

## Diskretinių laiko sistemų modeliavimas

Lukas Stasytis, E MEI-0 gr. Dėstytojas prof. V. Marozas

Kauno technologijos universitetas, Elektros ir elektronikos fakultetas

### Įvadas

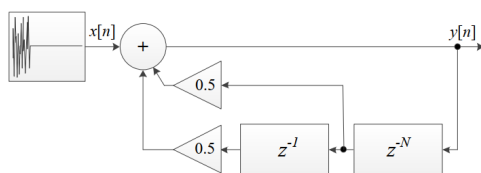
Šio laboratorinio darbo tikslas yra išmokyti modeliuoti diskretinio laiko sistemas ir tirti jų laikines bei dažnines charakteristikas. Šiam tikslui įgyvendinti, modeliuosime gitaros stygų akordą ir pritaikysime iškraipymo bei reverberacijos efektus. Taip pat pritaikysime amplitudinę ir žiedinę moduliacijas.

Tolesnėse skiltyse bus aptariami individualūs signalų apdorojimo metodai su rezultatais pasekoje kiekvienos skilties. Pradėsime nuo vienos natos modeliavimo, tada pareisime prie pilno akordo ir galiausiai pritaikysime įvairius moduliavimo metodus sumodeliuoto akordo signalui transformuoti.

### Vienos natos modeliavimas

#### Karplus ir Strong algoritmas

Gitaros skambesiu išgauti naudosimės Karplus ir Strong styginių instrumentų garsų sintezės algoritmu [1]. Gitaros modeliavimui bus pritaikomas neribotos impulsinės reakcijos (NIR) filtras. (pav 1). Iš struktūrinės schemos galime pastebėti, kad mums reikės vėlinimo koeficiento  $N$  bei filtro koeficientų  $a$  ir  $b$ .



1 pav. Gitaros natos modeliavimo schema.

#### NIR filtro vėlinimo radimas

Visų pirma, turime surasti natos vėlinimo koeficientą, kuris reikalingas NIR filtrui. Šis koeficientas, mums nurodys per kiek atskaitų turime žiūrėti atgal savo jau sugeneruotą išvestį, generuojant naujas išvestis. Pavyzdžiui, jeigu turėtume  $N = 3$  ir naudotume elementarų filtrą, tokį kaip formulėje 1, mūsų sekanti atskaitos išėjimo reikšmė būtų lygi trimis reikšmėmis seniau sugeneruotai reikšmei. Generavimą pradėsime po pradinės atsitiktinio trukšmo aibės, dėl to už aibės ribų neišeisime.

$$y[n] = y[n - N] \quad (1)$$

NIR filtro vėlinimą galime surasti garso signalo diskretizavimo dažnį ( $f_d$ ) padalinus iš stygos virpėjimo dažnio ( $f_s$ ): lygtis 2

$$N = \frac{f_d}{f_s} \quad (2)$$

Mūsų atveju, diskretizavimo dažnis  $f_d = 44100$  Hz. Pirmoji nata kurios signalą generuosime turi virpėjimo dažnį  $f_s = 165$  Hz. Svarbu paminėti, kad vėlinimo reikšmė turi būti sveikas skaičius, nes, tai reikšmė nurodanti kelintą narių naudosime. Dėl to suapvalinsime gautą rezultatą.

3 pateikiamas D natos vėlinimo apskaičiavimas:

$$N_D = \text{round}\left(\frac{44100}{165}\right) = 267 \quad (3)$$

#### A ir B koeficientų radimas

Ieškant  $A$  ir  $B$  koeficientų, pasinaudosime gitaros natos modeliavimo schemai atitinkančia skirtumine lygtimi 4

Signalų įėjimo atskaitos žymimos  $x$  simboliu, o išėjimo -  $y$ .

$$y[n] = x[n] + \frac{y[n - N] + y[n - N - 1]}{2} \quad (4)$$

Lygtį pasikeičiame į  $Z$  ašį ir išsikiame įėjimo signalo atskaitas į lygties viršų, o išėjimo atskaitas - apačią, kaip matoma 5, 6 bei 7 lygtyse. Verta pastebėti, kad apatinės lygties reikšmės keičia ženklą ir pridamas vienetas.

$$y[z] = x(z)^0 + 0.5y(z)^{-N} + 0.5y(z)^{-N-1} \quad (5)$$

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{x(z)^0}{0.5y(z)^{-N} + 0.5y(z)^{-N-1}} \quad (6)$$

$$H[z] = \frac{1}{1 - 0.5z^{-N} - 0.5z^{-N-1}} \quad (7)$$

$a$  koeficientas bus lygties viršutinis narys, ženklo nekeičiant.

