布尔代数

离散数学

马晓星
南京大学·计算机科学与技术系

提要

- 历史背景
  - 逻辑演绎的代数化
- 布尔代数
  - 公理化的代数系统
  - 有限布尔代数的表示
- 逻辑电路
  - 基于布尔代数的电路设计与简化

历史背景

几何
Euclid
300 BC

→ 解析几何
René Descartes
1637

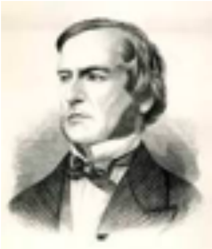
逻辑
Aristotle

→ 布尔的代数
George Boole

→ 公理化的布尔代数
Edward V. Huntington

→ 逻辑电路分析
Claude Shannon

385-323 BC



1854

1904

1938

推荐参考 Prof. Wildberger的Youtube频道 *Insights into Mathematics*

历史背景

AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC
AND PROBABILITIES.

BY

GEORGE BOOLE, LL.D.

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN QUEEN'S COLLEGE, CORK.

LONDON:
WALTON AND MABERLY,
UPPER GOWER-STREET, AND IVY-LANE, PATERNOSTER-ROW.
CAMBRIDGE: MACMILLAN AND CO.
1854.

George Boole
1815–1864

George Boole的基本想法

- 变量 $X, Y, Z, \ldots$ 代表事物的类别 (一个事物要么属于要么不属于一个类别)

乘法

例: 若X是“羊”，Y是“白的”，则XY是“白羊”.

$$XY = YX$$

且

$$XX = X$$

加法

例: 若X是“男人”，Y是“女人”，则$X + Y$是“男人或女人”.

$$X + Y = Y + X$$

且

$$X + X = X$$

组合

例: 若X是“男人”，Y是“女人”，Z是“中国人”

则$Z(X + Y)$是“中国男人或女人”.

$$Z(X + Y) = ZX + ZY$$

A是B : $AB = A$, A不是B : $AB = \mathbf{0}$,

George Boole的基本想法

- 前提:
  - 上帝保佑吃饱了饭的人民. $(YZ)X = YZ$
    - X: 被上帝保佑; Y: 吃饱了饭; Z: 人民.
  - 中国人是人民. $CZ = C$
    - C: 中国人
  - 中国人吃饱了饭. $CY = C$
- 推导: 上帝保佑中国人. $CX = C$

$$C = CC = (CY)(CZ) = (CC)(YZ) = CYZ$$
$$= C\big((YZ)X\big) = (CYZ)X = CX$$

公理化的抽象代数系统

布尔代数

布尔代数的抽象定义

- 一个**布尔代数**是一个集合B，它有二元运算$\vee$和$\wedge$、一元运算$\bar{\ }$以及特殊元素**0**和**1**，且$\forall x, y, z \in B$，下列性质成立：

$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$	结合律
$x\wedge y=y\wedge x$ $x\vee y= y\vee x$	交换律
$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$	分配律
$x\vee 0 = x$ $x\wedge 1 = x$	同一律
$x\vee\bar{x}=\mathbf{1}$ $x\wedge\bar{x}=\mathbf{0}$	补　律

布尔恒等式

等 式	名 称
$x+(x\cdot y)=x$ $x\cdot(x+y)=x$	吸收律
$x+x=x$ $x\cdot x=x$	幂等律
$x+1=1$ $x\cdot 0=0$	支配律
$\overline{\overline{x}}=x$	双重补律
$\overline{(x\cdot y)}=\overline{x}+\overline{y}$ $\overline{(x+y)}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	德摩根律

布尔代数的性质

- 结合律、交换律、分配律、同一律、补律
  - 蕴含：支配律、吸收律、幂等律、双重补律、德摩根律
- 证明支配律： $\forall x \in \mathrm{B},\ x \vee 1 = 1,\ \ x \wedge 0 = 0$
  - $x \vee 1 = 1 \wedge (x \vee 1) = (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee 1) = x \vee (\bar{x} \wedge 1) = x \vee \bar{x} = 1$
  - $x \wedge 0 = 0 \vee (x \wedge 0) = (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0) = x \wedge (\bar{x} \vee 0) = x \wedge \bar{x} = 0$

布尔代数的性质

- 证明吸收律
  - $x \vee (x\wedge y) = (x\wedge 1) \vee (x\wedge y) = x \wedge (1\vee y) = x\wedge 1 = x$
  - $x \wedge (x\vee y) = (x\vee 0) \wedge (x\vee y) = x \vee (0\wedge y) = x\vee 0 = x$
- 证明幂等律
  - $x \wedge x = x \wedge (x\vee 0) = x$（应用同一律、吸收律）

$\boxed{\text{吸收律}} \Rightarrow \boxed{\text{幂等律}}$

$x \wedge x = x \wedge (x \vee (x\wedge x)) = x$（两次应用吸收律）

布尔代数的性质

- 引理：$\forall x, y, z \in B$, 若 $x\wedge z = y\wedge z$ 且 $x\vee z = y\vee z$， 则 $x = y$
  - $x = x\vee(x\wedge z) = x \vee (y\wedge z) = (x \vee y)\wedge (x \vee z)$ //吸收律/分配律
  - $y = y\vee(y\wedge z) = y \vee (x\wedge z) = (y \vee x)\wedge (y \vee z)$
- 证明双重补律
  - $x \vee \bar{x} = 1 = \bar{\bar{x}} \vee \bar{x}$
  - $x \wedge \bar{x} = 0 = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{x}$
  - $x = \bar{\bar{x}}$

