树的基本概念

离散数学—树

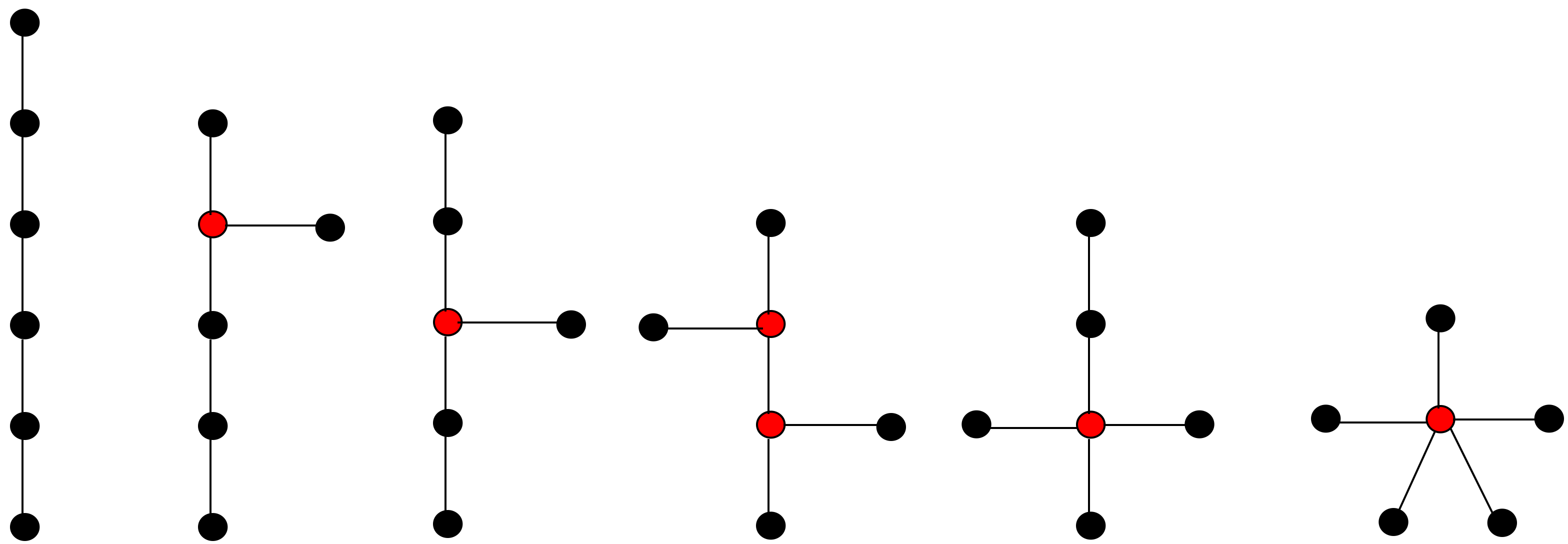
南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 树的定义
- 树的性质
- 根树
- 有序根树的遍历

树的定义

- 定义：不包含<u>简单回路</u>的连通无向图称为树。
  - 森林（连通分支为树）
  - 树叶/分支点（度为1？）

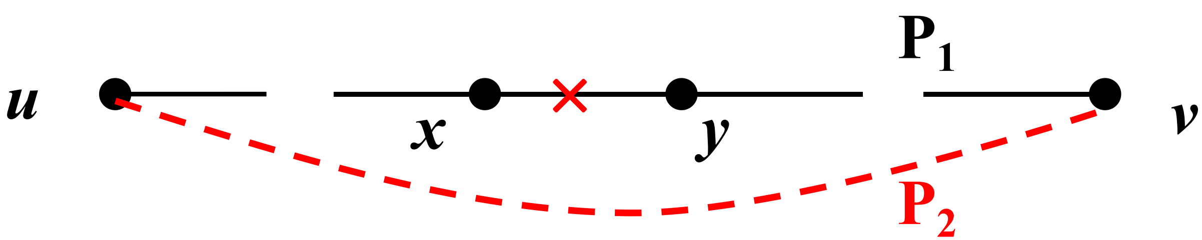


互不同构的6个顶点的树

树中的通路

- 设T是树，则$\forall u,v\in V_T$, T中存在唯一的 uv-简单通路。
  - 证明：T是连通图，$\therefore \forall u,v\in V_T$, T中存在uv-简单通路。

