函数及其运算

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 集合的基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
  - 交并补、广义交、广义并
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式

提要

- 函数
  - 关系
  - 函数的定义
  - 单射与满射
  - 反函数
  - 函数的运算
  - 函数构成的集合、序列

有序对（Ordered pair）

- (a, b)是集合$\{\{a\}, \{a, b\}\}$的简写
- 次序的体现
  - $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}= \{u,v\}$, 因此$x=u$。

假设$y\neq v$

(1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;

(2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}= \{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A, B

  笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

- 例：$\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1, a), (3, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若A，B是有限集合，$|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A=\{1,2\}$，$\rho(A)\times A=?$

- $|A|=m$, $|B|=n$, $|A\times B|=?$

（二元）关系的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个关系是$A\times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对
- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！

从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从A到B的关系”R；$R\subseteq A\times B$
  - 若$A=B$：称为“集合A上的（二元）关系”
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\varnothing$: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A \}$

函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A \to B$
- $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

函数(function)的定义

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 f:A→B。
  - Well defined(良定义)
  - f:A→B：函数的型构
  - f 的定义域（domain）是A，f 的伴域（codomain）是B
  - 如果 f 为A中元素 a 指派的B中元素为 b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b 是 a 的像，而 a 是 b 的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为 f 的值域 range （f 的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数(function)的定义

- 备注
  - 函数在其定义域中的每个元素都有唯一的取值
  - 函数的值域是其伴域的子集
  - 函数相等 $f=g$ iff
    - $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$
    - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$
    - <u>$\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(g)$</u>
  - 若A和B皆是非空的有限集合，从A到B的不同的函数有 $|B|^{|A|}$个。($a_1, a_2,\ldots, a_{|A|}$的像, 均有|B|种选择)

函数是一种特殊的关系

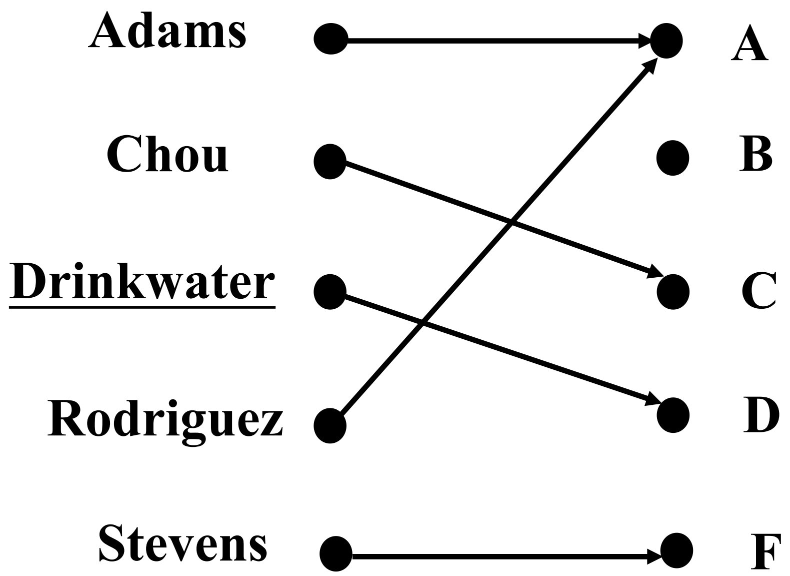
- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
  - 对于A 中的每个元素 a，B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb

