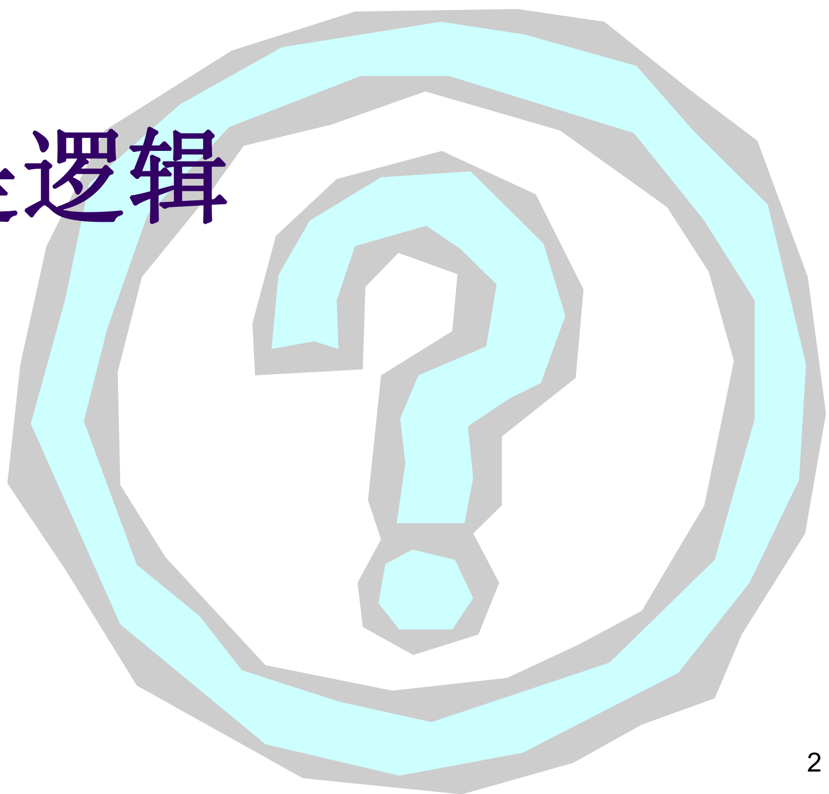
命题逻辑

离散数学—逻辑和证明

南京大学计算机科学与技术系

什么是逻辑



命题逻辑的语法

命题

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
  - 要么真，要么假
  - 不能既真又假
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ 税收下降了
  - ✓ 我的收入上升了
  - ✓ 今天是星期五
  - ✗ 你会说英语吗?
  - ✗ 3-x=5
  - ✗ 我们走吧!
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ 他是个多好的人呀！
  - ✗ “蓝色的命题为假。”

命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如：p, q, r
- 命题变元的取值范围为：{T, F}，{1, 0}
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
  - p: 今天是周五（p=0）
  - q: 2+2=4 （q =1）

原子命题与复合命题

- 复合命题
  - 并非外面在下雨。
  - 张挥与王丽都是三好学生。
  - 张晓静不是江西人就是安徽人。
  - 如果2+3=6，则π是有理数。
  - $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

复合命题是否为真，取决于：

作为复合成分的子命题的真假

<u>逻辑运算符（联接词）</u>的语义

否定（运算符，联接词）

$\neg p$:“非p”

$\neg p$的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

p所有可能的取值

合取（运算符，联接词）

$p \wedge q$：“p 并且 q”

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q = 1$ iff

p和q均为1

(p,q) 所有可能的取值

析取（运算符，联接词）

$p \vee q$：“p 或 q”