  假设T中有两条不同的uv-简单通路P_1,P_2。不失一般性，存在e=(x,y)满足：e$\in P_1$但e$\notin P_2$，且在路径P_1上x比y靠近u。令$T^*=T-\{e\}$，则T^*中包含P_2, 于是(P_1中的xu-段)+P_2+(P_1中的vy-段)是T^*中的xy-通路，$\therefore T^*$中含xy-简单通路(记为P’)，则P’+e是T中的简单回路，与树的定义矛盾。



有关树的几个等价命题

- 设T是简单无向图，下列四个命题等价：

  (1) T是不包含简单回路的连通图。//树的定义

  (2) T中任意两点之间有唯一简单通路。

  (3) T连通，但删除任意一条边则不再连通。

  (4) T不包含简单回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的简单回路。

- 备注：
  - 树是边最少的连通图
  - 树是边最多的无简单回路的图

树中边和点的数量关系

- 设T是树，令$n=|V_T|$, $m=|E_T|$, 则$m=n-1$。
- 证明. 对n进行归纳证明。当$n=1$, T是平凡树，结论显然成立。

  假设当$n\leq k$是结论成立。

  若$n=k+1$。因为T中每条边都是割边，任取$e\in E_T$, $T-\{e\}$含两个连通分支，设其为T_1, T_2, 并设它们边数分别是m_1, m_2, 顶点数分别是n_1, n_2, 根据归纳假设：$m_1=n_1-1$, $m_2=n_2-1$。注意：$n_1+n_2=n$, $m_1+m_2=m-1$。

  $\therefore m= m_1+m_2+1=n-1$。

连通图边数的下限

- 顶点数为n（ n≥2）的连通图，其边数$m\geq n-1$。

  (对于树，$m=n-1$，“树是边最少的连通图”）

  - 证明：对n进行一般归纳。当n=2时结论显然成立。

    设G是边数为m的连通图，且$|V_G|=n>2$。任取$v\in V_G$，令$G'=G-v$,设G'有$\omega(\omega\geq 1)$个连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_\omega$，且G_i的边数和顶点数分别是m_i和n_i。

    我们有$n=n_1+n_2+\ldots+n_\omega+1$, $m\geq m_1+m_2+\ldots+m_\omega+\omega$ (每个连通分支中至少有一个顶点在G中与删除的v相邻)。

    由归纳假设，$m_i\geq n_i-1(i=1,2,\ldots\omega)$。

    所以：$m\geq m_1+m_2+\ldots+m_\omega+\omega\geq n_1+n_2+\ldots+n_\omega-\omega+\omega=n-1$。