布尔代数的性质

- 证明德摩根律：$\forall\ x, y\in B$, $\overline{(x\wedge y)}=\overline{x}\vee\overline{y}$;
  - 根据补元的唯一性，只需证明$\overline{x}\vee\overline{y}$是$x\wedge y$的补元。
  - $(x\wedge y)\vee(\overline{x}\vee\overline{y})=(x\vee\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(y\vee\overline{x}\vee\overline{y})=1$
  - $(x\wedge y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})=(x\wedge y\wedge\overline{x})\vee(x\wedge y\wedge\overline{y})=0$

布尔代数的性质

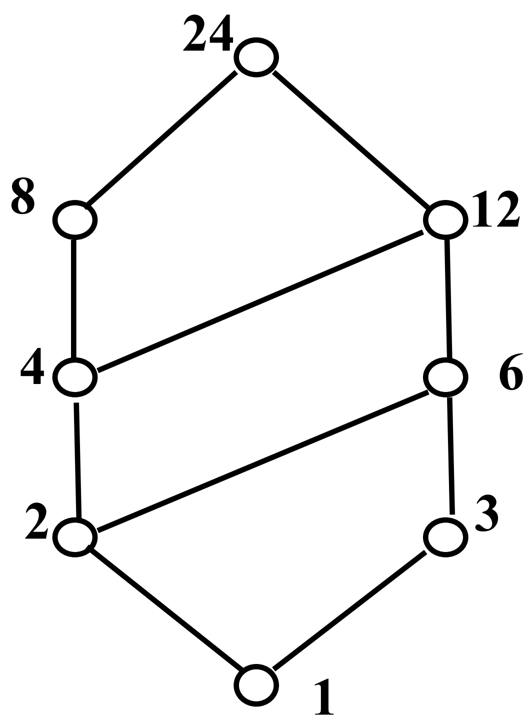
结合律 交换律 分配律 同一律 补律

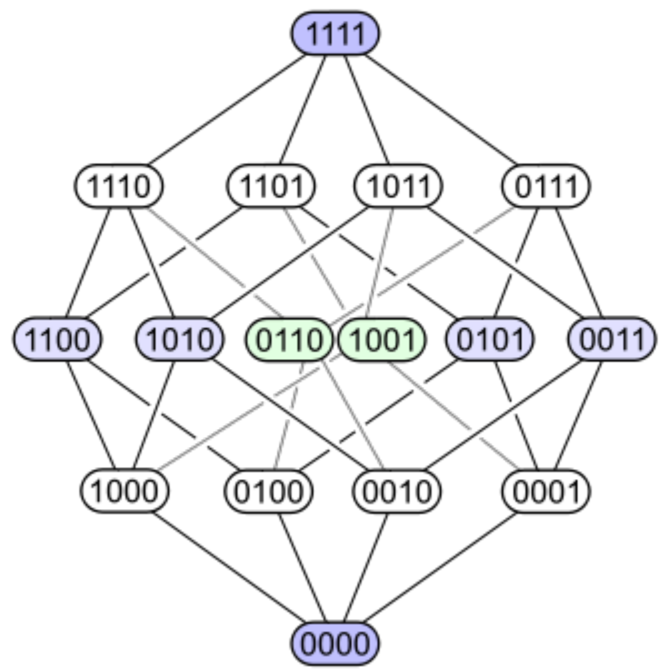
吸收律 幂等律 支配律 双重补律 德摩根律

格

布尔代数：有补的分配格

下列格是否构成布尔代数?





蚊(铁句(铁昕(扶皲 恘

布尔代数（举例）

- $B = (\{0,1\}, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$为布尔代数
  - 布尔和: 1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0
  - 布尔积: 1·1=1, 1· 0=0, 0·1=0, 0·0=0
  - 补: $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$
- $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in B, i = 1, \ldots, n\}$构成布尔代数

  记 $\boldsymbol{x} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{y} = (b_1, \ldots, b_n)$,. $a_i \in B, b_i \in B$
  - $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (c_1, \ldots, c_n)$, where $c_i = a_i \wedge b_i$
  - $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = (d_1, \ldots, d_n)$, where $d_i = a_i \vee b_i$
  - $\overline{\boldsymbol{x}} = (e_1, \ldots, e_n)$, where $e_i = a_i$
- A的幂集构成一个布尔代数$(\rho(A), \cap, \cup, \sim, \emptyset, A$）

B_n 是 n 个 B 的乘积

- $B_1 = (\{0,1\}, +, \cdot, \overline{\ \ }, 0, 1)$ 记为B.
- 对于 $n \geq 1$, $B_n = B \times B \times \ldots \times B$, 在$B \times B \times \ldots \times B$ 上定义乘积偏序如下

