谓词逻辑初步

南京大学计算机科学与技术系

谓词逻辑(1)

- 引言
- 逻辑公式
  - 谓词
  - 量词

一阶逻辑（**first-order logic**，**FOL**）
一阶谓词逻辑（**first-order predicate logic**）
一阶谓词演算（**first-order predicate calculus**）

引言

- 知识表示
  - $\forall n\ (odd(n) \rightarrow odd(n^2))$
  - $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

    // z is uncle of x
  - $father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)$

上述知识无法用命题逻辑表达！

引言

- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
  - $\forall n(even(n) \land (n>2) \rightarrow \exists m \exists k(p(m) \land p(k) \land (n= m+k)))$

    $even(n)$： n **is a even number**

    $p(x)$: x **is a prime number**

  这个断言无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）

谓词（Predicate）

- 如果x是整数，“x 大于2” 不是命题，它的真值依赖于x的取值
  - 可以将 “x大于2”表示为 $P(x)$。//论域为实数
- 一元谓词$P(\cdot)$: 给定x, $P(x)$ 要么为真，要么为假.
  - 如 $p(x)$: x is a prime number // x是变量，论域为正整数
- 二元谓词$Q(\cdot, \cdot)$
  - 如 $Q(x, y)$: $x=y+3$ // 2个变量
  - 如 *uncle*(z, x) : *z is uncle of x* //论域？

逻辑公式（formula）

原子陈述：

- $P(t_1,\ldots t_n)$，其中P是n元谓词， t_i是常量、变量或函数取值

逻辑公式（有时称为“陈述”）：

- 原子陈述是逻辑公式；
- 若P是逻辑公式，x是自由变量，则$\exists xP$和$\forall xP$是逻辑公式；
- 若P和Q是逻辑公式，则 $\neg P, P\wedge Q, P\vee Q, P\rightarrow Q$ 是逻辑公式。

备注：量词的优先级高于其它逻辑运算符。

举例： $\forall x\,(x \le 0 \vee \exists y\,(y>0 \wedge x = y^2))$

量化公式中的变元

- 约束变元
  - $\forall x \exists y(y>x)$ 是 $\forall x(\exists y(y>x))$ 简写，x和y都是约束变元
  - $\exists y(y>x) \wedge \exists z(x>z)$，$y$和$z$都是约束变元
- 自由变元
  - $\exists y(y>x) \wedge \exists z(x>z)$，$x$是自由变元
  - $\exists y(y>x) \wedge (x+2>y)$, x是自由变元，后面那个y也是自由变元
- 量词作用域
  - 前面那个$\exists y$的作用域是 $(y>x)$
- 重命名（约束变元）
  - $\exists y(y>x) \wedge (x+2>y) \equiv \exists z(z>x) \wedge (x+2>y)$
  - $\exists y(y>x) \wedge \exists y(x>y) \equiv \exists y(y>x) \wedge \exists z(x>z)$

量化公式的真假

- $\forall x$（全称量词）
  - $\forall x P(x)$ 为真 *iff* 对所有的x, $P(x)$为真

    //论域， **domain of discourse**
- $\exists x$（存在量词）
  - $\exists x P(x)$为真 *iff* 存在某个x, $P(x)$为真 //论域
- $\forall x(x>2)$为假， $\exists x(x>2)$为真 //论域为实数
- $\forall x \exists y(y>x)$为真，$\exists y \forall x\ (y>x)$为假 //论域为实数

多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$。论域为实数集

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

  举例：$P(x,y)$ 表示$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价

  举例：$P(x,y)$ 表示 "$y>x$"。

语义蕴涵

- $\varphi_1 \vDash \varphi_2$ **iff** $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$永真

一般情形

- $\varphi_1, \ldots \varphi_n \vDash \varphi$ *iff* $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi)$永真

一阶逻辑公式的永真性判定有相当的难度！

$$\forall n(even(n) \wedge (n>2) \rightarrow \exists m \exists k(p(m) \wedge p(k) \wedge (n= m+k)))$$

哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（domain of discourse)：无限与有限，天壤之别

将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意实数的平方都是正数
  - $\forall xP(x)$，其中 $P(x)$表示$x^2>0$，论域为实数
- 所有美国人都吃汉堡包
  - $\forall x\ C(x)$，其中$C(x)$表示“x吃汉堡包”，论域为美国人
  - $\forall x(A(x)\to C(x))$ //论域为人类
  - $A(x)$表示“x是美国人”，$C(x)$表示“x吃汉堡包”
- 有的政治家是诚实的
  - $P(x)$表示“x是政治家”，$H(x)$表示“x是诚实的”
  - $\exists x(P(x)\wedge H(x))$ //外层的( )不能缺

将自然语言翻译成逻辑公式

这个班上的每个学生都学过微积分课程.

