第七章 搜索结构

- 静态搜索结构
- 二叉搜索树
- AVL树

静态搜索表

搜索(Search)的概念

- 所谓搜索，就是在数据集合中寻找满足某种条件的数据对象。
- 搜索的结果通常有两种可能：
  - 搜索成功，即找到满足条件的数据对象。这时，作为结果，可报告该对象在结构中的位置,还可给出该对象中的具体信息。
  - 搜索不成功，或搜索失败。作为结果，应报告一些信息,如失败标志、位置等。

- 通常称用于搜索的数据集合为**搜索结构**，它是由同一数据类型的对象(或记录)组成。
- 在每个对象中有若干属性，其中有一个属性，其值可唯一地标识这个对象。称为**关键码**。使用基于关键码的搜索，搜索结果应是唯一的。但在实际应用时，搜索条件是多方面的，可以使用基于属性的搜索方法，但搜索结果可能不唯一。
- 实施搜索时有两种不同的环境。
  - 静态环境，搜索（存储）结构在插入和删除等操作的前后不发生改变。—— **静态搜索表**

- <u>动态环境</u>，为保持较高的搜索效率, 搜索（存储）结构在执行插入和删除等操作的前后将自动进行调整，结构可能发生变化。

—— 动态搜索表

静态搜索表

- 在静态搜索表中，数据元素存放于数组中，利用数组元素的下标作为数据元素的存放地址。搜索算法根据给定值 k，在数组中进行搜索。直到找到 k 在数组中的存放位置或可确定在数组中找不到 k 为止。

数据表与搜索表的类定义

```
#include <iostream.h>
#include <assert.h>
const int defaultSize = 100;
template <class E, class K>
class dataList;                    //数据表类的前视定义

template <class E, class K >
class dataNode {                   //数据表中结点类的定义
friend class dataList<E, K>;
                                   //声明其友元类为dataList
public:
```

```
    dataNode (const K x) : key(x) { }        //构造函数
    K getKey() const { return key; }         //读取关键码
    void setKey (K x) { key = x; }           //修改关键码
private:
    K key;                      //关键码域
    E other;                    //其他域（视问题而定）
};

template <class E, class K >
class dataList {                //数据表类定义
public:
```

```
dataList (int sz = defaultSize)
    : ArraySize(sz), CuurentSize(0) {
    Element = new dataNode<E, K>[sz];
    assert (Element != NULL);
}
dataList (dataList<E, K>& R);   //复制构造函数
virtual ～dataList() { delete []Element; }
                                    //析构函数
virtual int Length() { return CurrentSize; }
                                    //求表的长度
virtual K getKey (int i) const {
                         //提取第 i （1开始）元素值
```

```
        assert (i > 0 || i <= CurrentSize);
        return Element[i−1].key;
    }
    virtual void setKey (K x, int i) {
                                    //修改第 i （1开始） 元素值
        assert (i > 0 || i <= CurrentSize);
        Element[i−1].key = x;
    }
    virtual int SeqSearch (const K x) const;     //搜索
    virtual bool Insert (E& e1);                 //插入
    virtual bool Remove (K x, E& e1);            //删除
friend ostream& operator << (ostream& out,
      const dataList<E, K>& OutList);            //输出
```

```
friend istream& operator >> (istream& in,
        dataList<E, K>& InList);                    //输入
protected:
    dataNode<E, K> *Element;     //数据表存储数组
    int ArraySize, CurrentSize;
                                   //数组最大长度和当前长度
};

template <class E, class K >
bool dataList<E, K>::Insert (E& e1) {
//在dataList的尾部插入新元素, 若插入失败函数返
//回false, 否则返回true.
```

```
    if (CurrentSize == ArraySize) return false;
    Element[CurrentSize] = e1;          //插入在尾端
    CurrentSize++;  return true;
};

template <class E, class K>
bool dataList<E, K>::Remove (K x, E& e1) {
//在dataList中删除关键码为x的元素,通过e1返回。
//用尾元素填补被删除元素。
    if (CurrentSize == 0) return false;
    for (int i =0; i < CurrentSize &&
        Element[i].key != x; i++);          //在表中顺序
  寻找
```

```
    if (i == CurrentSize) return false;          //未找到
    e1 = Element[i].other;     //找到,保存被删元素的值
    Element[i] = Element[CurrentSize-1];    //填补
    CurrentSize--;  return true;
};
```

顺序搜索（Sequential Search）

- 顺序搜索主要用于在线性表中搜索。
- 设若表中有 CurrentSize 个元素，则顺序搜索从表的先端开始，顺序用各元素的关键码与给定值 x 进行比较
- 若找到与其值相等的元素，则搜索成功，给出该元素在表中的位置。
- 若整个表都已检测完仍未找到关键码与 x 相等的元素，则搜索失败。给出失败信息。

- 一般的顺序搜索算法在第二章已经讨论过，本章介绍一种使用“监视哨”的顺序搜索方法。
- 设在数据表 dataList 中顺序搜索关键码与 给定值 x 相等的数据元素，要求数据元素在表中从下标 0 开始存放, 下标为 CurrentSize 的元素作为控制搜索过程自动结束的“监视哨”使用。
- 若搜索成功，则函数返回该元素在表中序号 Location（比下标大 1）, 若搜索失败，则函数返回 CurrentSize+1。

使用监视哨的顺序搜索算法

```
template <class E, class K>
int dataList<E, K>::SeqSearch (const K x) const {
    Element[CurrentSize].key = x;
    int i = 0;                          //将x设置为监视哨
    while (Element[i].key != x) i++;
                                        //从前向后顺序搜索
    return i+1;
};

const int Size = 10;
main () {
```

```
dataList<int> L1 (Size);        //定义int型搜索表L1
int Target;  int Loc;
cin >> L1;  cout << L1;         //输入L1
cout << "Search for a integer : ";
cin >> Target;                  //输入要搜索的数据
if ( (Loc = L1.Seqsearch(Target)) <=
        L1.Length() )
    cout << "找到待查元素位置在：" << Loc+1
        << endl;                //搜索成功
else cout << " 没有找到待查元素\n";
                                //搜索不成功
};
```

顺序搜索的递归算法

- 采用递归方法搜索值为 x 的元素，每递归一层就向待查元素逼近一个位置，直到到达该元素。假设待查元素在第 i（$1\le i\le n$）个位置，则算法递归深度达 i（$1\sim i$）。

搜索 30

$i = 1$	10	20	30	40	50	60
$i = 2$	10	20	30	40	50	60
$i = 3$	10	20	30	40	50	60

递归

顺序搜索的递归算法

```
template <class E, class K>
int dataList<E, K>::
SeqSearch (const K x, int loc) const {
//在数据表 Element[1..n] 中搜索其关键码与给定值
//匹配的对象，函数返回其表中位置。参数 loc 是在
//表中开始搜索位置
    if (loc > CurrentSize) return 0;          //搜索失败
    else if (Element[loc-1].key == x) return loc;
                                              //搜索成功
    else return SeqSearch (x, loc+1);          //递归搜
   索
};
```

顺序搜索的平均搜索长度

- 设数据表中有 n 个元素，搜索第 i 个元素的概率为 p_i，搜索到第 i 个元素所需比较次数为 c_i，则搜索成功的平均搜索长度：

$$ASL_{succ} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot c_i . \qquad \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1\right)$$

- 在顺序搜索并设置“监视哨”情形：

$c_i = i + 1,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$，因此

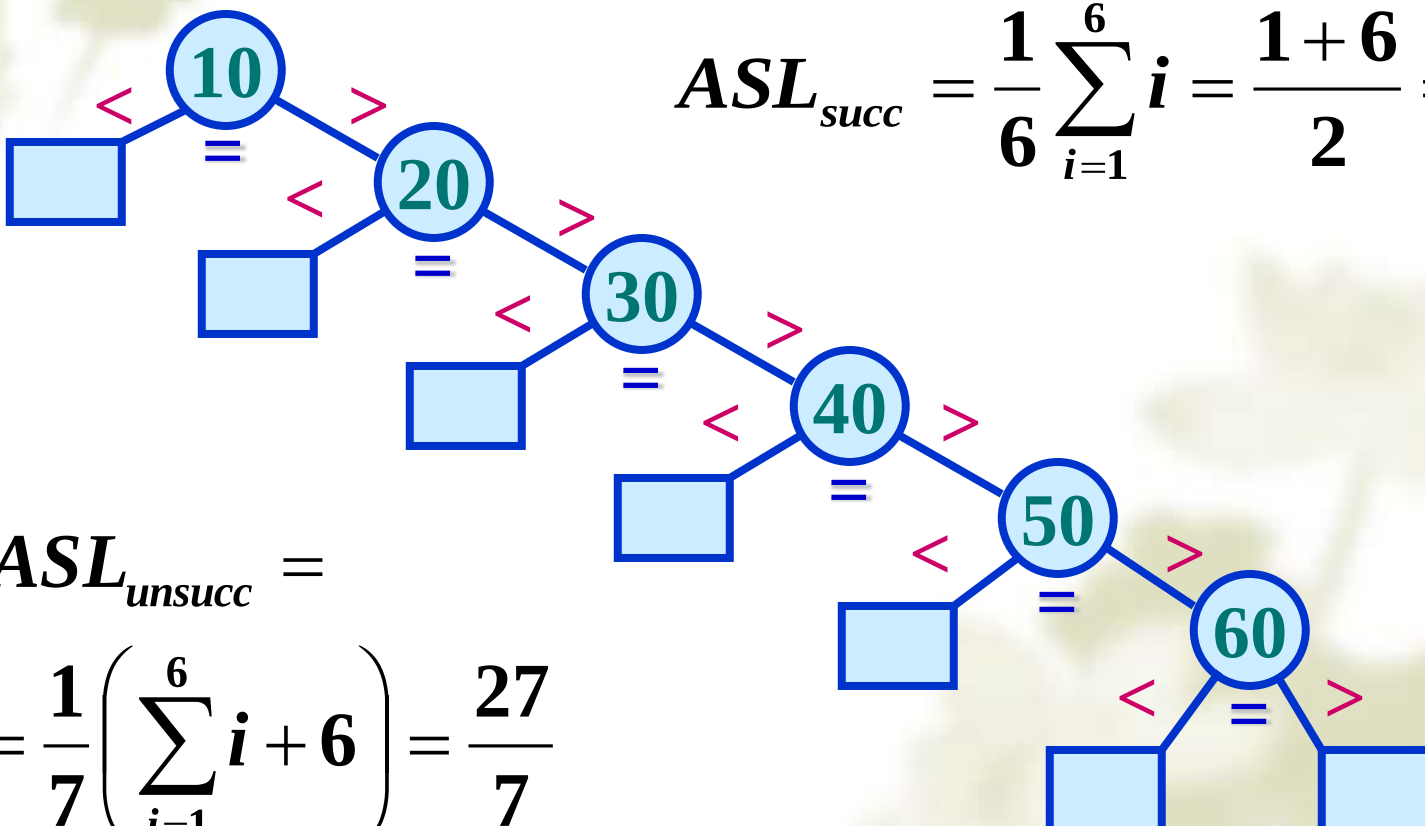
$$ASL_{succ} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot (i+1)$$

- 一般表中各个元素的搜索概率不同，如果按搜索概率的高低排列表中的元素，从有序顺序表的情况可知，能够得到好的平均搜索长度。
- 在等概率情形，$p_i = 1/n,\ i = 1, 2, \ldots, n$。搜索成功的平均搜索长度为：

$$ASL_{succ} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(i+1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

- 在搜索不成功情形，$ASL_{unsucc} = n+1$。

- 例如，有序顺序表 (10, 20, 30, 40, 50, 60) 的顺序搜索的分析（使用判定树）



$$ASL_{succ} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$ASL_{unsucc} =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{6} i + 6\right) = \frac{27}{7}$$

- 假定表中所有失败位置的搜索概率相同，则搜索不成功的平均搜索长度：

$$ASL_{unsucc} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} i + n\right)$$

- 时间代价为O(n)。

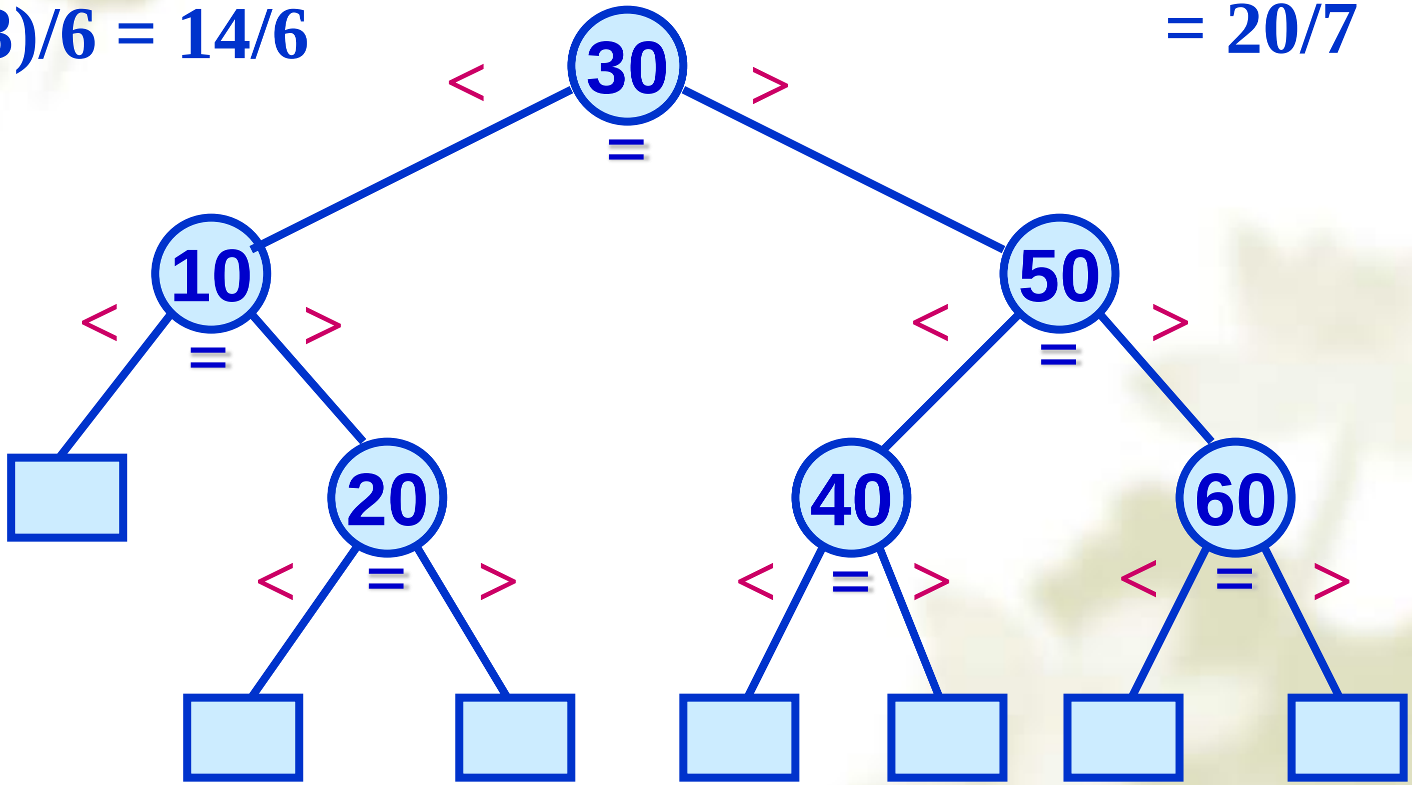
- 为了加速搜索，在有序顺序表的情形，可以采用折半搜索，它也称二分搜索，时间代价可减到O($\log_2 n$)。

