

# 谓词逻辑的语法和语义

Wang-Zhou Dai

## I 一阶逻辑的语法 (syntax)

### 一阶逻辑语言

一阶逻辑语言  $\mathcal{L}$  包括:

1. 括号: “(” 和 “)”;
2. (命题) 联词;
3. 量词符号:  $\forall$ ;
4. 变元:  $v_1, v_2, \dots$ ;
5. 常元:  $c_1, c_2, \dots$ ;
6. 函数符号:  $f/n$  表示  $n$  元函数;
7. 谓词符号:  $P/n$  表示  $n$  元谓词;
  - 等号 (一种特殊的谓词)。

### 项 (Term)

1. 每个常元是一个项;
2. 每个变元是一个项;
3. 如果  $t_1, \dots, t_n$  是项, 且  $f$  是一个  $n$  元函数符, 那么  $f(t_1, \dots, t_n)$  也是项。

### 合式公式 (Well-formed formula)

1. 如果  $t_1, \dots, t_n$  是项, 且  $P$  是一个  $n$  元谓词, 那么  $P(t_1, \dots, t_n)$  是一个合式公式, 特别地, 我们称这种公式为“原子公式”。例如  $=(t_1, t_2)$  就是一个原子公式, 一般记为  $t_1 = t_2$ ;
2. 如果  $\varphi$  和  $\phi$  是合式公式, 那么  $(\neg\varphi)$  和  $(\varphi \rightarrow \phi)$  也是合式公式;
3. 如果  $\varphi$  是合式公式, 而  $v_i$  是变元, 那么  $\forall v_i \varphi$  也是。
  - $\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$

## 2 一阶逻辑的语义 (semantics)

在 1927 年至 1929 年期间, 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983) 在华沙大学的逻辑研讨会上证明了几个涉及后来被称为“语义学”的概念的结果, 特别是关于结构中可定义性和“真” (truth) 的概念。塔斯基在试图将研讨会中呈现的结果形式化时遇到了某些困难, 这促使他寻找一个精确的语义学概念理论。塔斯基说:

“很明显, 所有这些结果只有在接受 [真] 句子的具体而精确的定义作为研究基础后, 才能获得清晰的内容并得以准确地证明。”

## 结构 (structure)

一阶语言的一个**结构**  $\mathfrak{A}$  是定义域包括非逻辑符号和量词符号的函数，并且满足以下条件：

1.  $\mathfrak{A}$  给量词符号  $\forall$  指定一个非空集  $|\mathfrak{A}|$ ，称做  $\mathfrak{A}$  的**论域** (universe)；
2. 对每个  $n$ -元谓词符号  $P/n$ ， $\mathfrak{A}$  都指定一个  $n$ -元关系  $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$ ，即  $P^{\mathfrak{A}}$  是由论域中  $n$ -元组所组成的集合；
3. 对每个常数符号  $c$ ， $\mathfrak{A}$  都指定论域中  $|\mathfrak{A}|$  中的一个元素  $c^{\mathfrak{A}}$ ；
4. 对每个  $n$ -元函数符号  $f/n$ ， $\mathfrak{A}$  都指定一个论域  $|\mathfrak{A}|$  上的  $n$ -元函数  $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \mapsto |\mathfrak{A}|$ 。

**注：**关于“关系”和“函数”的介绍我们会在离散数学的后续课程中介绍。此外，由于结构  $\mathfrak{A}$  中没有规定变元的解释，因此无法讨论含自由变元的公式的真真假。

## 变元赋值

令  $\mathcal{V}$  是一阶语言  $\mathcal{L}$  中所有**自由变元**的集合， $\mathfrak{A}$  是  $\mathcal{L}$  的结构，所谓**赋值**  $s$  指的是任意由  $\mathcal{V}$  到  $\mathfrak{A}$  的论域上的函数  $s : \mathcal{V} \mapsto |\mathfrak{A}|$ 。

## 解释 (interpretation)

有了结构  $\mathfrak{A}$  和变元赋值函数  $s$ ，我们就可以对语言中本来“毫无意义”的字符串——合式公式  $\varphi$  进行解释，并尝试理解它是否为“真”。这里的定义是一阶逻辑真值理论的核心，它是由 Tarski 在 1933 年给出的。为简便起见这里不再给详细的数学定义，只给一个直观的讲解和一个简单的例子，更进一步的内容大家可以去搜寻相关资料，例如 <https://plato.stanford.edu/entries/tarski-truth/>。

