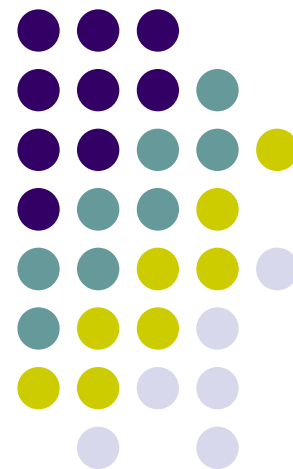


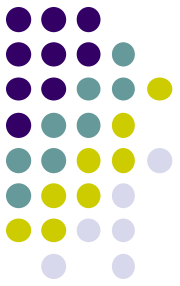
偏序集

离散数学

马晓星

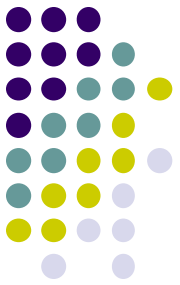
南京大学·计算机科学与技术系





提要

- 偏序与偏序集
 - 偏序关系, 哈斯图
 - 极大(小)元, 最大(小)元, 上(下)界
 - 偏序, 全序, 良序
- 偏序集的划分
 - 链与反链, 高与宽
 - 划分为反链
 - 划分为链



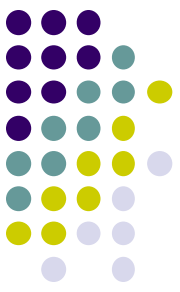
关系的性质回顾

- 集合 A 上的关系 R 是:
 - 自反的 **reflexive**: 对所有的 $a \in A$, $(a, a) \in R$
 - 反自反的 **irreflexive**: 对所有的 $a \in A$, $(a, a) \notin R$
 - 对称的 **symmetric**: 若有 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$
 - 反对称的 **anti-~**: 若有 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$, 则 $a = b$
 - 传递的 **transitive**: 若有 $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R$

注:

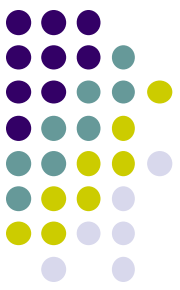
Asymmetric(不对称的)关系: 反对称的反自反关系

$$\forall a, b \in A (aRb \rightarrow \neg(bRa))$$



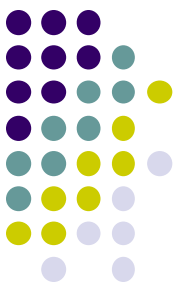
偏序关系(Partial Order)

- **偏序**：非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系称为 A 上的偏序关系, 常记为： \leq
 - $(a, b) \in \leq$ 常写作 $a \leq b$ 读作 “ a 小于等于 b ”
 - 例如：
 - 集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.
 - 整数集合上的小于等于关系、整除关系；集合的包含关系也是偏序关系.
- 注1：我们常常用 $a < b$ ($b > a$) 表示 $a \leq b \wedge a \neq b$.
- 注2：这里的偏序也称**自反偏序**或**非严格偏序**. 如果我们把其中 “自反的” 条件换成 “反自反的”, 就得到所谓**严格偏序**或**反自反偏序**.



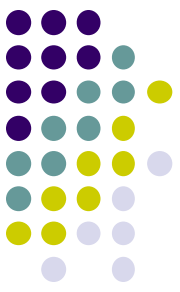
偏序集(Partially Ordered Set, Poset)

- 集合 A 及其上的偏序关系 \leq 一道称为偏序集, 记作 (A, \leq)
 - 例如:
 - 整数集合 \mathbb{Z} 及其上的小于等于关系构成偏序集 (\mathbb{Z}, \leq) .
 - 集合 A 的幂集 $\rho(A)$ 与集合包含关系构成偏序集 $(\rho(A), \subseteq)$.



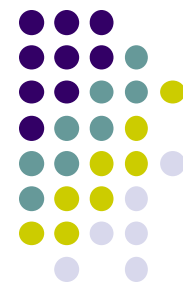
“字典顺序”

- 设 \leq 是非空集合 A 上的偏序关系, 定义 $A \times A$ 上的关系 R 如下:
 $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \text{ iff.}$
 $x_1 \neq x_2 \text{ 且 } x_1 \leq x_2; \text{ 或者 } x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 \leq y_2.$
易证 R 是 $A \times A$ 上的偏序关系.
- 给定有限字符集合 Σ , 若在 Σ 上有一个偏序关系, 类似上述办法, 可以对任意正整数 k , 定义 Σ^k (由 Σ 中字符构成的长度为 k 的串的集合)上的偏序关系。加以适当的技术处理, 则容易定义 Σ^+ (由 Σ 中字符构成的长度为任意正整数的串的集合)上的偏序关系:**字典关系**
 - 注意: 在通常的字典关系中, 任何两个元素均可比.



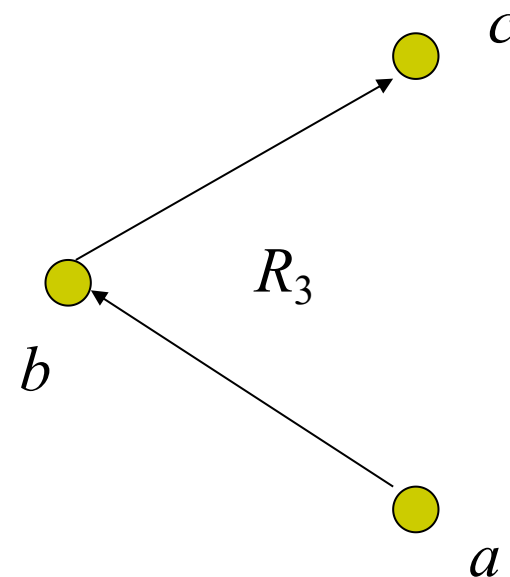
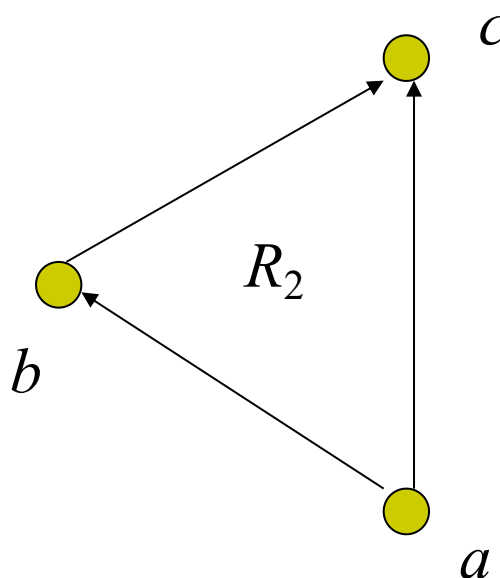
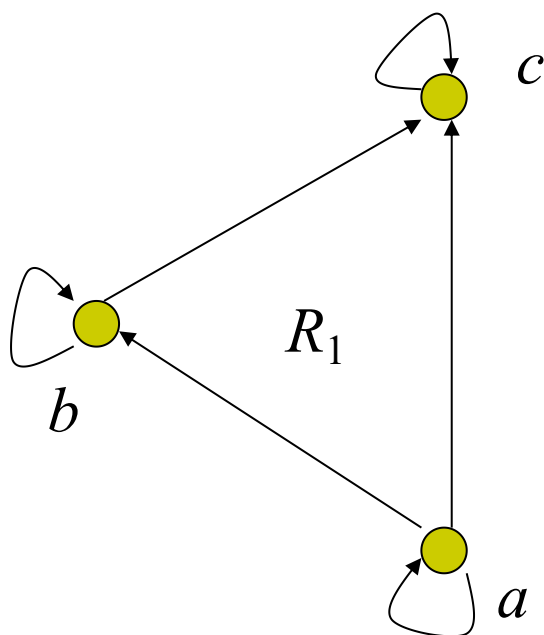
可比与全序(Total Order)