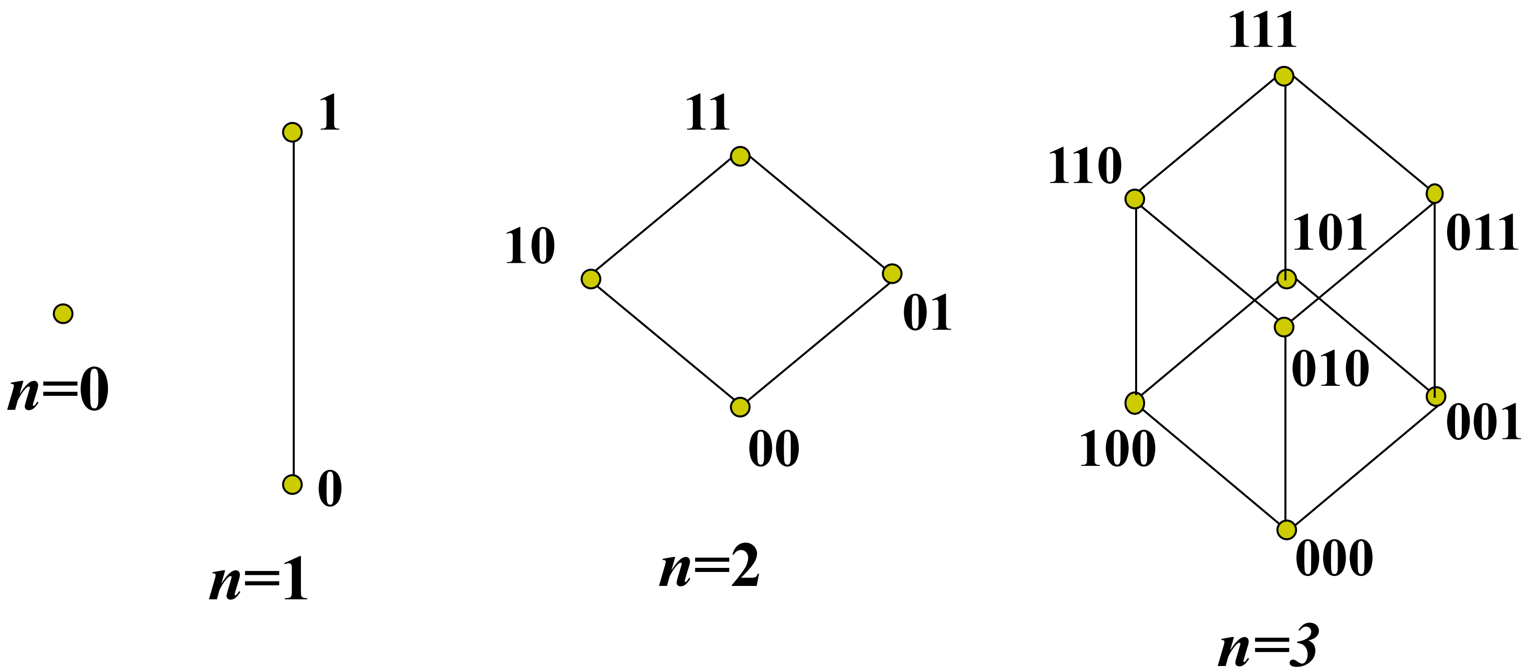
$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$$

当且仅当对于每个k, $0 \leq k \leq n$, 都有

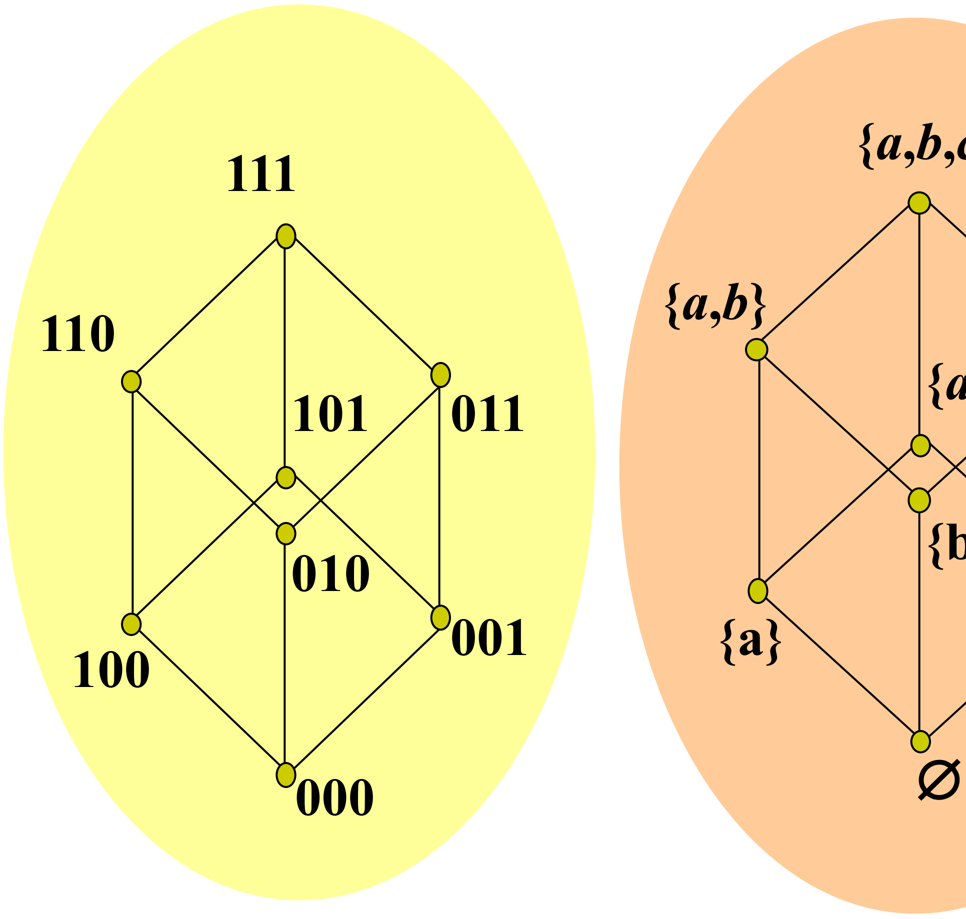
$$x_k \leq y_k$$

布尔代数

- B^n与含n个元素的集合的幂集代数同构.