有序顺序表的折半搜索的判定树

(10, 20, 30, 40, 50, 60)

$ASL_{succ} = (1+2*2+3*3)/6 = 14/6$

$ASL_{unsucc} = (2*1+3*6)/7 = 20/7$



二叉搜索树（Binary Search Tree）

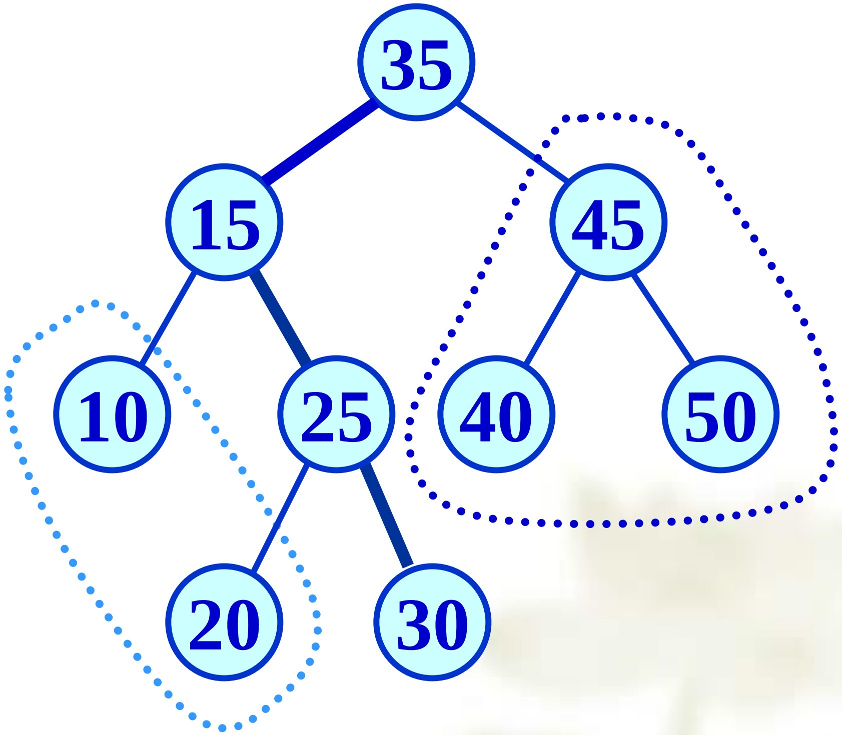
- **定义**

  二叉搜索树或者是一棵空树，或者是具有下列性质的二叉树：

  - ✓ 每个结点都有一个作为搜索依据的关键码(key)，所有结点的关键码互不相同。
  - ✓ 左子树（如果非空）上所有结点的关键码都小于根结点的关键码。
  - ✓ 右子树（如果非空）上所有结点的关键码都大于根结点的关键码。
  - ✓ 左子树和右子树也是二叉搜索树。

二叉搜索树例

- 结点左子树上所有关键码小于结点关键码；
- 右子树上所有关键码大于结点关键码；



- 注意：若从根结点到某个叶结点有一条路径，路径左边的结点的关键码不一定小于路径上的结点的关键码。

- 如果对一棵二叉搜索树进行中序遍历，可以按从小到大的顺序，将各结点关键码排列起来，所以也称二叉搜索树为二叉排序树。

- 二叉搜索树的类定义

```
#include <iostream.h>
#include <stdlib.h>
template <class E, class K>
struct BSTNode {                           //二叉树结点类
    E data;                                //数据域
    BSTNode<E, K> *left, *right;  //左子女和右子女
```

```
BSTNode() { left = NULL; right = NULL; }
  //构造函数
BSTNode (const E d, BSTNode<E, K> *L = NULL,
     BSTNode<E, K> *R = NULL)
   { data = d; left = L; right = R;}
  //构造函数
~BSTNode() {}                              //析构函数
void setData (E d) { data = d; }           //修改
E getData() { return data; }               //提取
bool operator < (const E& x)               //重载：判小于
   { return data.key < x.key; }
```

```
    bool operator > (const E& x)          //重载：判大于
        { return data.key > x.key; }
    bool operator == (const E& x)         //重载：判等于
        { return data.key == x.key; }
};

template <class E, class K>
class BST {                               //二叉搜索树类定义
public:
    BST() { root = NULL; }                //构造函数
    BST(K value);                         //构造函数
    ～BST() {};                           //析构函数
```

```
bool Search (const K x) const          //搜索
    { return Search(x,root) != NULL; }
BST<E, K>& operator = (const BST<E, K>& R);
                                       //重载：赋值
void makeEmpty()                       //置空
    { makeEmpty (root); root = NULL;}
void PrintTree() const { PrintTree (root); }   //输出
E Min() { return Min(root)->data; }         //求最小
E Max() { return Max(root)->data; }         //求最大
bool Insert (const E& e1)              //插入新元素
    { return Insert(e1, root);}
```

```
    bool Remove (const K x) { return Remove(x, root);}
        //删除含x的结点
private:
    BSTNode<E, K> *root;          //根指针
    K RefValue;                   //输入停止标志
    BSTNode<E, K> *               //递归：搜索
        Search (const K x, BSTNode<E, K> *ptr);
    void makeEmpty (BSTNode<E, K> *& ptr);
                                  //递归：置空
    void PrintTree (BSTNode<E, K> *ptr) const;
                                  //递归：打印
    BSTNode<E, K> *               //递归：复制
        Copy (const BSTNode<E, K> *ptr);
```

```
BSTNode<E, K>* Min (BSTNode<E, K>* ptr);
                              //递归：求最小
BSTNode<E, K>* Max (BSTNode<E, K>* ptr);
                              //递归：求最大
bool Insert (const E& e1, BSTNode<E, K>*& ptr);
                              //递归：插入
bool Remove (const K x, BSTNode<E, K>*& ptr);
                              //递归：删除
};
```

- **二叉搜索树的类定义用二叉链表作为它的存储表示，许多操作的实现与二叉树类似。**

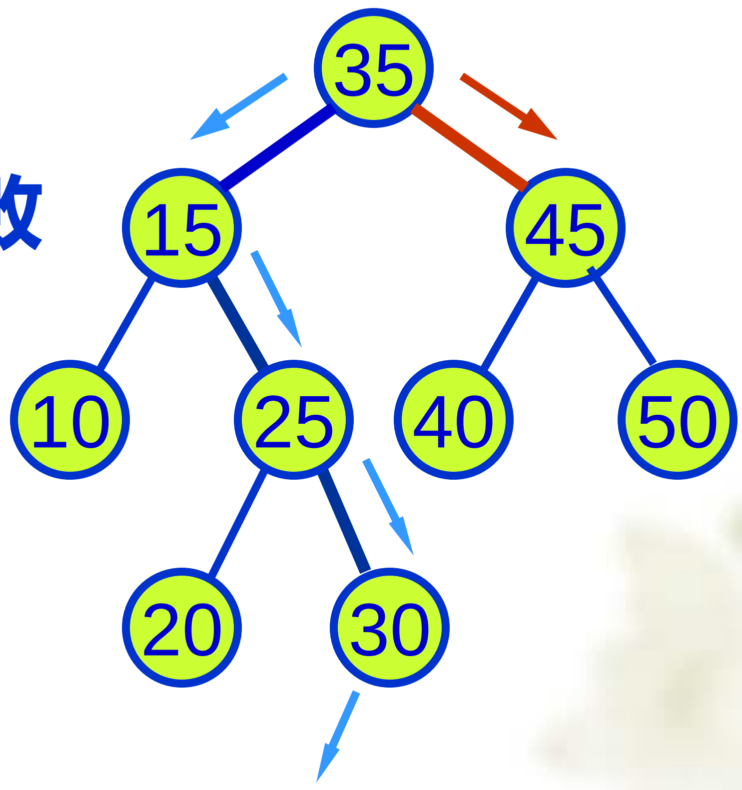
二叉搜索树的搜索算法

- 在二叉搜索树上进行搜索，是一个从根结点开始，沿某一个分支逐层向下进行比较判等的过程。它可以是一个递归的过程。
- 假设想要在二叉搜索树中搜索关键码为 x 的元素，搜索过程从根结点开始。
- 如果根指针为NULL，则搜索不成功；否则用给定值 x 与根结点的关键码进行比较：
  - ✓若给定值等于根结点关键码，则搜索成功，返回搜索成功信息并报告搜索到结点地址。

- ✓ 若给定值小于根结点的关键码，则继续递归搜索根结点的左子树；
- ✓ 否则。递归搜索根结点的右子树。

<u>搜索28</u>

搜索失败



<u>搜索45</u>

搜索成功

```
template<class E, class K>
BSTNode<E, K>* BST<E, K>::
Search (const K x, BSTNode<E, K> *ptr) {
//私有递归函数：在以ptr为根的二叉搜索树中搜
//索含x的结点。若找到，则函数返回该结点的
//地址，否则函数返回NULL值。
    if (ptr == NULL) return NULL;
    else if (x < ptr->data.key) return Search(x, ptr->left);
    else if (x > ptr->data.key) return Search(x, ptr->right);
    else return ptr;                    //搜索成功
};
```

```
template<class E, class K>
BSTNode<E, K>* BST<E, K>::
Search (const K x, BSTNode<E, K> *ptr) {
//非递归函数：作为对比，在当前以ptr为根的二
//叉搜索树中搜索含x的结点。若找到，则函数返
//回该结点的地址，否则函数返回NULL值。
    if (ptr == NULL) return NULL;
    BSTNode<E, K>* temp = ptr;
    while (temp != NULL) {
        if (x == temp->data.key) return temp;
        if (x < temp->data.key) temp = temp->left;
```

```
        else temp = temp->right;
    }
    return NULL;
};
```

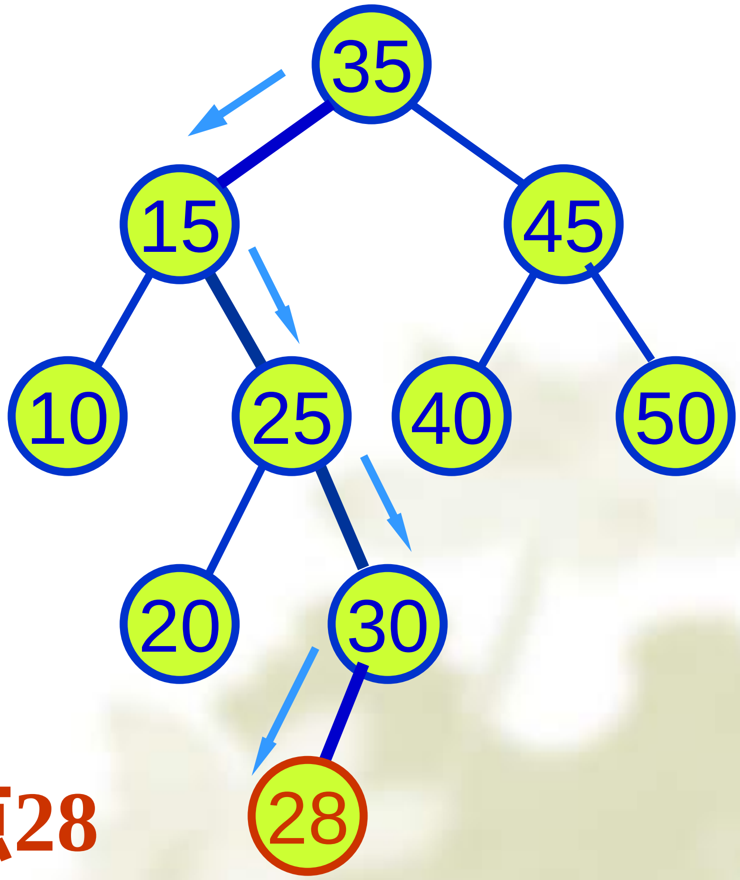
- 搜索过程是从根结点开始，沿某条路径自上而下逐层比较判等的过程。
- 搜索成功，搜索指针将停留在树上某个结点；搜索不成功，搜索指针将走到树上某个结点的空子树。
- 设树的高度为h，最多比较次数不超过h。

二叉搜索树的插入算法

- 为了向二叉搜索树中插入一个新元素，必须先检查这个元素是否在树中已经存在。
- 在插入之前，先使用搜索算法在树中检查要插入元素有还是没有。
  - 如果搜索成功，说明树中已经有这个元素，不再插入；
  - 如果搜索不成功，说明树中原来没有关键码等于给定值的结点，把新元素加到搜索操作停止的地方。

