集合及其运算

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 证明方法
  - 直接证明
  - 反证法
  - 分情形证明
  - 等价性证明
  - 存在性证明
  - 唯一性证明
  - 寻找反例

提要

- 基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集
- 集合运算
  - 交、并、补、广义交、广义并、笛卡尔乘积
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式
- 集合悖论与公理集合论

集合的定义

- 直观的定义
  - 一个集合是一组无序的对象，这些对象称为这个集合的元素或成员。
  - $a \in A$表示a是集合A的一个成员， $a \notin A$ 表示a不是A的成员。
- Georg Cantor的描述
  - [English translation] A set is a collection into a whole of <u>definite, distinct objects</u> of our intuition or our thought. The objects are called <u>elements (member) of the set</u>.

Naïve set theory，朴素集合论

集合的描述

- 外延法：罗列、枚举
  - V={a, e, i, o, u}
  - {1, 3, 5, 7, 9}

N={0, 1, 2, 3, …}

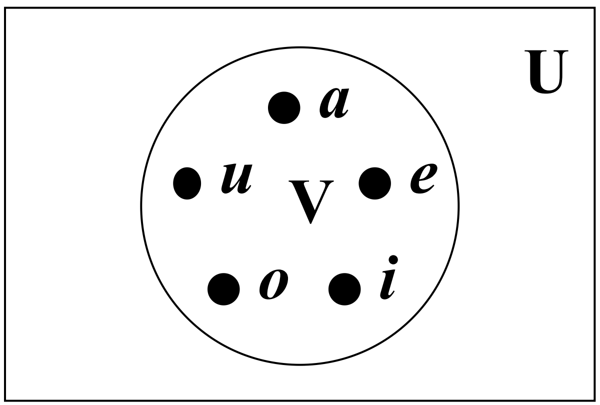
Z={…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

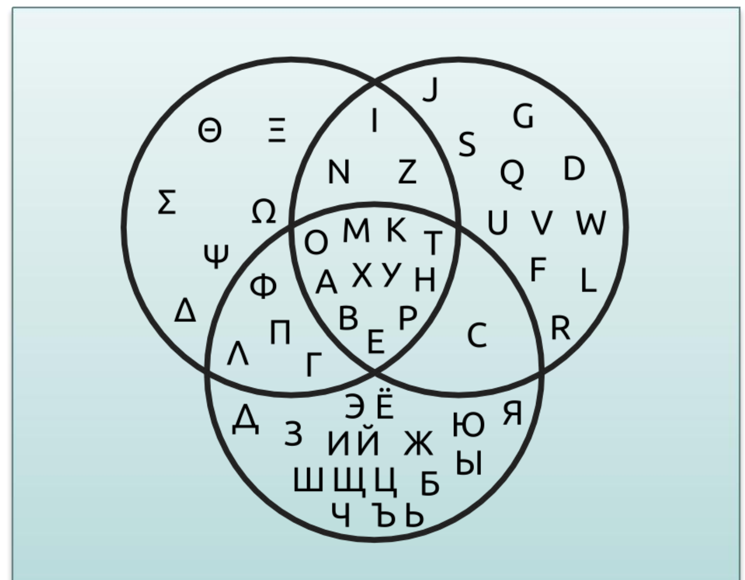
R: 实数集

- 概括法：
  - $\{x \mid P(x)\}$, P：某种思维、观察中总结出的对象性质
    - $a \in \{x \mid P(x)\} \leftrightarrow P(a)$
  - 例：$\mathbf{Z}^+=\{x\in\mathbf{Z} \mid x>0\}$，$\mathbf{Q}=\{p/q \mid p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{Z}, q\neq 0\}$，
    - $[a, b]=\{x\in\mathbf{R} \mid a\leq x\leq b\}$