与边点数量关系有关的等价命题

- 设T是简单无向图，下列三个命题等价：

(1) T是树。

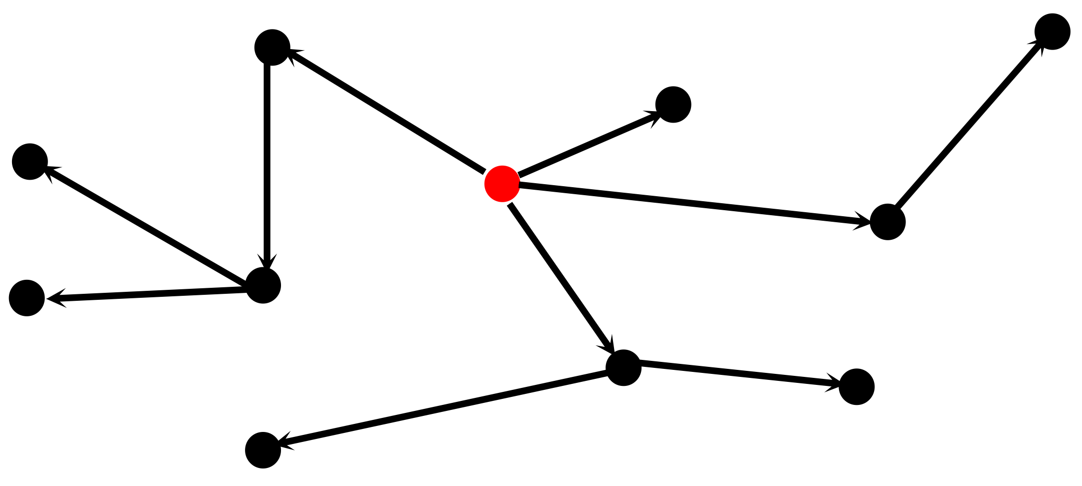
(2) T不含简单回路，且$m=n-1$。

(3) T连通，且$m=n-1$。

  - (1)$\Rightarrow$(2)，已证。
  - (2)$\Rightarrow$(3), 若不连通，分支数$\omega\geq 2$，各分支为树（无简单回路、连通），则$m=n-\omega<n-1$，矛盾。
  - (3)$\Rightarrow$(1), 设e是T中任意一条边，令$T'=T-e$, 且其边数和顶点数分别是m'和n, 则$m'=m-1=n-2<n-1$, $\therefore$ T'是非连通图。因此，G的任意边均不在简单回路中，$\therefore$G中无简单回路。

