1.(12 分) 请运用谓词逻辑表示下列已知和结论的陈述, 并证明结论.
已知:
(1)“ 疫情期间, 所有要进校的人均需要满足居家隔离 14 天或者集中隔离 7 天的条件”
(2)“ 所有居家隔离 14 天的人均需要有固定的住所.”
(3)“ 张三没有固定的住所, 且张三要在疫情期间进校”
结论:“ 张三需要被集中隔离 7 天”

2.(10 分) 证明:m 是大于 1 的正整数, 若 $(m-1)!+1$ 可被 m 整除, 则 m 为质数.

3.(10 分) 今有方程 $X \times Y = (X \vee Y) \times (X \wedge Y)$, 其中未知整数 $X, Y \in [0, 31]$, $\times$ 是普通乘法运算,$X \vee Y$ 表示变量 X 和 Y 对应的二进制数的按位与运算,$X \wedge Y$ 表示变量 X 和 Y 对应的二进制数的按位或运算.
(1) 证明: 当整数 $X < Y$ 时, 上述方程等价于方程 $X \wedge Y = X$(即方程具有相同的解集);
(2) 求该方程有多少组不同的解.

4.(12 分) 设 R 是非空有限集合 A 上的一个等价关系,A/R 是 A 关于 R 的商集,$|A| = n, |B| = r, |A/R| = t$.
(1) 设 $A/R = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, 证明:$\cup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) = R$;
(2) 证明:$r \cdot t \geq n^2$.

5.(12 分) 某左轮手枪的弹巢 (即弹仓) 最多可装六发子弹, 现在将两发子弹随机放入弹巢, 然后随机旋转转轮.(扣动扳机后, 如果弹巢的当前位置有子弹则必被击发射出. 同时, 无论是否击发, 转轮都会顺时针旋转到下一个相邻位置.)
(1) 扣动扳机, 射出子弹的概率是多少?
(2) 在第一次没有射出子弹的情况下直接再扣动一次扳机, 则第二次射出子弹的概率是多少?
(3) 如果已知两颗子弹被放入了弹巢的相邻位置, 上面两个问题的答案会如何变化?

6.(12 分) 设 A 是有限集合,$|A| = n$, 试求:
(1)A 上有多少种自反的二元关系?
(2)A 上有多少种既不是自反也不是反自反的二元关系?
(3)A 上有多少种对称关系?
(4)A 上有多少种反对称关系?

7.(12 分) 设长度为 n(n 为大于 2 的整数) 的 0-1 串构成的集合为 S, 定义计算串中 "1" 的个数的函数为 f, 并定义关系 R 如下: 两个长度为 n 的串 a,b 满足 aRb, 当且仅当 $f(a) \leq f(b)$ 且 $a \wedge b = a$, 其中 $\wedge$ 为按位与运算. 例如:a=001,b=011 满足 aRb, 而 a=100,b=011 则不满足.
(1) 证明:R 是 S 上的偏序关系;
(2) 画出 n=4 时的哈斯图;
(3) 判断偏序集 (S,R) 是否构成格, 并说明理由.

8.(10 分) 设 R 是非空集合 A 上的二元关系, 且 R 是自反和传递的.
证明:$R^n = R$, 其中 n 为大于 1 的整数.

9.(10 分) 给定函数 $f : A \to B, g : c \to d$. 已知 $f \subseteq g$(提示: 函数也是关系, 亦是集合), 并且 ran$g$ ⊆ran$f$(ran 表示函数的值域). 证明: 如果 g 是单射, 则 $A = C$.