集合的描述

- 文氏图（Venn diagrams ）//John Venn





希腊字母、拉丁字母、西里尔字母

集合相等、子集关系

- 定义：集合相等当且仅当它们有同样的元素
  - $A=B$ 当且仅当 $\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$ //外延原则
- 定义：集合A称为集合B的子集， 记作$A\subseteq B$
  - $\forall x\ (x\in A \rightarrow x\in B\ )$
  - 如果$A\subseteq B$, 但$A\neq B$，则A是B的真子集，记作$A\subset B$
- 定理：对任意集合A和B, $A=B$ 当且仅当:
  - $A\subseteq B$, 且$B\subseteq A$

子集关系的一个性质

- 证明：如果X$\subseteq$Y且Y$\subseteq$Z, 则X$\subseteq$Z
- 要证明：“对任意的 a, 如果 $a\in$X, 则 $a\in$Z”
- 证明：
  - 对任意的 $a\in$X
  - 根据已知的“X$\subseteq$Y”，可得：$a\in$Y
  - 根据已知的“Y$\subseteq$Z”，可得：$a\in$Z
  - 所以，$\forall a\,(a\in X \rightarrow a\in Z)$, 即X$\subseteq$Z

集合的大小

- 有限集合及其基数
  - 若S恰有n个不同的元素，n是自然数，就说S是有限集合，而n是S的基数，记作$|S|=n$。
- 无限集合
  - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

空集

- 存在一个没有任何元素的集合：空集Ø
- 关于空集的一些性质：
  - 空集是任何集合的子集。
    - Ø⊆A，即 $\forall x(x\in Ø \rightarrow x\in A)$
  - 空集是唯一的，可以用 Ø表示
    - 如果 $Ø_1, Ø_2$都是空集，则 $Ø_1\subseteq Ø_2$ 和 $Ø_2\subseteq Ø_1$ 均为真

关于空集的讨论

- 空集本身可以是一个对象，可以是某个集合的元素
  - $\varnothing \in \{\varnothing\}, \varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
- 事实上，我们从空集开始构造整个集合世界！
  - 自然数
  - 有理数
  - 实数（幂集运算）
  - …

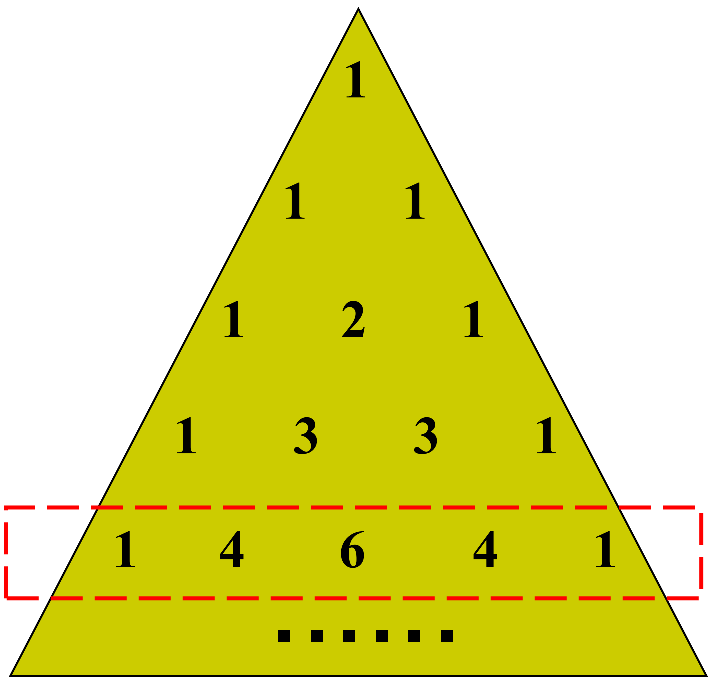
幂集

- S是一个集合，S的幂集是S的所有子集的集合
  - $\rho(S)=\{x \mid x \subseteq S\}$
- 举例
  - $\rho(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - $\rho(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$\mathcal{P}(X)$$
$$\mathcal{P}(X)$$
$$\mathscr{P}(X)$$
$$\wp(X)$$
$$\mathbb{P}(X)$$
$$\mathrm{P}(X)$$