则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

如何用逻辑公式表达上述条件？

函数举例

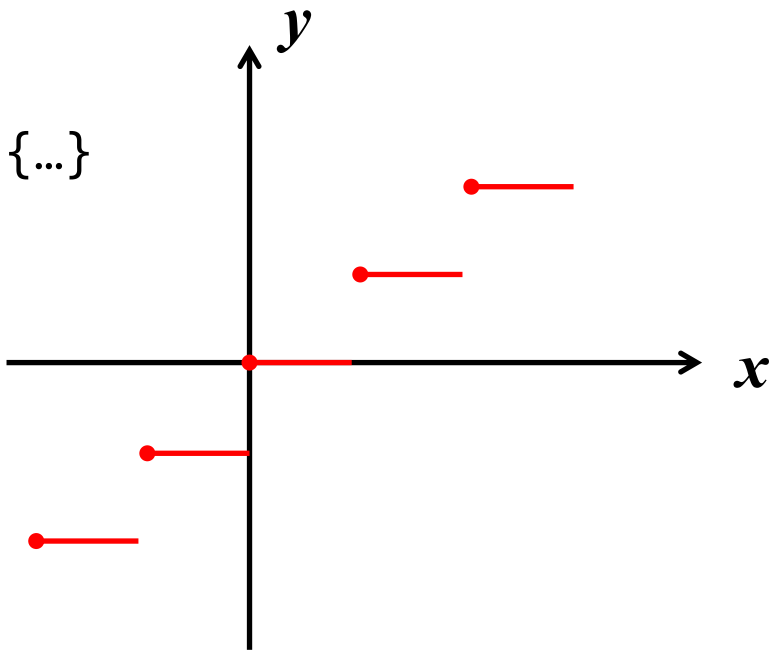
- 某课程成绩



函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor$: $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{Z}$

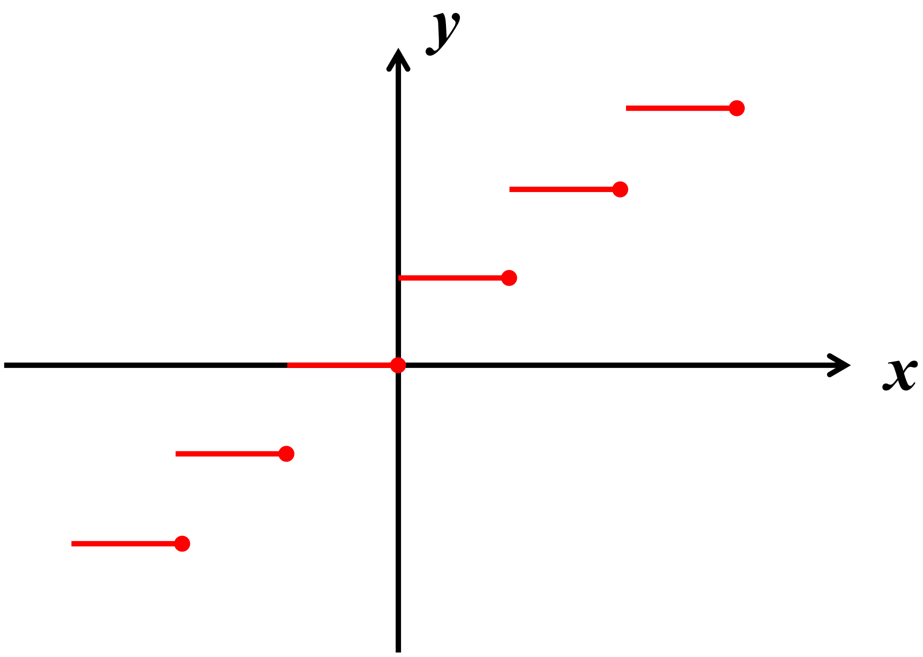
```
Java Program
int  floor(float real) {…}


floor: float → int
```



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \wedge f(a)=b\}$

函数举例

- 上取整函数 $\lceil x \rceil$：$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ （*ceiling function*）



函数举例

- 对于任意实数x，$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
- 对于任意实数x，$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$
  - $x = n + \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$. 采用分情形证明方法
  - $0 \le \varepsilon < 1/2$
  - $1/2 \le \varepsilon < 1$
- × 对于任意实数x和y，$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$
- 反例: $x = y = 1/2$