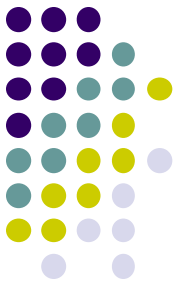
- **可比(Comparable)**: 设 \leq 为非空集合 A 上的偏序关系,对于 A 中的元素 x 和 y ,若有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$, 则称 x 与 y 可比.
 - 从“序”的角度看, A 中的元素 x 和 y 有四种情况:
 $x < y$, $x = y$, $x > y$, 以及二者不可比.
- **全序**: 设 R 是 A 上的偏序关系, 如果 A 中的任意两个元素都是可比的, 则称 R 是 A 上的全序关系(或线性序关系).
 - 例如:实数集上的“不大于”关系 \leq 、基于拉丁字母表的字典顺序
- **覆盖(cover)**: y 覆盖 x 当且仅当 $x < y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$.



偏序关系的有向图表示

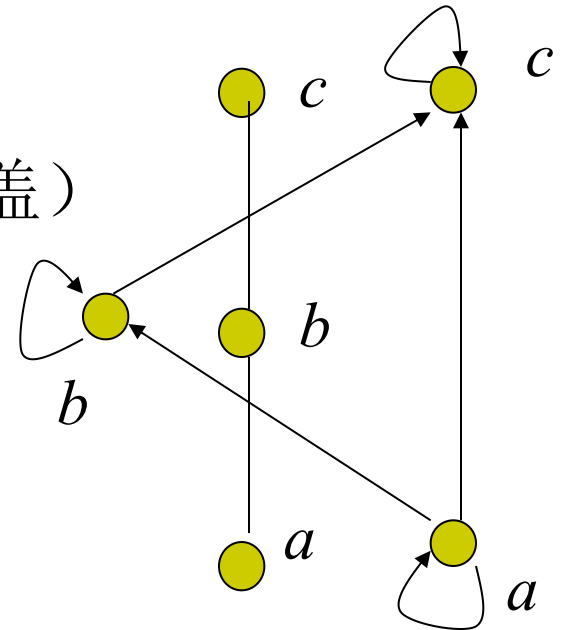
- $A = \{a, b, c\}$ 上的三个关系如下。 其间有何联系？



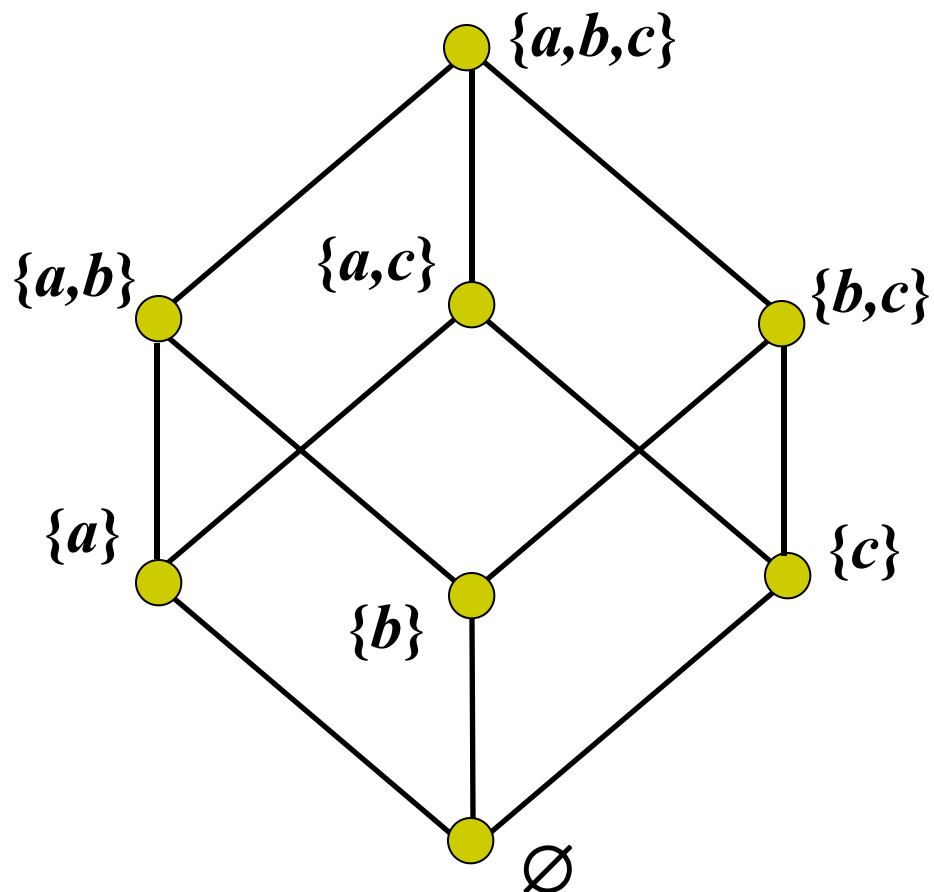


哈斯图

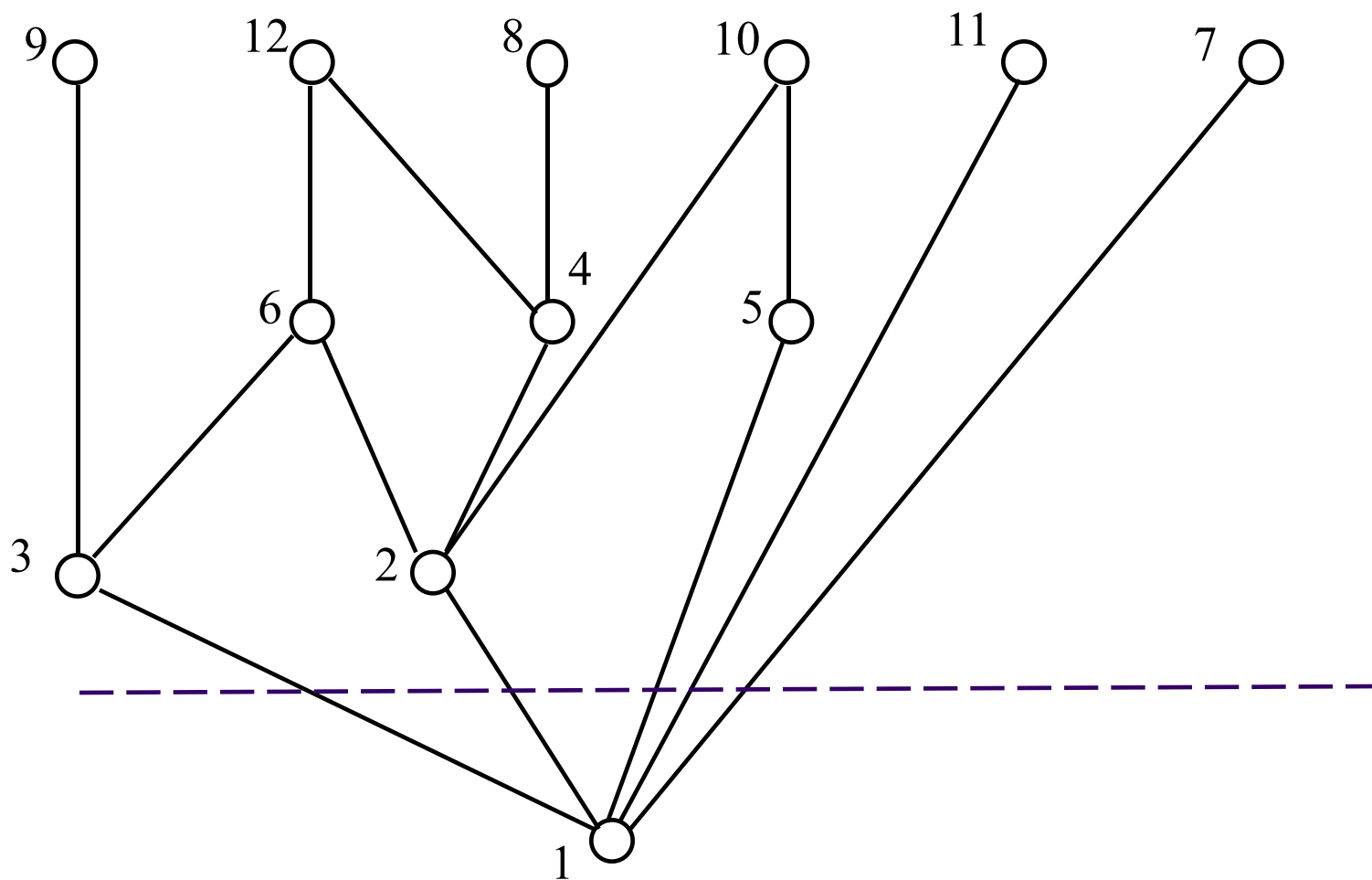
- 一般的关系图可以表示偏序关系