If $\rho(A) \subseteq \rho(B)$, then $A \subseteq B$

有限集合的所有子集



如果 $|A|=n$, 则 $|\rho(A)|=2^n$

幂集的另一种记法: 2^A

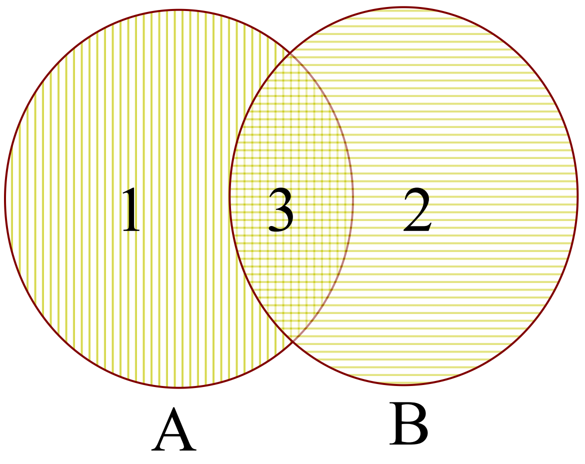
$C(4, 0)+ C(4, 1)+ C(4, 2)+ C(4, 3)+ C(4, 4) =2^4$

$A=\{1, .., n\}$

$\Sigma_{k=0\ldots n} C(n, k) =2^n$

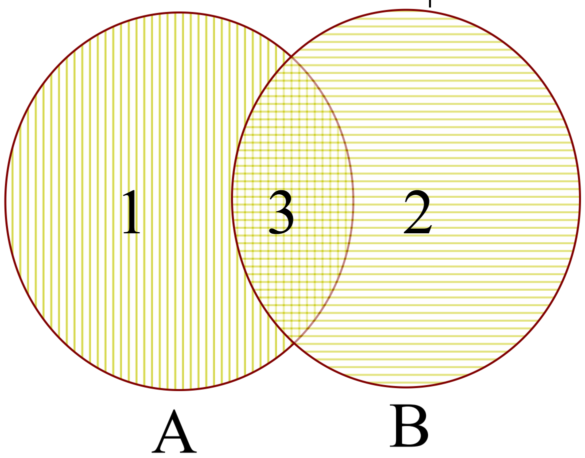
集合运算的定义

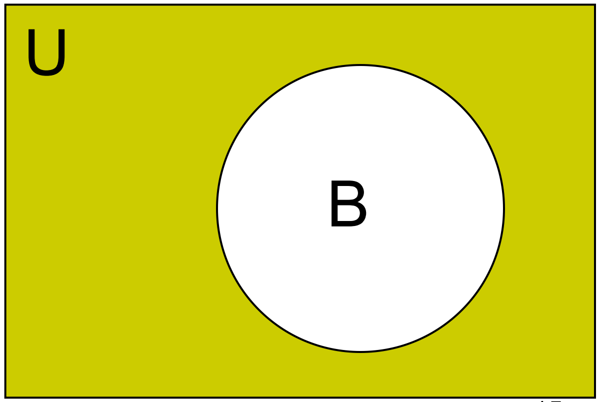
- 运算定义的基本方式：将结果定义为一个新的集合
  - 并：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
    - 并集: {1, 2 , 3}
  - 交：$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
    - 交集: {3}



相对补（差）

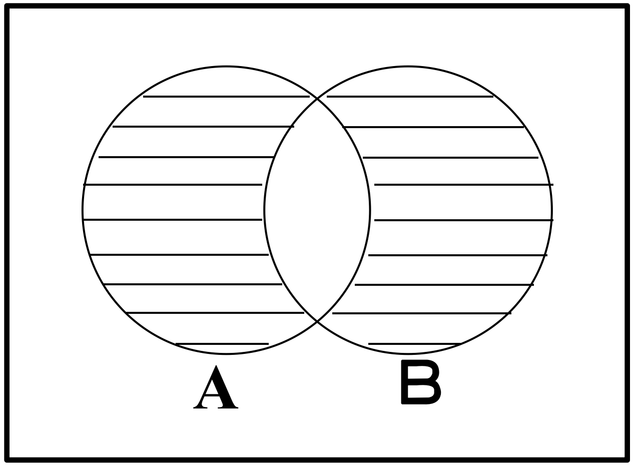
- B对于A的补集
  - $A\text{-}B=\{\, x \mid x\in A \wedge x\notin B \,\}$
- 举例，$A\text{-}B=\{1\}$
- 若有一个我们关心的“所有”对象的集合，称为全集，常用U表示，U-B称为B的“补集”，记为~B
  - $x\in{\sim}B \leftrightarrow x\notin B$