函数举例

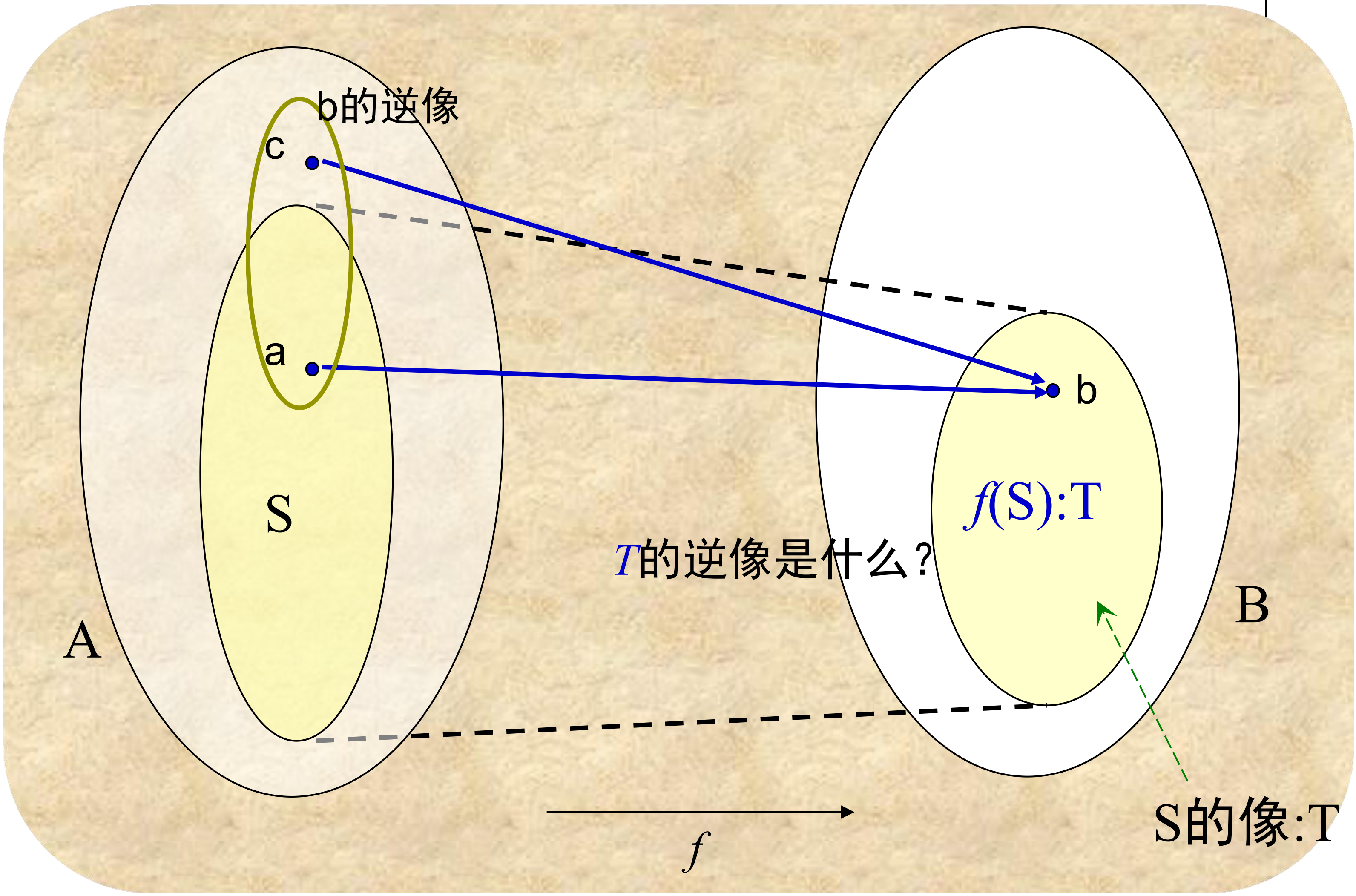
- 设A为非空集合，A上的 恒等函数$\iota_A{:}A\to A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$，$x\in A$
- 设U为非空集合，对任意的$A\subseteq U$，特征函数$\chi_A{:}U\to\{0,1\}$定义为：
  - $\chi_A(x)=1$，$x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$，$x\in U-A$

如果要记录每节离散数学课的到课情况？

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S 在 f 下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S) = \{ t \mid \exists_{s\in S} t = f(s)\}$
- 备注：$f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和逆像



并集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X\cup Y) \subseteq f(X)\cup f(Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X\cup Y)$，则存在$s\in X\cup Y$，满足$f(s)=t$；假设 $s\in X$，则$t\in f(X)$，假设$s\in Y$，则$t\in f(Y)$，$\therefore t\in f(X)\cup f(Y)$
  - $f(X)\cup f(Y) \subseteq f(X\cup Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X)\cup f(Y)$