$p \vee q = 0$ iff

p和q均为0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

蕴涵（运算符，联接词）

$p \to q$：“若 p，则 q”（条件语句） p称为假设，q称为结论

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \to q = 0$ iff

p为1而q为0

双蕴涵（运算符，联接词）

$p \leftrightarrow q$：“p当且仅当q”（双条件语句）

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \leftrightarrow q$ =1 iff

p和q有相同的真值

命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题变元是命题表达式；
- 若p是命题表达式，则（$\neg p$）也是；
- 若p和q是命题表达式，则$(p\wedge q)$, $(p\vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p\leftrightarrow q)$也是；
- 别无其他
  - $(p\rightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $p\rightarrow(q\rightarrow r)$是命题公式（省略了外层括号）。
  - $pq\rightarrow r$以及 $p\rightarrow\wedge q$都不是命题公式。
  - $p\vee q \rightarrow r$， $\neg p\wedge q$ ， $(\neg p)\wedge q$是命题公式
- 运算符的优先级：$\neg$， $\wedge$， $\vee$， $\rightarrow$， $\leftrightarrow$

反直觉的“蕴涵”运算:

Vacuous Truth

将自然语言翻译成命题表达式

只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

a: 你可以从校园网访问因特网

c: 你主修计算机科学

f: 你是新生

$a \to (c \vee \neg f)$;

将自然语言翻译成命题表达式（续）

除非你满16周岁, 否则只要你身高不足4英尺就不能乘滑行游乐车.

q: 你能乘滑行游乐车

r: 你身高不足4英尺

s: 你满16周岁

$s \vee (r \rightarrow \neg q)$

$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$

命题表达式的真值表 $(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$

p q r	$\neg p$	$\neg p\wedge q$	$\neg r$	$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	0
1 0 0	0	[illegible]	[illegible]	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	1

一种“成假”指派

该命题表达式的所有指派

命题表达式的真值表

$$(p\leftrightarrow q) \ \leftrightarrow \ ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

命题逻辑公式（定义为一个形式语言）

- $\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \mid \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$

或者

$\phi ::= p \mid (\neg \phi_1) \mid (\phi_1 \wedge \phi_2) \mid (\phi_1 \vee \phi_2) \mid (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \triangleq (\phi_1 \rightarrow \phi_2) \wedge (\phi_2 \rightarrow \phi_1)$

命题逻辑的语义

什么是真?

永真式、矛盾式与可能式

- 永真式（重言式）：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p\vee\neg p$ **Tautology**
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p\wedge\neg p$ **Contradiction**
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如：$\neg p$

Contingency

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$	$p\wedge\neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

语义蕴涵

- φ 是永真的，iff $\vDash \varphi$ （φ is valid）
- 举例说明

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$
1	0	1
0	1	1

$\vDash p\vee\neg p$

$p\vee\neg p$ 是永真的

语义蕴涵（Semantic Entailment）

- $\varphi_1 \vDash \varphi_2$：对于$\varphi_1$的任意一个成真指派，$\varphi_2$均为真

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1

$\neg p \wedge q \vDash p \rightarrow q$

$\neg p \wedge q \vDash \neg p$

语义蕴涵

- $\varphi_1 \vDash \varphi_2$ iff $(\varphi_1 \to \varphi_2)$永真

一般情形

- $\varphi_1, \dots \varphi_n \vDash \varphi$ *iff* $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \varphi)$永真

- 语义蕴涵可归结为“判断某个命题是否永真”

逻辑等价（语义）

- 命题逻辑公式 p 和 q 逻辑等价：在所有可能情况下 p 和 q 都有相同的真值，因此也叫重言等价。
  - 也就是说，$p \leftrightarrow q$是永真式　（亦即 $\models p \leftrightarrow q$ ）
  - 记法：$p \equiv q$

$$p \leftrightarrow q \ \equiv \ (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$T \equiv p \vee \neg p \qquad F \equiv p \wedge \neg p$$

命题逻辑公式的证明

命题逻辑的推理问题

- 给定两个命题，它们是否有语义蕴涵关系？

  $\varphi_1 \vDash \varphi_2$ *iff* $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ 永真

- 给定两个命题，它们是否逻辑等价？

  φ_1与φ_2等价 (记为 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$) *iff* $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ 永真

- 给定命题表达式，它是否可满足？

  φ 可满足 *iff* $\neg\varphi$ 不是永真式

- 上述问题，均可归结为“判断某个命题是否永真”