- 哈斯图(Hasse): 利用特定性质简化图示方法
 - 利用自反性省略圈
 - 利用反对称性省略箭头
 - 利用传递性省略部分连线 (覆盖)



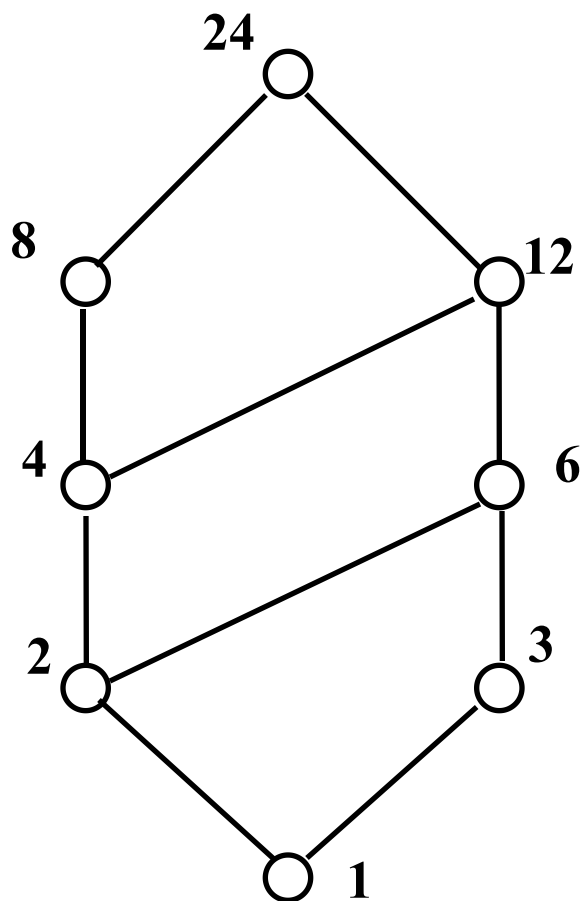
$\rho(\{a, b, c\})$ 上的包含关系



$\{1,2,\dots,12\}$ 上的整除关系



$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ 上的整除关系



偏序集中的特殊元素：

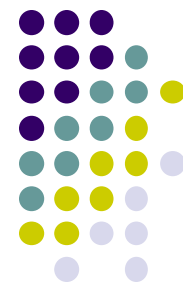
极大(Maximal), 极小(Minimal)



- x 是偏序集 (A, \leq) 中的极大元 iff.
 - 对任意 $y \in A$,若 $x \leq y$, 则 $x = y$
- x 是偏序集 (A, \leq) 中的极小元 iff.
 - 对任意 $y \in A$,若 $y \leq x$, 则 $x = y$
- 有关极大元与极小元的讨论
 - 不一定存在, 但是, 有穷集合一定有极大(小)元
 - 不一定唯一
 - 一个元素可能兼为极大(小)元

没有比它更
大(小)的了!

偏序集中的特殊元素： 最大(Greatest), 最小(Least)



- x 是偏序集 (A, \leq) 中的最大元 iff.

- 对任意 $y \in A, y \leq x$

它比谁都要大(小)!