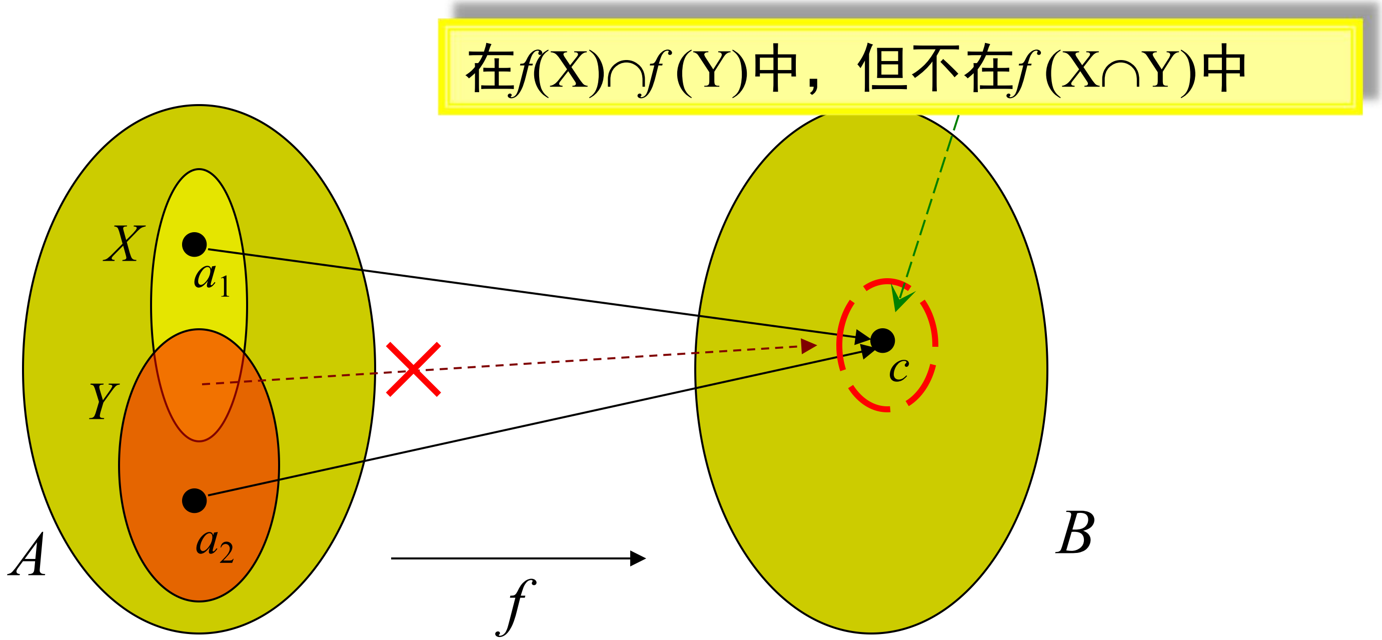
    情况1：$t\in f(X)$，则存在$s\in X\subseteq X\cup Y$，满足$f(s)=t$，$\therefore t\in f(X\cup Y)$

