欧拉图

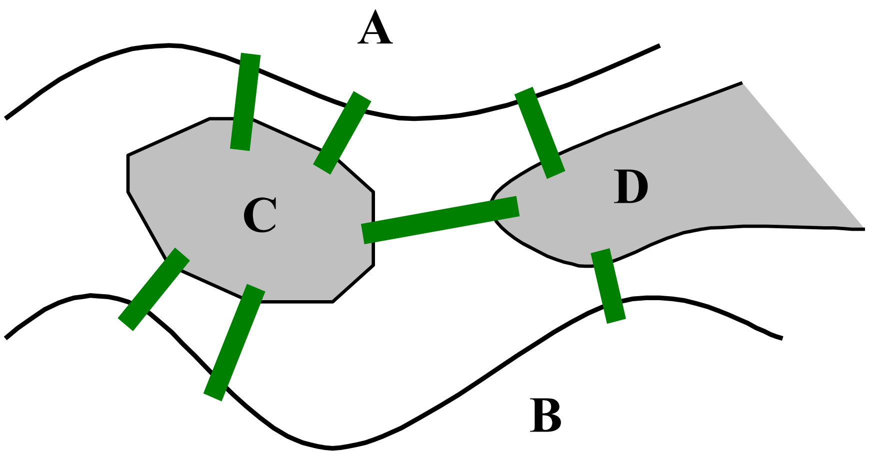
南京大学计算机科学与技术系

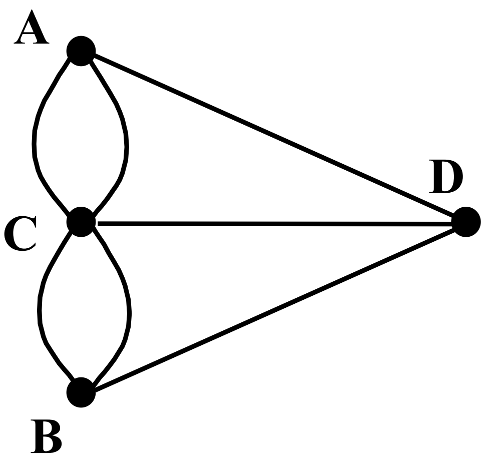
内容提要

- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 半欧拉图的充要条件
- 构造欧拉回路的Fleury算法
- 随机欧拉图

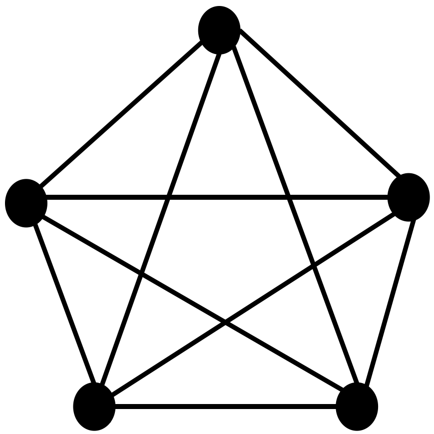
Königsberg七桥问题

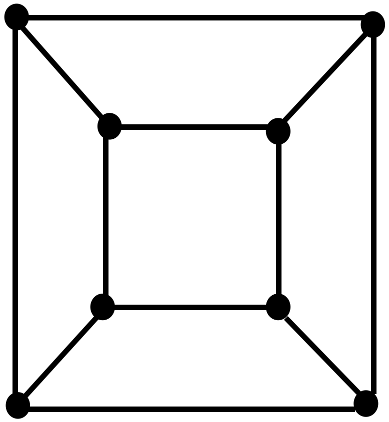
- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”

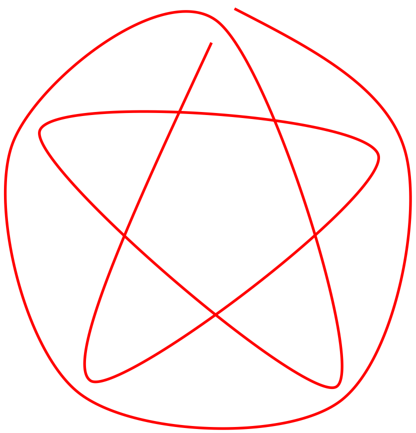




“一笔划”问题







?