论证

- 一个论证（*argument*）是一个命题序列。序列中除了最后一个命题之外的其它命题都称为前提（*premises*），最后一个命题称为结论（*conclusion*）。若所有前提为真则蕴含结论为真则称改论证是成立的（*valid*）。

“如果我是马云，那么我给各位每人发一辆法拉利。”

“我是马云。”

∴“我给各位每人发一辆法拉利。”

论证形式

- 命题逻辑中的一个论证形式（ *argument form* ） 是一系列包含命题变元的命题公式。一个论证形式成立（*valid*），则不管用什么命题替换其中变元，只要替换后各前提命题都为真则结论命题也为真。

$$
\begin{array}{ll}
 & p \rightarrow q \\
 & p \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

所以，你现在能理解什么叫做“形式化（formalization）”。

命题逻辑推理（举例）

- $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ 是否永真？

$$p \wedge q \rightarrow p \vee q \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$
$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$
$$\equiv \neg p \vee p \vee \neg q \vee q$$
$$\equiv \mathrm{T}$$

- $\neg(p \rightarrow q)$和$p \wedge \neg q$ 是否逻辑等价？

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$$
$$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$$
$$\equiv p \wedge \neg q$$

SAT（The Satisfiability Problem）

- **$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$ 是否可满足？若可满足，求成真指派。**

$$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\equiv((p\vee q)\wedge\neg p)\vee((p\vee q)\wedge\neg q)$$

$$\equiv \underline{(\neg p\wedge q)}\vee\underline{(p\wedge\neg q)}\quad \text{//析取范式}$$

答案：可满足，当$p=0, q=1$; 或$p=1, q=0$ 时，该命题为真

- 给定命题φ，它是否可满足（i.e., has a model）？
  - 可以暴力求解：列举所有赋值，检查命题是否可满足
    - 复杂度：指数时间
  - 该问题是NPC问题
    - 给定一个赋值，可在多项式时间内验证
    - 但是**尚未发现**多项式内时间求解的算法

常用的逻辑等价(1)

名称	等价
双重否定律	$p \equiv \neg\neg p$
幂等律	$p \equiv p \vee p,\ p \equiv p \wedge p$
交换律	$p \vee q \equiv q \vee p,\ p \wedge q \equiv q \wedge p$
结合律	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
分配律	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
德摩根律	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
吸收律	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

常用的逻辑等价(2)

否定律

名称	等价
支配律	$p\vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T},\ p\wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$
恒等律	$p\vee \mathrm{F} \equiv p,\ p\wedge \mathrm{T} \equiv p$
排中律	$p\vee\neg p \equiv \mathrm{T}$
矛盾律	$p\wedge\neg p \equiv \mathrm{F}$
	$p\rightarrow q \equiv \neg p\vee q$
	$p\leftrightarrow q \equiv (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$
假言易位	$p\rightarrow q \equiv \neg q\rightarrow\neg p$
	$p\leftrightarrow q \equiv \neg q\leftrightarrow\neg p$
归缪论	$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q) \equiv \neg p$

逻辑等价的判定

- $\neg(p\rightarrow q)$和$p\wedge\neg q$是否逻辑等价？

$$\neg(p\rightarrow q) \equiv \neg(\neg p\vee q)$$
$$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$$
$$\equiv p \wedge \neg q$$

- $p\wedge q \rightarrow p\vee q$是否永真？

$$p\wedge q \rightarrow p\vee q \equiv \neg(p\wedge q) \vee (p\vee q)$$
$$\equiv (\neg p\vee \neg q) \vee (p\vee q)$$
$$\equiv \neg p\vee p \vee\neg q \vee q$$
$$\equiv \mathbf{T}$$

Sudoku谜题（九宫格数独游戏）

- $3^2 \times 3^2$的网格，3^2个3×3的子网格。
- 每行、每列及每宫填入数字1-9且不能重复。

		2	9				4		
4 →				5		**4**	1		
		4							
					4	2			
	6							7	
	5								
	7			3					5
		1			9				
								6	

Sudoku谜题（命题可满足问题）

- s_{xyz}：第x行第y列的格子里填上数字z.