    情况2：$t\in f(Y)$，同样可得$t\in f(X\cup Y)$

    $\therefore t\in f(X\cup Y)$

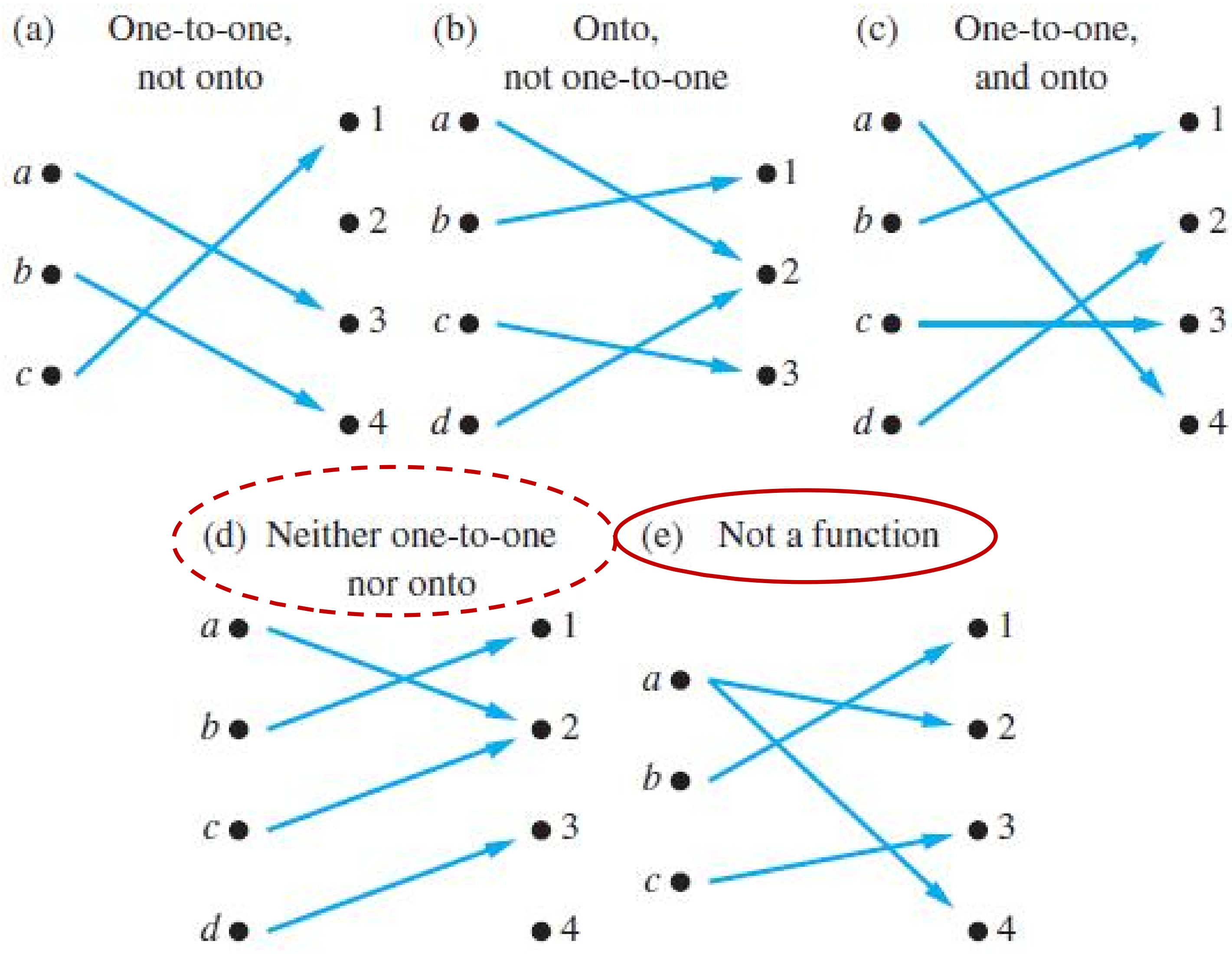
交集的像

- 设函数 $f: A \to B$，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$



函数性质

- f:A→B是**单射**（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - //等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
  - //另一种等价的说法？
- f:A→B是**满射**（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, 使得$f(x)=y$
  - //等价的说法：$f(A)=B$
- f:A→B是**双射**（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射


(a) One-to-one, not onto
(b) Onto, not one-to-one
(c) One-to-one, and onto
(d) Neither one-to-one nor onto
(e) Not a function
a
b
c
d
1
2
3
4

函数性质的证明

- 判断$f:R\times R\to R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射？
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射？
  - 任取$<a, b> \in R\times R$，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

