，则

$$a + c \equiv c + d(\text{mod } m),\ ac = bd(\text{mod } m)$$

Proof. 根据定义，存在整数 k, l 使得

$$a - b = km,\ c - d = lm$$

从而

$$\begin{aligned} (a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) = km + lm = (k+l)m, \\ ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b)c + (c-d)b = ckm + blm = (ck + bl)m. \end{aligned}$$

□

1.2　同构与同态

定义：我们称两个代数结构 $(S, *)$ 与 $(S, *')$ **同构**（isomorphism）当且仅当存在一个从 S 到 S' 的**一一映射**ϕ 使得

$$\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y) \text{ for all } x, y \in S$$

$$homomorphism$$

- 当没有一一映射条件时，上面的关系被称为**同态**（homomorphism）。
- 整数和加法、乘法构成的系统到模 m 剩余类与模 m 加法、乘法构成的系统，就构成一种同态。

1.2.1　如何证明同构

对于两个代数结构 $(S, *)$ 与 $(S, *')$，验证二者同构非常简单：

1. 定义映射 ϕ，这个 ϕ 一定要对于任意 $x \in S$ 有定义；
2. 证明 ϕ 是单射；
3. 证明 ϕ 是满射；
4. 证明 ϕ 保运算，即 $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)$。

例子：$(\mathbb{R},+)$ 与 $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ 同构。

1. 定义 $\phi(x)=e^x$，其定义域显然是满的；
2. $\phi(x)$ 显然是单射；
3. $\phi(x)$ 显然是满射；
4. $\phi(x+y)=e^{(x+y)}=e^x\cdot e^y=\phi(x)\cdot\phi(y)$。

1.2.2 如何证明不同构

例 1：$(\mathbb{Q},+)$ 和 $(\mathbb{R},+)$ 不同构，因为无法构造 $\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 的一一映射。

例 2：$(\mathbb{Z},\cdot)$ 和 $(\mathbb{Z}^+,\cdot)$ 不同构。虽然它们的基数都等于 $\aleph_0$，但在 $\mathbb{Z}$ 中有两个元素令 $x\cdot x=0$，在 $\mathbb{Z}^+$ 中只有一个元素满足该条件（注意到乘法是一样的），所以不可能构建出保运算的一一映射函数。

所以，代数结构更本质的是其内部结构的性质：

结构性质（structural property）	非结构性质
集合有 4 个元素	集合里有 4
代数运算具有交换性	代数运算叫做“加法”
$x*x=x,\ \forall x\in S$	S 中的元素都是方阵
$a*x=b$ 对任意 $a,b\in S$ 有解	$S\subset\mathbb{C}$

这类结构性质才是抽象代数研究的主要对象。

2 群

2.1 代数方程求解

在代数系统中解方程：

$$\begin{aligned}
5+x&=2 && \text{(given)}\\
-5+(5+x)&=-5+2 && \text{(addition)}\\
(-5+5)+x&=-5+2 && \text{(association)}\\
0+x&=-5+2 && \text{(inverse element)}\\
x&=-5+2 && \text{(identity element)}\\
x&=-3 && \text{(addition)}
\end{aligned}$$

2.2 群的定义

定义：设 G 是一个非空集合。如果在 G 上定义了<u>一个</u>代数运算（通常称为乘法），且满足：

1. $\underset{a,b,c\in G}{\forall}[(ab)c=a(bc)]$
2. G 中有一个元素 e 使得
$$\underset{a\in G}{\forall}(ea=ae=a)$$
称 e 为 G 的**单位元**（identity element）。
3. G 中每个元素均存在**逆元**（inverse），即
$$\underset{a\in G}{\forall}\ \underset{b\in G}{\exists}(ab=ba=e)$$
我们记 $b=a^{-1}$。

那么称 $(G,*)$ 是一个群（Group）。

- 如果只满足性质 1，称为**半群**（semigroup）；
- 如果满足性质 1、2，称为**含幺半群**或者**独异点**（monoid）；
- 注意：虽然单位元和逆元对于乘法满足交换律，但其他情况下不一定可交换；

如果群 G 的乘法还满足交换性
$$\underset{a,b\in G}{\forall}(ab=ba)$$
那么称 $(G,*)$ 为**交换群**或**阿贝尔群**（Abelian group）。

- 同样的，有交换半群和交换含幺半群。

2.3 一些群的例子

- n 次单位根（n^{th} roots of unity）群（见参考书目）。
- 模 m 的剩余类加上模 m 加法构成群 $(\mathbb{Z}_m,+_m)$，注意 $[a+b]=[a]+[b]$。
  1. $[a]+([b]+[c])=[a]+[b+c]=[a+b+c]=[a+b]+[c]=([a]+[b])+[c]$
  2. $[a]+[0]=[0]+[a]=[a]$
  3. $[a]+[m-a]=[m]=[0]$
  4. $[a]+[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+[a]$
- $n\times n$ 可逆方阵在矩阵乘法下构成群，但没有可交换性：
  1. 矩阵乘法满足结合律；
  2. 可逆矩阵的乘积依然可逆，因此有封闭性：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n$；
  3. 单位元为 I_n；
  4. 有逆元；
- 模 m 的剩余类中与 m 互素的剩余类（即约剩余系）加上模 m 乘法构成阿贝尔群 $(\mathbb{Z}_m^*,*_m)$。