There are 9 × 9 × 9 = 729 such propositions

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigvee_{z=1}^{9} s_{xyz}$$

?????

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{8}\bigwedge_{i=z+1}^{9}(\neg s_{xyz} \vee \neg s_{xyi})$$

?????

$$\bigwedge_{y=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{x=1}^{9} s_{xyz}$$

every column contains every number

$$\bigwedge_{x=1}^{9}\bigwedge_{z=1}^{9}\bigvee_{y=1}^{9} s_{xyz}$$

every row contains every number

$$\bigwedge_{i=0}^{2}\bigwedge_{j=0}^{2}\bigvee_{z=1}^{9}\bigwedge_{x=1}^{3}\bigwedge_{y=1}^{3} s_{(3i+x)(3j+y)z}$$

each of the nine 3 × 3 blocks contains every number

……

命题的表达能力

- n个变元的函数/命题表达式（假设变元有顺序）
  - 成真指派，按自然顺序排列，e.g. 001,011,100,111
  - 指派的个数为(2↑n)，其子集有2↑(2↑n) 个
  - 命题的DNF, e.g. $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

- 任何一个 $B^n\rightarrow B$ 的函数，都可以用命题表达式来表示

命题逻辑

- 命题表达式
  - 运算符（¬， ∧， ∨， →，↔）
  - 还可以定义其他运算符，比如， 异或
  - 可以表达 $B^n \to B$中任何一个函数（足够强大）
  - 基本运算符可以裁剪，{¬， ∧， ∨}， {¬， ∧}
- 基于真值表的推理
  - 永真、可满足、语义蕴涵 、逻辑等价
- 基于规则的推理？

命题逻辑的判定性

- 命题逻辑的推理问题可归结为：“判定命题的永真性”
- 是否有通用的算法，对任一命题，都能判断其是否永真?
  - 有的 √
- 命题逻辑是可判定的（**decidable**）

命题逻辑公式的范式

命题逻辑公式的范式

- **为何要“范式”？**
  - 对于给定公式的判定问题，可用真值表方法加以解释，但当公式中命题变元的数目较大时，计算量较大，每增加一个命题变元，真值表的行数要翻倍，计算量加倍，此外，对于同一问题，可以从不同的角度去考虑，产生不同的但又等价的命题公式，即同一个命题可以有不同的表达形式。这样给命题演算带来了一定的困难，因此有必要使命题公式规范化。

命题逻辑公式的范式

- 一些术语:
  - 命题变元或命题变元的否定称为**文字**;
  - 有限个文字的析取式称为简单析取式(基本和),有限个文字的合取式称为简单合取式(基本积);
  - 由有限个简单合取式构成的析取式称为**析取范式**(DNF, Disjunctive Normal From),由有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**(CNF, Conjunctive Normal From)。

命题逻辑公式的范式

- 例如， ①：p，$\neg p$；

  ②：$p \vee q \vee \neg r$;

  ③：$\neg p \wedge q \wedge r$;

  ④：$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$;

  ⑤：$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$;

命题逻辑公式的范式

- 性质：
  - 一个文字既是一个析取范式又是一个合取范式；
  - 一个析取范式为矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式是矛盾式；
  - 一个合取范式为重言式，当且仅当它的每个简单析取式是重言式。

析取（合取）范式的存在性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的析取范式
  - $(\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee(\neg(\neg p\vee q)\wedge\neg r)$ （消去↔ ）
  - $((\neg p\vee q)\wedge r)\vee((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$ （否定号内移）
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律、结合律）

- 有通用的方法，把任一命题转化与之等价的CNF

命题逻辑公式的范式

- **析取范式和合取范式的存在性**

定理:任何命题公式都有一个与之等价的合取范式和析取范式。

命题逻辑公式的范式

- **主析取范式和主合取范式**

  范式不唯一。如公式$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$与之等价的公式有：$p\vee(q\wedge r)$，$(p\wedge p)\vee(q\wedge r)$，$p\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$，$p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$,等。

