Natural Deduction & C/DNF

Wang-Zhou Dai

命题逻辑的推理

1. 通过重言等价性来化简逻辑公式，用真值表证明；
2. 利用公理化系统，如希尔伯特式推演系统 $\mathcal{L}$
   - 三条公理：
     (a) L1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
     (b) L2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
     (c) L3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$
   - 一条推理规则：分离规则 $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash \beta$
3. 本课程主要讲一种更符合直觉的“自然推演系统”（Gerhard Gentzen, 1909-1945; Stanisław Jaśkowski 1906-1965）。在本课程的作业和考试中，我们都使用 Jaśkowski 提出的自然推演记法。

自然推演

例：用自然推演证明：$\vdash ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$

证：

Jaśkowski style：

1.	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)$	assumption
2.	$\alpha \to \beta$	$\wedge$e$_1$ 1
3.	α	assumption
4.	β	$\to$e 1,2
5.	$\beta \to \gamma$	$\wedge$e$_2$ 1
6.	γ	$\to$e 4,5
7.	$\alpha \to \gamma$	$\to$i 3,6
8.	$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	$\to$i 1,7

Q.E.D.

Gentzen style

证明公式的有穷集合 $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，即 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$。这里用 Γ, α 表示 $\Gamma \cup \{\alpha\}$。

公理：

$$\Gamma, A_i, \neg A_i$$

或规则（$\vee$）：

$$\frac{\Gamma, \alpha_i}{\Gamma, (\alpha_0 \vee \alpha_1)}, \quad i = 0, 1$$

或规则推论（$\vee'$）：

$$\frac{\Gamma, \alpha_0, \alpha_1}{\Gamma, (\alpha_0 \vee \alpha_1)}$$

与规则（$\wedge$）：

$$\frac{\Gamma, \alpha_0 \qquad \Gamma, \alpha_1}{\Gamma, (\alpha_0 \wedge \alpha_1)}$$

切割规则（cut）：

$$\frac{\Gamma, \alpha \qquad \Gamma, \neg\alpha}{\Gamma}$$

为方便书写更清晰的证明过程，还可添加一个转写规则（rw）：

$$\frac{\{a, b, c\}}{\{a, b\}, c}$$

例子

例 1 的 Gentzen 证明树写法：

根据逻辑等价规则重写目标公式：

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\neg\alpha \vee \gamma)$$

开始构造第一个析取枝，使用规则（$\wedge$）：

$$\frac{\{\beta, \gamma, \neg\alpha\}, \alpha \quad \{\beta, \gamma, \neg\alpha\}, \neg\beta}{\{\beta, \gamma, \neg\alpha\}, (\alpha \wedge \neg\beta)}$$

将结果转写（rw）：

$$\{\gamma, \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\beta)\}, \beta$$

继续构造第二个析取枝，使用规则（$\wedge$）：

$$\frac{\{\gamma, \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\beta)\}, \beta \quad \{\gamma, \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\beta)\}, \neg\gamma}{\{\gamma, \neg\alpha, (\alpha \wedge \neg\beta)\}, \beta \wedge \neg\gamma}$$

继续构造第三个析取枝，使用规则（$\vee'$）：

$$\frac{\{(\alpha \wedge \neg\beta), (\beta \wedge \neg\gamma)\}, \gamma, \neg\alpha}{\{(\alpha \wedge \neg\beta), (\beta \wedge \neg\gamma)\}, (\gamma \vee \neg\alpha)}$$

Gentzen style：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{\beta,\gamma\},\alpha,\neg\alpha}{\{\beta,\gamma,\neg\alpha\},\alpha}\,(rw) \qquad \cfrac{\{\neg\alpha,\gamma\},\beta,\neg\beta}{\{\beta,\gamma,\neg\alpha\},\neg\beta}\,(rw)}{\{\gamma,\neg\alpha,\beta\},\alpha\wedge\neg\beta}\,(\wedge)}{\{\gamma,\neg\alpha,\alpha\wedge\neg\beta\},\beta}\,(rw) \qquad \cfrac{\{\neg\alpha,\alpha\wedge\neg\beta\},\gamma,\neg\gamma}{\{\gamma,\neg\alpha,\alpha\wedge\neg\beta\},\neg\gamma}\,(rw)}{\{\gamma,\neg\alpha,\alpha\wedge\neg\beta\},\beta\wedge\neg\gamma}\,(\wedge)}{\{\alpha\wedge\neg\beta,\beta\wedge\neg\gamma\},\neg\alpha,\gamma}\,(rw)}{\{\alpha\wedge\neg\beta,\beta\wedge\neg\gamma\},\neg\alpha\vee\gamma}\,(\vee')}{\{(\alpha\wedge\neg\beta)\vee(\beta\wedge\neg\gamma)\vee(\neg\alpha\vee\gamma)\}}\,(rw)$$

Q.E.D.

命题逻辑公式的范式

CNF 存在性的构造性证明：

引理 1：每个布尔函数都可以由某合式公式导出

- 布尔函数：$f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$
- 公式 $A(p_1, \ldots, p_n)$ 导出函数：$A(x_1, \ldots, x_n)$

证明：只需令

$$A(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee \{p_1^{x_1} \wedge p_2^{x_2} \wedge \cdots \wedge p_n^{x_n} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(1)\},$$

其中，我们约定逻辑文字的表示形式：

$$p^{-1} \equiv \neg p, p^1 \equiv p$$

例子：设 3 元布尔函数 $f : \{0,1\}^3 \mapsto \{0,1\}$，有 $f^{-1}(1) = \{(0,0,1),(1,0,0),(1,1,0)\}$，那么可得目标公式：

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$$

定理 1：每个合式公式都重言等价于一个析取范式和合取范式。

证明：不失一般性，记该公式为 ϕ，分情况讨论：

1. 若 ϕ 为矛盾式，其等价于 $(p_1 \wedge \neg p_1)$；
2. 若 ϕ 为非矛盾式，则其可满足。以 f 记 ϕ 导出的布尔函数，那么 $f^{-1}(1) \neq \emptyset$。根据引理 1，存在公式 ψ 可以导出 f；且 ψ 是析取范式，因此原命题第一部分（DNF）得证。

关于 CNF 的证明部分略去。

主（合）析取范式的唯一性

由存在性，以及极小项、极大项的唯一性易证。