定理 1：在 $\mathbb{Z}_m$ 中，$[a]$ 是模 m 乘法可逆元当且仅当 $(a,m)=1$。

Proof.（$\Leftarrow$）设 $(a,m)=1$，则存在 $u,v\in\mathbb{Z}$，使得
$$au+mv=1.$$
根据模 m 加法和乘法性质，在 $\mathbb{Z}_m$ 中
$$[1]=[a][u]+_m[m][v]=[a][u]$$
因此 $[u]$ 就是 $[a]$ 的逆元。

（$\Rightarrow$）设 $[a]$ 是可逆元，其中 $0<a<m$。假如 $(a,m)=d$ 且 $d\neq 1$。则存在正整数 $0<a_1,m_1<m$ 使得：
$$a=a_1d,\ m=m_1d$$
从而
$$am_1=a_1dm_1=a_1m$$
所以在 $\mathbb{Z}_m$ 中有 $[a][m_1]=[a_1m]=[0]$。根据上面的假设，$[a]$ 是可逆元，给左边等式两边同时左乘（why?）$[a]^{-1}$：
$$[a]^{-1}([a][m_1])=[a]^{-1}[0]$$
左边为 $([a]^{-1}[a])[m_1]=[1][m_1]=[m_1]$；右边为 $[a]^{-1}[0]=[0]$，得到 $[m_1]=[0]$，与 $0<m_1<m$ 矛盾。 □

2.4 群的基本性质

定理 2：若 $(G,*)$ 是群，那么它一定满足左右**消去律**，即对任意 $a,b,c\in G$ 有 $a*b=a*c\rightarrow b=c$ 且 $b*a=c*a\rightarrow b=a$ 成立。

Proof. 假设 $a*b=a*c$，由逆元存在性可知存在 a' 使得 $a*a'=a'*a=e$，其中 e 为 $(G,*)$ 的单位元。

因此可以在 $a*b=a*c$ 两边左乘 a' 得到 $b=e*b=a'*a*b=a'*a*c=e*c=c$。同理可证 $b*a=c*a\rightarrow b=a$。 □

定理 3：若 $(G,*)$ 是群，那么其中的线性方程 $a*x=b$ 一定有唯一解。

定理 4：若 $(G,*)$ 是群，那么它的单位元唯一，且每个元素的逆元唯一，且 $(a^{-1})^{-1}=a$。

推论：若 $(G,*)$ 是群，那么对任意 $a,b\in G$ 有 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$。

3 循环群

3.1 幂运算和阶

令 a^n 表示 $a*a*\cdots*a$ 共 n 个 a 相乘，并规定

$$a^0=e, a^{-n}=(a^{-1})^n,\ n\in\mathbb{N}^*$$

（一般 $\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^+$ 表示正整数、实数；$\mathbb{N}^*,\mathbb{Z}^*,\mathbb{R}^*$ 表示不包含零的自然数、正整数、正实数集合）。

容易验证

$$a^m a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn},\ m,n\in\mathbb{Z}$$

G 中元素的个数被称为它的**阶**（order），接下来我们会看到为什么。

3.2 循环群与生成元

在模 9 即约剩余系群 $\mathbb{Z}_9^*=\{[1],[2],[4],[5],[7],[8]\}$ 中

$$[2]^0=[1],\ [2]^1=[2],\ [2]^2=[4],\ [2]^3=[8],\ [2]^4=[7],\ [2]^5=[5].$$

因此

$$\mathbb{Z}_9^*=\{[2]^r\mid r=0,1,\ldots,5\}.$$

定义：若 $(G,*)$ 是群，且 G 中的每一个元素都能写成 G 中某个元素 a 的整数次幂，那么称 G 为**循环群**（cyclic group），我们把 a 叫做 G 的一个**生成元**（generator），并把 G 记为 $\langle a\rangle$。

- 若对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 都有 $a^n\neq e$，则 $\langle a\rangle$ 为如下无限循环群：

$$\{\ldots,a^{-n},\ldots,a^{-1},e,a,\ldots,a^n,\ldots\}$$

- 若存在某个 $n\in\mathbb{N}^*$ 使得 $a^n=e$，则 $\langle a\rangle$ 为 n 阶循环群：

$$\{e,a,\ldots,a^{n-1}\}$$

- 循环群一定是阿贝尔群（为什么?）。
- 在循环群中，使得 $a^n=e$ 的最小的正整数 $n\in\mathbb{N}^*$ 被称为 a 的阶，记作 $|a|$。例如 1 在 $(\mathbb{Z},+)$ 中为无穷阶元素；$(\mathbb{Z}_9^*,*)$ 中，$[2]$ 的阶为 6（和 9 的 gcd）。

3.3 循环群的结构

定义：如果群 $(G,*)$ 到 $(G',*')$ 有一个双射 σ，使得

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b),\ \forall a,b\in G,$$

那么称 σ 是 $(G,*)$ 到 $(G',*')$ 的一个群同构映射，并称二者是同构的，记作 $(G,*)\simeq(G',*')$。以后在不产生歧义的情况下我们简单记 $(G,*)$ 和 $(G',*')$ 为 G 和 G'，以及 $G\simeq G'$。

定理 5：设 σ 是 G 到 G' 的同构映射，则

1. $\sigma(e)=e'$；
2. $\sigma(a^{-1})=\sigma(a)^{-1},\ \forall a\in G$；
3. a 与 $\sigma(a)$ 阶相同。

Proof. (1) $\sigma(e)=\sigma(ee)=\sigma(e)\sigma(e)$，两边左乘 $\sigma(e)^{-1}$ 得

$$\sigma(e)^{-1}\sigma(e)=\sigma(e)^{-1}\sigma(e)\sigma(e)$$

得到 $e'=\sigma(e)$。

(2) 由于 $aa^{-1}=e$，因此 $\sigma(aa^{-1})=\sigma(a)\sigma(a^{-1})=\sigma(e)=e'$，两边同时左乘 $\sigma(a)^{-1}$ 得 $\sigma(a^{-1})=\sigma(a)^{-1}$。

(3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$，由于 σ 是单射，因此

$$a^n=e\Leftrightarrow\sigma(a^n)=e'\Leftrightarrow[\sigma(a)]^n=e'.$$

□

那么，所有循环群组成的集合 Ω 有多少个**同构等价类**?