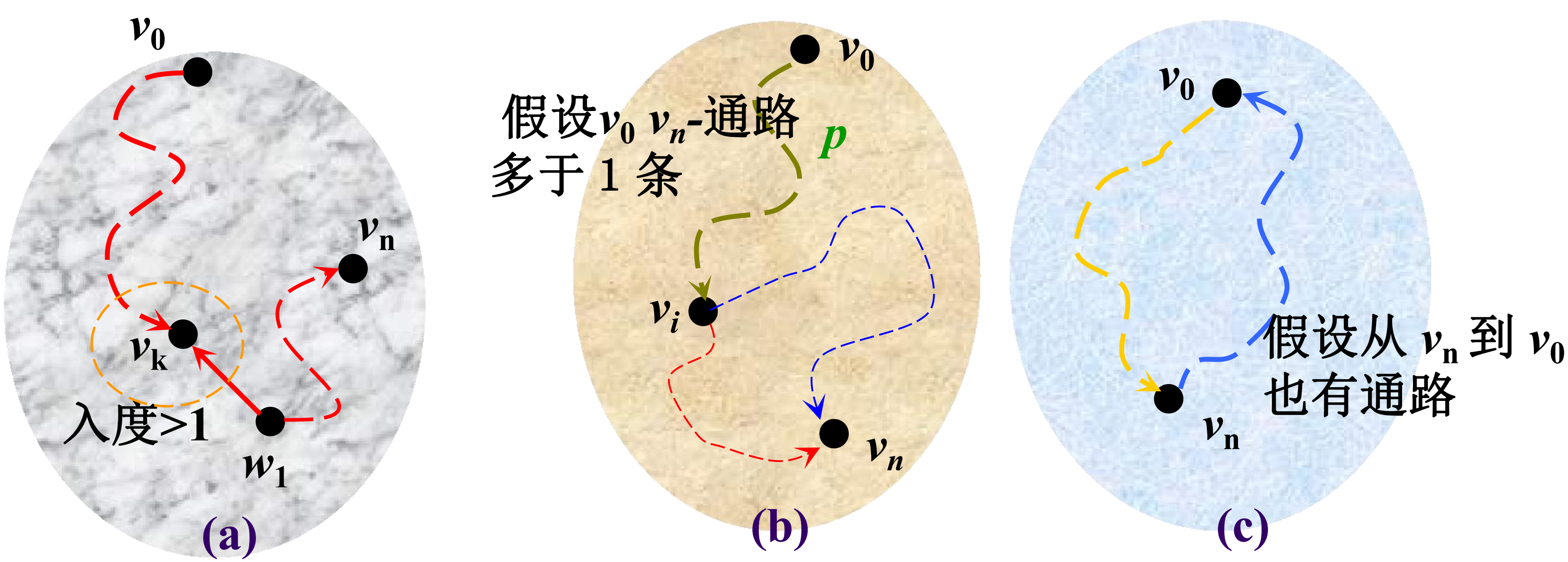
根树的定义

- 定义：底图为树的有向图称为*有向树*。
- 定义：若有向树恰含一个入度为0的顶点，其它顶点入度均为1，则该有向树称为*根树*，那个入度为0的顶点称为*根*。



根树中的有向通路

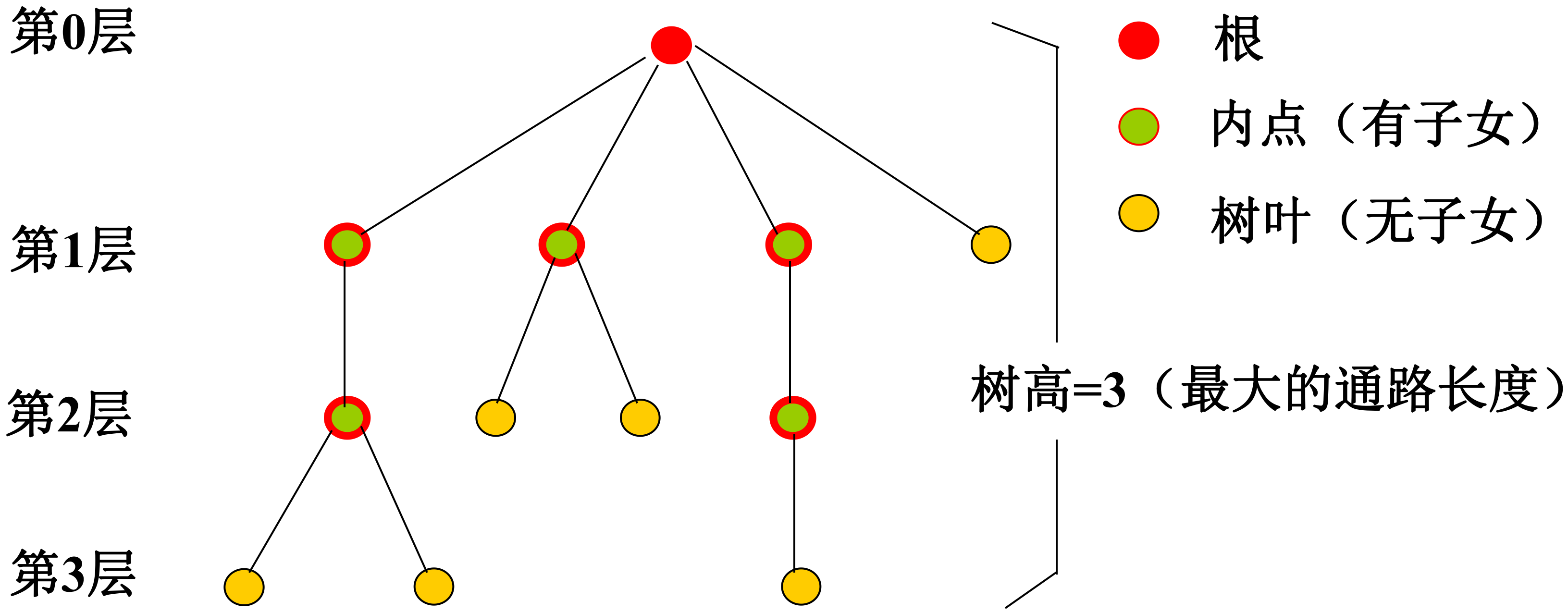
- 若v_0是根树T的根,则对T中任意其它顶点v_n ,存在唯一的有向v_0v_n-通路,但不存在v_nv_0-通路。