布尔代数



有限布尔代数的表示定理

格中的原子

- 定义：设L是格，L中有最小元(全下界)$\mathbf{0}$，给定元素$a\neq\mathbf{0}$, 若$\forall x\in L$, 有：

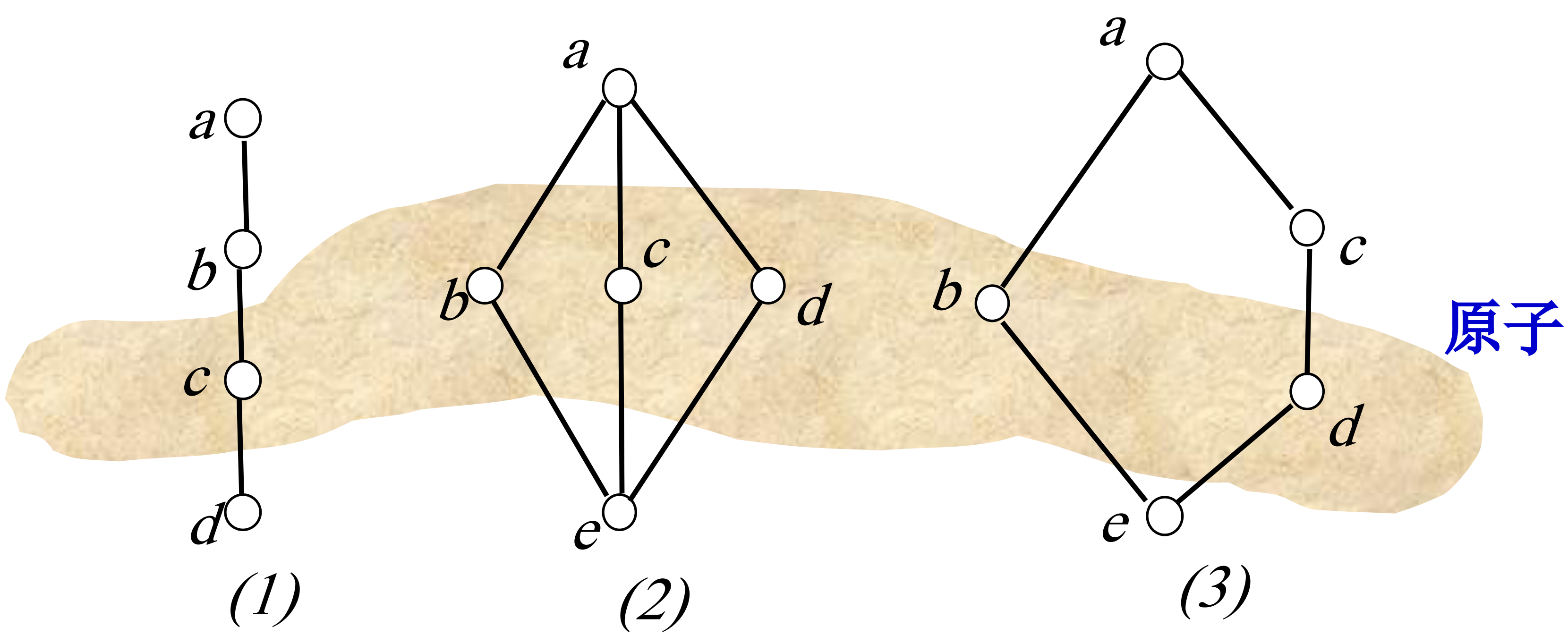
  $$\mathbf{0}\prec x\preccurlyeq a \Rightarrow x=a$$