定理 6：

1. 任意一个无限循环群都与 $(\mathbb{Z},+)$ 同构；
2. 对于 $m\in\mathbb{N}^*$，任意一个 m 阶循环群与 $(\mathbb{Z}_n,+_m)$ 同构；
3. 1 阶循环群都与加法群 $\{0\}$ 同构。

Proof. 1. 略。对于 $G=\langle a\rangle$，只需构造映射 $\sigma:G\to\mathbb{Z}$ 为 $\sigma(a^k)=k$，并分布证明其为单射、满射且保运算即可。

2. 设 $G=\langle a\rangle$ 为 m 阶循环群，其中 $m>1$，则

$$G=\{e,a,\dots,a^{m-1}\}$$

令

$$\begin{aligned}\tau:G&\to(\mathbb{Z}_m,+_m)\\ a^k&\mapsto[k],\ 0\le k<m.\end{aligned}$$

由于当 $0\le k,l<m$ 时，$a^k=a^l\leftrightarrow k=l\leftrightarrow[k]=[l]$，所以 τ 是一个映射，且是单射。任给 $[k]\in\mathbb{Z}_m$，$(0\le k<m)$，存在 $\tau(a^k)=[k]$，因此 τ 是满射。从而 τ 是双射。

对于 $0\le k<m$，设 $k+l=qm+r\ (0\le r<m)$，则在 $\mathbb{Z}_m$ 中，$[k+l]=[r]$。由于 $G=\langle a\rangle$ 的阶为 m，因此 a 的阶为 m。于是有

$$\tau(a^ka^l)=\tau(a^{k+l})=\tau(a^{qm+r})=\tau(a^r)=[r]=[k+l]=[k]+_m[l].$$

因此，τ 是一个从 G 到 $(\mathbb{Z}_m,+_m)$ 的同构映射。

3. 显然 $\{e\}\simeq(\{0\},+)$。 □

从上面的定理可以看到：

- 所有的无限循环群组成一个同构类，代表元为 $(\mathbb{Z},+)$；
- 所有的 m 阶循环群组成一个同构类，代表元为 $(\mathbb{Z}_m,+_m)$。

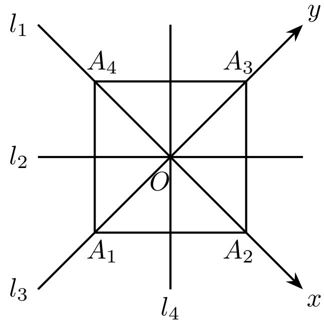
4 二面体群

4.1 对称变换

定义：平面上（或空间中）的一个变换 σ 如果保持任意亮点的距离不变，那么称 σ 是平面上（或空间中）的一个**正交点变换**（或保距变换）(isometry)。

- 显然，任意两个正交点变换的乘积仍然是正交点变换；
- 正交点变换的逆变换仍然是正交点变换。

定义：平面上（或空间中）的一个正交点变换 σ 如果让图形 Γ 的像与自身重合，那么称 σ 是 Γ 的**对称变换**。



4.2 图形对称群

循环群是最简单的群，它只需要一个生成元。这一节讲介绍由两个生成元构成的群。

如果把一个图形 Γ 的所有对称变换组成的集合叫做 G。那么，

- G 中任意两个对称变换的组合仍然是 Γ 的对称变换，即 $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G\,(\sigma_2 * \sigma_1 \in G)$；
- $\forall \sigma \in G$ 有 $\sigma^{-1} \in G$；
- 显然，对称变换满足结合律；

所以这些变换构成一个群，我们称 $(G, *)$ 为 Γ **图形的对称群**（symmetric group）。

4.3 正方形的对称群

正方形的对称运算集合记作 D_4 它含有以下元素：

- 绕正方形中心 O 转角为 $\pi/2$ 的旋转，记作 σ；
- 绕正方形中心 O 转角为 π 的旋转，记作 σ^2；
- 绕正方形中心 O 转角为 $3\pi/2$ 的旋转，记作 σ^3；
- 绕正方形中心 O 转角为 2π 的旋转，记作 $\sigma^4 = I$；
- 关于 l_1 的反射，记作 τ_1；
- 关于 l_2 的反射，记作 τ_2；
- 关于 l_3 的反射，记作 τ_3；
- 关于 l_4 的反射，记作 τ_4。

因此有：

$$D_4 \supseteq \{I, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

那么，D_4 中还有没有其他运算？它们是否满足封闭性？是否构成一个群？（提示：考虑上图的直角座标系与旋转矩阵，将 τ_i, $i = 2, 3, 4$ 用 τ_1 和 σ 的乘积表示）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

事实上，

$$D_4 = \{I, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau_1, \sigma\tau_1, \sigma^2\tau_1, \sigma^3\tau_1\}.$$