根树的图形表示

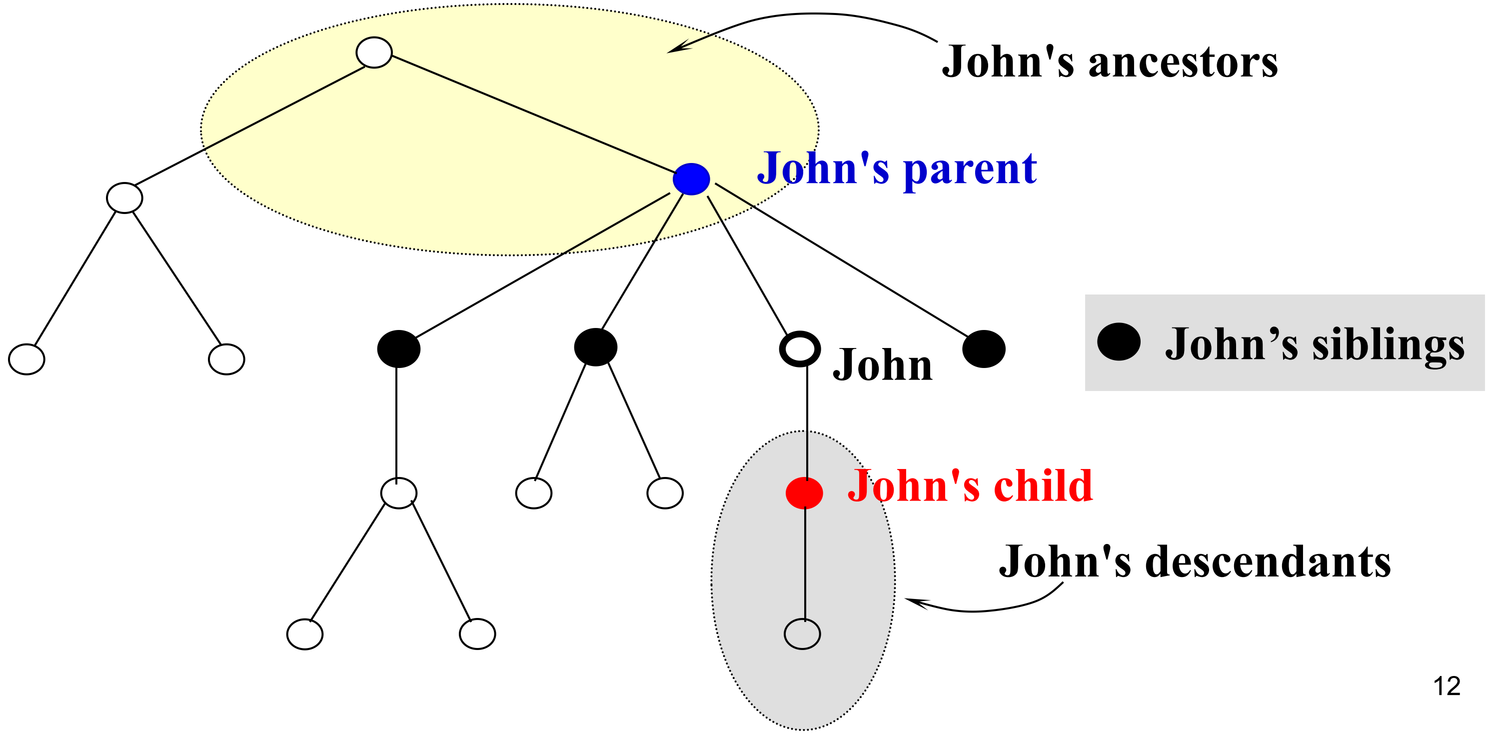
- 边上的方向用约定的位置关系表示

根也是内点，除非它是图中唯一顶点。



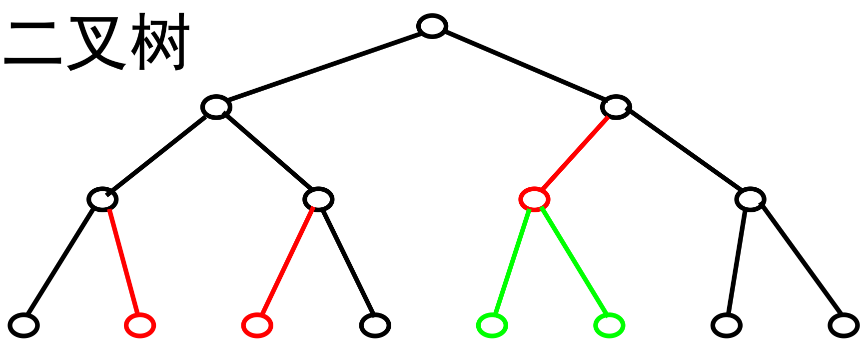
根树与家族关系

- 用根树容易描述家族关系，反之，家族关系术语被用于描述根树中顶点之间的关系。



根树的几个术语

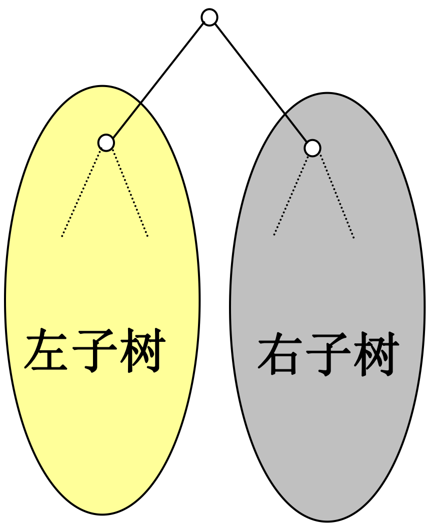
- m元树：每个内点<u>至多</u>有m个子女