对称差

- 对称差
  - $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$
- 证明: $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$
  - $(A-B)\cup(B-A) \subseteq (A\cup B)-(A\cap B)$
  - $(A\cup B)-(A\cap B) \subseteq (A-B)\cup(B-A)$



广义并和广义交

- 广义并
  - 设A为集合， A的所有元素的并，记为$\bigcup A$; 定义为 $\bigcup A = \{x|\exists y(y \in A \wedge\ x \in y)\}$
- 广义交
  - 设A为非空集合， A的所有元素的交，记为$\bigcap A$, 定义为： $\bigcap A = \{x|\forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$
    - 注意：限制条件为A非空， $\bigcap \emptyset$无意义

运算的重要性质

- 包含关系下两个集合的最小上界和最大下界
  - 最小上界：
    - $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$ ----A和B的上界
    - 对任意X，若$A\subseteq X$, $B\subseteq X$,则$A\cup B\subseteq X$ ----最小上界
  - 最大下界：
    - $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$ ----A和B的下界
    - 对任意X，若$X\subseteq A$, $X\subseteq B$,则$X\subseteq A\cap B$ ----最大下界

集合与谓词逻辑

- 在量化逻辑表达式中使用集合符号
  - $\forall x{\in}S(P(x))$代表$\forall x(x{\in}S\rightarrow P(x))$ $\qquad \forall_{x\in S} P(x)$
  - $\exists x{\in}S(P(x))$代表$\exists x(x{\in}S\wedge P(x))$ $\qquad \exists_{x\in S} P(x)$
  - 举例
    - $\forall x{\in}R(x^2{\geq}0)$: $\forall x(x{\in}R\rightarrow (x^2{\geq}0))$
    - $\exists x{\in}Z(x^2{=}1)$: $\exists x(x{\in}Z\wedge x^2{=}1)$
- 逻辑表达式的真值集合，$\{x{\in}D|\ P(x)\}$
  - 举例： $\{x{\in}Z|\ |x|{=}x\}$， $\{x{\in}Z|\ x^2 {=}2\}$， $\{x|\ x{\in}Z \wedge x^2 {=}2\}$

小练习

- 试证明：

$$\{x \in X | p(x)\} \subseteq \{x \in X | q(x)\} \leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} \big(p(x) \rightarrow q(x)\big)$$

笛卡尔乘积

- 有序偶：
  - 有序偶(a,b)=(x,y) 当且仅当 a=x, b=y
    - 实际上：(a,b)={{a},{a,b}}
- 集合A和B的笛卡尔乘积
  - $A\times B=\{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$
- 何种情形下，$A\times B=B\times A$
- 集合$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔乘积
  - $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1, a_2,\ldots, a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\ldots n\}$

集合相关命题的基本证明方式

- 直接使用集合包含、相等定义
  - $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

证明：

对任何x, 假设$x \in A$

由集合并定义：$x \in A \cup B$

由已知条件：$A \cup B = B$

$\therefore x \in B$

因此：$A \subseteq B$

基本证明方式

- 利用运算定义作逻辑等值式推演
  - 例：$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$$
\begin{aligned}
A-(B\cup C) &= \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\cup C\} \\
&= \{x \mid x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C)\} \\
&= \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C)\} \\
&= (A-B) \cap (A-C)
\end{aligned}
$$