二叉搜索树的插入

- 每次结点的插入，都要从根结点出发搜索插入位置，然后把新结点作为叶结点插入。



插入新结点28

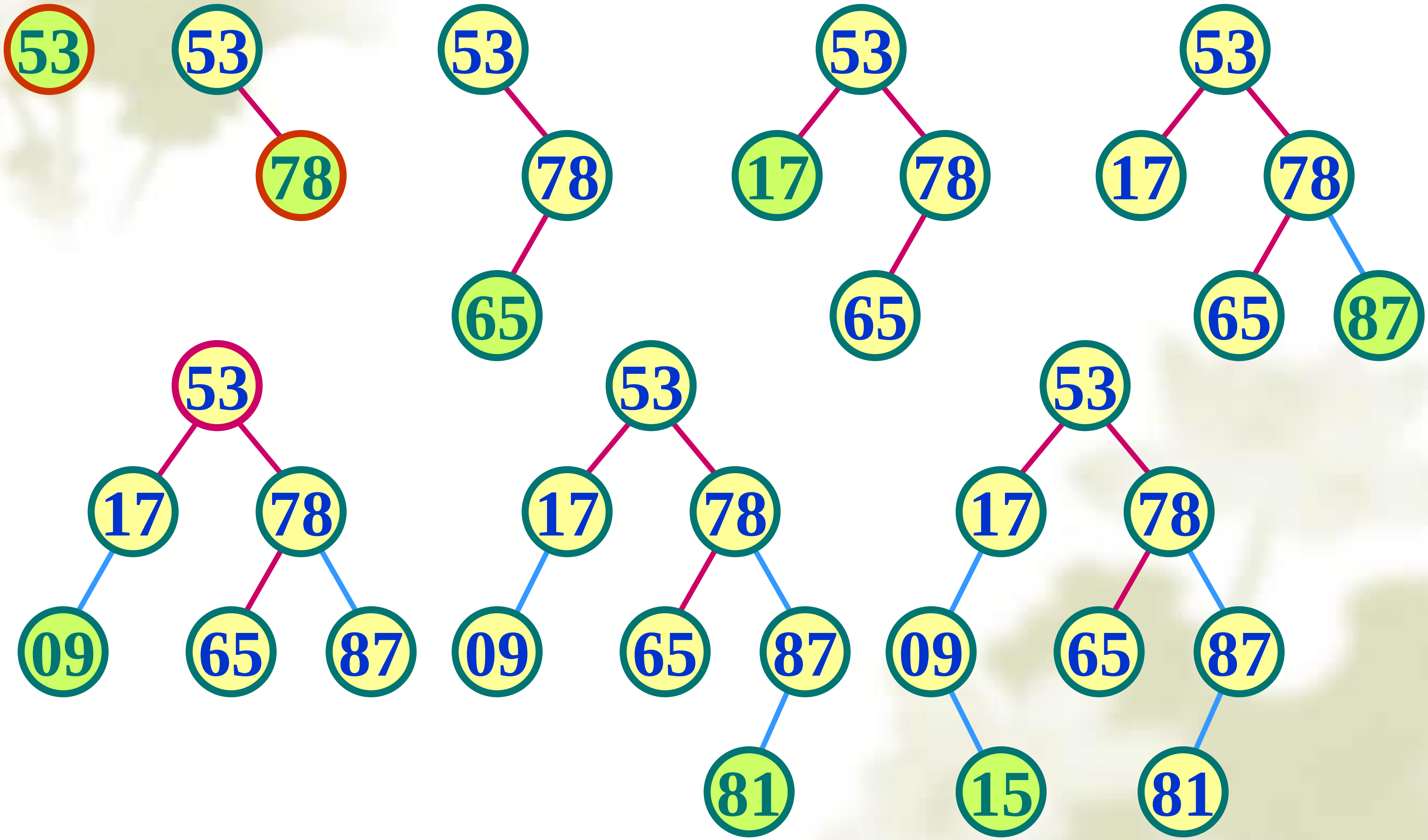
二叉搜索树的插入算法

```
template <class E, class K>
bool BST<E, K>::Insert (const E& e1,
     BSTNode<E, K> *& ptr) {
//私有函数：在以ptr为根的二叉搜索树中插入值为
//e1的结点。若在树中已有含e1的结点则不插入
  if (ptr == NULL) {        //新结点作为叶结点插入
    ptr = new BstNode<E, K>(e1);     //创建新结点
    if (ptr == NULL)
      { cerr << "Out of space" << endl;  exit(1); }
    return true;
```

```
    }
    else if (e1 < ptr->data.key) Insert (e1, ptr->left);
                            //左子树插入
        else if (e1 > ptr->data.key) Insert (e1, ptr->right);
                            //右子树插入
        else return false;       //x已在树中,不再插入
};
```

- **注意参数表中引用型指针参数ptr的使用。**
- **利用二叉搜索树的插入算法，可以很方便地建立二叉搜索树。**

输入数据 { 53, 78, 65, 17, 87, 09, 81, 15 }



```
template <class E, class K>
BST<E, K>::BST (K value) {
//输入一个元素序列, 建立一棵二叉搜索树
    E x;
    root = NULL;  RefValue = value;      //置空树
    cin >> x;                            //输入数据
    while ( x.key != RefValue) {
        //RefValue是一个输入结束标志
        Insert (x, root);  cin >> x;     //插入，再输入数据
    }
};
```

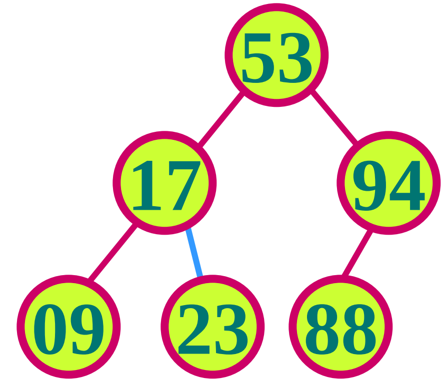
二叉搜索树的删除算法

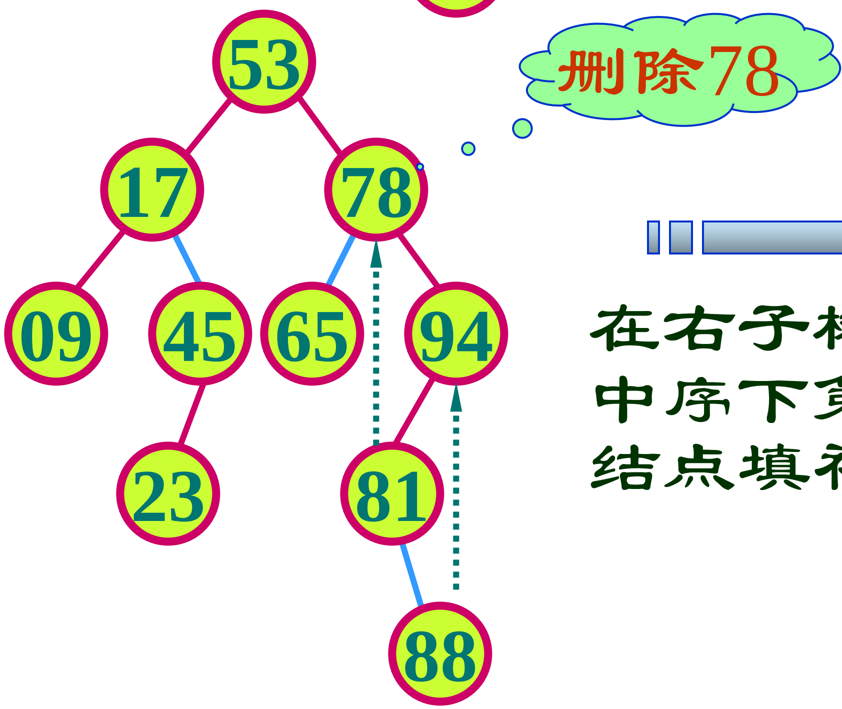
- 在二叉搜索树中删除一个结点时，必须将因删除结点而断开的二叉链表重新链接起来，同时确保二叉搜索树的性质不会失去。
- 为保证在删除后树的搜索性能不至于降低，还需要防止重新链接后树的高度增加。
  - ✓<u>删除叶结点</u>，只需将其双亲结点指向它的指针清零，再释放它即可。
  - ✓<u>被删结点右子树为空</u>，可以拿它的左子女结点顶替它的位置，再释放它。

✓<u>被删结点左子树为空</u>，可以拿它的右子女结点顶替它的位置，再释放它。

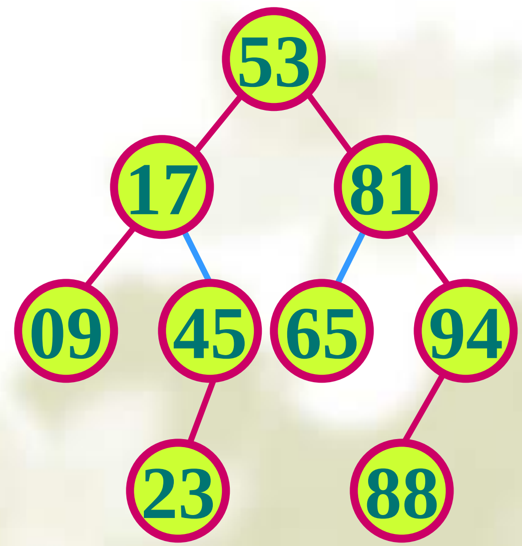
✓<u>被删结点左、右子树都不为空</u>，可以在它的右子树中寻找中序下的第一个结点(关键码最小),用它的值填补到被删结点中，再来处理这个结点的删除问题。

左子树空，用右子女顶替





在右子树上找中序下第一个结点填补



二叉搜索树的删除算法

```
template <class E, class K>
bool BST<E, K>::Remove (const K x,
     BstNode<E, K> *& ptr) {
//在以 ptr 为根的二叉搜索树中删除含 x 的结点
   BstNode<E, K> *temp;
   if (ptr != NULL) {
      if (x < ptr->data.key) Remove (x, ptr->left);
                                //在左子树中执行删除
      else if (x > ptr->data.key) Remove (x, ptr->right);
                                //在右子树中执行删除
```

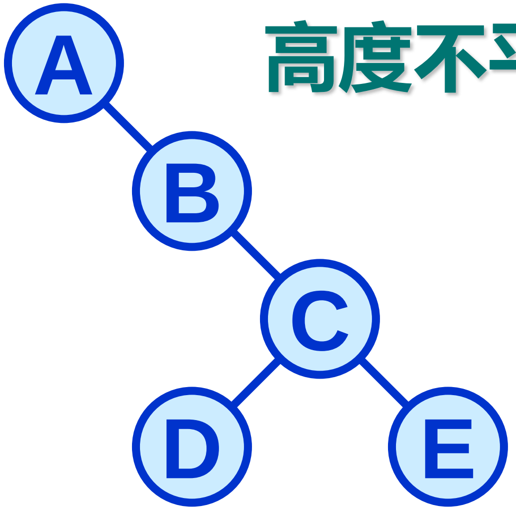
```
else if (ptr->left != NULL && ptr->right != NULL)
{      //ptr指示关键码为x的结点，它有两个子女
    temp = ptr->right;
       //到右子树搜寻中序下第一个结点
    while (temp->left != NULL)
        temp = temp->left;
    ptr->data.key = temp->data.key;
        //用该结点数据代替根结点数据
    Remove (ptr->data.key, ptr->right);
}
else {//ptr指示关键码为x的结点最多有一个子女
```

```
        temp = ptr;
         if (ptr->left == NULL) ptr = ptr->right;
         else ptr = ptr->left;
         delete temp;
         return true;
      }
   }
   return false;
};
```

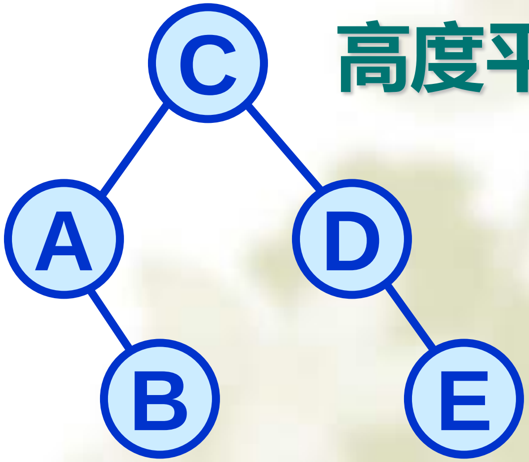
- **注意在删除算法参数表引用型指针参数的使用。**

AVL树 高度平衡的二叉搜索树

- **AVL 树的定义** 一棵 AVL 树或者是空树，或者是具有下列性质的二叉搜索树：它的左子树和右子树都是 AVL 树，且左子树和右子树的高度之差的绝对值不超过1。



高度不平衡



高度平衡

结点的平衡因子 bf (balance factor)

- 每个结点附加一个数字，给出该结点右子树的高度减去左子树的高度所得的高度差，这个数字即为结点的平衡因子bf。
- AVL树任一结点平衡因子只能取 -1, 0, 1。
- 如果一个结点的平衡因子的绝对值大于1，则这棵二叉搜索树就失去了平衡，不再是AVL树。
- 如果一棵有 n 个结点的二叉搜索树是高度平

衡的，其高度可保持在$O(\log_2 n)$，平均搜索长度也可保持在$O(\log_2 n)$。

AVL树的类定义

```
#include <iostream.h>
#include “stack.h”
template <class E, class K>
struct AVLNode : public BSTNode<E, K> {
//AVL树结点的类定义
    int bf;
    AVLNode() { left = NULL; right = NULL; bf = 0; }
```

```
    AVLNode (E d, AVLNode<E, K> *l = NULL,
            AVLNode<E, K> *r = NULL)
        { data = d;  left = l;  right = r;  bf = 0; }
};

template <class E, class K>
class AVLTree : public BST<E, K> {
//平衡的二叉搜索树（AVL）类定义
public:
    AVLTree() { root = NULL; }          //构造函数
    AVLTree (K Ref) { RefValue = Ref; root = NULL; }
      //构造函数：构造非空AVL树
```

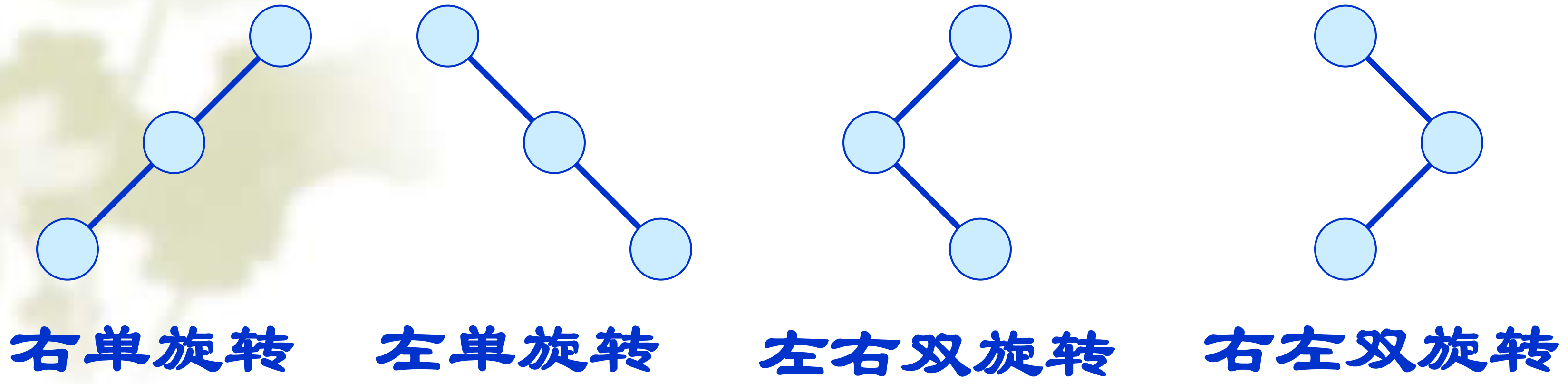
```
    int Height() const;                                    //高度
    AVLNode<E, K>* Search (K x,
         AVLNode<E, K> *& par) const;                      //搜索
    bool Insert (E& e1) { return Insert (root, e1); }      //插入
    bool Remove (K x, E& e1)
        { return Remove (root, x, e1); }                   //删除
    friend istream& operator >> (istream& in,
        AVLTree<E, K>& Tree);                              //重载：输入
    friend ostream& operator << (ostream& out,
        const AVLTree<E, K>& Tree);                        //重载：输出
protected:
    int Height (AVLNode<E, K> *ptr) const;
```

```
    bool Insert (AVLNode<E, K>*& ptr, E& e1);
    bool Remove (AVLNode<E, K>*& ptr, K x, E& e1);
    void RotateL (AVLNode<E, K>*& ptr);    //左单旋
    void RotateR (AVLNode<E, K>*& ptr);    //右单旋
    void RotateLR (AVLNode<E, K>*& ptr);
        //先左后右双旋
    void RotateRL (AVLNode<E, K>*& ptr);
        //先右后左双旋
};
```