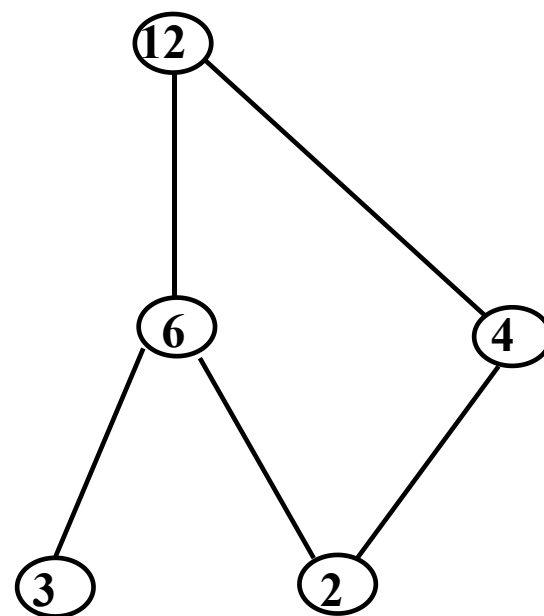
- x 是偏序集 (A, \leq) 中的最小元 iff.

- 对任意 $y \in A, x \leq y$

- 有关最大元与最小元的讨论

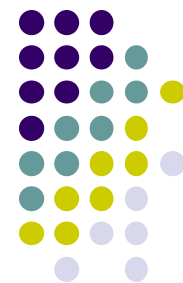
- 可能不存在

- 若存在，必唯一。

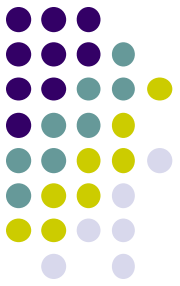


偏序集中的特殊元素：

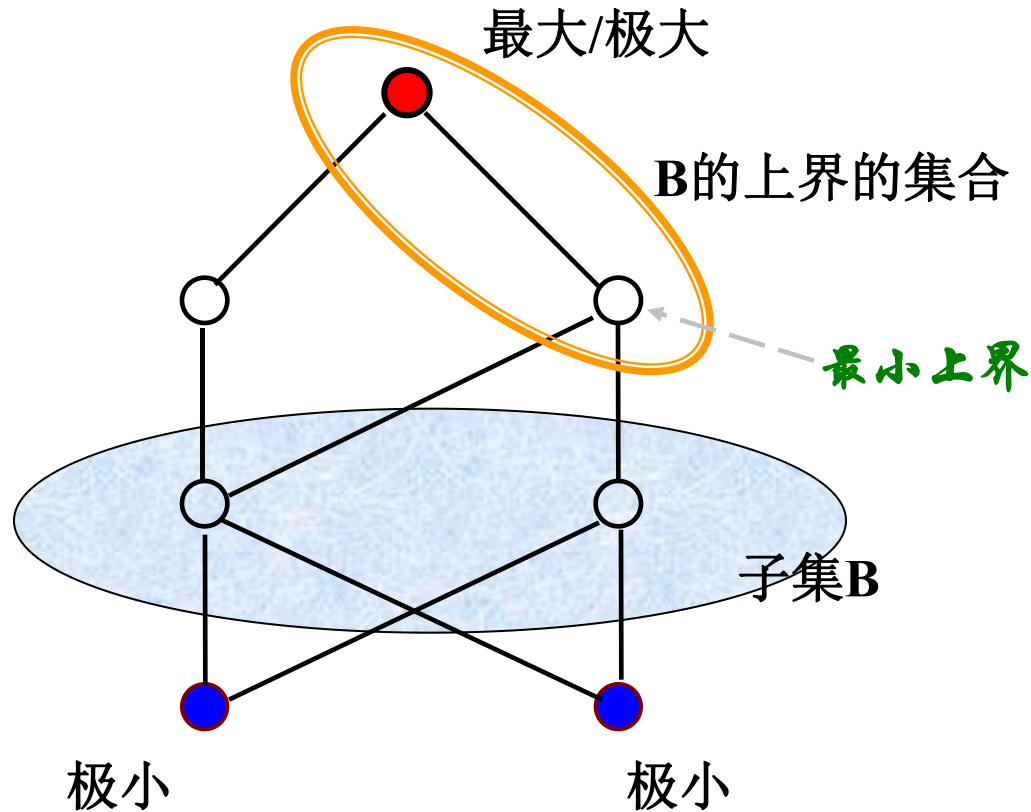
上(下)确界



- **上界**：对于偏序集 (A, \leq) 和 A 的子集 B ，若存在 $y \in A$ ，对 B 中任意元素 x ，均有 $x \leq y$ ，则 y 是 B 的上界。
- **最小上界**：如果 B 的上界构成的偏序集有最小元，则该最小元为 B 的最小上界（lub），上确界。
- 类似地可以定义下界、最大下界（glb），下确界。
- 有关上(下)界的讨论
 - 不一定存在；
 - 最小上界若存在，则必唯一。



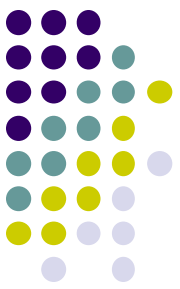
从哈斯图看特殊元素





良序

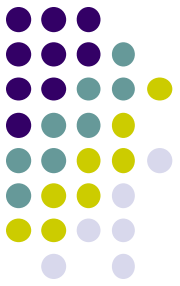
- 定义：给定集合 A 上的偏序 \leq ，若 A 的任一非空子集均存在最小元素，则该偏序为良序。
- 良序必为全序
 - 对任意 $a, b \in A$ ， $\{a, b\}$ 必有最小元，则 a, b 一定可比
- 实际上，“反对称性 + 任一非空子集存在最小元”就能保证全序性质（偏序性质+任何两个元素均可比）。
 - 自反性：对任意 $a \in A$ ， $\{a\}$ 也必有最小元，即 $a \leq a$
 - 传递性：假设 $a \leq b$ ， $b \leq c$ ， $\{a, b, c\}$ 的最小元素只能是 a ，因此 $a \leq c$
 - 任何两个元素可比，上面已证明。



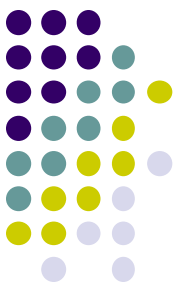
关于次序关系的进一步讨论

- 注意：良序结构上可以实施数学归纳法
- 全序是否一定是良序？
- 当 A 是无穷集合时，全序不一定是良序
 - 例如： (R, \leq) , 任何开区间上没有最小元素
- 良序 \rightarrow 全序 \rightarrow 偏序
- 偏序/全序/良序的逆关系是否仍为偏序/全序/良序？
 - 良序的逆关系不一定是良序
 - 例如 (N, \leq)

注： X 上的一个二元关系 R 被称为是**良基**的，当且仅当所有 X 的非空子集都有一个 **R -极小元**-就是说，对 X 的每一个非空子集 S ，存在一个 S 中的元素 m 使得对于所有 S 中的 s ，二元组 $(s, m) \notin R$ 。
一个偏序关系称为是良基的，当且仅当它对应的严格偏序是良基的。如果这个序还是全序，那么此时称这个序为良序。