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为欧拉通路。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为欧拉回路。
- 如果图G中含欧拉回路，则G称为欧拉图。如果图G中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则G称为半欧拉图。

//备注：通常假设G是连通的。

欧拉图中的顶点度数

- 连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。
  - 证明：

$\Rightarrow$设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

$\Leftarrow$可以证明：

（1）G中所有的边可以分为若干条相互没有公共边的简单回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

全偶度图中的回路

- 定理：若无向图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干条相互没有公共边的简单回路中。
- 证明：根据G的边数m进行归纳证明。
  - 当$m=1$, G是环，结论成立。
  - 对于$k\geq 1$，假设当$m\leq k$时结论成立。
  - 考虑$m=k+1$的情况：注意$\delta_G\geq 2$, G中必含简单回路，记为C，令$G'=G-E_C$, 设G'中含s个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，因此，结论成立。

若干小回路串成欧拉回路

- 定理：若连通图G中所有的边包含在若干条相互没有公共边的简单回路中，则G中含欧拉回路。

证明：对G中简单回路个数d施归纳法。当d=1时显然。

- 假设$d \le k(k \ge 1)$时结论成立。考虑$d=k+1$.
- 按某种方式对k+1个简单回路排序，令G'=G-E(C_{k+1})，设G'中含s个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于k。由归纳假设，每个非平凡连通分支G_i均为欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连通，故C_{k+1}与诸C_i'都有公共点。
- G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}上任一点(设为v_0)出发遍历C_{k+1}上的边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与C_{k+1}的交点(设为v_i'), 则转而遍历C_i'上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：

  (1) G是欧拉图。

  (2) G中每个顶点的度数均为偶数。

  (3) G中所有的边包含在若干个相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

定理：设G是连通图，G是半欧拉图当且仅当G恰有两个奇度点。

证明:

$\Rightarrow$ 设P是G中的欧拉通路(非回路)，设P的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若x既非u也非v，则x的度数等于在P中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在P中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，$\therefore$C-uv是G中的欧拉通路。

(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 存在有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

- 若G是弱连通的有向图，则下列命题等价：
  - G中存在有向欧拉回路。
  - G中任一顶点的入度等于出度。
  - G中所有边位于若干条相互没有公共边的有向简单回路中。

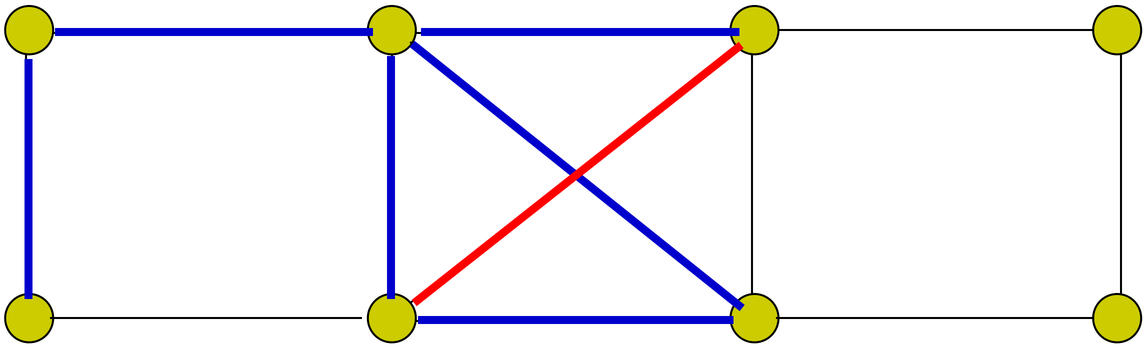
(证明与无向欧拉图类似。)

内容提要

- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 半欧拉图的充要条件
- **构造欧拉回路的Fleury算法**
- **随机欧拉图**

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，画过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将画过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路

- **Fleury（弗勒里）算法**
  - **输入**：欧拉图G
  - **输出**：简单回路$P = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$, 其中包含了$E_G$中所有的元素。

1. 任取$v_0 \in V_G$, 令$P_0=v_0$;
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_i$, 按下列原则从$E_G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选择$e_{i+1}$。
   (a) e_{i+1}与v_i相关联;
   (b) 除非别无选择，否则e_{i+1}不应是$G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时，$P_m = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$,
- 其中诸e_i互异是显然的。只须证明：