可以看出，D_4 可以由两个元素 σ 和 τ_1 生成，且

$$\sigma^4 = I,\, \tau_1^2 = I.$$

由于 $(\sigma\tau_1)^2 = \tau_2^2 = I$，将 $(\sigma\tau_1)(\sigma\tau_1) = I$ 两边左乘 σ^{-1} 得

$$\tau_1\sigma\tau_1 = \sigma^-1$$

有了已上公式，任意两个元素的乘积都能计算出来，例如：

$$\begin{aligned} \tau_1\sigma &= \sigma^-1\tau_1 = \sigma^3\tau_1 \\ (\sigma^2\tau_1)\sigma^3 &= \sigma^2(\tau_1\sigma)\sigma^2 = \sigma^2(\sigma^3\tau_1)\sigma^2 = \sigma(\tau_1\sigma)\sigma = \sigma(\sigma^3\tau_1)\sigma = \sigma^4(\tau_1\sigma) = \sigma^3\tau_1 \end{aligned}$$

因此，D_4 有两个生成元 $\{\sigma, \tau_1\}$，我们记 $\tau_1 = \tau$，可以把 D_4 简洁地写成

$$D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = I, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$

设正 n 边形中心为 O，用 σ 表示绕点 O 转角为 $2\pi/n$ 的旋转，用 τ 表示关于正 n 边形的某条对称轴的反射，则正 n 边形的对称群 D_n 为

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = I, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$

由于 $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau = \sigma^{n-1}\tau \neq \sigma\tau$，因此 D_n 是非阿贝尔群，它们被称为**二面体群**（dihedral group）。

上节课提到的**四元数群**同样可以用类似的方式表示出来：

$$Q = \langle i, j \mid i^4 = j^4 = I, iji = i^{-1} \rangle.$$

5 对称群

5.1 置换表示

除了图形的对称性，上面的置换表示还可以刻画其他事物的对称性。考虑一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

它的两个复根 x_1, x_2 满足

$$x_1 + x_2 = -b, x_1x_2 = c,$$

可以看到它们之间存在着某种对称性。记 $\Omega = \{x_1, x_2\}$，令

$$\begin{aligned} \sigma :&\Omega \to \Omega \\ x_1 &\mapsto x_2 \\ x_2 &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

此时仍然有 $x_2 + x_1 = -b, x_2x_1 = c$，因此可以形式化地描述这一对称性：对它们进行置换后，运算结果保持不变。我们将它表示为：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

同样的，上面的 D_4 也可以表示为下面的形式：

$$\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \sigma^2\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
\sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \sigma^3\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

定义：当 Ω 为有穷集合时，Ω 到自身的一个双射叫做 Ω 上的一个**置换**（permutation）。

5.2 对称群的定义

令 Ω 是一个非空集合，S_Ω 是 Ω 上所有的置换（这是一个 $\Omega \to \Omega$ 的函数），那么 S_Ω 在函数复合运算 $\circ$ 下构成群，它被称为**对称群**（symmetry group），它的子集被称为置换群（permutation group）。

Proof. 首先，证明封闭性：集合 Ω 上两个置换 σ, τ 的复合 $\sigma \circ \tau$ 是如下映射：

$$\Omega \xrightarrow{\tau} \Omega \xrightarrow{\sigma} \Omega$$

由于 σ 和 τ 都是双射，因此 $\sigma\tau$ 仍然是一个双射。

其次，证明结合性：由二元关系的结合性易得。

第三，证明单位元存在：恒等置换 I 使得 $\forall a \in \Omega\,(I(a) = a)$，所以对任意置换 σ 和任意 $a \in \Omega$ 有 $I \circ \sigma(a) = I(\sigma(a)) = \sigma(a)$，且 $\sigma \circ I(a) = \sigma(I(a)) = \sigma(a)$。

最后，证明对任意一个置换 σ 均存在其逆元 σ^{-1}。由于 σ 是 Ω 上的双射，因此反函数 σ^{-1} 必然存在，且对任意 $a \in \Omega$ 满足 $\sigma^{-1}(\sigma(a)) = \sigma(\sigma^{-1}(a)) = a$，即 $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = I$。

综上所述，S_Ω 构成一个群。 □

6 子群

从群的运算表中可以看出，表中的内容实际上就是集合元素的一种重新排列。因此，直觉上可以想像出置换群存在着某种结构上的一般性，而凯莱定理就描述了这种一般性。为了介绍它，我们首先要引入一个定义和一条引理。

定义：令 $A \to B$ 是一个函数，且 H 是 A 的一个子集。我们定义 $f[H] = \{f(h) \mid h \in H\}$ 为 f 在 H 上的像（image）。

定义：如果 G 是一个群，$H \subseteq G$ 对于 G 中的运算封闭（子代数）且构成群，那么称 H 是 G 的一个**子群**（subgroup），记为 $H \leq G$（$H < G$ 当 $H \neq G$）。G 自身和 $\{e\}$ 被称为 G 的**平凡子群**（trivial subgroup），其余的子群被称为**真子群**（proper subgroup）。

- 如果 H 是 G 的一个子群，那么任意 $a, b \in H$ 有 $ab \in H$。设 $e' \in H$ 是 H 的单位元，则 $e'e' = e'$。两边再同时乘以 e' 在 G 中的逆元得到 $e' = (e')^{-1}e'$，即 $e' = e$。因此子群 H 中的单位元就是 G 中的单位元。
- 任给 $b \in H$，设 b 在 H 中的逆元为 b'，则 $bb' = b'b = e$。该式在 G 中同样成立，所以 b 在 G 中的逆元也是 b'。