平衡化旋转

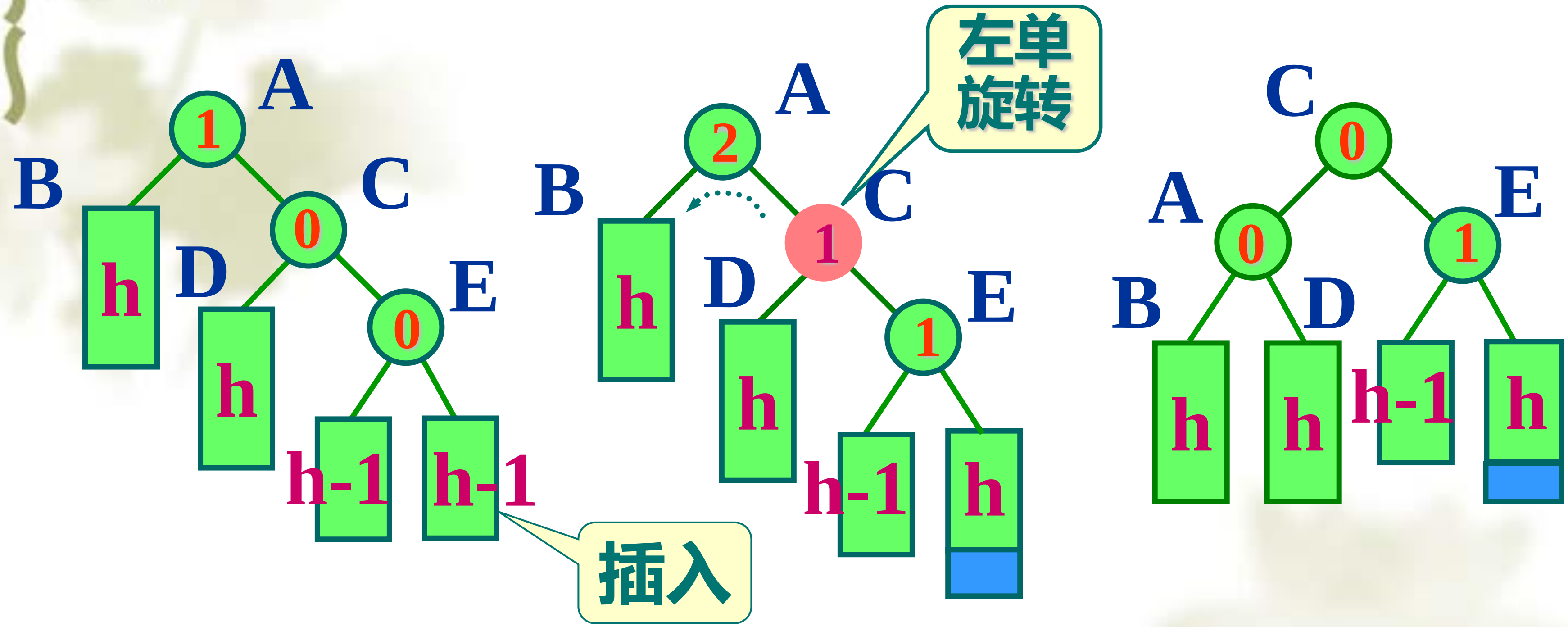
- 如果在一棵平衡的二叉搜索树中插入一个新结点，造成了不平衡。此时必须调整树的结构，使之平衡化。
- 平衡化旋转有两类：
  - ✓ 单旋转 (左旋和右旋)
  - ✓ 双旋转 (左平衡和右平衡)
- 每插入一个新结点时, AVL 树中相关结点的平衡状态会发生改变。因此，在插入一 个新结点后，需要<u>从插入位置沿通向根的路径回溯</u>，<u>检查各结点的平衡因子</u>。

- 如果在某一结点发现高度不平衡，停止回溯。从发生不平衡的结点起，沿刚才回溯的路径取直接下两层的结点。
- 如果这三个结点处于一条直线上，则采用单旋转进行平衡化。单旋转可按其方向分为左单旋转和右单旋转， 其中一个是另一 个的镜像，其方向与不平衡的形状相关。
- 如果这三个结点处于一条折线上，则采用双旋转进行平衡化。双旋转分为先左后右和先右后左两类。



左单旋转 (RotateLeft)

- 在结点A的右子女的右子树E中插入新结点，该子树高度增1导致结点A的平衡因子变成2，出现不平衡。为使树恢复平衡，从A沿插入路径连续取3个结点A、C和E，以结点C为旋转轴，让结点A反时针旋转。



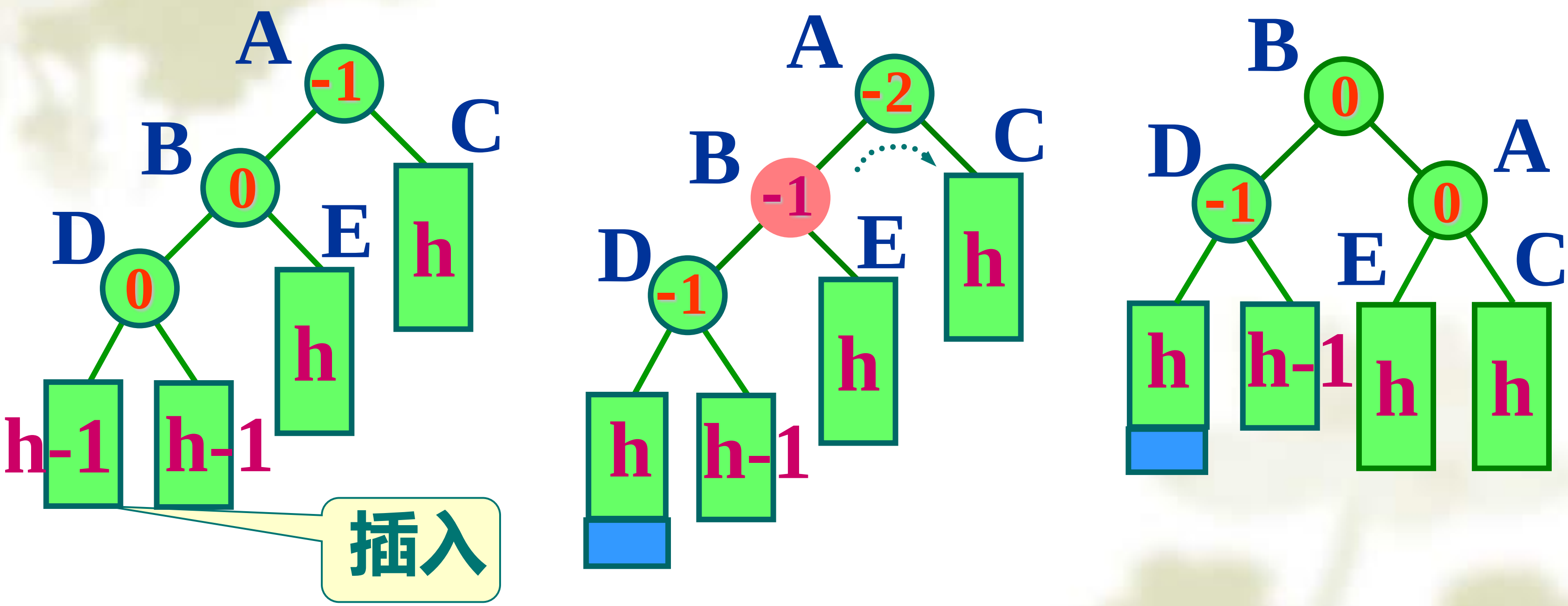

```
template <class E, class K>
void AVLTree<E, K>::
RotateL (AVLNode<E, K> *& ptr) {
//右子树比左子树高: 做左单旋转后新根在ptr
```

```
    AVLNode<E, K> *subL = ptr;  // A结点
    ptr = subL->right;           // C结点上升，替代A
    subL->right = ptr->left;     // D成为A的右结点
    ptr->left = subL;            // A成为C的左结点
    ptr->bf = subL->bf = 0;
};
```

右单旋转 (RotateRight)

- 在结点A的左子女的左子树D上插入新结点使其高度增1导致结点A的平衡因子增到-2，造成不平衡。为使树恢复平衡，从A沿插入路径

❖ 插入路径连续取3 个结点A、B和D，以结点B为旋转轴，将结点A顺时针旋转。




```
template <class E, class K>
void AVLTree<E, K>::
RotateR (AVLNode<E, K> *& ptr) {
```

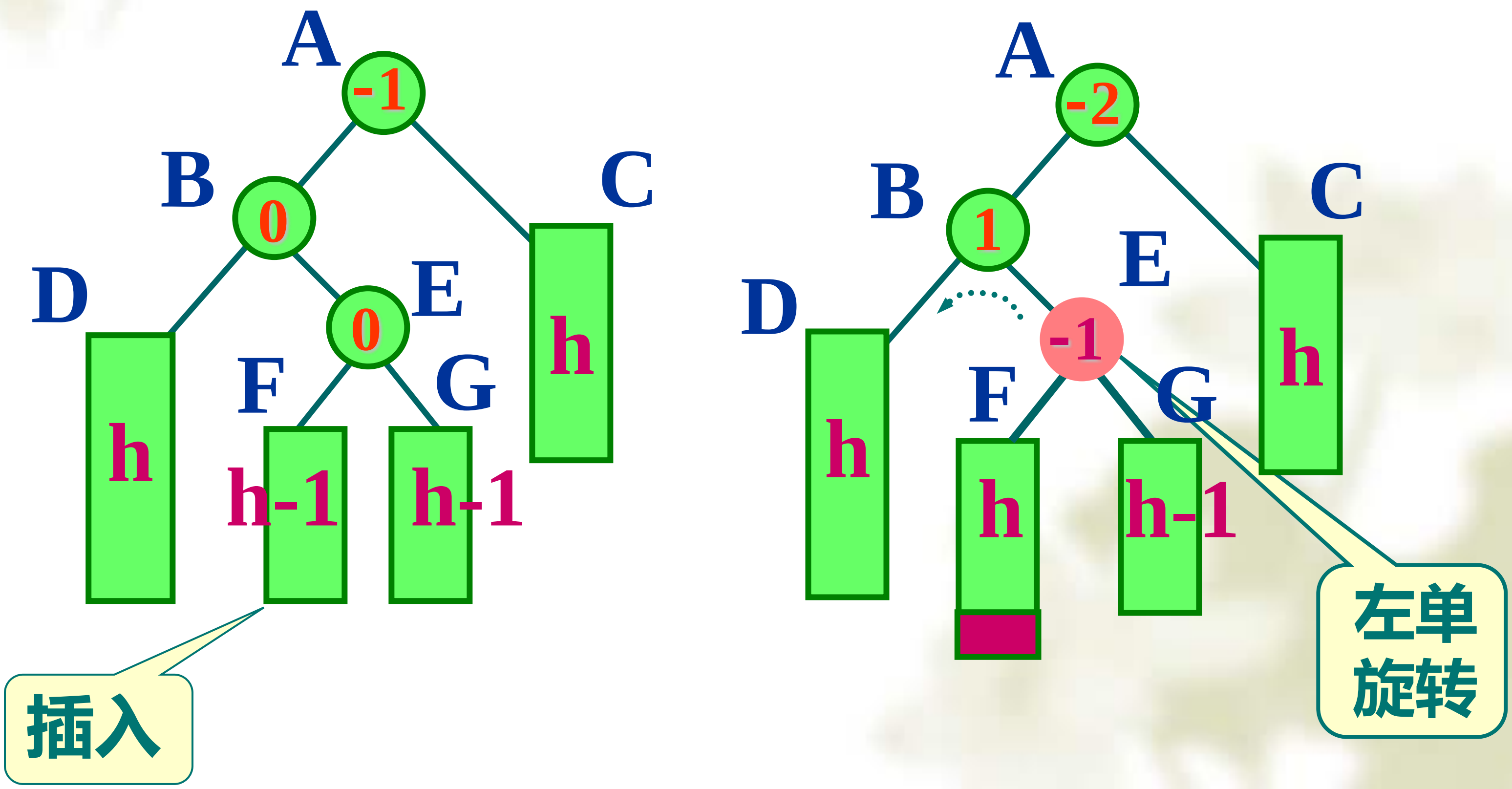
```
//左子树比右子树高，旋转后新根在ptr
    AVLNode<E, K> *subR = ptr;   //要右旋转的结点
    ptr = subR->left;
    subR->left = ptr->right;          //转移ptr右边负载
    ptr->right = subR;                //ptr成为新根
    ptr->bf = subR->bf = 0;
};
```

先左后右双旋转 (RotationLeftRight)

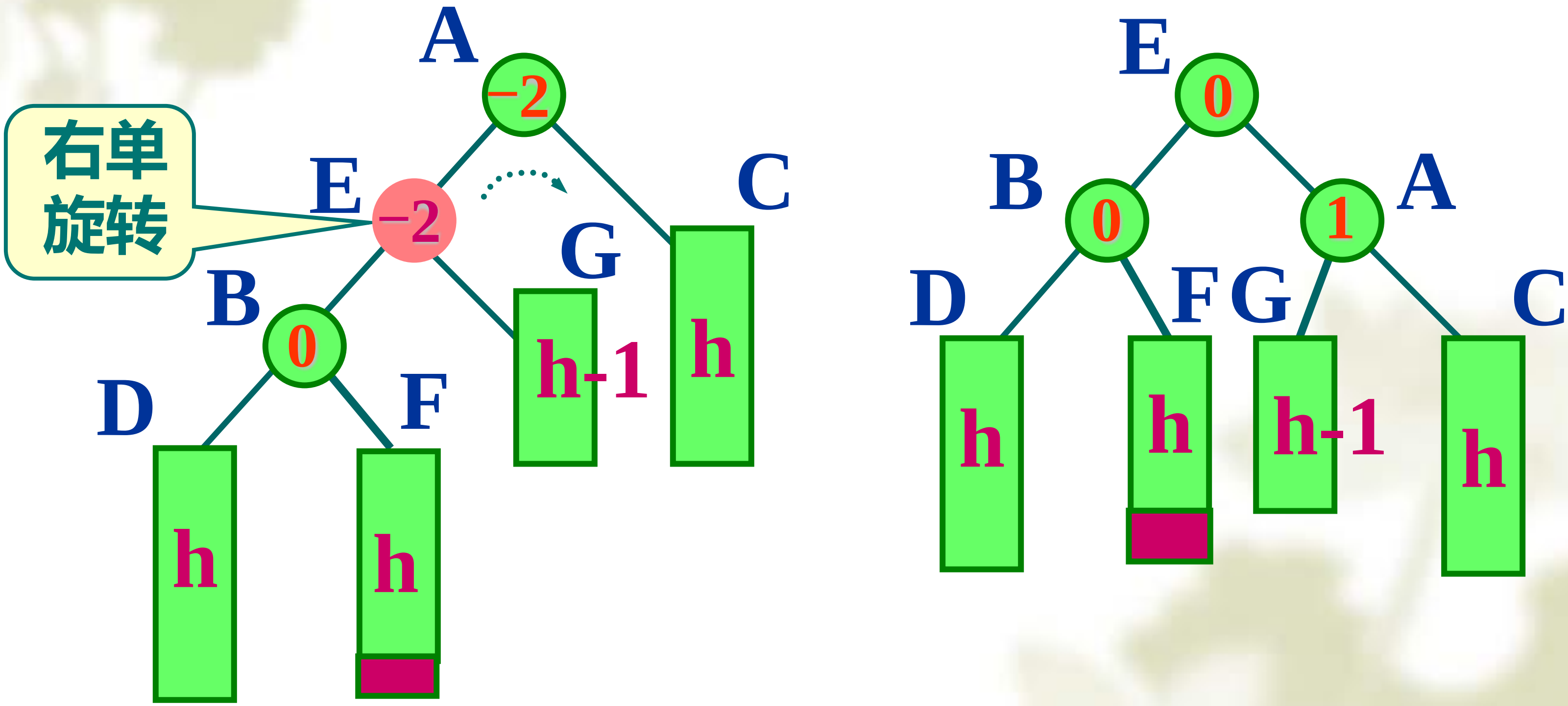
- **在结点A的左子女的右子树中插入新结点，该子树高度增1导致结点A的平衡因子变为-2，**