  - 2元树也称为二叉树
- 完全m元树(*full* m-ary tree)
  - 每个内点<u>恰好</u>有m个子女
- 平衡：树叶都在h层或(h-1)层, h为树高。
- 有序：同层中每个顶点排定次序
  - 有序二叉树通常也简称为二叉树



根树的几个术语（续）

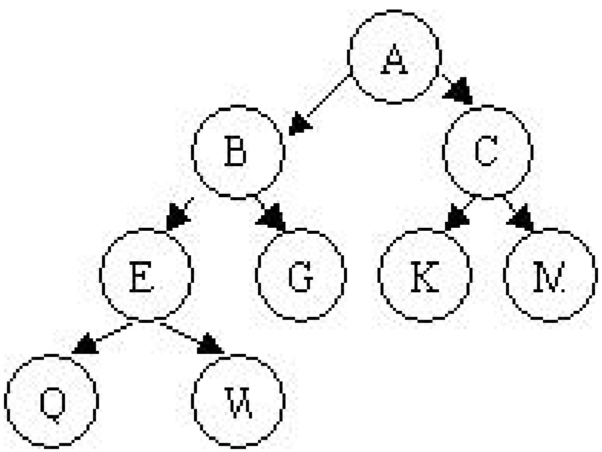
- 定义：设T是根树，T中任一顶点v及其所有后代的导出子图显然也是根树(以v为根)，称为T的根子树。
- 有序二叉树的子树分为左子树和右子树