  则称a是L中的**原子**

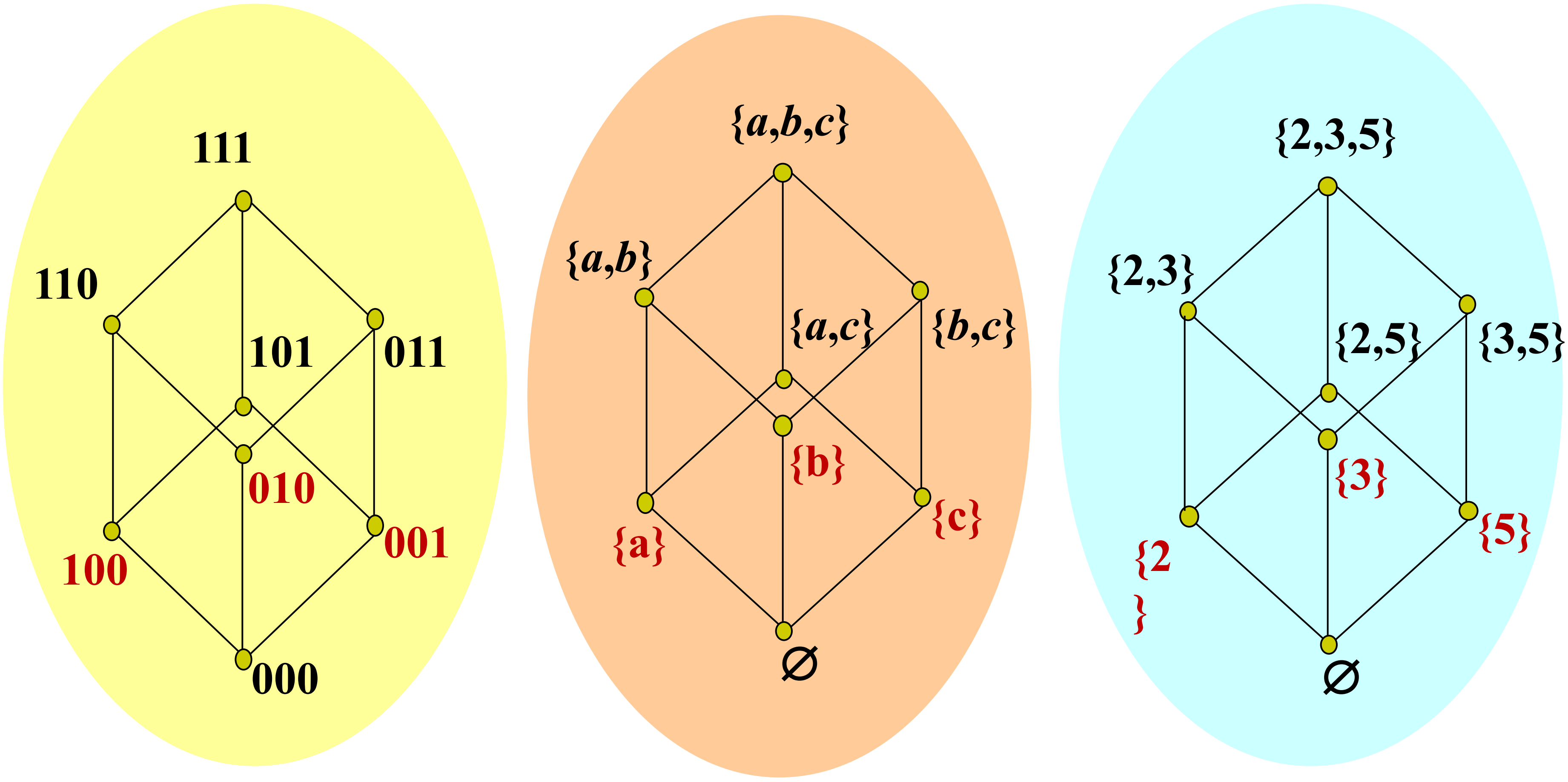
  （原子是覆盖最小元的那些元素。）

- 设a, b是格L中的原子，若$a\neq b$, 则$a\wedge b=\mathbf{0}$
  - 假设$a\wedge b\neq 0$, 注意：$a\wedge b\preccurlyeq a$且$a\wedge b\preccurlyeq b$，由原子的定义：$a\wedge b=a$, $a\wedge b=b$, $\therefore a=b$, 矛盾。

格中的原子



布尔代数中的原子



有限布尔代数的表示定理

- 任一有限布尔代数B **同构于** B中所有的原子构成的集合A的幂集代数系统$P(A)$。(Marshall H. Stone 1936)

  即 $(B,\wedge,\vee,\bar{\ },\mathbf{0},\mathbf{1}) \cong (P(A),\cap,\cup,\tilde{\ },\emptyset,A)$

- 备注（关于无限布尔代数）
  - 2^N，即无限的0/1序列$x_0, x_1, x_2, \ldots$
    - 这一无限布尔代数有原子
  - 2^N的一个子代数：周期序列（Periodic sequence）
    - 这个布尔代数没有原子

有限布尔代数的表示定理

- 证明概要

令$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$为B中各个原子的集合. 可证如下两个结论:

1. B中每个非$\mathbf{0}$元素x_i都是其下所有原子$a_{i_1},a_{i_2},\dots a_{i_k}$,的并.

   记$b=a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k}$, 这就是要证明$b\preccurlyeq x_i$, $x_i\preccurlyeq b$.

   由于各$a_{i_t}\preccurlyeq x_i$, 可得前者。对于后者，可根据$x\wedge\bar{y}=\mathbf{0}$ ↔ $x\preccurlyeq y$且$x_i\wedge\bar{b}$=$\mathbf{0}$ 得到。(若$x_i\wedge\bar{b}\neq\mathbf{0}$必有原子$c$, $c\preccurlyeq x_i$, 这说明c就是某a_{i_t}; 但$c\preccurlyeq\overline{a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k}}$, 矛盾.)

2. x_i的上述并表示是唯一的.

   假设$x_i=a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k}=a_{j_1}\vee a_{j_2}\vee\cdots\vee a_{j_t}$; 不妨假设$a_{j_1}$不出现在前一种表示中，则

   $\mathbf{0}=a_{j_1}(a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k})=a_{j_1}(a_{j_1}\vee a_{j_2}\vee\cdots\vee a_{j_t})=a_{j_1}$.

由这两个结论可以容易地构造 B 与 P(A) 的布尔代数同构.

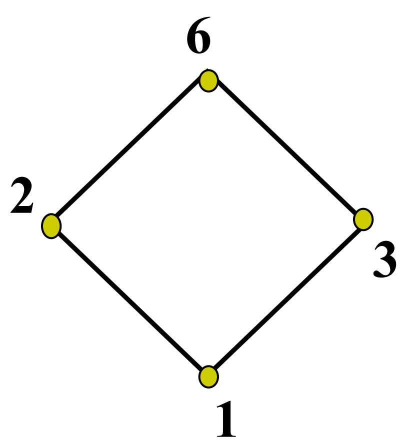
有限布尔代数基数是2的整数次幂

- 任何有限布尔代数的基数为2^n, n是自然数。
  - 设B是有限代数系统，A是B中所有原子的集合。

    则：$B \cong P(A)$, $\therefore |B|=|P(A)|=2^{|A|}$
- 等势的有限布尔代数均同构

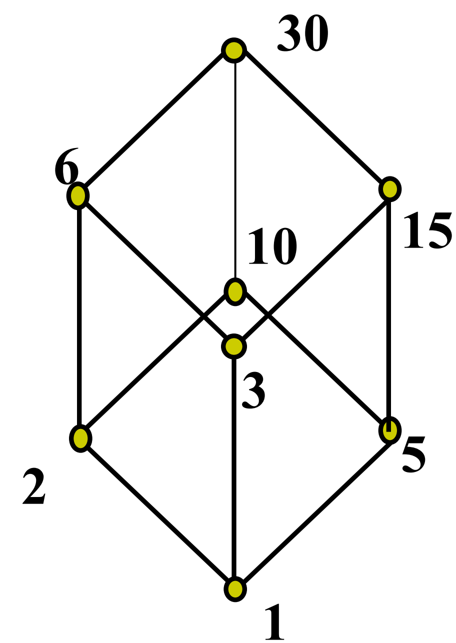
例如

D_n 是 n 的所有正因子集合及其上的整除关系构成的偏序集.