偏序集的划分

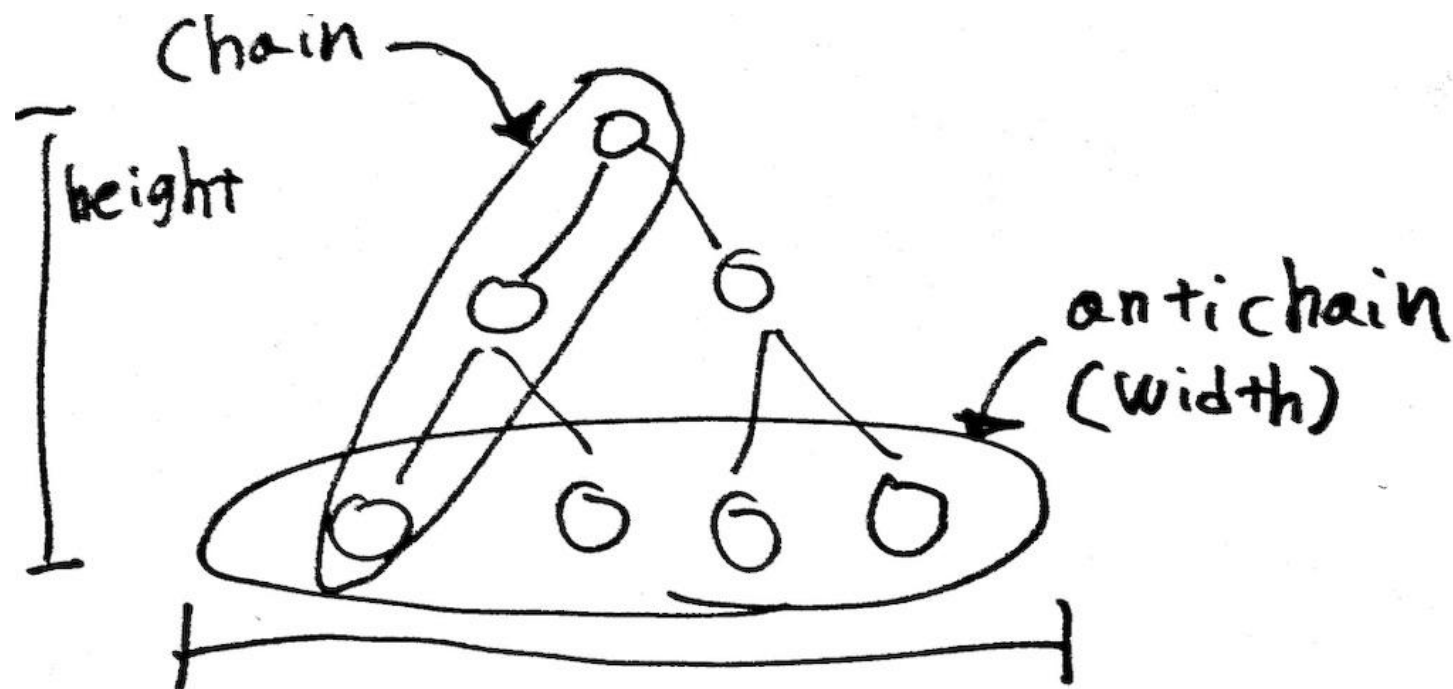


链与反链

- **链(Chain)**: 设 C 是偏序集 (P, \leq) 的一个子集, 如果 C 中任何两个元素均可比, 则 C 构成一个链;
 - 如果链 C 不是任何其他链的子链, 则称其为极大化的, 也就是说, C 外没有一个元素与 C 中所有元素都可比.
- **反链(Anti-chain)**: 设 A 是偏序集 (P, \leq) 的一个子集, 如果如果 A 中任何两个元素均不可比, 则 A 构成一个反链.
 - 如果反链 A 不是任何其他反链的子反链, 则称其为极大化的, 也就是说, A 外没有一个元素与 A 中所有元素都不可比.
- **高度(height)**和**宽度(width)**: 有限偏序集中最长的链的元素个数称为该偏序集的高度, 而其最大的反链的元素个数称为其宽度.