引理：令 G 和 G' 是群，并令 $\phi : G \to G'$ 是一个单射函数，使得对任意 $x, y \in G$ 有 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$。那么 $\phi[G]$ 是 G' 的一个**子群**，且 ϕ 是 G 到 $\phi[G]$ 的一个同构映射。

Proof. 首先，证明 $\phi[G]$ 的封闭性：显然，对于任意 $x', y' \in \phi[G]$ 存在 $x, y \in G$ 使得 $\phi(x) = x'$ 且 $\phi(y) = y'$，且 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = x'y'$，说明 $x'y' \in G$。

其次，根据 ϕ 的性质，$\phi[G]$ 中的运算显然满足结合律。

第三，令 e' 表示 $\phi[G]$ 中的单位元。那么有：

$$e'\phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e),$$

根据群运算的消去律，得到 $e' = \phi(e)$。

第四，证明任意 $x \in \phi[G]$ 有逆元：假设 $x' = \phi(x)$，那么有

$$e' = \phi(e) = \phi(x^{-1}x) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(x^{-1})x' = x'\phi(x^{-1})$$

因此 $\phi(x^{-1})$ 是 x' 的逆。因此 $\phi[G]$ 是 G' 的子群。

最后，由于 ϕ 是单射，因此 ϕ 构成 $G \to \phi[G]$ 的双射，是二者之间的同构映射。 □

7 凯莱定理

定理 7（Cayley's Theorem）：任意一个群都与一个置换群同构。

Proof. 令 G 为一个群，我们证明 G 与 S_G 的一个子群同构。根据上面的引理，我们只需定义一个函数 $\phi : G \to S_G$ 使得对于任意 $x, y \in G$ 有 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$。

给定一个 $x \in G$，我们构造一个映射 $\lambda_x : G \to G$，使得对任意 $g \in G$ 有 $\lambda_x(g) = xg$（即对 g 左乘一个 x），下面证明它是一个置换。

因为 $\lambda_x(x^{-1}c) = x(x^{-1}c) = c$ 对任意 $c \in G$ 成立，所以 λ_x 对 G 是映上的（即一个满射）。又因为 $\lambda_x(a) = \lambda_x(b) \leftrightarrow xa = xb \leftrightarrow a = b$，所以 λ_x 是一个单射。所以 λ_x 是 G 上的一个置换（$G \to G$ 的双射）。令 $\phi : G \to S_G$ 为 $\phi(x) = \lambda_x, \forall x \in G$。

接下来需要证明 ϕ 是一个从 G 到 $\phi[G]$ 双射（根据上面的引理，只需要证明单射即可），且保持 G 中的运算。

由于 $\phi(x) = \phi(y) \leftrightarrow \lambda_x = \lambda_y$（注意这二者是函数）在 G 中处处成立，所以有 $\lambda_x(e) = \lambda_y(e) \leftrightarrow xe = ye \leftrightarrow x = y$。因此 ϕ 是单射。

根据 ϕ 的定义有 $\phi(xy) = \lambda_{xy}$，那么对于任意 $g \in G$ 有 $\phi(xy)(g) = \lambda_{xy}(g) = xyg = x(yg) = x[\lambda_y(g)] = [\lambda_x\lambda_y](g)$（置换的乘法即为函数复合运算），因此 ϕ 保运算。 □

在证明中，我们同样可以考虑由右乘诱导出的置换运算 $\rho_x(g) = gx$，甚至可以通过逆元诱导：$\mu_x(g) = gx^{-1}$。关于凯莱定理的例子见 Fraleigh 的 83 页例 8.18。

8 子群和陪集

可以看到，利用左乘和右乘来构造变换是一种生成子群的好办法。它同样能够用来判别一个集合是否是子群。

8.1 子群判定条件

定理 8：群 G 的非空子集 H 是 G 的子群当且仅当对任意 $\forall a \forall b\,(a, b \in H \to ab^{-1} \in H)$。

Proof. ($\Rightarrow$) 由于 $H < G$ 是群，所以 $a, b \in H \subseteq G$ 意味着 $b^{-1} \in H$ 且 H 对 G 中的乘法运算封闭，因此 $ab^{-1} \in H$。

($\Leftarrow$) 单位元存在：由于 H 非空，因此存在 $c \in H$。由已知条件得 $cc^{-1} \in H$，因此 $e \in H$。

逆元存在：任给 $b \in H$，由已知条件（其中的 a 替换为 e）得 $eb^{-1} \in H$，因此 $b^{-1} \in H$。

$* \restriction_H$（乘法在 H 中的限制）的结合律：任给 $a, b \in H$，由已知条件和已证明的结论得 $a(b^{-1})^{-1} \in H$，即 $ab \in H$。因此 H 中的运算仍然保持 G 中的运算（乘法表不变）。由于 G 是群，因此该运算在 H 中依然满足结合律。 □

8.2 群的划分

集合论中我们如何从“元素”的视角跳脱出来研究集合间的关系？一种最简单的方式便是使用等价关系，将集合划分为不相交的多个等价类。类似地，对于一个群，我们同样可以研究子群间的等价关系。

借助 ab^{-1} 这一乘法形式“生成子群”和判定子群的能力，我们可以利用它与某个已知的子群 $H < G$ 来构造 G 的一个划分（即构造等价关系和等价类）。