造成不平衡。

- 以结点E为旋转轴，将结点B反时针旋转，以E代替原来B的位置。



- 再以结点E为旋转轴，将结点A顺时针旋转。使之平衡化。



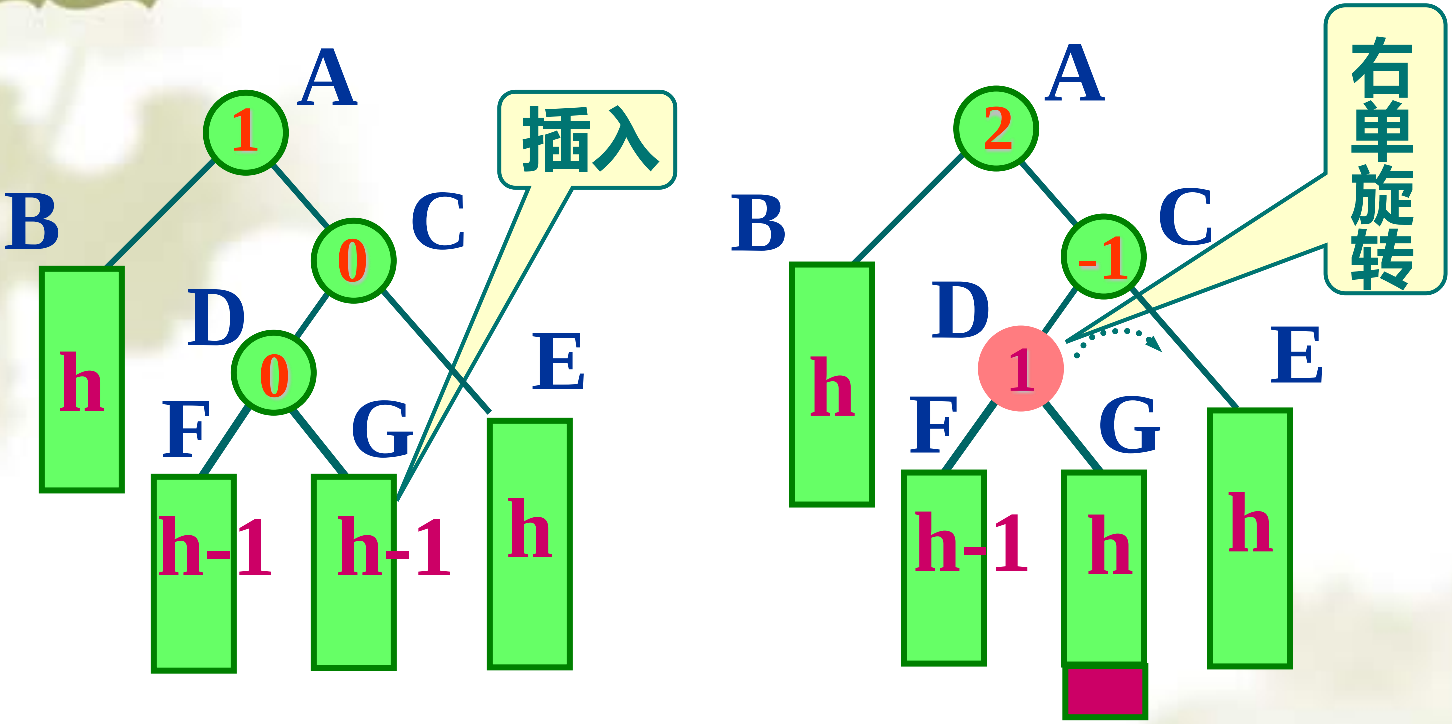

```
template <class E, class K>
void AVLTree<E, K>::
```

```
RotateLR (AVLNode<E, K> *& ptr) {
    AVLNode<E, K> *subR = ptr;    //A结点
    AVLNode<E, K> *subL = subR->left;  //B结点
    ptr = subL->right;              //E结点上升
    subL->right = ptr->left;   //E的左孩子成为B的右孩子
    ptr->left = subL;              //B结点成为E的左孩子
    if (ptr->bf <= 0) subL->bf = 0;
    else subL->bf = -1;
    subR->left = ptr->right;  //E的右孩子成为B的左孩子
    ptr->right = subR;          //A结点成为E的右孩子
    if (ptr->bf == -1) subR->bf = 1;
    else subR->bf = 0;
```

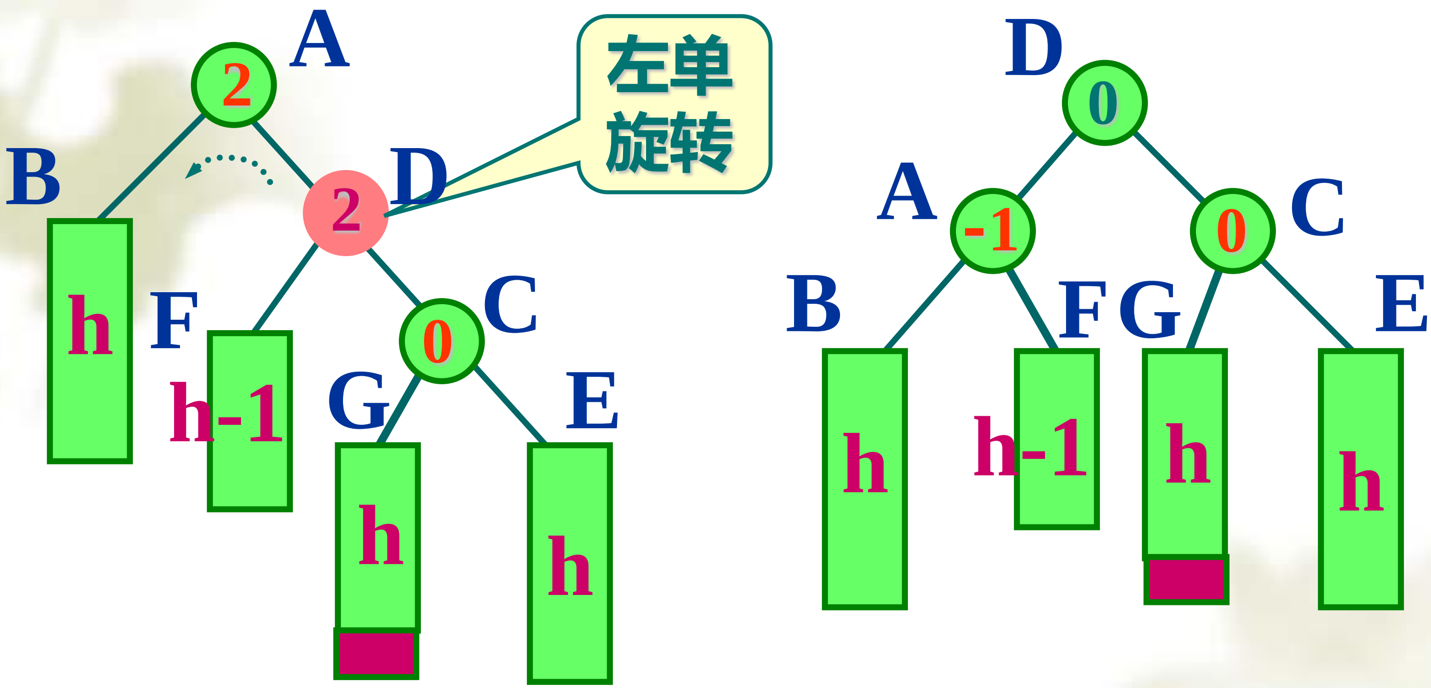
```
    ptr->bf = 0;
};
```

先右后左双旋转 (RotationRightLeft)

- 在结点A的右子女的左子树中插入新结点，该子树高度增1。结点A的平衡因子变为2，发生了不平衡。
- 首先以结点D为旋转轴，将结点C顺时针旋转，以D代替原来C的位置。



- 再以结点D为旋转轴，将结点A反时针旋转，恢复树的平衡。




```
template <class E, class K>
void AVLTree<E, K>::
RotateRL (AVLNode<E, K> *& ptr) {
    AVLNode<E, K> *subL = ptr;
```

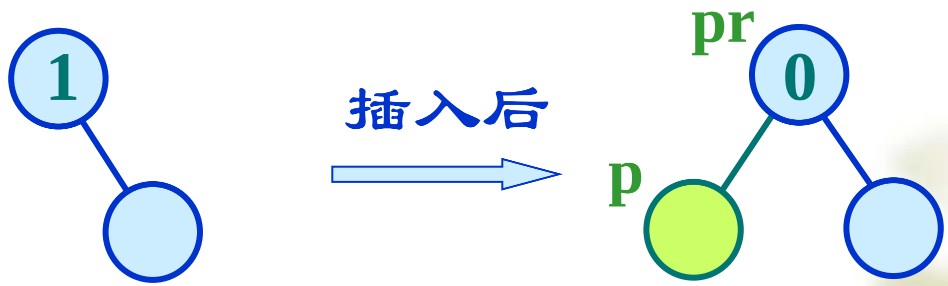
```
    AVLNode<E, K> *subR = subL->right;
    ptr = subR->left;
    subR->left = ptr->right;
    ptr->right = subR;
    if (ptr->bf >= 0) subR->bf = 0;
    else subR->bf = 1;
    subL->right = ptr->left;
    ptr->left = subL;
    if (ptr->bf == 1) subL->bf = –1;
    else subL->bf = 0;
    ptr->bf = 0;
};
```

AVL树的插入

- 在向一棵本来是高度平衡的AVL树中插入一个新结点时，如果树中某个结点的平衡因子的绝对值 |bf| > 1，则出现了不平衡，需要做平衡化处理。
- AVL树的插入算法从一棵空树开始，通过输入一系列对象关键码，逐步建立AVL树。
- 在插入新结点后，需从插入结点沿通向根的路径向上回溯，如果发现有不平衡的结点，需从这个结点出发，使用平衡旋转方法进行平衡化处理。

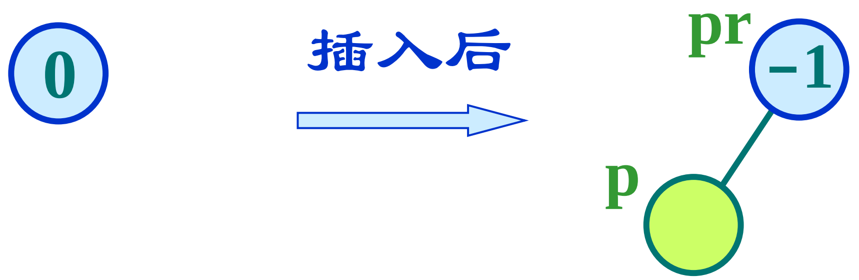
- 设新结点p的平衡因子为0，其父结点为pr。插入新结点后pr的平衡因子值有三种情况：

1. 结点pr的平衡因子为0。说明刚才是在pr的较矮的子树上插入了新结点，此时不需做平衡化处理，返回主程序。子树的高度不变。



2. 结点pr的平衡因子的绝对值|bf| = 1。说明插入前pr的平衡因子是0，插入新结点后，以pr为根的子树不需平衡化旋转。但该子树高度

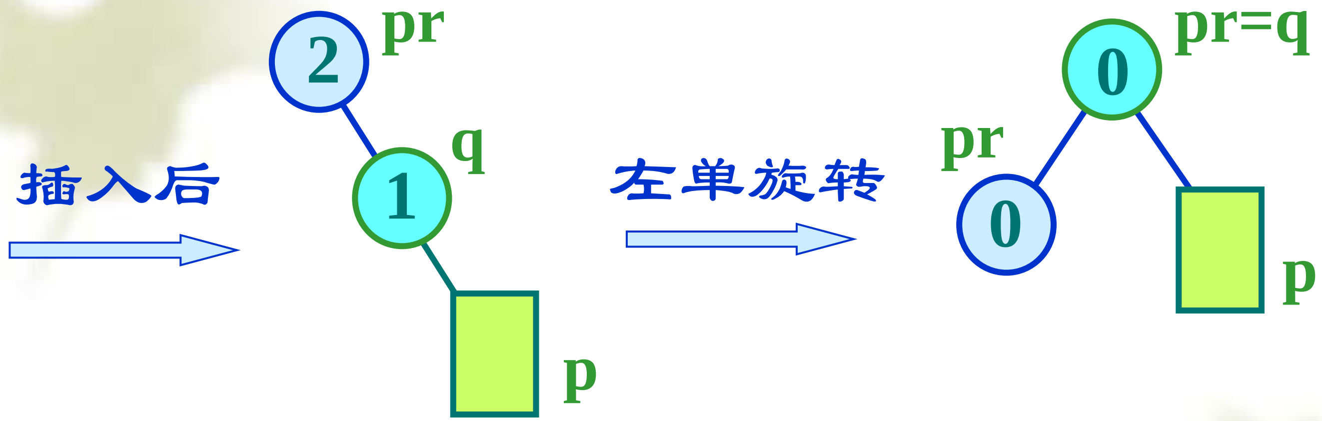
增加，还需从结点pr向根方向回溯，继续考查结点pr双亲(pr = Parent(pr))的平衡状态。