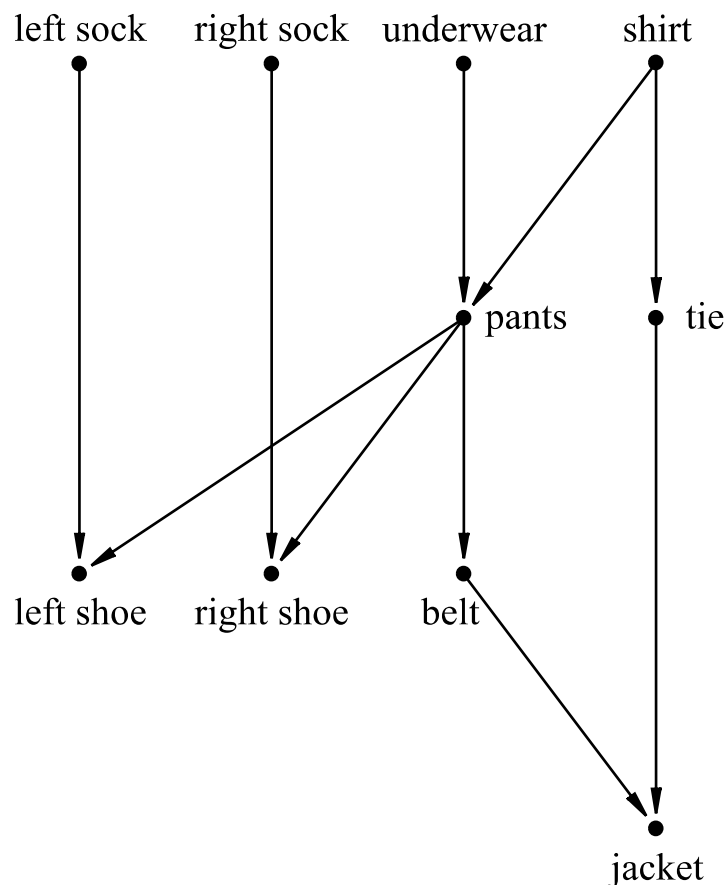


链与反链





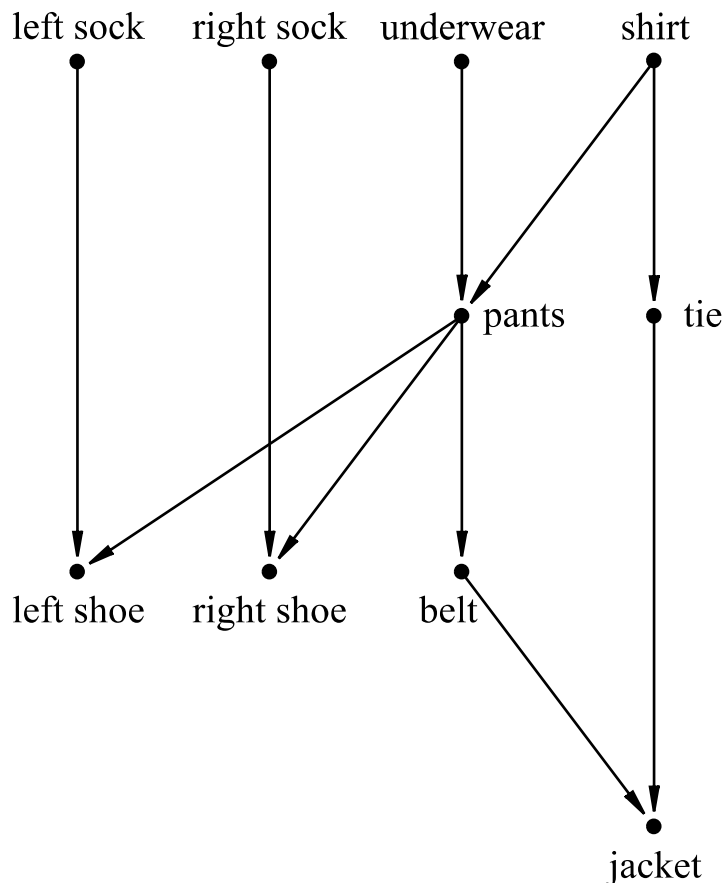
任务调度问题



早上起床穿衣顺序

链内的步骤间有顺序依赖;
反链内的步骤间可并发执行.

拓扑排序 (Topological sorting)

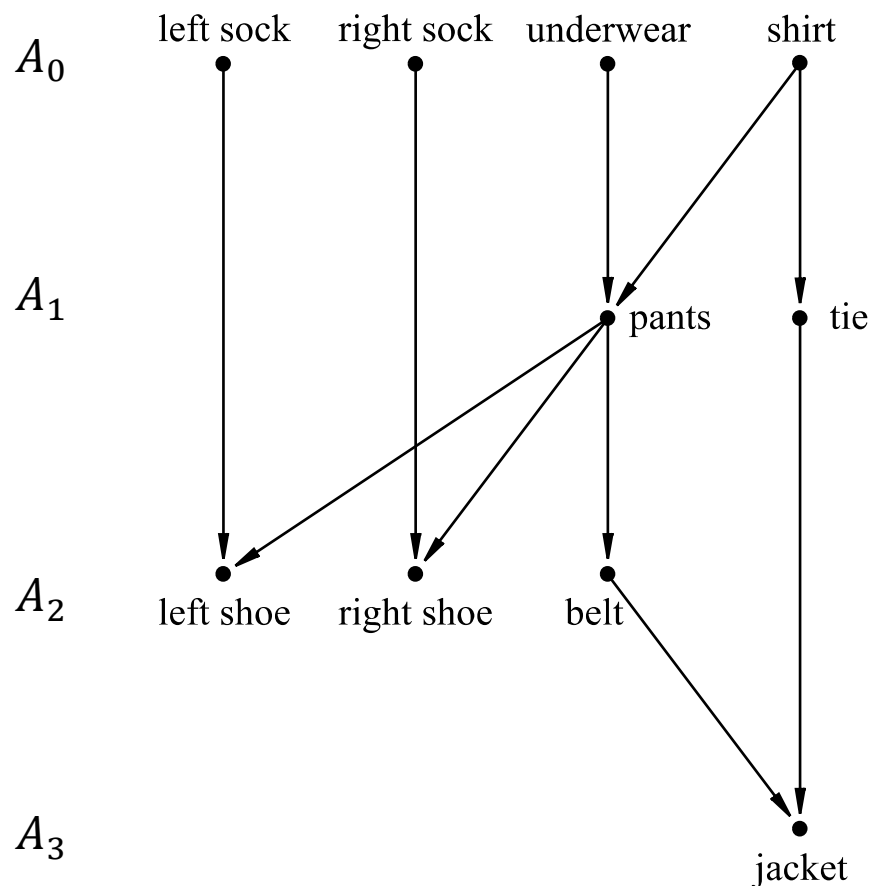


- 给定一个集合 A 上的偏序关系 R , 构造一个 A 上的全序 \leq 使得 $R \subseteq \leq$.

基本算法: 每次都从剩下的元素中选择一个极小元即可.



并发任务调度

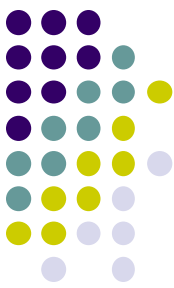


并发调度是将 A 划分为 A_0, A_1, \dots, A_n ,使得对于 $0 \leq i < j \leq n$, $\forall x_i \in A_i, x_j \in A_j (x_j \not\preceq x_i)$.

结束于 a 的最长的链称为到达 a 的**关键路径**. 该路径中除 a 之外的元素个数称为 a 的深度 ($\text{depth}(a)$).

最省时调度:

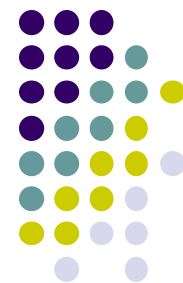
$$A_i \triangleq \{a \in A \mid \text{depth}(a) = i\}$$



偏序的划分

- 由以上讨论可知, 若有限偏序集 (A, \leq) 的高度为 t , 则可将其划分为 t 个反链 (Mirsky's theorem 1971).
 - 推论: 对于任意 $t > 0$, 要么有一条长度大于 t 的链, 要么有一条长度至少为 $\frac{|A|}{t}$ 的反链.
 - 推论: 有限偏序集 (A, \leq) 要么有一条长度大于 $\sqrt{|A|}$ 的链, 要么有一条长度至少是 $\sqrt{|A|}$ 的反链.