等价的描述方式：

$$
\begin{aligned}
x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow (x\in A) \wedge (x\notin(B\cup C)) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \wedge x\notin C \\
&\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C) \\
&\Leftrightarrow (x\in(A-B)) \wedge (x\in(A-C)) \\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例：$A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$A\cap B=A\Rightarrow A-B=\varnothing$:

$A-B=\varnothing \Rightarrow A\cap B=A$:

$$A\cap B=(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)$$
$$=A\cap(B\cup\sim B)=A\cap U=A$$

基本证明方式

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例：已知$A\oplus B=A\oplus C$, 证明$B=C$

$$
\begin{aligned}
B &= \varnothing\oplus B \\
&= (A\oplus A)\oplus B \\
&= A\oplus(A\oplus B) \\
&= A\oplus(A\oplus C) \\
&= C
\end{aligned}
$$

集合恒等式（1）

等 式	名 称
$A\cup\varnothing=A$ $A\cap U=A$	恒等律
$A\cup U=U$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	支配律
$A\cup A=A$ $A\cap A=A$	幂等律
$\sim(\sim A)=A$	补集律
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	交换律

集合恒等式（2）

等 式	名 称
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	结合律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	分配律
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	德摩根定律
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	吸收律
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\varnothing$	补律

基本证明方式

- 利用成员表证明集合恒等式
  - $A\cup(A\cap B)=A$

A	B	$A\cap B$	$A\cup(A\cap B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

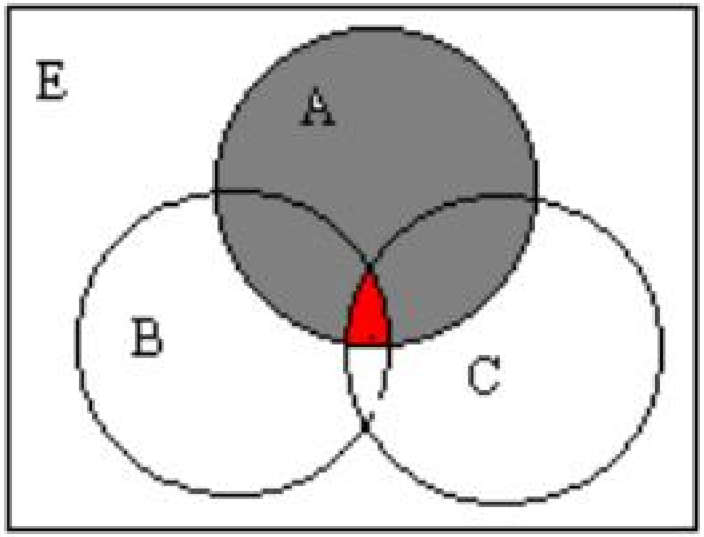
文氏图的更多例子

- $\sim A \cap \sim B$
- $(A-(B \cup C)) \cup ((B \cup C)-A)$

文氏图与数学证明

- 文氏图不能代替数学证明, 但可以帮助推测结论
- 例子：
  - (A-B)∪(A-C)=A?

充要条件：$A \cap B \cap C = \emptyset$



集合悖论

- $A=\{x \mid P(x)\}$, 实际上不能保证：对任意的性质 P，这样的定义都有意义。
- 例如：
  - 1)存在不以自己为元素的集合，称它们为“平凡集”
    - 天上的星星、教室里的同学
  - 2)定义包含所有“平凡集”的集合
    - $A = \{x | x \notin x\}$
- Russell 悖论：

  定义 $R=\{x \mid x \notin x\}$。则如果R存在，定有: $R \in R$ iff. $R \notin R$
  - 理发师悖论：“我给所有不给自己理发的人理发”

重新考察广义交

- 广义交
  - 设A为非空集合， A的所有元素的交，记为$\bigcap A$, 定义为： $\bigcap A = \{x \mid \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$
    - 注意：限制条件为A非空， $\bigcap \emptyset$无意义
    - – but why？

重新考察广义交

- 广义并和交的另一种记法

$$x \in \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X \iff \exists_{X \in \mathcal{C}} \; x \in X$$

$$x \in \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X \iff \forall_{X \in \mathcal{C}} \; x \in X$$