3. 结点pr的平衡因子的绝对值|bf| = 2。说明新结点在较高的子树上插入，造成了不平衡，需要做平衡化旋转。此时可进一步分2种情况讨论：

❶ 若结点pr的bf = 2，说明右子树高，结合其右子女q 的bf分别处理：

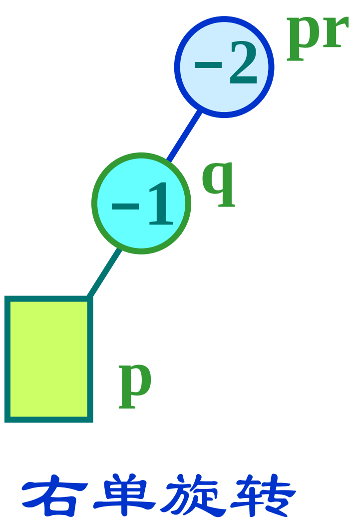
– 若q的bf为1，执行左单旋转。

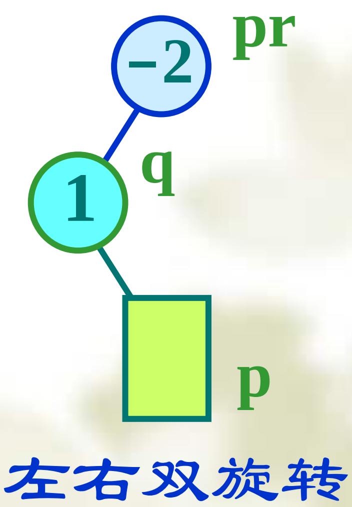


– 若q的bf为-1，执行先右后左双旋转。

❷ 若结点pr的bf = −2，说明左子树高，结合其左子女q 的bf分别处理：

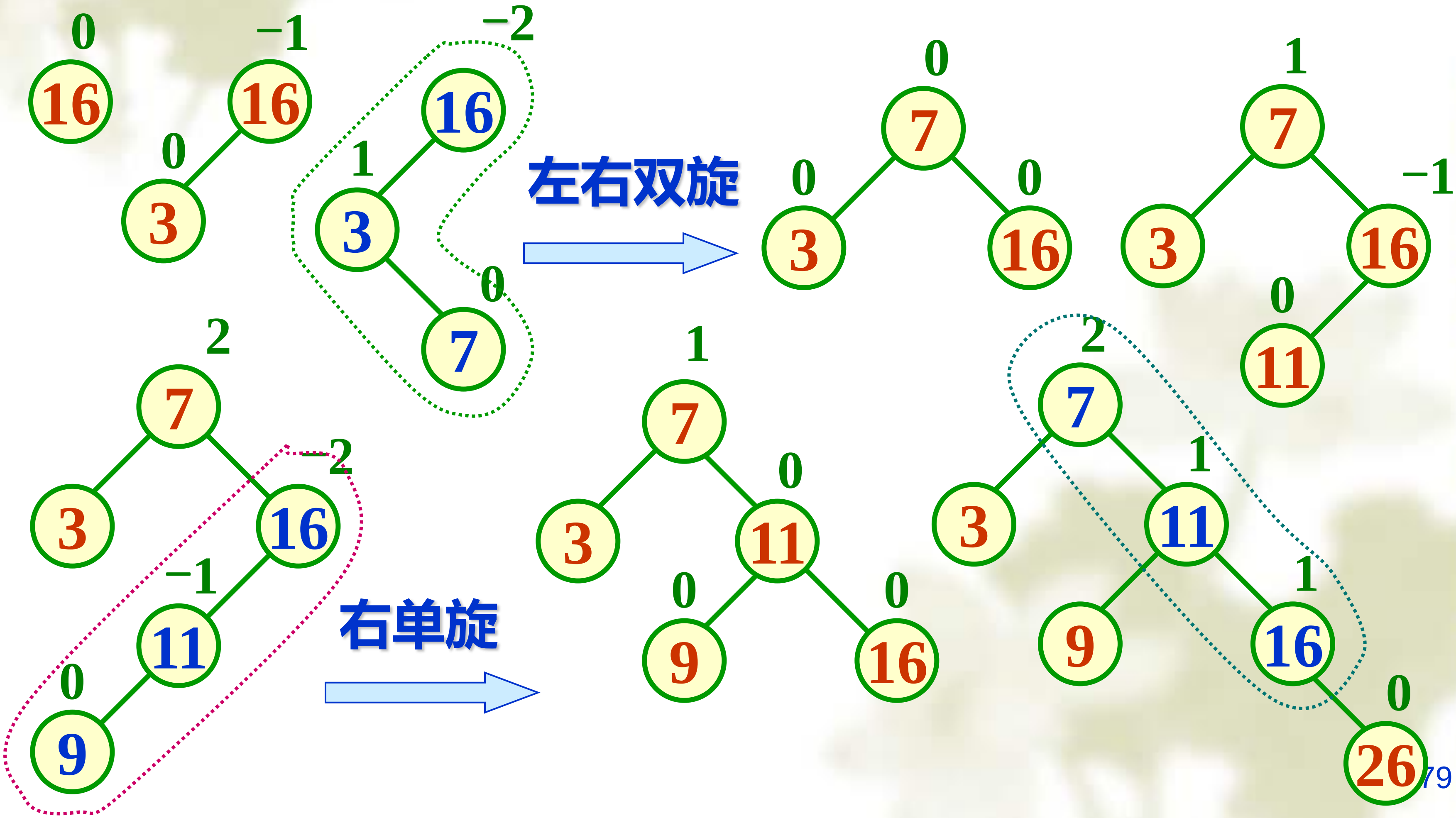
- 若q的bf为−1，执行右单旋转；
- 若q的bf为1，执行先左后右双旋转。



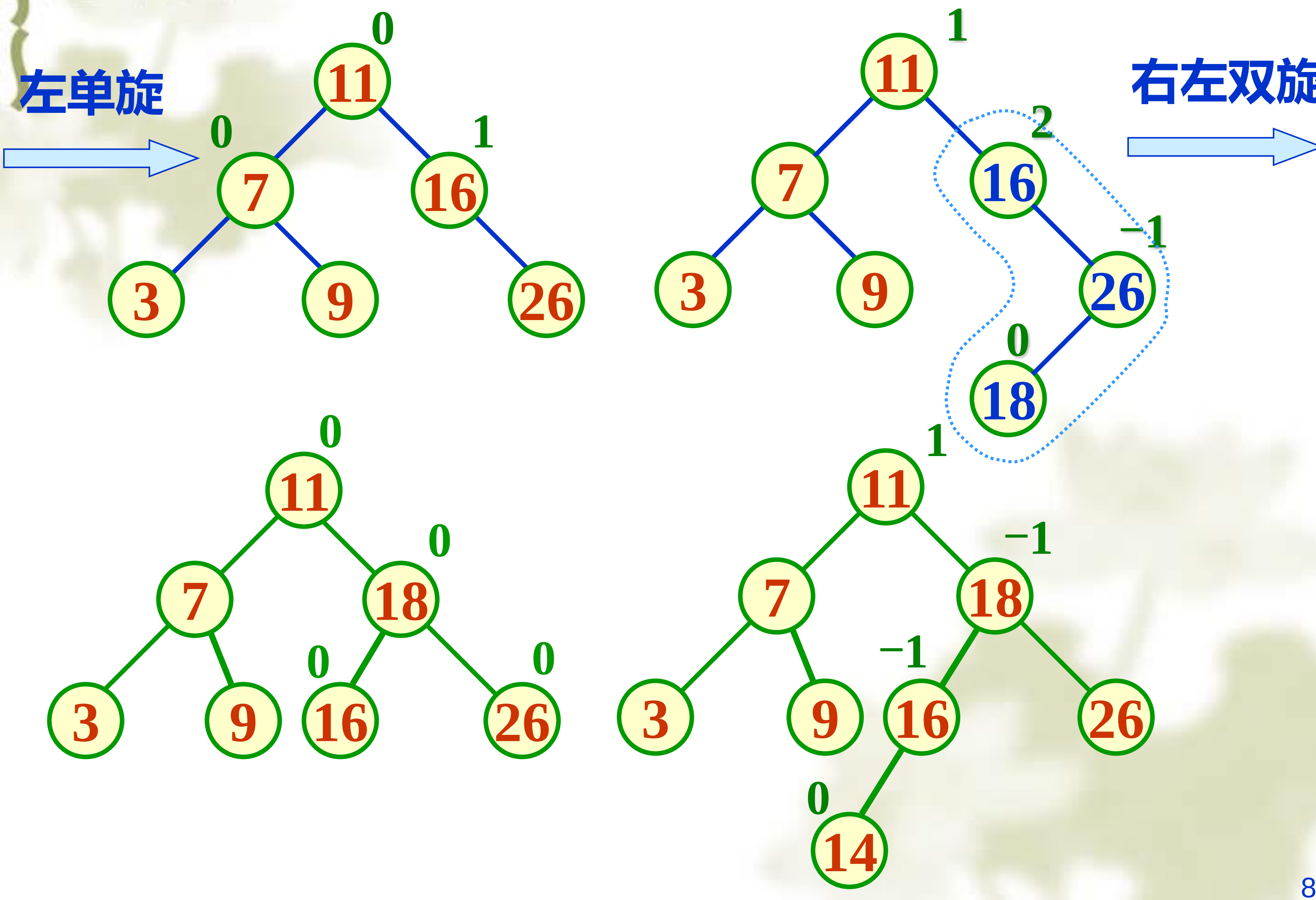


❖ 下面举例说明在AVL树上的插入过程。

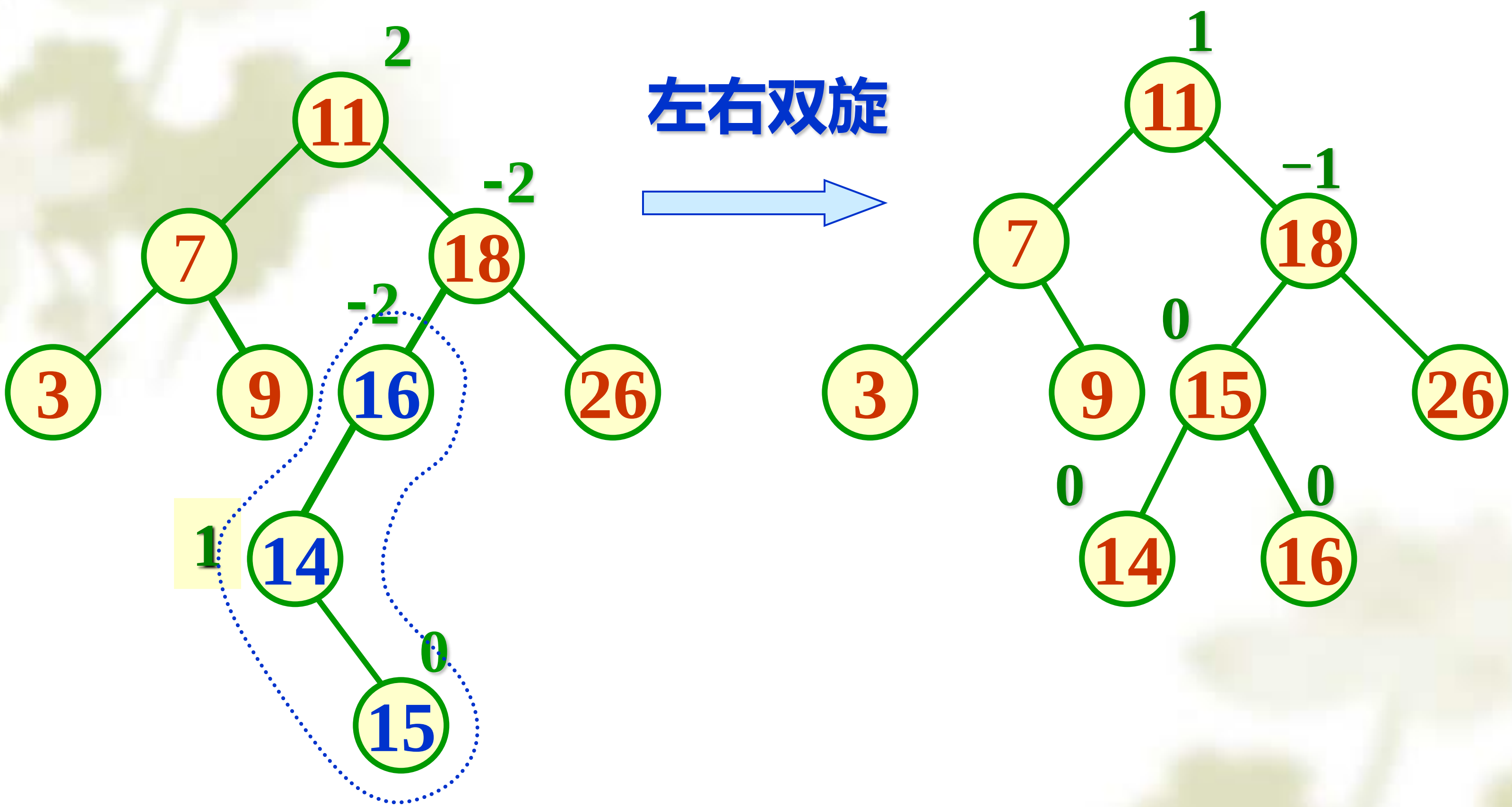
- 例如，输入关键码序列为 { 16, 3, 7, 11, 9, 26, 18, 14, 15 }，插入和调整过程如下。



关键码 { 16, 3, 7, 11, 9, 26, 18, 14, 15 }



关键码 { 16, 3, 7, 11, 9, 26, 18, 14, 15 }



从空树开始的建树过程

AVL树的删除

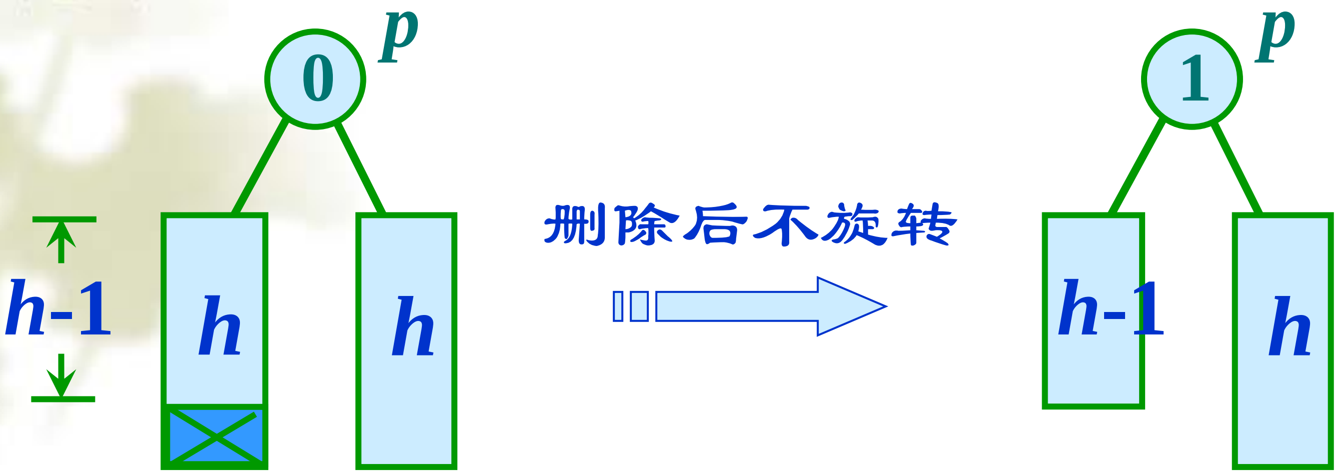
1. 如果被删结点*x*最多只有一个子女，可做简单删除：
   – 将结点*x*从树中删去。
   – 因为结点*x*最多有一个子女，可以简单地把*x*的双亲中原来指向*x*的指针改指到这个子女结点；
   – 如果结点*x*没有子女，*x*双亲原来指向*x*的指针置为NULL。
   – 将原来以结点*x*为根的子树的高度减1。

2. 如果被删结点 x 有两个子女:

- 搜索 x 在中序次序下的直接前驱 y (同样可以找直接后继)。
- 把结点 y 的内容传送给结点 x，现在问题转移到删除结点 y。把结点 y 当作被删结点x。
- 因为结点 y 最多有一个子女，可以简单地用 1. 给出的方法进行删除。

❖ 必须沿结点 x 通向根的路径反向追踪高度的变化对路径上各个结点的影响。

- 用一个布尔变量shorter（缩短）来指明子树高度是否被缩短。在每个结点上要做的操作取决于 shorter的值和结点的bf，有时还要依赖子女的bf。
- 布尔变量shorter的值初始化为True。然后对于从x的双亲到根的路径上的各个结点p，在 shorter保持为True时执行下面操作。如果 shorter变成False，算法终止。
  ❶ 当前结点 p 的bf为0。如果它的左子树或右子树被缩短，则它的bf改为1或−1，同时 shorter置为False。