D_6

D_{20} 不是布尔代数



D_{30}

D_n 何时构成布尔代数?

- 若 $n=p_1p_2\ldots p_k$, 其中 p_i 为各不相同的素数, 则 D_n 是一个布尔代数.
  - 令 $S=\{p_1, p_2, \ldots p_k\}$, 对于$S$的每个子集 T, 令 a_T 为 T中素数的乘积.
    - 注意n的任何一个因子必为某个T对应的 a_T , 且每个T对应的 a_T 均是n的因子.
  - 对于任意子集合V,T, $V\subseteq T$当且仅当 a_V/a_T ; 且 $a_V \wedge a_T = \gcd(a_V, a_T) = a_{V\cap T}$; $a_V \vee a_T = \mathrm{lcm}(a_V, a_T) = a_{V\cup T}$;
  - 于是可定义 $f: P(S)\to D_n$, $f(T)= a_T$;
    易验证这是 $P(S)$ 到 D_n 的一个同构映射.

D_n 何时不构成布尔代数?

- 若 n 为一个正整数, 且有素数 p 使得 $p^2|n$, 则 D_n 不是一个布尔代数.
- 证明概要
  - 由于 $p^2|n$, 则有某个正整数 q 使得 $n= p^2q$. 注意到 p 也是 D_n 的元素，若 D_n 是布尔代数，p 当有补元 p', 使得 GCD(p, p')=1 且 LCM(p, p')=n. 于是 $pp'=n$, 也就是 $p'=pq$. 从而 GCD(p, p')=p, 矛盾.

布尔函数

- 令B={0, 1}, B^n={(x_1, …, x_n)| x_i∈B, i=1, …, n}, 从B^n到B的函数称为n元布尔函数， f: B^n→B。
- 取值范围为B的变元称为布尔变元， x∈B。
- n元布尔函数的个数：$2\uparrow 2^n$ (2^2, 2^4, 2^8, …)
- 三种说法
  - n元布尔函数 f: B^n→B
  - 有n个输入和一个输出的逻辑电路
  - <u>含n个命题变量的命题逻辑表达式</u>

布尔函数上的运算

- 布尔和
  - $(f+g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$
- 布尔积
  - $(f\,g)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$
- 补函数
  - $\overline{f}\,(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$

布尔代数

- n元布尔函数全体也构成一个布尔代数
  - 布尔和
  - 布尔积
  - 补函数
  - 全取0的函数、全取1的函数

基于布尔代数的

逻辑电路建模与分析

香农的硕士论文

A SYMBOLIC ANALYSIS

OF

RELAY AND SWITCHING CIRCUITS

by

Claude Elwood Shannon

B.S., University of Michigan

1936

Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of

MASTER OF SCIENCE

from the

Massachusetts Institute of Technology

1940

Signature of Author______________________________

Department of Electrical Engineering, August 10, 1937

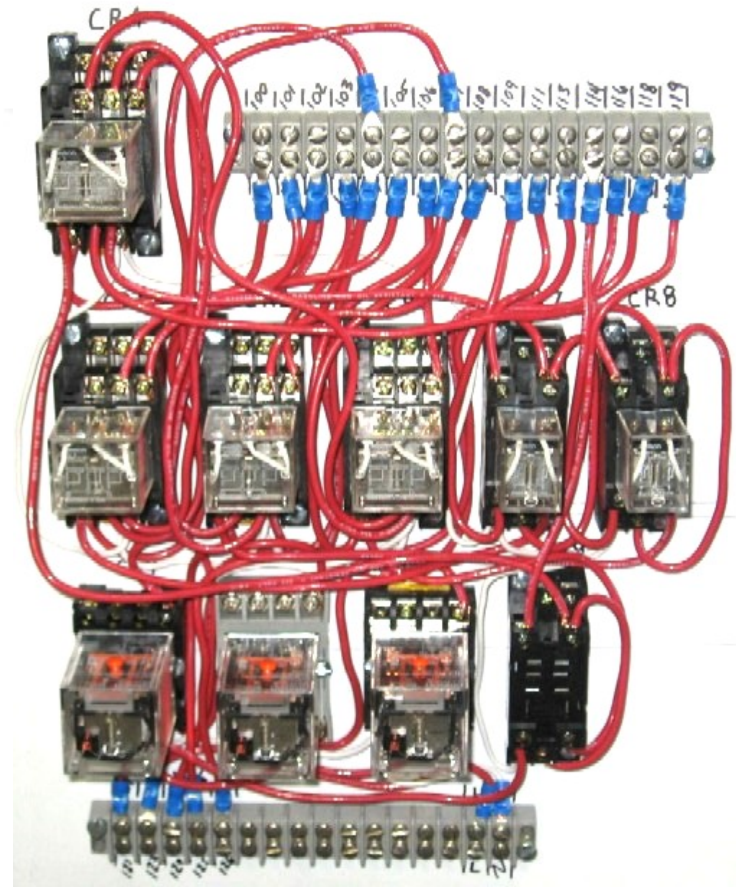
Signature of Professor
in Charge of Research__________________________

Signature of Chairman of Department
Committee on Graduate Students__________________