直观上说， $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$  的含义如下：先把字符串中的谓词符号、函数符号、常数符号等按照结构  $\mathfrak{A}$  的规定来解释，把量词的论域限制在  $|\mathfrak{A}|$  上，把自由变元  $x$  解释成它的赋值  $s(x)$ ，从而把公式  $\varphi$  翻译成一个关于结构  $\mathfrak{A}$  的命题。利用我们关于  $\mathfrak{A}$  的知识，判断  $\varphi$  为真。

例如，固定一个语言  $\mathcal{L} = \{+, \cdot, =, 0, 1\}$ （想一想，哪些是常元？谓词？函数？它们应该如何解释？）。考察一阶语句  $\varphi \equiv \forall x (x \cdot x \neq 1 + 1)$ ，就它本身而言，它只是一个字符串，到现在位置尚不具有任何意义。只有当固定好一个  $\mathcal{L}$  的结构时，才能决定它的真假。就  $\varphi$  而言，它在有理数域  $\mathbb{Q}$  中为“真”，在实数域  $\mathbb{R}$  中为“假”，至于为什么这样，则是我们关于数学的知识告诉我们的。

## 3 语义蕴涵与语法蕴涵

有了上面的讨论，我们现在可以讨论一阶逻辑中的语义蕴涵和语法蕴涵。直观上来看，二者的区别如下：

- **语义蕴涵**指在某些结构（甚至任意结构）下，公式之间关于“真”的一种蕴涵关系；
- **语法蕴涵**指在某个形式系统（如自然演绎系统、希尔伯特系统等）中，公式之间存在的一种推导（证明）关系，与结构——即符号串背后的语义——无关。

二者的数学定义如下。

### 语义蕴涵 (logically implies)

令  $\Gamma$  是一个公式集，且  $\varphi$  为一个公式。则称  $\Gamma$  语义蕴涵（逻辑蕴涵） $\varphi$ ，记作  $\Gamma \models \varphi$ ，如果对每一个结构  $\mathfrak{A}$  和每个赋值函数  $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathfrak{A}|$ ，都有：如果  $\mathfrak{A}$  和  $s$  满足  $\Gamma$  中所有公式（令  $\Gamma$  为真），则  $\mathfrak{A}$  和  $s$  也满足  $\varphi$ （令  $\varphi$  为真）。

**注 1：**对于命题逻辑而言，其真值往往不太依赖于“结构”的定义，而更直接地依赖于每个命题的真值（即真值表）。因此，在命题逻辑里的重言蕴涵（语义蕴涵）“ $\Gamma \models \varphi$ ”可以简单地理解为“所有令  $\Gamma$  为真的真值表项，必然令  $\varphi$  为真”。当“ $\models$ ”左边为空时，“ $\models \varphi$ ”表示“无论什么结构和变元赋值”（无论什么真值表项）下， $\varphi$  恒为真，即它是一个重言式。

**注 2：**对于每个一阶逻辑系统都去研究其语义结构实在太复杂，因此逻辑学家们提出了一种叫“Herbrand Structure”的结构，将关于结构的“真”简化为关于一阶逻辑中所有实例化项（ground terms，即不含变元的项）的讨论。关于 Herbrand Universe（它的论域）和 Herbrand Base（它的所有谓词关系）的介绍见：[https://en.wikipedia.org/wiki/Herbrand\\_structure](https://en.wikipedia.org/wiki/Herbrand_structure)。

**语法蕴涵 (proves)**

$\Gamma \vdash \alpha$  表示从  $\Gamma$  到  $\alpha$  存在一个**推演** (或者叫做“证明”), 当且仅当存在一个**有穷**公式序列

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

满足  $\alpha_n = \alpha$ , 并且对所有  $i \leq n$ :

1.  $\alpha_i \in \Gamma \cup \Lambda$ , 其中  $\Lambda$  为系统中的公理; 或者
2. 存在  $j, k < i$ ,  $\alpha_i$  是从  $\alpha_j$  和  $\alpha_k$  中由分离规则得到的 (即  $\alpha_k \equiv \alpha_j \rightarrow \alpha_i$  )。

**4 完全性 (completeness) 和可靠性 (soundness)**

理解了“ $\models$ ”和“ $\vdash$ ”的意义后, 我们能够更方便地理解数理逻辑里最重要的两个命题。

**完全性**

如果  $\Gamma \models \varphi$  则  $\Gamma \vdash \varphi$ 。

**可靠性**

如果  $\Gamma \vdash \varphi$  则  $\Gamma \models \varphi$ 。