$S(x)$: x是这个班上的学生

$C(x)$: x学过微积分课程

$\forall x\,(S(x)\rightarrow C(x))$

这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

$\forall x\,(S(x)\rightarrow V(x, c) \vee V(x, m))$

其中，c代表“加拿大”， m代表“墨西哥”，

$V(x, y)$表示“x访问过（去过）y”

小结

- 逻辑公式
  - 原子公式（谓词：由具体应用需求而定）
  - 量化公式（量词：∀，∃）
  - 逻辑运算符（¬，∧，∨，→）

  谓词、变量和量词的引入，增强了逻辑表达能力
- 语义蕴涵
  - 可归结为判断逻辑公式的永真性
  - 论域的无限性，加深了推理的困难

谓词逻辑(2)

- 常用逻辑等价式
- 基于规则的推理
- FOL的一些定论

常用逻辑等价式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x)$: 对所有实数x, 其平方是正数 // $P(x)$表示$x^2>0$
- 否定：存在某个实数 x, 其平方不是正数。
- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
- $\exists x P(x)$: 存在实数x, x的平方是正数.
- 否定：对任意实数x, 其平方不是正数

常用逻辑等价式

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$

反向蕴涵×：是奇数或偶数

- $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \vDash \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vDash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

- $\forall x(P(x) \vee R) \equiv (\forall x P(x)) \vee R$
- $\exists x(P(x) \wedge R) \equiv (\exists x P(x)) \wedge R$

常用逻辑等价式（可以证明）

- $\forall x(R\to P(x)) \equiv R \to \forall xP(x)$

$\forall x(\neg R\vee P(x)) \equiv \neg R\vee(\forall xP(x))$

- $\exists x(R\to P(x)) \equiv R\to \exists xP(x)$
- $\forall x(P(x) \to R) \equiv (\exists xP(x)) \to R$
- $\exists x(P(x) \to R) \equiv (\forall xP(x)) \to R$

$\exists x(\neg P(x)\vee R) \equiv (\exists x\neg P(x))\vee R \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee R$

注意：这里x不在R中出现

前束范式（Prenex Normal Form）

$\forall x\,(x \le 0 \lor \exists y\,(y>0 \land x = y^2))$ //不是前束范式

$\forall x\,\exists y\,(x \le 0 \lor (y>0 \land x = y^2))$ //前束析取范式

有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF（PDNF/PCNF）

转化为前束范式（举例说明）

$\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$

$\equiv \neg \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x P(x)) \vee \neg(\neg \exists x P(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$ （消去→）

$\equiv \forall z(\forall x \neg Q(x, z) \wedge \forall x \neg P(x)) \vee (\exists x P(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x))$ （内移¬）

$\equiv \forall z \forall x(\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists x(P(x) \vee \forall z \neg Q(z, x))$ （简化）

$\equiv \forall z \forall x(\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee \exists y(P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y))$ （重命名）

$\equiv \forall z \forall x \exists y((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \forall w \neg Q(w, y))$ （前移量词）

$\equiv \forall z \forall x \exists y \forall w((\neg Q(x, z) \wedge \neg P(x)) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y))$ （前移量词）

$\equiv \forall z \forall x \exists y \forall w((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)))$

前束合取范式PCNF

前束合取范式（举例说明）

$$\forall z \forall x \exists y \forall w((\neg Q(x, z) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)) \wedge (\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w, y)))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg B(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee U(z, x)) \wedge (\neg F(z, y) \vee \neg F(y, x) \vee G(z, x)))$$

$$\boxed{brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)}$$

$$\boxed{father(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow grandfather(z, x)}$$

Prolog (Programming in Logic)

- 若z是y的兄弟，且y是x的父亲，则z是x的叔叔。
  - $brother(z, y) \land father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

$$\boxed{uncle(z, x) \text{ :- } brother(z, y), father(y, x)}$$

- 事实
  - *brother(Klopp, Karl)*
  - *brother(Klinsmann, Karl)*
  - *brother(Karl, Loew)*
  - *father(Karl, Neuer)*
- 查询：？ *uncle(z, Neuer)*

量词相关的“自然演绎规则”

$$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$$

全称例示

$$\frac{P(c)\text{对任意的}c}{\therefore\ \forall x\, P(x)}$$

全称生成

$$\frac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c)\text{对于某个}c}$$

存在例示

$$\frac{P(c)\text{对某个}c}{\therefore\ \exists x\, P(x)}$$

存在生成

量词相关的“自然演绎规则”

$$\frac{\forall x\,\phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\,\mathrm{e}.$$

消去任意

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\,\phi}\ \forall x\,\mathrm{i}.$$

全称引入

$$\frac{\exists x\,\phi \quad \boxed{\begin{array}{l} x_0\ \ \phi[x_0/x] \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists\mathrm{e}.$$

存在消除

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\phi}\ \exists x\,\mathrm{i}.$$

存在引入

基于规则的推理（举例）

- 前提
  - 在这个班上的某个学生没有读过这本书
  - 班上的每个人都通过了第一门考试
- 结论：通过第一门考试的某个人没有读过这本书
- $C(x)$: x在这个班上
- $B(x)$: x读过这本书了
- $P(x)$: x通过了第一门考试
  - $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
  - $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$
  - $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

基于规则的推理（举例）

$$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x)), \forall x(C(x) \to P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$$

因为 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ //这是前提

根据存在例示，有某个a，$C(a) \wedge \neg B(a)$成立。

根据化简，得到$C(a)$ 成立， $\neg B(a)$成立。

因为$\forall x(C(x) \to P(x))$ //这是前提

根据全称例示，得到 $C(a) \to P(a)$

根据假言推理，得到 $P(a)$

根据合取律，得到 $P(a) \wedge \neg B(a)$

根据存在生成，得到 $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

一阶谓词逻辑的定论

自然演绎规则（含量词相关的）是正确的、完备的

不可判定的（Undecidable）

No program exists which, given any ϕ, decides whether $\models \phi$

小结

- 常用逻辑等价式
- 前束范式
  - 转化方法
  - 逻辑公式的复杂性
- 基于规则的推理
  - 量词相关的“自然演绎规则”
  - 自然演绎规则的正确性与完备性
- 一阶谓词逻辑的不可判定性及推理复杂性

Q&A

欢迎提问