函数性质的证明

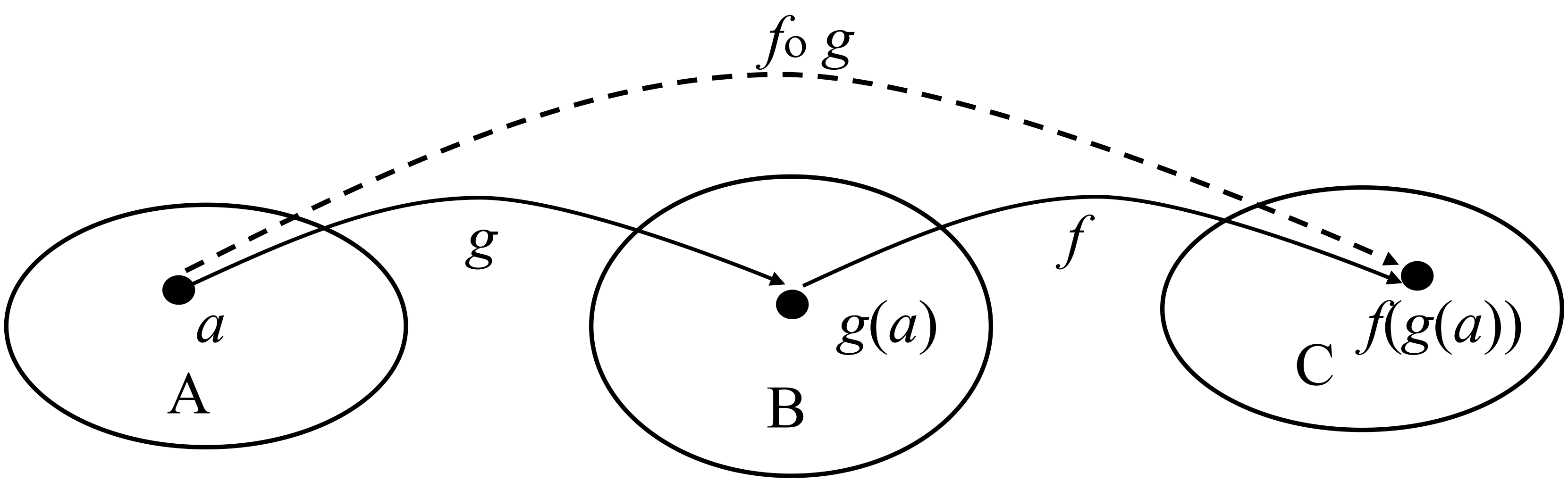
- 设A有限集合，f是从A到A的函数。f是单射当且仅当f是满射。

反函数

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗？*
- 例子
  - $f: R\times R \to R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$
  - $f^{-1}: R\times R \to R\times R$, $f^{-1}(<x,y>) = <?, ?>$

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f\circ g$表示，定义为：
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))$， $x\in A$