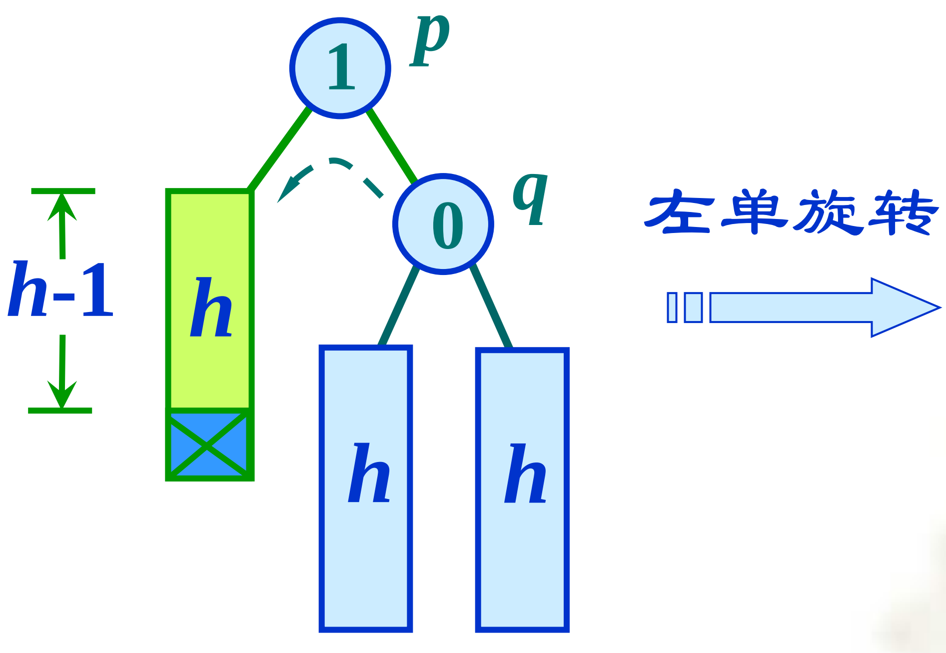


❷ **结点 *p* 的 bf 不为0且较高的子树被缩短。**
则 *p* 的 bf 改为0，同时shorter置为True。

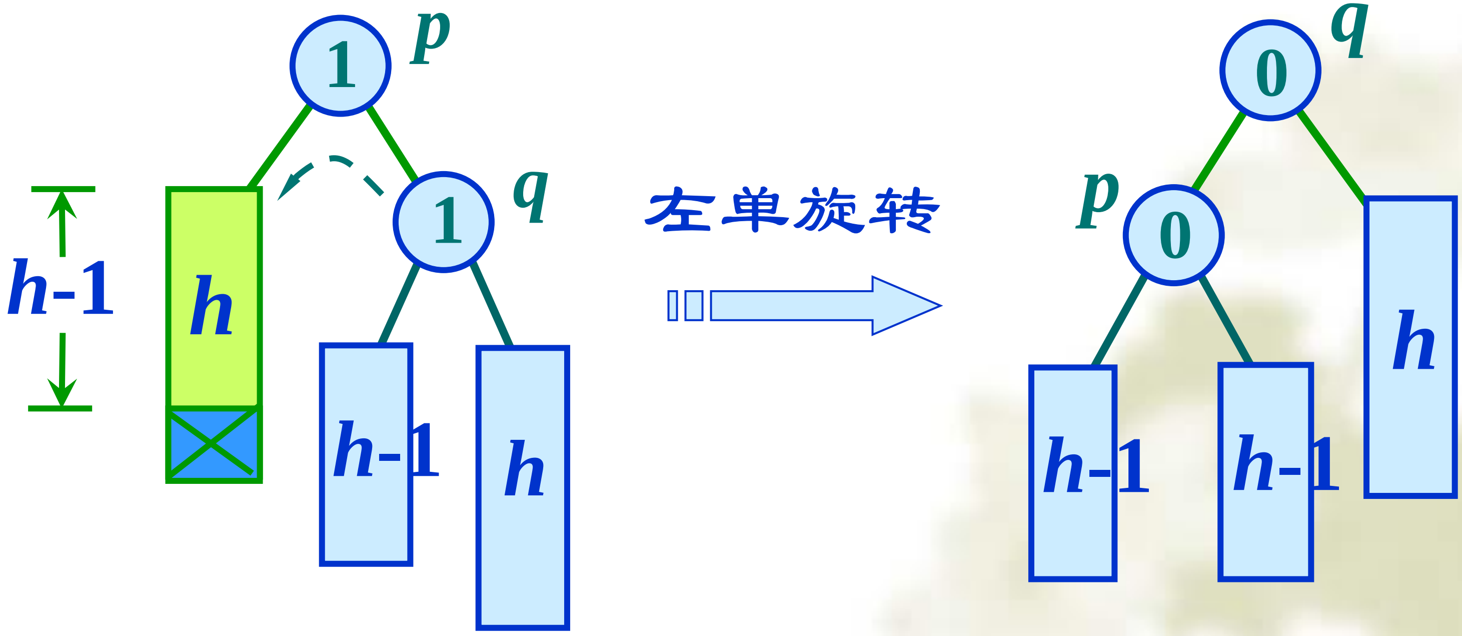
❸ 结点 *p* 的 bf 不为0，且较矮的子树又被缩短。则在结点 *p* 发生不平衡。需要进行平衡化旋转来恢复平衡。

- 令 *p* 的较高的子树的根为 *q*（该子树未被缩短），根据 *q* 的 bf，有如下 3 种平衡化操作。
- 旋转的方向取决于是结点 *p* 的哪一棵子树被缩短。

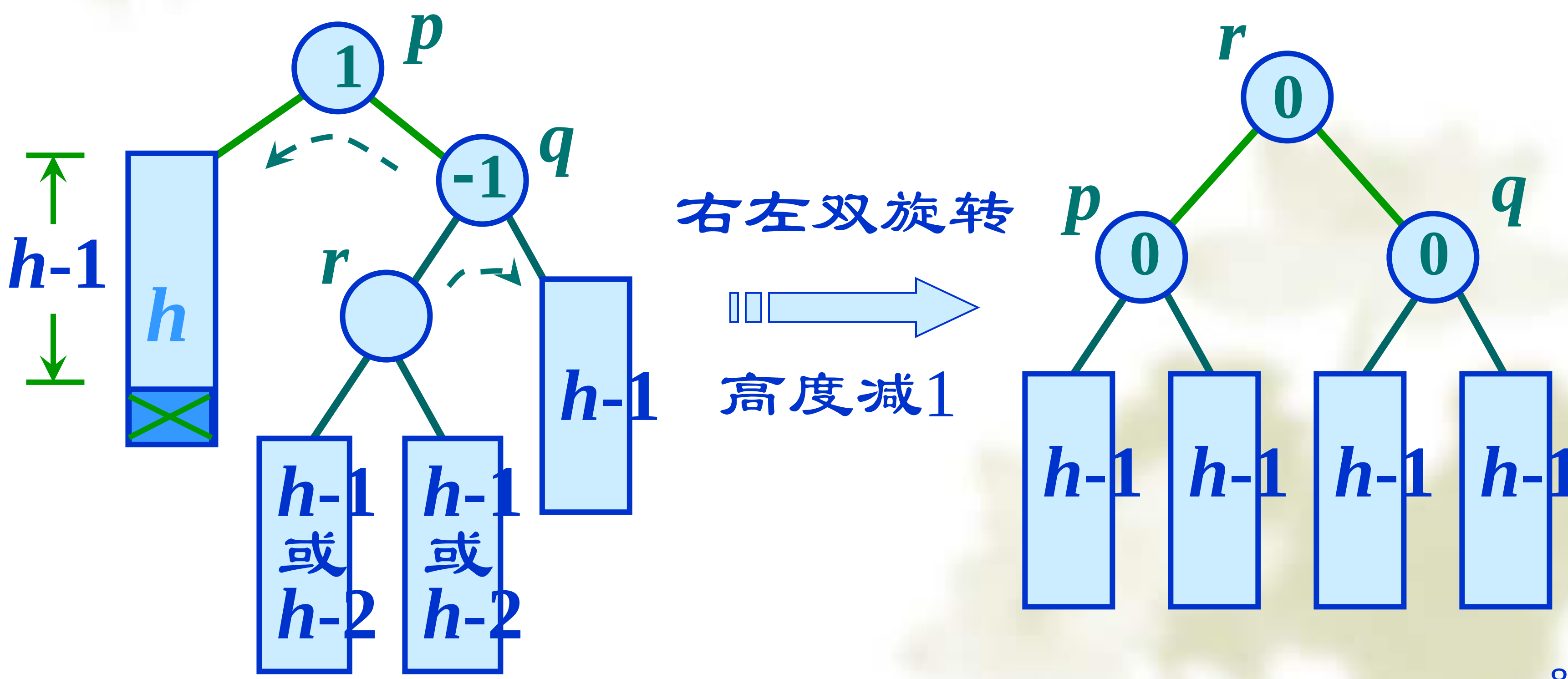
a) 如果 q（较高的子树）的 bf 为0，执行一个单旋转来恢复结点 p 的平衡，置shorter为False。无需检查上层结点的平衡因子。



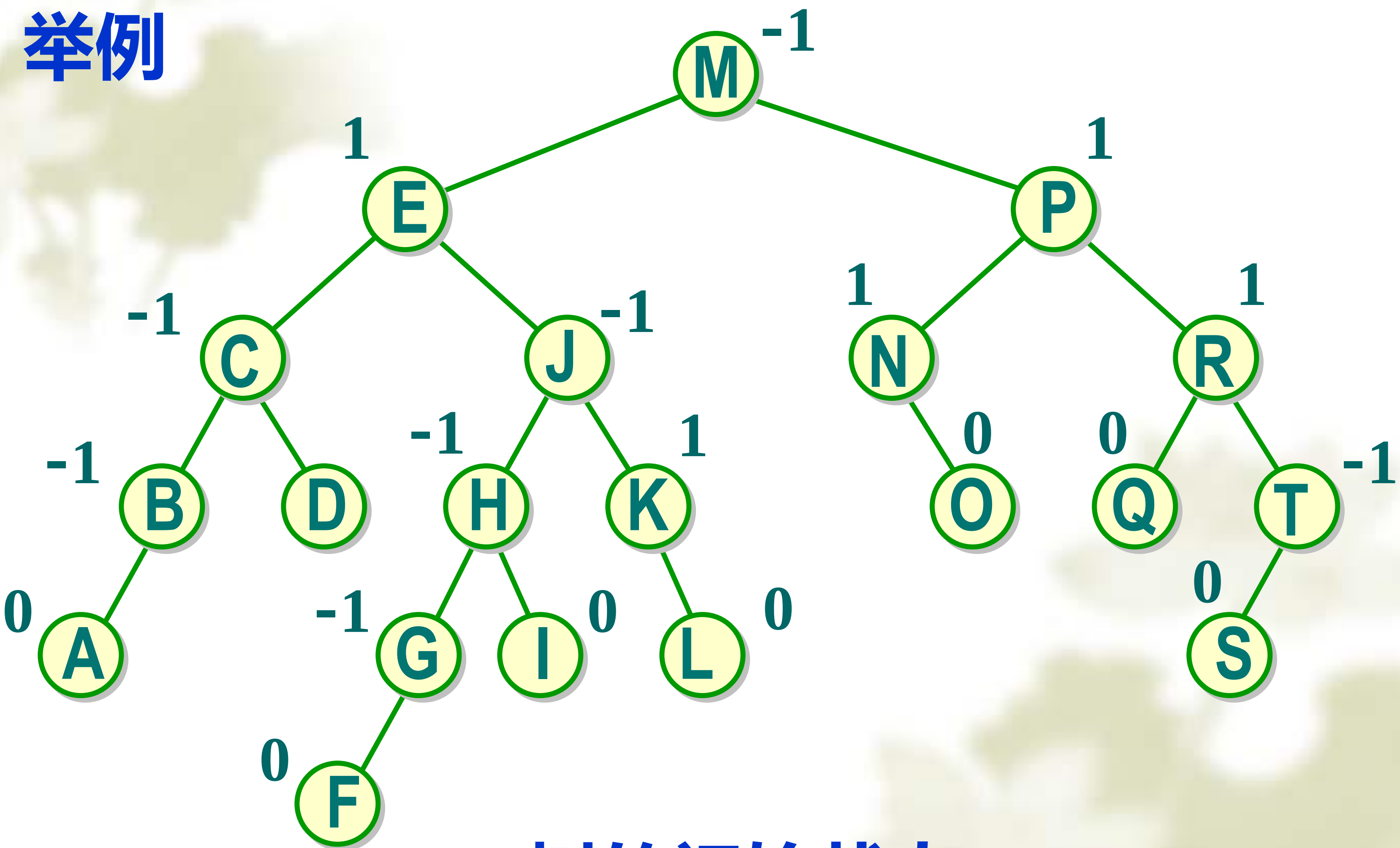
b) 如果 q 的 bf 与 p 的 bf 相同，则执行一个单旋转来恢复平衡，结点 p 和 q 的 bf 均改为0，同时置shorter为True。**还要继续检查上层结点的平衡因子。**



c) 如果 p 与 q 的 bf 相反，则执行一个双旋转来恢复平衡。先围绕 q 转再围绕 p 转。新根结点的 bf 置为0，其他结点的 bf 相应处理，同时置shorter为True。**还要继续检查上层结点的平衡因子。**