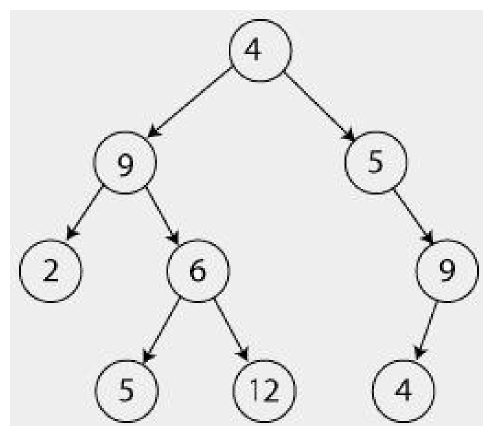
即使不是完全二叉数，也可以分左、右，必须注意顶点位置

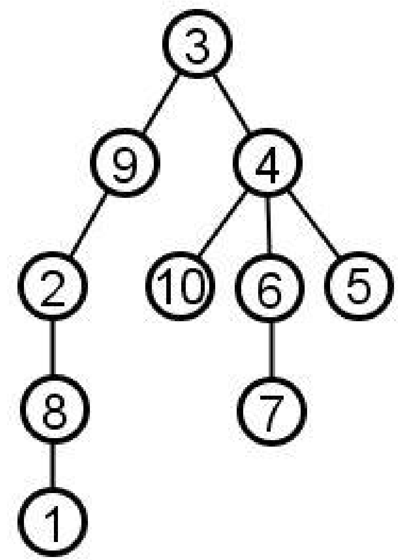


根树（举例）

- 树的高度、各顶点所处的层数
- 完全、平衡







完全m元树的顶点数

- 设T是完全m元树,
  - 若T有n个顶点, 则有$i=(n-1)/m$个内点和$l=[(m-1)n+1]/m$个树叶.
  - 若T有i个内点，则有$n=mi+1$顶点和$l=(m-1)i+1$个树叶.
  - 若T有l个树叶，则有$n=(ml-1)/(m-1)$ 个顶点和$i=(l-1))/(m-1)$ 个内点.

$n-1 = m\times i$ （入度总数=出度总数）

$n = i + l$ （顶点分为内点和树叶）

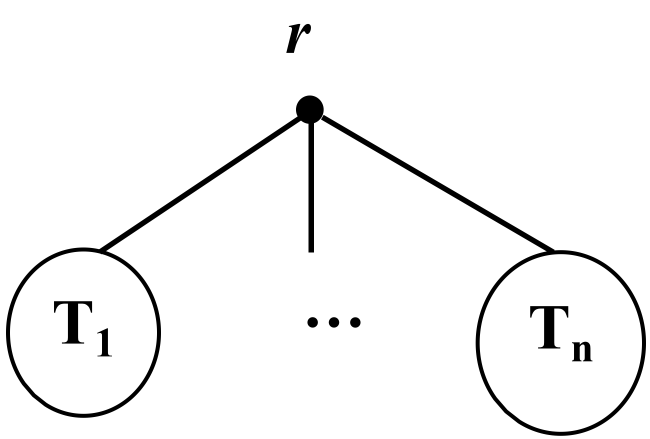
高度为h的m元树的顶点数

- 高度为h的m元树最多有个m^h个树叶。
  - 按照高度h进行归纳证明。（第1层顶点最多为m个）
- 若高度为h的m元树有l个树叶，则$h \geq \lceil \log_m l \rceil$.
  - 如果这棵树是完全的且平衡的，则有$h = \lceil \log_m l \rceil$.