Claude Shannon
1916–2001

香农的硕士论文

继电器与开关电路



香农的硕士论文

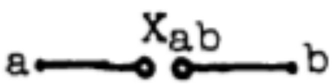


Fig. 1

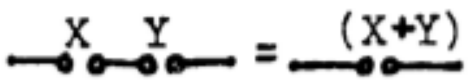


Fig. 2

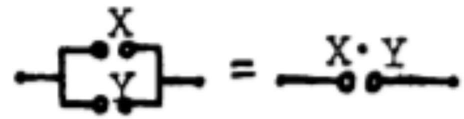
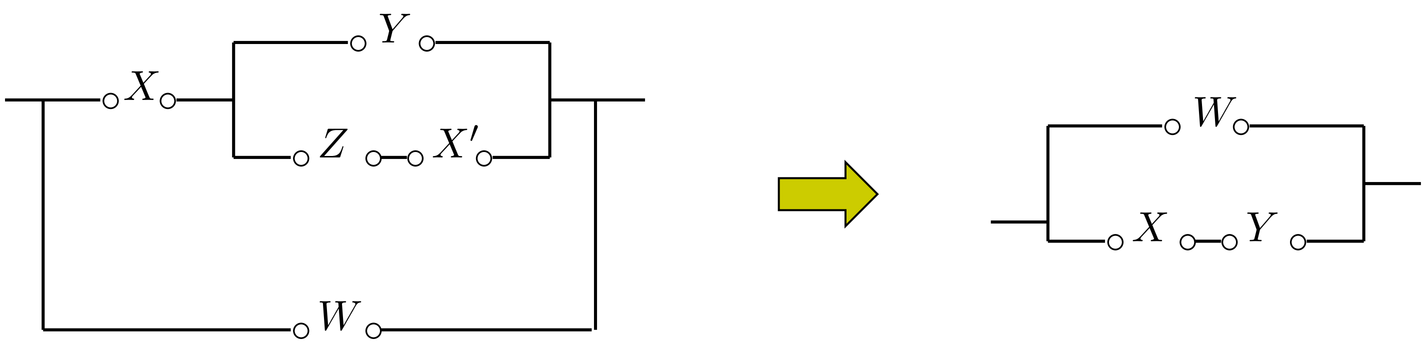


Fig. 3

注意 0 1 描述的是阻抗的有无，不是电路的通断

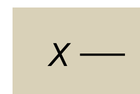
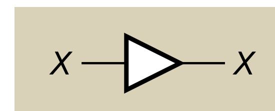
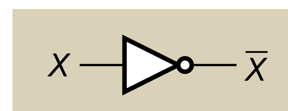
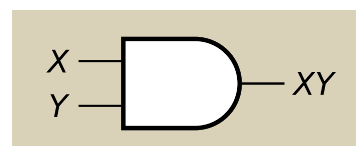
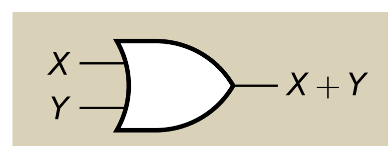
0 · 0 = 0	闭合电路与闭合电路的并联是闭合电路
1 + 1 = 1	开放电路与开放电路的串联是开放电路
1+0=0+1=1	
0 · 1 =1 · 0 = 0	
0 + 0 = 0	
1 · 1 = 1	

香农的硕士论文



$$W\big(X+Y(Z+X')\big)=W(X+Y)\big(X+(Z+X')\big)=W(X+Y)$$

换成现代三极管器件

Operator	**Math**	**Engineer**	**Schematic**
Copy	x	X	 or 
Complement	$\neg x$	$\overline{X}$	
AND	$x \wedge y$	XY or $X \cdot Y$	
OR	$x \vee y$	$X + Y$	

布尔代数与数字逻辑电路设计

- 一个有n个输入、一个输出的逻辑电路对应于一个用含n个布尔变量的布尔代数表达式定义的布尔函数 f: $B^n \to B$。
- 布尔函数的表达式：{和、积、补}是函数完全的。
- 用门电路元件（并、交、否）搭出所需的逻辑电路。
  - 电路极小化：卡诺图、奎因-莫可拉斯基

回顾：命题表达式的主析取范式

- 求 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （析取范式）

$$\neg p\wedge r\leftrightarrow\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