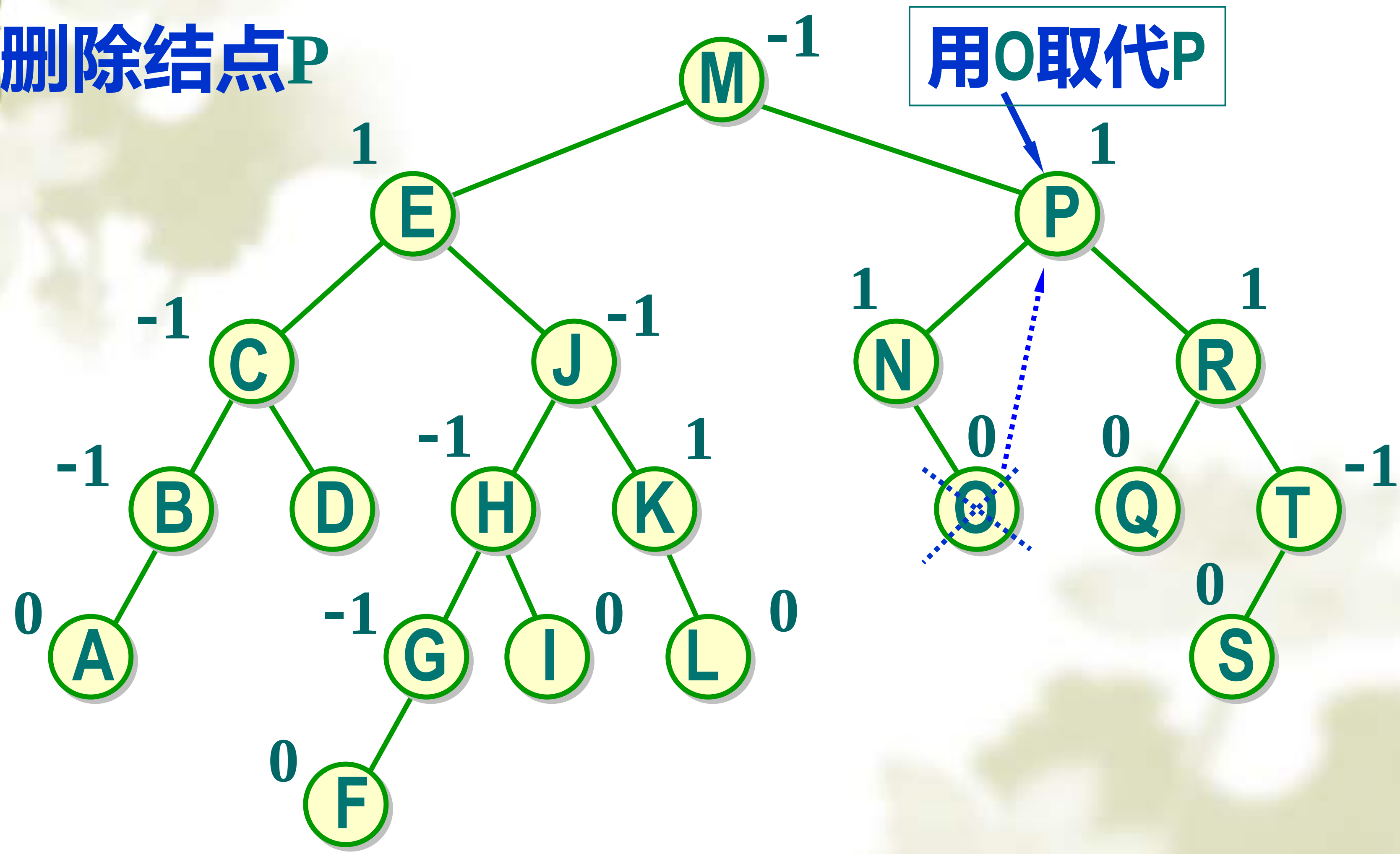


举例



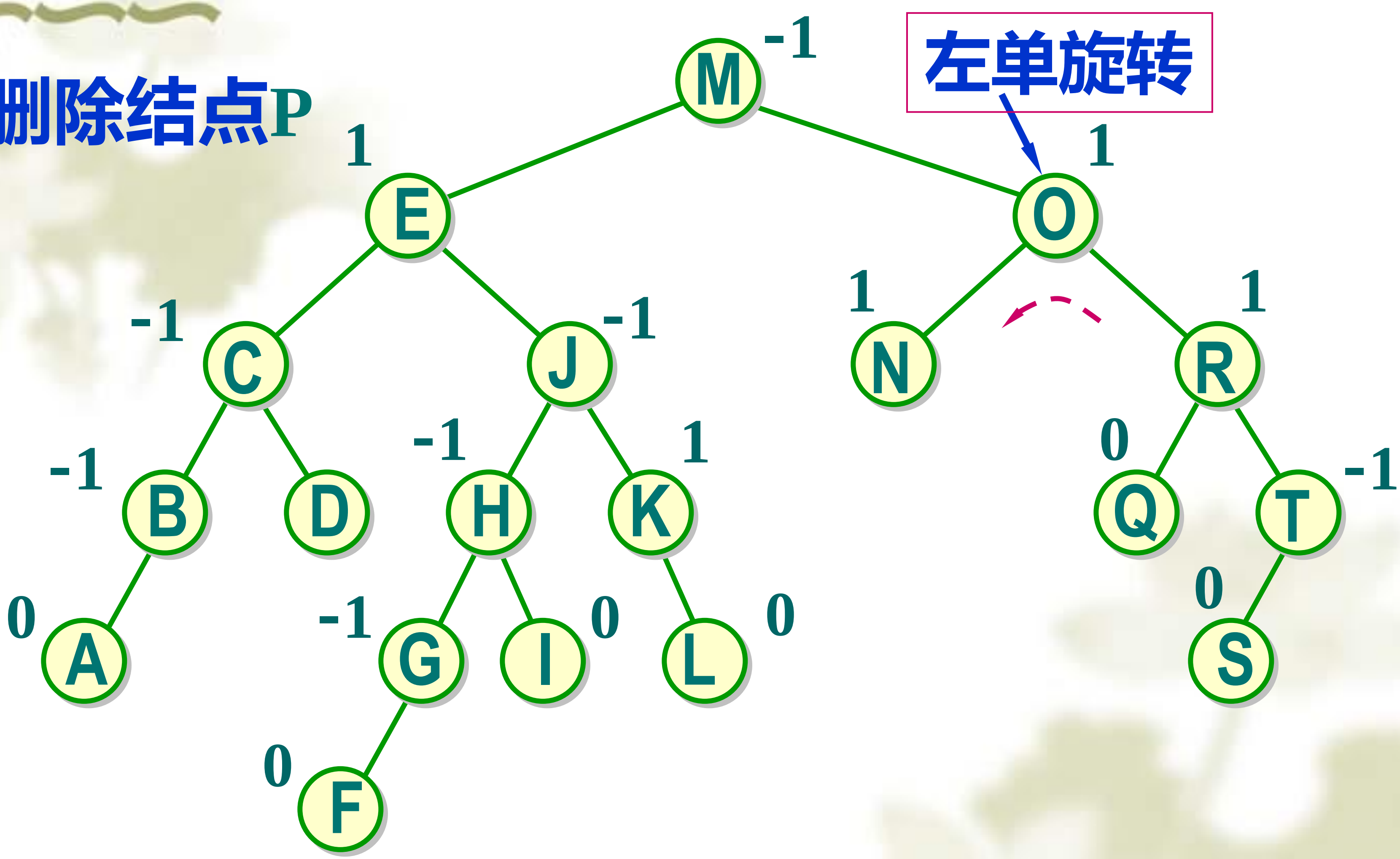
树的初始状态

删除结点P



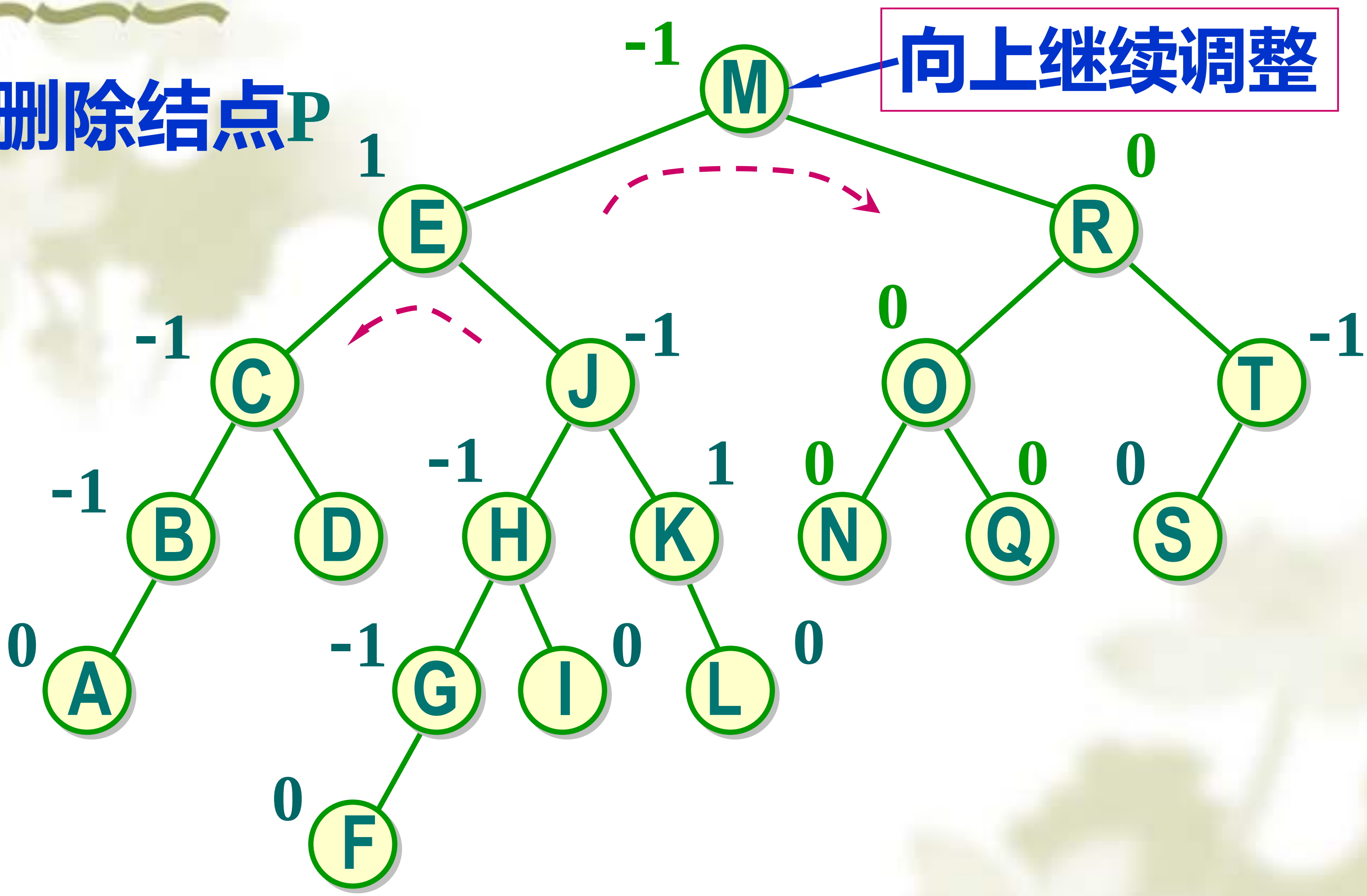
寻找结点P的中序直接前驱O, 用O顶替P, 删除O。

删除结点P



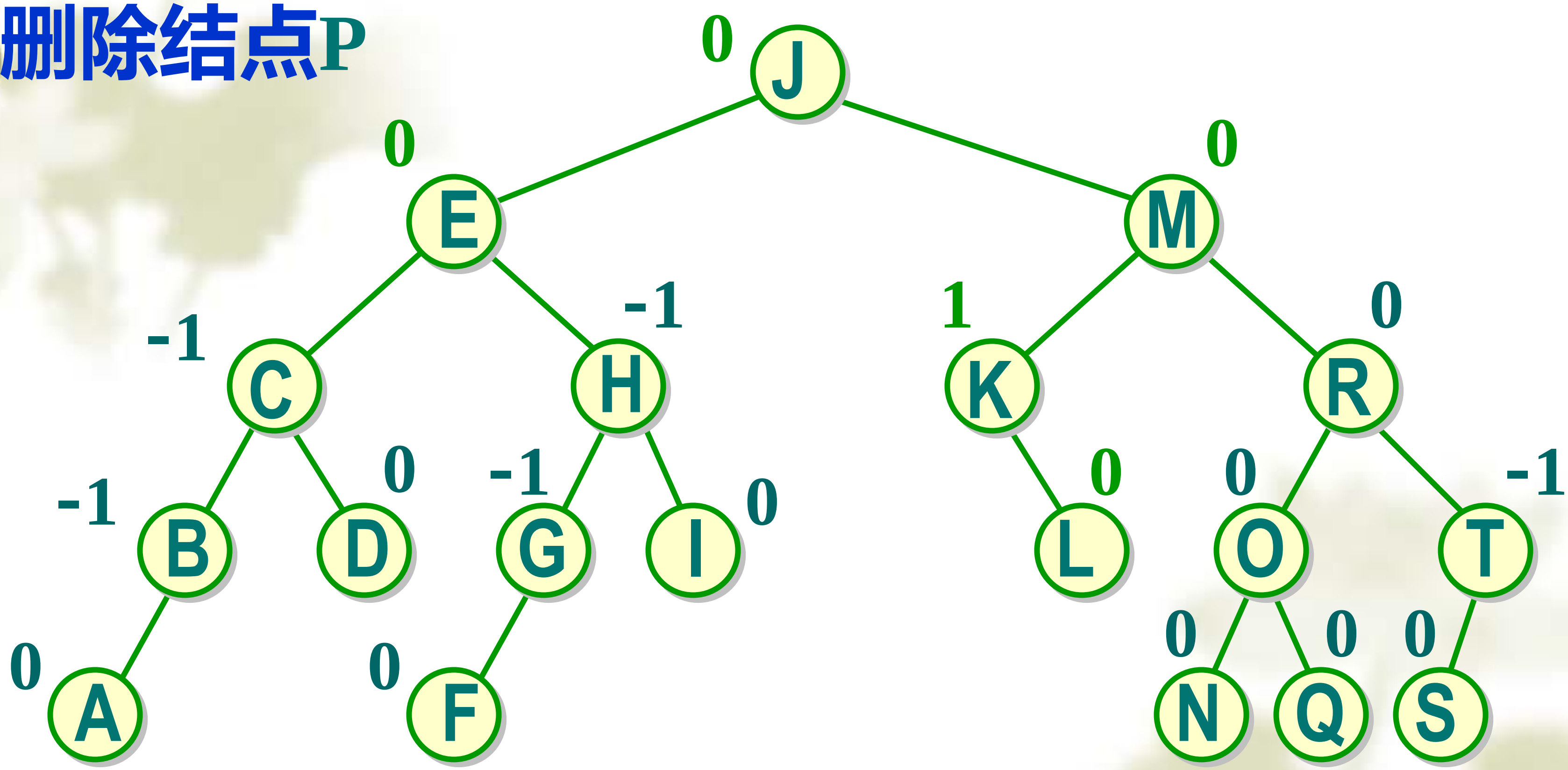
O与R的平衡因子同号，以R为旋转轴做左单旋转，M的子树高度减 1。

删除结点P



M的子树高度减 1，M发生不平衡。M与E的平衡因子反号，做左右双旋转。

删除结点P



AVL树的高度

- 设在新结点插入前AVL树的高度为h，结点个数为n，则插入一个新结点的时间是O(h)。对于AVL树来说，h多大?
- 设 N_h 是高度为 h 的AVL树的最小结点数。根的一棵子树的高度为$h-1$，另一棵子树的高度为$h-2$，这两棵子树也是高度平衡的。因此有
  - ✓ $N_0 = 0$ (空树)
  - ✓ $N_1 = 1$ (仅有根结点)
  - ✓ $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1 , h > 1$

- 可以证明, 对于 $h \geq 0$, 有 $N_h = F_{h+2} - 1$ 成立。

$F_h \approx (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^h / \sqrt{5}$, 则有 $N_h \approx (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{h+2} / \sqrt{5}$ -1

- 有 n 个结点的AVL树的高度不超过

  $1.44*\log_2(n+2)$

- 在AVL树删除一个结点并做平衡化旋转所需时间为 $O(\log_2 n)$。

- 二叉搜索树适合于组织在内存中的较小的索引(或目录)。对于存放在外存中的较大的文件系统，用二叉搜索树来组织索引不太合适。

- 在文件检索系统中大量使用的是用B树或B+树做文件索引。

第 7 章 作业

(1) 第 342 页，7.2

(2) 第 342 页，7.3

(3) 第 342 页，7.8

(4) 第 343 页，7.15

(5) 第 343 页，7.16

97