- 试证明：

Let $\mathcal{C} = \{A, B\}$. Show that

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = A \cup B, \quad \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X = A \cap B$$

Show that $\bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset$

试证明：

Given a collection of sets $\mathcal{C} \neq \emptyset$ show that, for any $A \in \mathcal{C}$,

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X = \left\{ x \in A \,\middle|\, \forall_{X \in \mathcal{C}}\ x \in X \right\}$$

空集的广义交不是一个集合

Theorem (Russell's paradox). $\bigcap_{X \in \emptyset} X$ *is not a set.*

Proof. We will prove by contradiction. This method consists in assuming the result we want to prove is false and arriving at a contradiction. The contradiction shows that our assumption was wrong, hence the result is true. So assume $A = \bigcap_{X\in\emptyset} X$ is a set. we can build the set

$$B = \{Y \in A \,|\, Y \notin Y\}$$

Then, by definition of B, the following is a true sentence:

$$B \in B \Longleftrightarrow (B \in A \text{ and } B \notin B)$$

It follows that both sentences $B \notin A$ and $B \notin B$ must be true. Then, by definition of A,

$$B \notin A \Leftrightarrow \text{not} \left(\underset{X\in\emptyset}{\forall} B \in X \right) \Leftrightarrow \underset{X\in\emptyset}{\exists} B \notin X$$

But this last sentence is false so we have reached a contradiction. We conclude A is not a set. $\square$

公理集合论（Axiomatic set theory）

- 用公理来约束集合世界，以摆脱悖论
  - 集合相等（=）和元素属于集合的关系（∈）
  - 某种集合存在性，亦即给定合法集合构造原则
- Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of Choice（ZFC集合论）参见附录

外延公理 正则公理 分离公理模式 配对公理 并集公理	替代公理模式 无穷公理 幂集公理 选择公理

Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice

- 外延公理
- 正则公理
- 分离公理模式
- 配对公理
- 并集公理
- 替代公理模式
- 无穷公理
- 幂集公理
- 选择公理（或，良序定理）

ZFC公理

- 外延公理（Axiom of extensionality）
  - 如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

- 正则/基础公理（Axiom of regularity/foundation）
  - 任意非空集x包含一个成员y，x与集合y是不相交的

$$\forall x [\exists a (a \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \land \neg \exists z (z \in y \land z \in x))].$$

ZFC公理

- 分离公理模式（Axiom schema of separation）
  - 对任意集合z和任意对z的元素x有定义的逻辑谓词$\phi(x)$，存在z的子集y，使$x\in y$当且仅当$x\in z$而且$\phi(x)$为真。

$$\forall z \forall w_1 \ldots w_n \exists y \forall x [x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \phi)].$$

- 配对公理（ Axiom of pairing）

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

- 并集公理（Axiom of union ）

$$\forall \mathcal{F}\, \exists A\, \forall Y\, \forall x [(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F}) \Rightarrow x \in A].$$

ZFC公理

- 替代公理模式（Axiom schema of replacement）

$$\forall A \forall w_1, \ldots, w_n \Big[\forall x (x \in A \Rightarrow \exists! y\, \phi) \Rightarrow \exists B \forall x \big(x \in A \Rightarrow \exists y (y \in B \wedge \phi)\big)\Big].$$

- 无穷公理（Axiom of infinity ）
  - S(y)是指 $y \cup \{y\}$

$$\exists X \left[\varnothing \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X)\right].$$

- 幂集公理（Axiom of power set）

$$\forall x \exists y \forall z [z \subseteq x \Rightarrow z \in y].$$

ZFC公理

- 选择公理（Axiom of choice ）
  - 任一非空集合族 $(S_i)_{i\in I}$, 均存在元素族$(s_i)_{i\in I}$, $\forall i\in I.\ s_i\in S_i$

- 或，良序定理（Well-ordering theorem ）

$$\forall X \exists R (R \text{ well-orders } X).$$

参考： Zermelo–Fraenkel set theory @Wiki

Q&A

欢迎提问