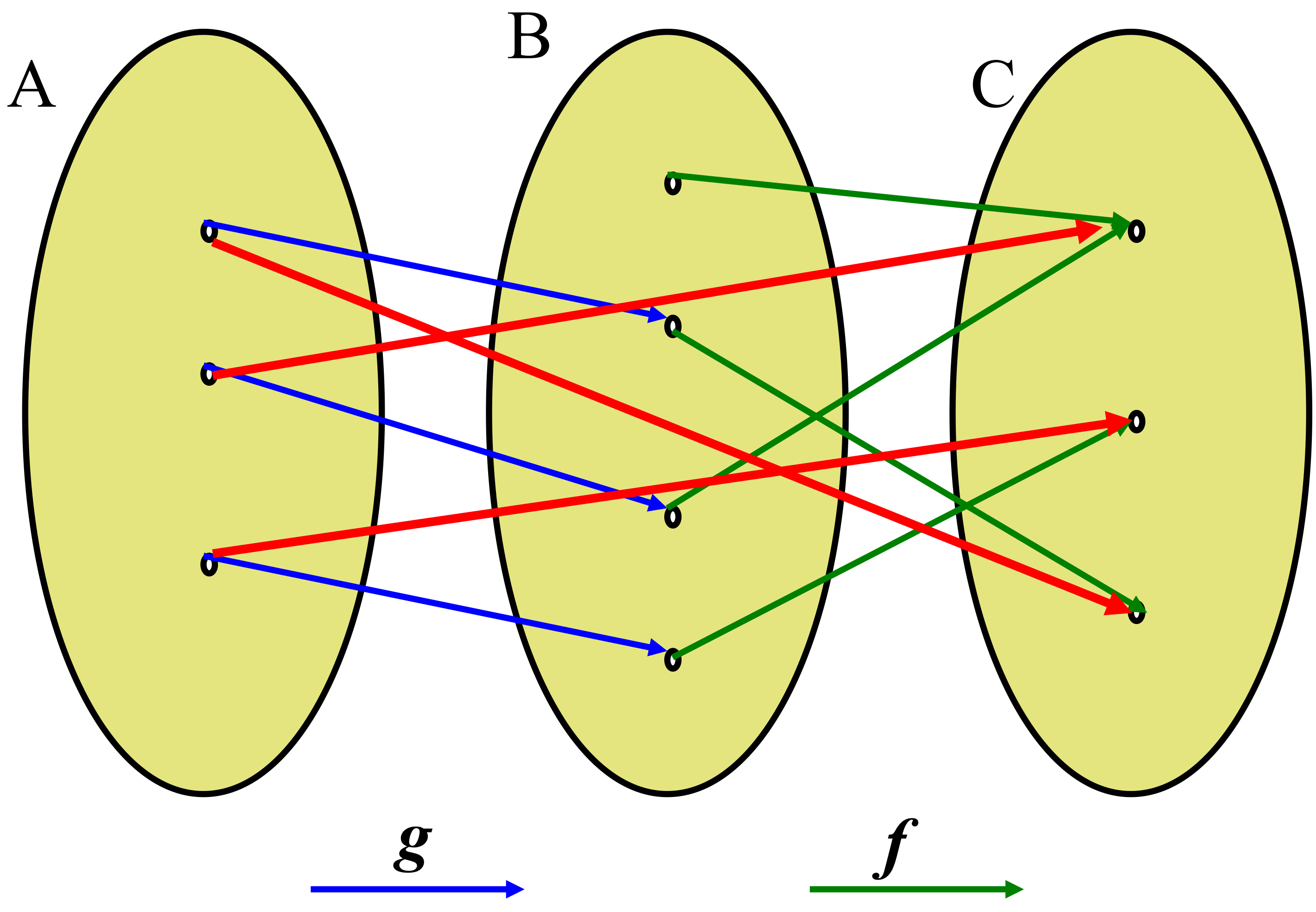


复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

但是…

- 若$f \circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f一定是满射， g不一定是满射。
- 若$f \circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g一定是单射，f不一定是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\,g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\,g(x) = f(x)\,g(x)$， $x \in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集)，
- f是递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)\leq f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)< f(y))$

偏函数（Partial Functions）

- 从集合A到B的偏函数*f*是对元素的一种指派，对A的某些元素恰好指派B的一个元素。记作f :A→B。
  - 对A中某些元素，偏函数*f*没有定义。
  - 有定义的元素全体构成函数的定义域。
- 举例
  - f :Z→R
  - $f(n)=\sqrt{n}$

函数构成的集合（回顾）

- 初等函数（R→R）
  - 基本初等函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数
  - 四则运算
  - 函数的复合
- 微积分
  - 基本初等函数
  - 连续？可导？可积分？
  - 运算（加、乘、除、复合）之后，连续？可导？可积分？
  - 多元函数？

函数构成的集合

- B^A：A到B的所有函数构成的集合，A和B皆非空。
  - 若A和B皆有限，$|B^A|=|B|^{|A|}$
  - 若$|A|=1$，$|B^A|=|B|$
  - 若$|B|=1$，$|B^A|=1$
  - 若 $B=\{0,1\}$，B^A 等同于 $\rho(A)$，为何$\rho(A)$有时记为 2^A？

序列（ sequence ）

- 一个序列是从Z的一个子集（通常是N或Z^+）到某个集合S的一个函数。我们用a_n代表整数n的像，称为这个序列的项，$\{a_n\}$代表这个序列。
  - 有限序列vs无穷序列
  - $\{1/n\}, n \in Z^+$；$\{n^2\}$；$\{a_n\}$, 其中$a_{2k}=0, a_{2k+1}=1, k \in N$
- 一个0~1无穷序列是N到{0,1}的一个函数，等同N的某个子集
- $(\{0,1\})^N$：0~1无穷序列全体构成的集合，也可记为 2^N
- 区间[0, 1)中的一个实数是否可以表示为一个0~1序列?

一个有趣的例子

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。
  - 7,4,3,5,2,1,9,8,6,10//////10,3,2,6,4,7,5,9,1,8
  - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度为I(k), 以k开始的严格递减序列长度为D(k)。
  - f: $k \rightarrow (\mathrm{I}(k), \mathrm{D}(k))$, $k \in \{1,2,\ldots, n^2+1\}$
    - f(7)=(3,5),f(4)=(4,4),f(3)=(4,3),f(5)=(3,3),f(2)=(3,2),f(1)=(3,1)
    - f(9)=(2,3),f(8)=(2,2),f(6)=(2,1),f(10)=(1,1)
  - f是单射：对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面，则$\mathrm{I}(k_1)>\mathrm{I}(k_2)$，如果$k_2$排在$k_1$前面，则$\mathrm{D}(k_2)>\mathrm{D}(k_1)$。
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n：
  - f的值域最多有n^2个元素
  - f不可能是单射

小结

- 函数的定义
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的运算
- 函数构成的集合、序列

Q&A

欢迎提问