$$m^{h-1} < l \leq m^h$$

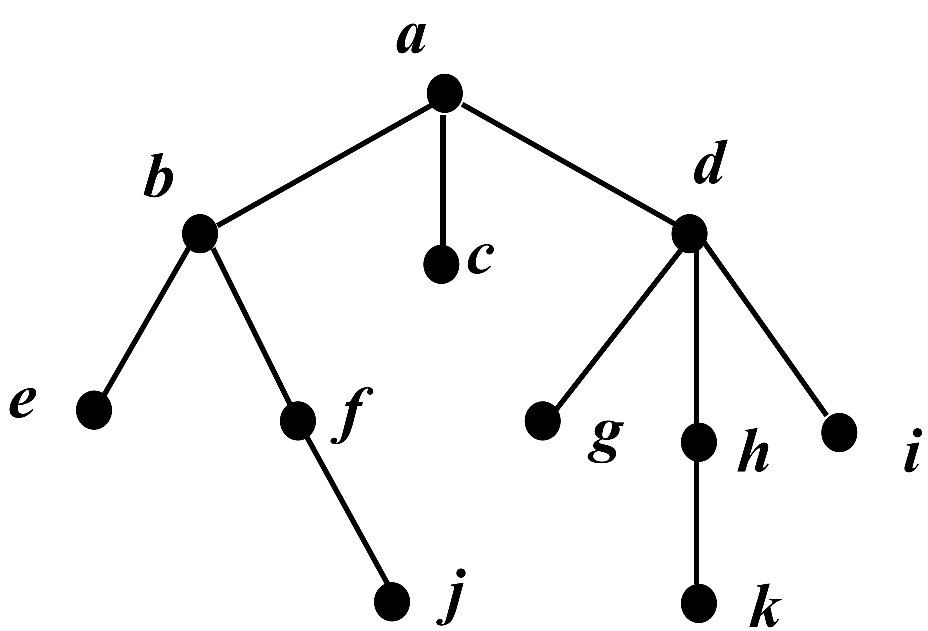
有序根树的遍历

- 前序遍历 （preorder）
  - T只包含根r，则为 r；
  - T的子树为$T_1, \ldots, T_n$, 则为 r, preorder(T_1), …, preorder(T_n)



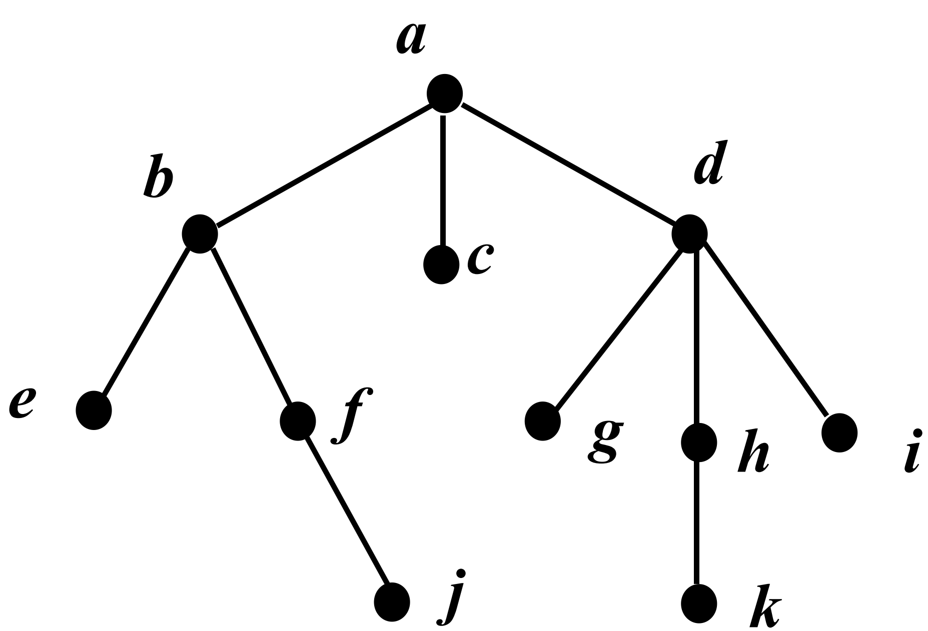
有序根树的遍历

- 前序遍历 （preorder）



有序根树的遍历

- 后序遍历 （postorder）



有序根树的遍历

- 中序遍历 （inorder）//先访问第一棵子树