链与反链

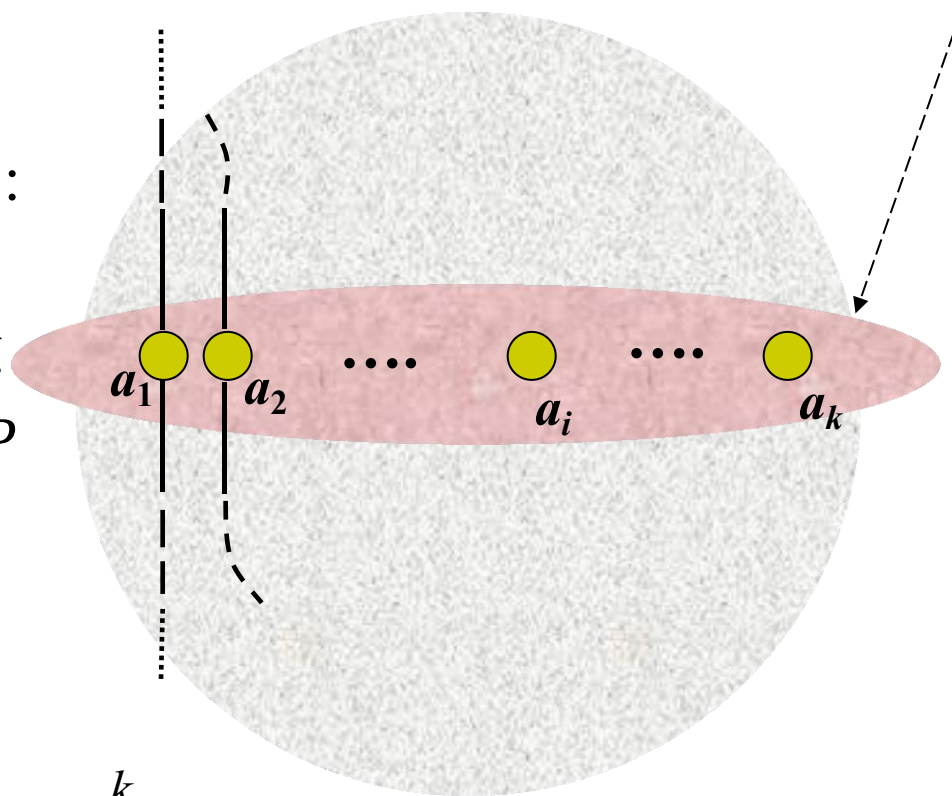


元素个数最多的反链，含 k 个元素

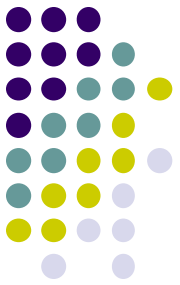
考虑Mirsky定理的对偶问题:

链覆盖 是 (P, \leq) 中一组互不相交的链, 它们一起包含了 P 中的所有元素.

至少需要多少条链?



$$\bigcup_{i=1}^k C_i = P (C_i \text{ 互不相交})$$



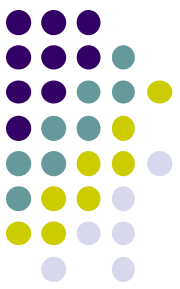
Dilworth定理

- Dilworth 定理 (1950)

宽度为 w 的偏序集可划分成 w 个链.

在任意有限偏序集 (P, \leq) 中, 覆盖 P 的最小链数等于 P 中最长反链的长度 (元素个数) .

- 注: 覆盖 P 的链数 $\geq P$ 中任一反链的元素个数.
- 等价结论: 有限偏序集中存在一个链覆盖和一个反链, 它们大小相等



Dilworth定理的归纳证明

- [概要, Perles (1963)]

当 $|P| = 1$ 时, 宽度 $w = 1$, 命题成立.

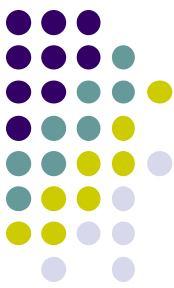
假设命题对于 $|P| \leq k$ 时成立, 现证明对于 $|P| = k + 1$ 的偏序集 P 成立.

对于某最长的反链 A , 令

$$D(A) = \{x | \exists a \in A (x < a)\}$$

$$U(A) = \{x | \exists a \in A (x > a)\}$$

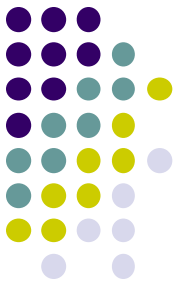
显然有 $P = A \cup D(A) \cup U(A)$; 且三者互不相交.



Dilworth定理的归纳证明

情况1: 存在一个最长的反链 A 使得 $D(A)$ 和 $U(A)$ 都非空.

- 记 A 中元素为 a_1, a_2, \dots, a_w . 在 $A \cup D(A)$ 上应用归纳假设 (注意 $U(A)$ 非空, $|A \cup D(A)| \leq k$). 不失一般性, 我们得到 $A \cup D(A)$ 的一个链覆盖 C_1, C_2, \dots, C_w , 其中 a_i 是 C_i 的最大元素, $i = 1, 2, \dots, w$.
- 再在 $A \cup U(A)$ 上应用归纳假设, 得到 $A \cup U(A)$ 的一个链覆盖 C'_1, C'_2, \dots, C'_w , 其中 a_i 是 C'_i 的最小元素, $i = 1, 2, \dots, w$.
- 于是 $C_i \cup C'_i$ 是一个链, 这 w 个链覆盖了 P .

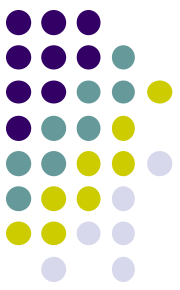


Dilworth定理的归纳证明

情况2: 对于每一个最长的反链 A , $D(A)$ 和 $U(A)$ 都至少有一个为空.

- 在 P 中选择一个极大元素 y . 再选择一个满足 $x \leq y$ 的极小元素 x (二者可能相等). $C = \{x, y\}$ 构成一条链.
- $P - C$ 的宽度是 $w - 1$. (为什么?)
依据归纳假设可划分 $P - C$ 为 $w - 1$ 条链, 再加上 C 即可.