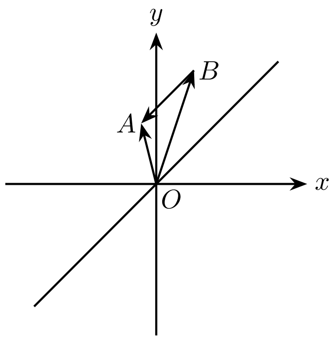
考虑一个实数平面向量集合与向量加法构成的群 $G = (\mathbb{R}^2, +)$，穿过原点 O 的一条直线 $y = hx$ 即是 G 中的一个子群，我们记为 $H = \{(x, hx) \mid x \in \mathbb{R}\}$（这里的 h 是一个 $\mathbb{R}$ 上的常数），它在向量加法上显然构成一个群：

- 封闭性：对 H 中任意 (x_1, hx_1) 和 (x_2, hx_2) 有 $(x_1, hx_1) + (x_2, hx_2) = (x_1 + x_2, h \cdot (x_1 + x_2)) \in H$；
- 结合律：由实数加法结合律自然得出；
- 单位元：易证 $(0, 0)$ 是 H 中的单位元；
- 逆元：对任意 $(x, hx) \in H$ 易证 $(-x, -hx) \in H$ 是其单位元。

从图中可以看到，当 $A \notin H$ 且 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \in H$ 时，A 和 B 恰好位于一个与 H 平行的直线上。

这条与 H 平行的直线可以记为 $H' = \{(x, hx + b \mid x \in \mathbb{R})\}$，其中 h 与 H 的斜率一样，$b \neq 0$ 是一个常数。容易验证 H' 也是 $(\mathbb{R}^2, +)$ 的一个子群。

我们记这里的 $\overrightarrow{OA} = a$，$\overrightarrow{OB} = b$，向量加法为群的乘法“$*$”（无歧义时可省略）。这样一来，“$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的差与 H 平行”就可以记为 $ab^{-1} \in H$，并且由它可以推出 a 和 b 属于同一个子群 H'，即同一个划分。根据划分



与等价类的关系，我们可以得到一种等价关系，这可以表示为一条定理。

8.3 子群和等价类

定理 8：若 G 为一个群，且 $H < G$。那么 G 中存在等价关系 $\sim_L$ 和 $\sim_R$。对任意 $a, b \in R$，它们的定义如下：

$$a \sim_L b \leftrightarrow a^{-1}b \in H,$$
$$a \sim_R b \leftrightarrow ab^{-1} \in H.$$

Proof. 不失一般性，这里只证明 $\sim_L$ 是等价关系。

自反性：根据 H 是子群有 $e \in H$。所以 $e \in H \leftrightarrow a^{-1}a \in H \leftrightarrow a \sim_L a$。

对称性：根据 H 是子群有 $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$。所以 $a \sim_L b \leftrightarrow a^{-1}b \in H \leftrightarrow (a^{-1}b)^{-1} \in H \leftrightarrow b^{-1}a \in H \leftrightarrow b \sim_L a$。

传递性：根据 H 是子群有 $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}(bb^{-1})c = a^{-1}c$。所以 $(a \sim_L b \wedge b \sim_L c) \leftrightarrow (a^{-1}b \in H \wedge b^{-1}c \in H) \leftrightarrow (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H \leftrightarrow a^{-1}c \in H \leftrightarrow a \sim_L c$。 □

有了上述等价关系，当给定一个子群 $H < G$（例如 $\mathbb{R}^2$ 的一条直线 L）和任意一个 $a \in G$ 时（例如 $\mathbb{R}^2$ 上的一个点 A），其等价类（例如过点 A 与 L 平行的直线）即为：

$[a] = \{x \in G \mid x \sim_L a\} = \{x \in G \mid a^{-1}x \in H\} = \{x \in G \mid a^{-1}x = h, h \in H\} = \{x \in G \mid x = ah, h \in H\} = \{ah \mid h \in H\}$

同理可以得到 $\sim_R$ 生成的等价类 $[a] = \{ha \mid h \in H\}$。

8.4 陪集

定义：令 H 为 G 的子群。我们称集合 $aH = \{ah \mid h \in H\}$ 为 H 关于 a 的**左陪集**(left coset)，$Ha = \{ha \mid h \in H\}$ 为 H 关于 a 的**右陪集**（right coset），a 为陪集代表元。H 的所有左（右）陪集组成的集合是 G 的一个划分，称为 G 关于子群 H **左（右）商集**，分别记做 $(G/H)_l$ 和 $(G/H)_r$。

命题：$a \in bH \leftrightarrow b^{-1}a \in H \leftrightarrow aH = bH$。

Proof.
$$a \in bH \leftrightarrow \exists h \in H(a = bh) \leftrightarrow \exists h \in H(b^{-1}a = h) \leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

所以根据 $a \in bH$，存在 $h \in H$ 使得 $b = ah^{-1}$ 和 $a = bh$，那么

$$ah_1 = bhh_1 \in bH \leftrightarrow aH \subseteq bH$$

$$bh_2 = ah^{-1}h_2 \in aH \leftrightarrow bH \subseteq aH$$

因此 $aH = bH$。 □

命题：左陪集与右陪集的基数相等。

Proof. 令

$$\sigma:(G/H)_r\to(G/H)_l$$
$$aH\to Ha^{-1}$$

由于 $aH=cH$ 说明 $c\sim_L a$, 即 $c^{-1}a\in H$, 这又等价于 $c^{-1}(a^{-1})^{-1}\in H$, 因此有 $c^{-1}\sim_R a^{-1}$, 即 $Hc^{-1}=Ha^{-1}$, 因此 σ 是单射。