- 包含所有命题变元或其否定一次仅一次的简单合取式，称为**极小项**；
- 包含所有命题变元或其否定一次仅一次的简单析取式，称为**极大项**；
- 由有限个极小项组成的析取范式称为**主析取范式**；
- 由有限个极大项组成的合取范式称为**主合取范式**。

命题逻辑公式的范式

- 1. 极小项和极大项的性质

对于两个命题变元P，Q来说，由于每个P，Q可以取命题变元自身和其否定，所以其对应的极小项和极大项分别有四项：P∧Q，¬P∧Q，P∧¬Q，¬P∧¬Q；P∨Q，¬P∨Q, P∨¬Q，¬P∨¬Q。其真值表如下：

P	Q	P∧Q	¬P∧Q	P∧¬Q	¬P∧¬Q	¬P∨¬Q	¬P∨Q	P∨¬Q	P∨Q
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

一般来说，对于n个命题变元，则应有 2^n个不同的极小项和 2^n个不同的极大项。

命题逻辑公式的范式

- **性质：**

(1)：没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派使该极小项的真值为真，因此可给极小项编码，使极小项为“T”和那组真值指派为对应的极小项编码；如极小项¬P∧¬Q∧¬R只有在P，Q，R分别取真值0，0，0时才为真，所以有时又可用 m_{000}（m_0）来表示，又如¬P∧Q∧¬R也可用 m_{010}（m_2）来表示。

(2)：没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使该极大项的真值为假。因此可给极大项编码，使极大项为“F”的那组真值指派为对应的极大项的编码，如极大项¬P∨¬Q∨¬R只有在P，Q，R分别取真值1，1，1时才为假，所以有时又可用 $M_{111}(M_7)$ 来表示。

命题逻辑公式的范式

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	m0= ¬P∧¬Q∧¬R	M0= P∨Q∨R
0	0	1	m1= ¬P∧¬Q∧R	M1= P∨Q∨¬R
0	1	0	m2= ¬P∧Q∧¬R	M2= P∨¬Q∨R
0	1	1	m3= ¬P∧Q∧R	M3= P∨¬Q∨¬R
1	0	0	m4= P∧¬Q∧¬R	M4= ¬P∨Q∨R
1	0	1	m5= P∧¬Q∧R	M5= ¬P∨Q∨¬R
1	1	0	m6= P∧Q∧¬R	M6= ¬P∨¬Q∨R
1	1	1	m7= P∧Q∧R	M7= ¬P∨¬Q∨¬R

三个命题变元的真值取值与极小项和极大项的对应对位关系表

命题逻辑公式的范式

(3)：任意两极小项的合取必假，任意两个极大项的析取必为真。极大项的否定是极小项，极小项的否定是极大项，即

$$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T，\ m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F(i \neq j.i, j \in [0,2^n - 1]);$$

$$m_i \Leftrightarrow \neg M_i，\ M_i \Leftrightarrow \neg m_i$$

(4)：所有极小项的析取为永真公式，所有极大项的合取是永假公式，即

$$\mathop{\vee}_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1，\ \mathop{\wedge}_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

命题逻辑公式的范式

- **主析取范式和主合取范式的存在性和唯一性**

定理:任何命题公式的主析取范式和主合取范式存在且唯一，即任何命题公式都有且仅有一个与之等价的主合取范式和主析取范式。

命题逻辑公式的范式

- 利用真值表技术求主析取范式和主合取范式的方法：

①：选出公式的真值结果为真的所有行，在这样的行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项析取即可得到相应的主析取范式；

②：选出公式的真值结果为假的所有行，在这样的行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项合取即可得到相应的主合取范式。

主析取（合取）范式的唯一性

- 求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式
  - $(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$（析取范式）

$$\neg p\wedge r\equiv\neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$$
$$\equiv(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$q\wedge r\equiv(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
  - $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
  - 001 011 100 111