■

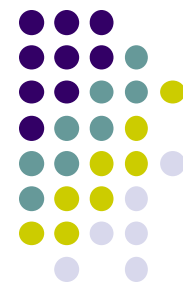


Dilworth定理的另一个归纳证明

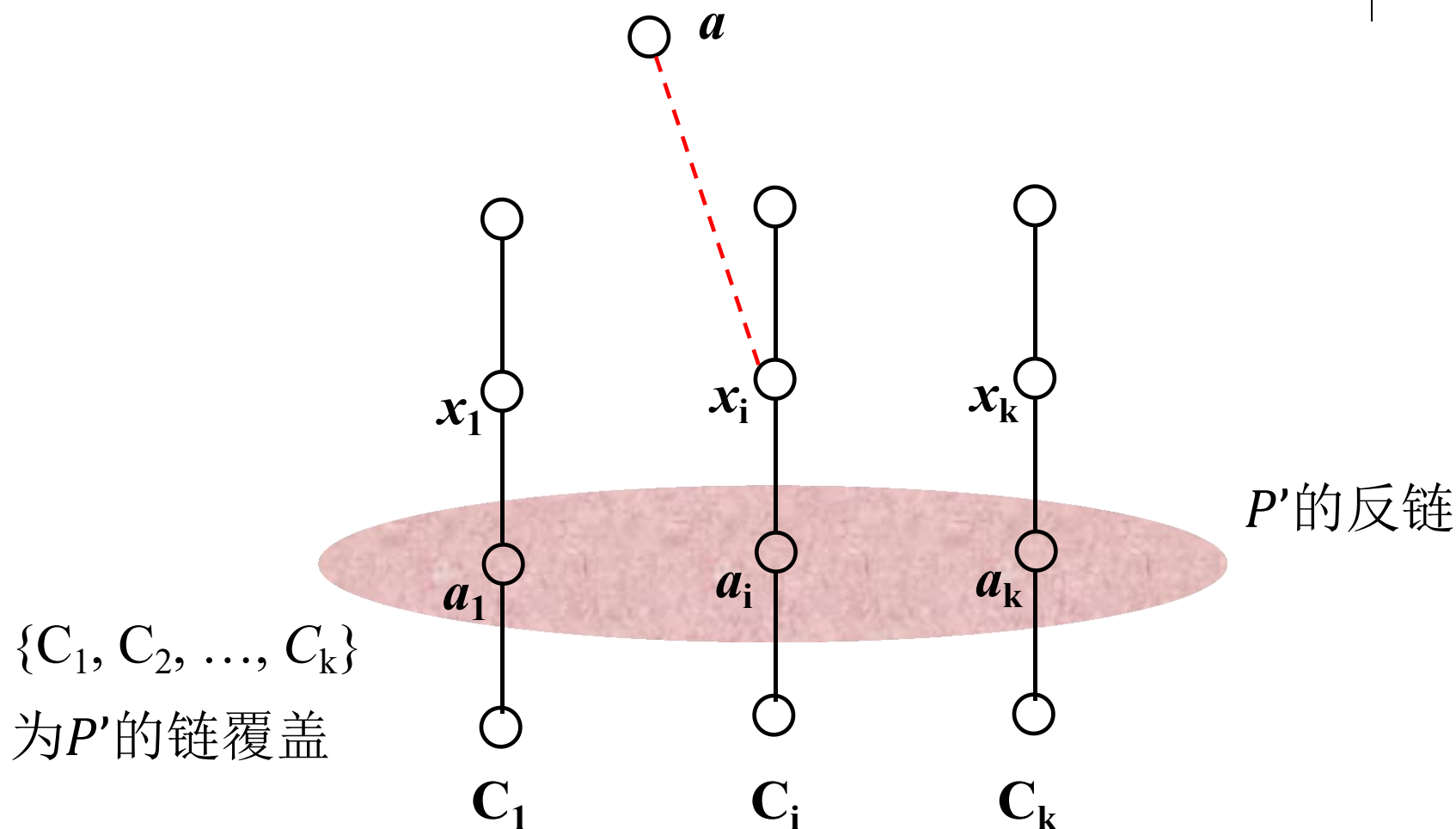
- 证明. 按照 P 中元素个数 ($|P|=1, 2 \dots$) 进行归纳证明.

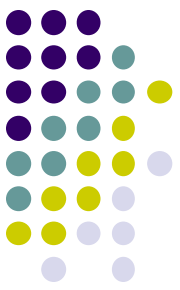
设 a 为 P 中的一个极大元素, $P' = P - \{a\}$

- 设 (P', \leq) 有一个大小为 k 的反链 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 并有一个规模为 k 的链覆盖 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.
- 对任意 C_i , P' 中大小为 k 的任一反链均有唯一的元素属于 C_i , 这些元素有一个最大元, 记为 x_i .
- $A=\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 必是反链。否则, 不妨假设 A 中有两个元素 $x_i \leq x_j$. 根据 x_j 的定义, P' 中必有一个大小为 k 的反链 A_j , x_j 是 A_j 和 C_j 的公共元素, 假设 y 是 A_j 和 C_i 的公共元素, 则 $y \leq x_i$. 从而 $y \leq x_j$. 与 A_j 是反链矛盾.



Dilworth定理的归纳证明（图示）





Dilworth定理的归纳证明（续）

- 如果 $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 是 P 中的反链，而 P 的链覆盖 $\{\{a\}, C_1, C_2, \dots, C_k\}$ 就是规模为 $k + 1$ 的覆盖. 得证.
- 如果 $\{a, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 不是 P 中的反链，即:存在某个 x_m 使得 $x_m \leq a$. (a 是极大元，不会出现 $a \leq x_m$.)

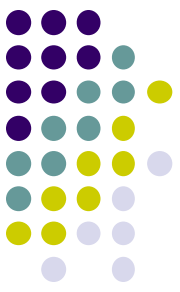
令 $K = \{a\} \cup \{z \in C_m \mid z \leq x_m\}$. 显然 K 是 P 中的一条链. $P - K$ 中最大反链的大小为 $k - 1$ ($P - K$ 中没有含 k 个元素的反链, 否则, 与 x_m 的定义 (最大性) 矛盾).

由归纳假设, $P - K$ 有大小为 $k - 1$ 的一个链覆盖, 该覆盖与 K 构成 P 的链覆盖 (链数为 k), 已知 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 是 P 中的反链 (含 k 个元素). 得证.



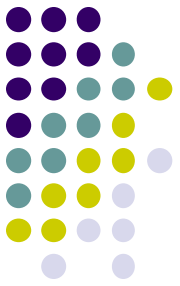
“道是无序却有序”

- 自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2+1$ 的任何一种排列中，必然含一个长度不小于 $n+1$ 的严格递增链或严格递减链。



建立问题的偏序模型

- 给定 $1, 2 \dots n^2+1 (=m)$ 的一种排列 $v_1 v_2 \dots v_m$, 定义集合:
 - $A = \{ (i, v_i) \mid i=1, 2, \dots, n^2+1 \}$
- 建立两个偏序关系 R_1 和 R_2
 - $(i, v_i) R_1 (j, v_j)$ iff. $(i < j \text{ 并且 } v_i < v_j)$ 或者 $(i, v_i) = (j, v_j)$
 - $(i, v_i) R_2 (j, v_j)$ iff. $(i < j \text{ 并且 } v_i > v_j)$ 或者 $(i, v_i) = (j, v_j)$
- $R_1 \cap R_2 = I_A, R_1 \cup R_2 = A \times A$ // R_1 的链是 R_2 反链。
- 问题: 一定存在 A 的一个至少含 $n+1$ 个元素的子集, 它是 R_1 的链或者 R_2 的链。
 - 若 R_1 链的长度均 $\leq n$, 即 R_2 反链的大小均 $\leq n$, 则存在个数 $k \leq n$ 的 R_2 覆盖, 有长度超过 n 的 R_2 链, 否则元素个数 $\leq n^2$. 矛盾.



小结

- 偏序：自反，传递，**反**对称
 - 偏序集，哈斯图
 - 最大，最小，极大，极小 元素
 - 上界，下界，上确界，下确界
- 偏序集的划分
 - Mirsky 定理
 - Dilworth定理