又因为任给 $Hb\in(G/H)_r$，有 $\sigma(b^{-1}H)=H(b^{-1})^{-1}=Hb$，所以 σ 是满射。

因此 σ 是双射，且 $|(G/H)_l|=|(G/H)_r|$。 □

由这个命题可以引出以下概念：

定义：设 H 是群 G 的一个子群，把 $(G/H)_l$ 或 $(G/H)_r$ 的基数称为 H 在 G 中的**指数**（order），记为 $[G:H]$。

9 拉格朗日定理

命题：若 H 是 G 的子群，那么 G 关于 H 的任意左、右陪集均和 H 等势，即 $\forall a\in G\,(|H|=|aH|=|Ha|)$。

Proof. 构造映射 $\tau:H\to aH$，令 $\tau(h)=ah$。根据 $h_1=h_2\leftrightarrow ah_1=ah_2$ 可知其为单射；且对于 $\forall ah\in aH$ 有 $\tau(a^{-1}ah)=\tau(h)=ah$，所以它也是满射。因此 τ 是 H 与 aH 间的双射。 □

由上面这些性质与定义，可以得到下面这个简洁且重要的结论（Never underestimate results that counts someting!）。

定理 9：令 H 为一个有限群 G 的子群，则

$$|G|=[G:H]\cdot|H|$$

Proof. 设 $[G:H]=r$，那么 G 的一个划分可以表示为：

$$G=H\cup a_1H\cup\cdots\cup a_{r-1}H,$$

其中 $H,a_1H,\dots,a_{r-1}H$ 两两不相交。因此有

$$|G|=|H|+|a_1H|+\cdots+|a_{r-1}H|=|H|+|H|+\ldots+|H|=r|H|.$$

□

9.1 拉格朗日定理的应用

设 G 是有限群，$a\in G$。设 a 的阶为 s。令

$$H=\{e,a,a^2,\dots,a^{s-1}\}$$

任给 $0\le i,j<s$，不妨设 $i\le j$，我们有

$$a^i(a^j)^{-1}=a^{i-j}=a^{-(j-i)}=a^{s-(j-i)}\in H$$
$$a^j(a^i)^{-1}=a^{j-i}\in H$$

因此 H 是 G 的一个子群，称 H 是由 a **生成的子群**，记作 $\langle a\rangle$。由 H 的定义可知，a 的阶就是 $\langle a\rangle$ 的阶。

推论 1：设 G 是有限群，则 G 的任一元素 a 的阶是 G 的阶的因数，从而 $a^{|G|}=e$。

推论 2：任意素数阶群一定是循环群。

Proof. 假设 $|G|=p$，且 p 为素数。令 $a\neq e$ 为 G 中的一个非单位元。那么由 a 生成的子群 H 至少应该包括 a 和 e。然而根据拉格朗日定理，$|H|$ 可整除 $|G|$。因此当 $|H|\ge 2$ 必有 $|H|=|G|$ 且 $\langle a\rangle=G$，所以 $\langle a\rangle$ 是循环群（且 a 的阶为 p）。 □

9.1.1 欧拉定理和费马小定理

利用上面的推论，可以给出欧拉定理和费马小定理的一个简短证明。

欧拉定理：设 m 是大于 1 的整数，若整数 a 与 m 互素，则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\text{mod } m).$$

Proof. 由于 $(a,m)=1$，因此 $[a]\in\mathbb{Z}_m^*$。由于 $|\mathbb{Z}_m^*|=\varphi(m)$，因此由推论 1 得 $[a]^{\varphi(m)}=[1]$。

根据模 m 乘法的保运算性质，有 $[a^{\varphi(m)}]=[1]$，即 $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\text{mod } m)$。 □

费马小定理：设 p 是素数，则对于任意整数 a 有

$$a^p \equiv a(\text{mod } m).$$

Proof. 若 $(a,p)=1$，则根据欧拉定理得

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p).$$

又有 $a\equiv a(\text{mod } p)$，根据模 m 乘法的性质将其与上式相乘，有 $a^p\equiv a(\text{mod } p)$。 □

9.1.2 循环群的结构

定理 10：设 $G=\langle a\rangle$ 是 n 阶循环群，则

1. G 的每一个子群都是循环群；
2. 对于 G 的阶 n 的每一个正因数 s，都存在唯一的一个 s 阶子群。除它们以外，G 再也没有其他子群。

Proof.（1）由于 G 的平凡子群 $\{e\}$ 和 G 都是循环群，所以只需证明 G 的任一非平凡子群都是循环群。

设 H 是 G 的非平凡子群，则 H 中有 G 的非单位元。根据良序定理，在 H 中存在幂指数最小的 a 的幂，设为 a^k，其中 $k\neq 0$。任取 $a^q\in H$，设 $q=lk+r, 0\le r<k$。根据陪集等价类的定义，有

$$a^r=a^{q-lk}=a^q(a^k)^{-l}\in H$$

如果 $r\neq 0$，那么 $r<k\wedge a^r\in H$ 与 a^k 是 H 中 a 的最小幂元矛盾，因此 $r=0$。从而

$$a^q=(a^k)^l\in\langle a^k\rangle$$

由于对任意 $a^q\in H$ 都有 $a^q\in\langle a^k\rangle$，故而 $H\subseteq\langle a^k\rangle$（全称量词引入）。又由生成群的封闭性可知 $\langle a^k\rangle\subseteq H$，所以 $H=\langle a^k\rangle$。