(1) $v_0=v_m$。(即P_m是回路)

(2) P_m包括了G中所有的边。

令$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$

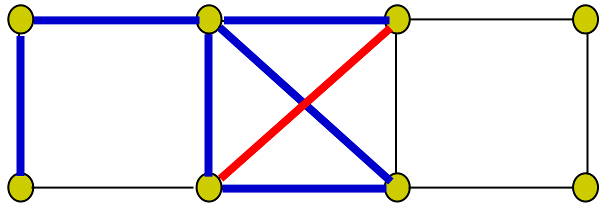
(1) 假设$v_0 \neq v_m$。由算法终止条件，在G_m中已没有边与v_m相关联。假设除最后一次外，v_m在P_m中出现k次，则v_m的度数是$2k+1$, 与G中顶点度数是偶数矛盾。

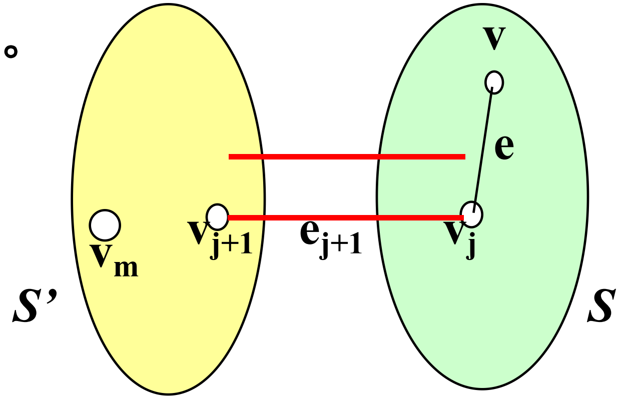
Fleury算法的证明(续)

(2) 假设P_m没有包括G中所有的边，令G_m中所有非零度顶点集合为S（非空），令$S'=V_G-S$, 则$v_m \in S'$。

考察序列$e_1,e_2,\ldots e_j,e_{j+1},\ldots,e_m$。假设j是满足$v_j \in S$, 而$v_{j+1} \in S'$的最大下标。如果没有这样的j，G就不连通，矛盾。另外，e_{j+1}一定是G_j中的割边。

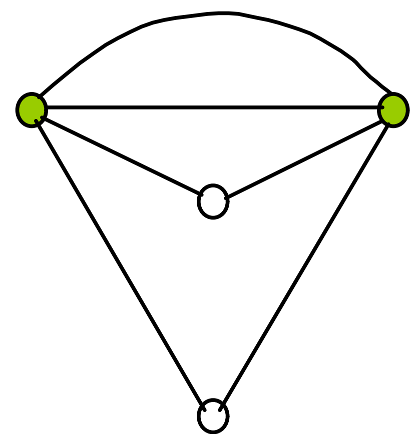
令e是在G_j中与v_j相关联的异于e_{j+1}的边(非零度点一定有), 根据算法选择e_{j+1}(割边)的原则，e也一定是割边。但是，G_m中任意顶点的度数必是偶数，e在G_m中的连通分支是欧拉图，e在G_m的某个欧拉回路中，不可能是G_j的割边。矛盾。





附：随机欧拉图

- 设G是欧拉图，$v \in V_G$，从v开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则G称为以v为始点的随机欧拉图。
- 注意，若G是以v为始点的随机欧拉图，则任何一个以v为始点的不包含G中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路。



随机欧拉图的判定

- 欧拉图G是以v为始点的随机欧拉图*当且仅当*G中任一回路均包含v。

  ⇒ 若G是以v为始点的随机欧拉图，*假设有回路C不包含v*. 令G‘=G-C, (G’可能不连通)，G’中包含v的那个连通分支一定是欧拉图，相应的欧拉回路包含了v关联的所有边，但不包含G中的所有边，与G是以v为始点的随机欧拉图矛盾。

  ⇐ 若欧拉图G中任意回路均包含v。假设G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路C，假设e是不在C中的一条边，e的端点必异于v，设一个是u。令从G中删除C中所有边的图为G‘，显然在G’中v是孤立点。而包含u的连通分支是欧拉图，因此u必包含在一回路中，但此回路不含v，矛盾。 (易推知：欧拉图G是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当G本身是一个初级回路)

Q&A

欢迎提问