一个逻辑电路设计的例子

- 举重比赛中三个裁判中两个或者两个以上判定为成功则该次成绩有效，设计一个电子打分器，输出一个结果："成功"或"失败"。

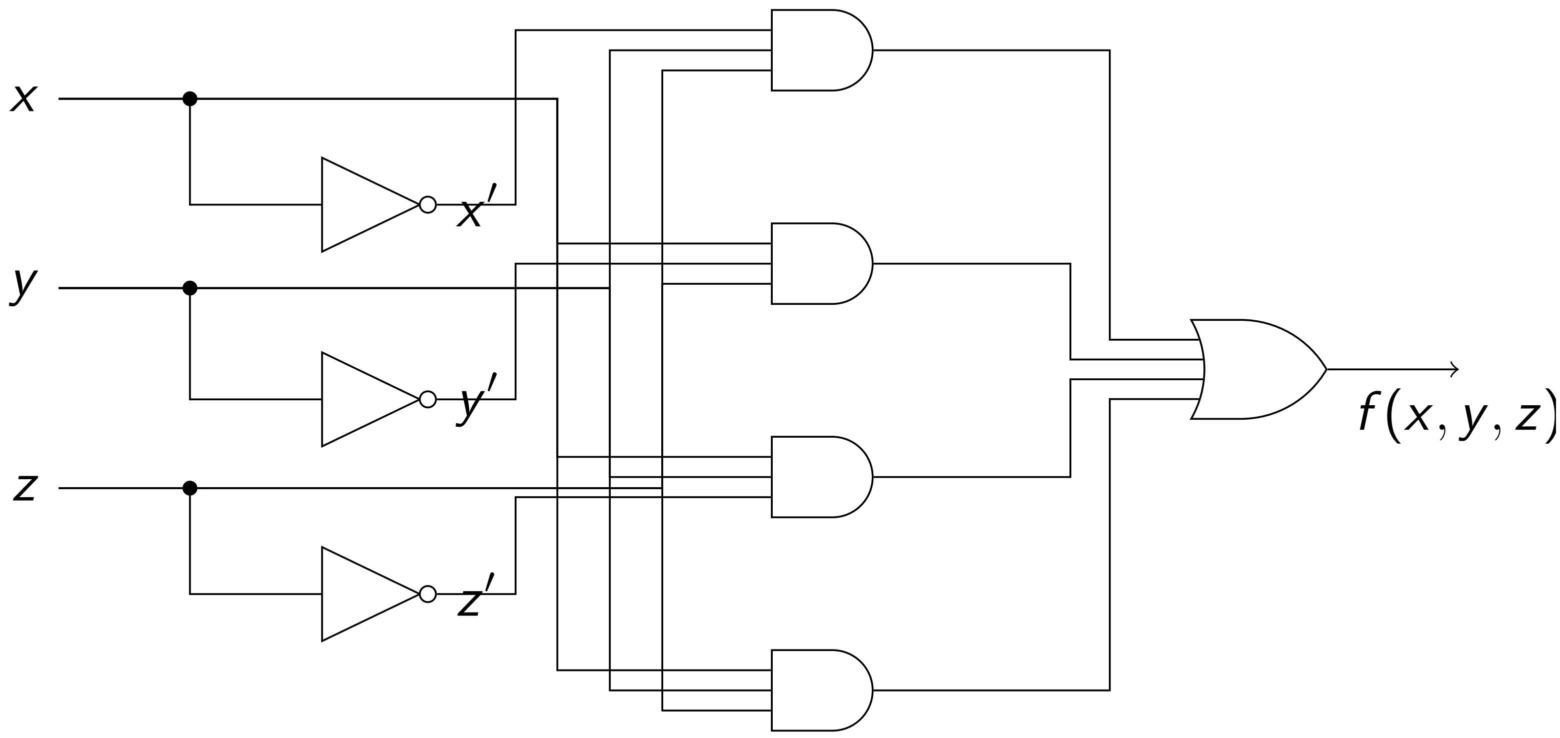
定义一个布尔函数: $f(x,y,z)=1$ iff. x,y,z 至少有两个为1。

相应的布尔表达式:

$(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee$
$(x\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge y\wedge z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

一个逻辑电路设计的例子



$$(x' \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z)$$

用卡诺图化简

	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

	$y' \wedge z'$	$y' \wedge z$	$y \wedge z$	$y \wedge z'$
x'	$x' \wedge y' \wedge z'$	$x' \wedge y' \wedge z$	$x' \wedge y \wedge z$	$x' \wedge y \wedge z'$
x	$x \wedge y' \wedge z'$	$x \wedge y' \wedge z$	$x \wedge y \wedge z$	$x \wedge y \wedge z'$

用卡诺图化简

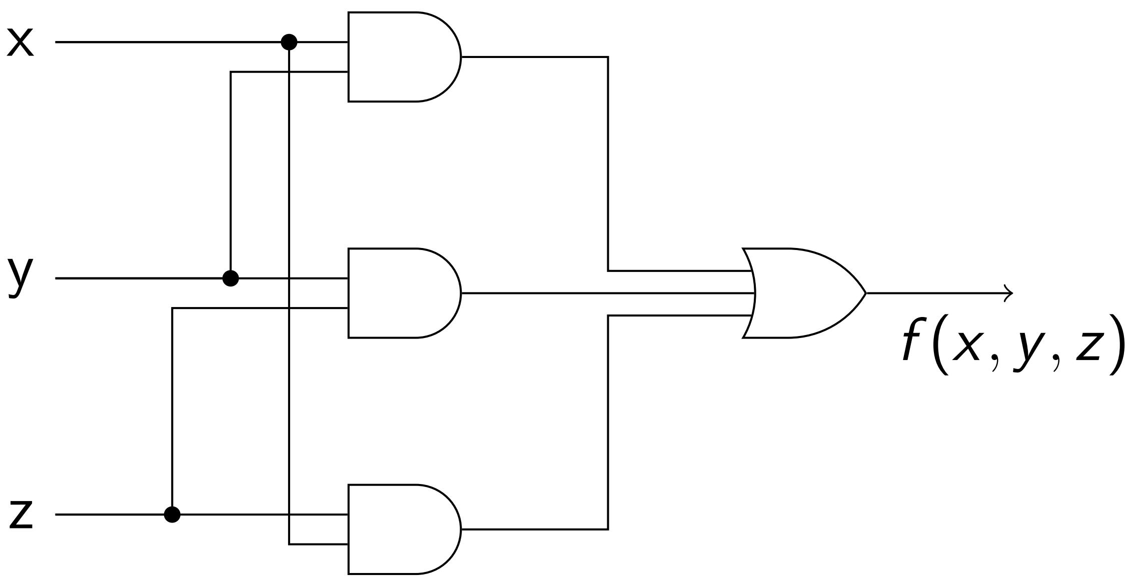
x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$y'z'$	$y'z$	yz	yz'
x'	0	0	1	0
x	0	1	1	1

$$f(x,y,z) = (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

化简后的电路

$$f(x,y,z) = (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \vee (x \wedge y)$$



小结

- 历史背景
  - 从布尔到香农
- 布尔代数
  - 布尔代数的定义和性质
  - 布尔代数表示定理
- 数字逻辑电路的建模与分析