因此 G 的所有子群都是循环群。

（2）由 Lagrange 定理可知 G 的所有子群的阶均为 n 的因数。因此证明该命题只需证 G 的 s 阶子群存在且唯一，其中 s 是 n 的因数。

设 s 是 G 的阶 n 的任意一个正因数，则存在正整数 d 使得 $n=ds$。由于 a 的阶亦为 n，因此

$$|a^d|=\frac{n}{(n,d)}=\frac{n}{d}=s$$

于是 $\langle a^d\rangle$ 是 G 的一个 s 阶子群，存在性得证。

设 H 是 G 的任意一个 s 阶子群，根据（1）的结论，H 是循环群。设 $H=\langle a^k\rangle$，于是 $|a^k|=\frac{n}{(n,k)}$（为什么?），因此 $(n,k)=d$，因此存在整数 u,v 使得

$$un+vk=d,$$

于是

$$a^d=a^{un}a^{vk}=(a^k)^v\in\langle a^k\rangle=H$$

所以 $\langle a^d\rangle\subseteq H$。又由于 $|\langle a^d\rangle|=s=|H|$，所以 $\langle a^d\rangle=H$。这证明了 G 的 s 阶子群唯一。 □

由上面的结论很容易可以得到:

推论 3：若 a 是有限循环群 G 的生成元，且 $|G|=n$。那么 G 的其他生成元是 a^r，$(n,r)=1$。

若 r 与 n 不互素，a^r 生成出来的只能是 G 的子群。例如 $\mathbb{Z}_{18}$ 的生成元有 $\{1,5,7,11,13,17\}$，而

$$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}\subset\mathbb{Z}_{18}.$$

[定理 10 的证明过程中用到的关于阶的引理如下]

引理：设 G 是群，且 $|a|=n$，则:

1. 对于正整数 m，有 $a^m=e\leftrightarrow n\mid m$;
2. $\forall k\in\mathbb{N}^*$ 有
$$|a^k|=\frac{n}{(n,k)}$$

Proof.（1）设 $m=hn+r,0\leq r<n$，则

$$a^m=a^{hn}a^r=ea^r=a^r$$

由于 a 的阶为 n，所以 $a^m=e\leftrightarrow a^r=e\leftrightarrow r=0\leftrightarrow m=hn\leftrightarrow n\mid m$。

（2）设 a^k 的阶为 s，则

$$e=(a^k)^s=a^{ks}$$

由于 a 的阶为 n，根据（1）中的结论有 $n\mid ks$。从而

$$\frac{n}{(n,k)}\mid\frac{k}{(n,k)}s.$$

由于 $(\frac{n}{(n,k)},\frac{k}{(n,k)})=1$，因此 $\frac{n}{(n,k)}\mid s$。

欲证 $s\mid\frac{n}{(n,k)}$，考虑

$$(a^k)^{\frac{n}{(n,k)}}=(a^n)^{\frac{k}{(n,k)}}=e^{\frac{k}{(n,k)}}=e$$

所以，根据（1）的结论有 $s\mid\frac{n}{(n,k)}$，得到 $s=\frac{n}{(n,k)}$。 □

9.1.3 四阶群的同构类

根据 Lagrange 定理，任给四阶群 G（因数为 2 和 4），则 G 中非单位元的阶只可能是 2 和 4。

情形 1：G 中有 4 阶元，则 $G=\langle a\rangle$，从而 $G\simeq(\mathbb{Z}_4,+)$;

情形 2：G 中没有 4 阶元，则 G 的三个非单位元 a,b,c 的阶均为 2，即 $a=a^{-1}\wedge b=b^{-1}\wedge c=c^{-1}$，且 $ab\neq e$（否则 $a=b^{-1}=b$，矛盾）；$ab\neq a$（否则 $b=e$，矛盾）；$ab\neq b$（否则 $a=e$，矛盾）。因此 $ab=c$，同理 $ba=c$。由于 a,b,c 是对称的，所以还有 $ac=b=ca,bc=a=cb$，从而 G 是 Abel 群。令

$$\begin{aligned}\sigma:G&\to(\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2,+)\\ e&\mapsto([0],[0])\\ a&\mapsto([0],[1])\\ b&\mapsto([1],[0])\\ c&\mapsto([1],[1])\end{aligned}$$

则 σ 是 G 到 $\mathbb{Z}_2\bigoplus\mathbb{Z}_2$ 的一个双射。我们有

$$\sigma(ab)=\sigma(c)=([1],[1])=([0],[1])+([1],[0])=\sigma(a)+\sigma(b)$$

同理有

$$\sigma(ac) = \sigma(b) = ([1], [0]) = ([0], [1]) + ([1], [1]) = \sigma(a) + \sigma(c)$$
$$\sigma(bc) = \sigma(a) = ([0], [1]) = ([1], [0]) + ([1], [1]) = \sigma(b) + \sigma(c)$$

还有

$$\sigma(ea) = \sigma(a), \ldots$$
$$\sigma(a^2) = \sigma(a) + \sigma(a) = \sigma(e), \ldots$$

因此 σ 是 $G \simeq \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$ 的一个同构映射。综上所述，四阶群只有两个同构类，一个是模 4 加法群，一个是 $\mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$，即 Klein four group。

10 TODO 同态与同构