CNF的命题，其永真性是可判定的

- 命题逻辑公式的合取范式（CNF）
  - $\ldots \wedge (L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n) \wedge \ldots$
  - L_i 是原子命题、或原子命题的否定
- $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ 的永真性是可判定的
  - $\vDash L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ *iff* 存在i和j, L_i是L_j的否定

⇒ 命题的永真性是可判定的⇒命题逻辑是可判定的

命题逻辑的自然演绎

命题逻辑的“自然演绎”规则

	introduction	*elimination*
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge\mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge\mathrm{e}_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee\mathrm{i}_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee\mathrm{i}_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\vee\mathrm{e}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\rightarrow\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\rightarrow\mathrm{e}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\neg\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\neg\mathrm{e}$
$\bot$	(no introduction rule for $\bot$)	$\dfrac{\bot}{\phi}\bot\mathrm{e}$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg\mathrm{e}$

Some useful derived rules:

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\mathrm{MT} \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathrm{i}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\mathrm{PBC} \qquad \frac{}{\phi \vee \neg\phi}\mathrm{LEM}$$

参考资料(见课程主页)：

Michael Huth and Mark Ryan, LOGIC IN COMPUTER SCIENCE: Modelling and Reasoning about Systems, pp. 27, Cambridge Press.

论证中的谬误（举例）

- $p \to q,\ q \vdash p$ ✕
- $p \to q,\ \neg p \vdash \neg q$ ✕

$$p \to q,\ p \vdash q$$

$$p \to q,\ \neg q \vdash \neg p$$

例子：用自然演绎证明Aristotle的三段论

命题逻辑的正确性与完备性

- 自然演绎规则是正确的，完备的

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi \text{ is valid } \textit{iff } \phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \phi \text{ holds}$$

基于自然演绎规则的推导	基于真值表的语义蕴涵

用推理规则及逻辑等价建立论证

- 已知$(p\wedge q)\vee r$和 $r\rightarrow s$, $p\vee s$ 是否为真？
  - $(p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r)\wedge(q\vee r)$
  - $r \rightarrow s \equiv \neg r\vee s$

$(p\vee r)\wedge(q\vee r) \vdash p\vee r$ 化简

$p\vee r, \neg r\vee s \vdash p\vee s$ 消解

So $(p\vee r)\wedge(q\vee r), \neg r\vee s \vdash p\vee s$

So $(p\wedge q)\vee r, r\rightarrow s \vdash p\vee s$

用语义蕴涵进行推理

- 已知$(p\wedge q)\vee r$和 $r\rightarrow s$, $p\vee s$ 是否为真？

$$(p\wedge q)\vee r\ ,\ r\rightarrow s\ \vDash\ p\vee s$$

问题转化为：

$((p\wedge q)\vee r)\wedge(r\rightarrow s)\rightarrow(p\vee s)$ 是否永真？

把这个命题表达式转化为CNF（合取范式），即可判断

用推理规则建立论证

- “今天下午不出太阳并且比昨天冷”，“只有今天下午出太阳，我们才去游泳”，“若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览”，“若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家”，结论“我们将在黄昏时回家”。
- p: 今天下午出太阳，q: 今天比昨天冷，r: 我们将去游泳，
- s: 我们将乘独木舟游览，t: 我们将在黄昏时回家。
  - $\neg p \land q$
  - $r \to p$
  - $\neg r \to s$
  - $s \to t$

注意书写论证的格式

Jaśkowski style

Example 1.11 Here is an example of a theorem whose proof utilises most of the rules introduced so far:

1	$q \to r$	assumption	
2	$\neg q \to \neg p$	assumption	input
3	p	assumption	
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3	
5	$\neg\neg q$	MT 2, 4	
6	q	$\neg\neg$e 5	
7	r	$\to$e 1, 6	
8	$p \to r$	$\to$i 3–7	return
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$i 2–8	output
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to$i 1–9	

- 引入assumption时进入一个“子程序”
- 输入（第一行）：蕴涵式的前件
- 返回（最后一行）：蕴涵式的后件
- 框外输出结果：前件蕴涵后件