$b$  koeficientais bus lygties apatiniai nariai. Visi nenaudojami nariai lygus nuliui. Šiuo atveju, jų kiekis bus lygus  $N-3$ .

$$b = [1, 0, \dots, 0, -0.5, -0.5] \quad (8)$$

$$a = [1] \quad (9)$$

## Signalų generavimas

Signalą generuosime  $t_s = 3$  s trukmės. Signalų pirmos  $N$  reikšmių turi būti atsitiktinis triukšmas intervale  $[0,1]$ . Likusios reikšmės iš pradžių turėtų būti lygios 0. Šių reikšmių kiekį galime sužinoti iš bendro signalo diskretinių taškų kiekio atėmus triukšmo kiekį. Diskretinių reikšmių kiekis yra lygus tiesiog diskretizavimo dažnio bei signalo trukmės sandaugai:

$$K_D = f_d \cdot t_s - N_D \quad (10)$$

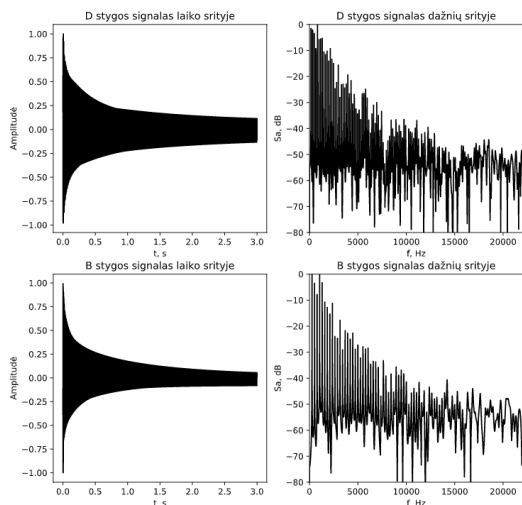
$$K_D = 44100 \cdot 3 - 267 = 132033 \quad (11)$$

Galiausiai, gautą signalą normalizuojame į intervalą  $[-1,1]$ . Tai atliekame iš signalo atimdami jo vidurkį ir gautą signalą padalindami iš gauto signalo modulio maksimumo.

Visoms operacijoms naudojame python programavimo kalbos numpy, scipy bei pyplot paketus[2],[3],[4]. NIR filtriui panaudojame scipy funkciją *lfiler* [5] kuri atitinka matlab funkciją *filter*.

Pav 2. pavaizduotos sumodeliuotos *D* ir *B* stygos. Informacija pateikiama laiko bei dažnių srityse. Matome laike slopstantį signalą su didžiaja dalimi diskretinių reikšmių pasiskirsčiusių apie -50db. Taigi, signalas iš pradžių turėjo ženklių aukštos amplitudės garsą ir tada pradėjo slopti.

D ir B stygų modeliavimas



2 pav. Gitaros natų D ir B laiko ir dažnių grafikai

Norėdami geriau paanalizuoti signalus, apribosime laiko srities atvaizduotas atskaitas į pirmų 0.07 sekundžių po atsitiktinio triukšmo, o dažnių srities - pirmus 1000 Hz. Rezultatai pavaizduoti Pav 3.

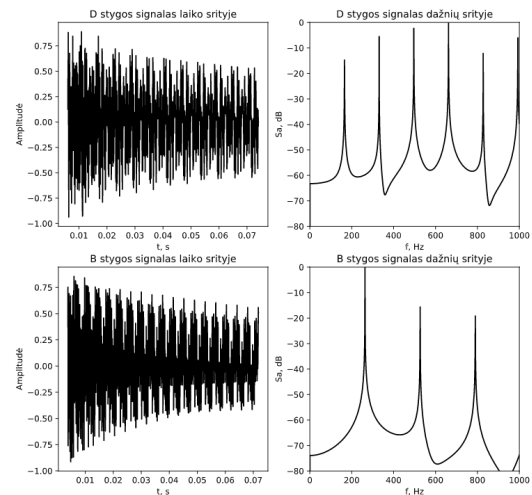
Stebint dažnių sritis, iš karto galime pastebėti, kaip susidariusios harmonikos turi periodą atitinkantį simuliuojamų stygų dažniams. *D* stygos dažnis 165 Hz bei *B* stygos dažnis 262 Hz sudaro proporcingai beveik dvigubai ilgesnius stygų dažnių periodus.

Tuo metu laiko srityje matosi tie patys periodai amplitudėje, kurie daug tankesni *D* stygos atveju.

## Akordo generavimas

Akordui generuoti naudosime penkis stygas: A,D,G,B,e. Stygų dažniai pateikiami lentelėje nr 1.

D ir B stygų modeliavimas; apribotos X ašys



3 pav. Gitaros natų D ir B laiko ir dažnių grafikai apribojus X ašis.

1 lentelė. Generuojamą akordą sudarančių stygų dažnių lentelė

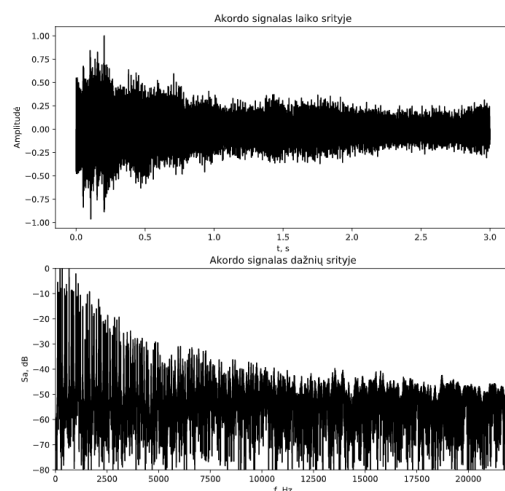
	A	D	G	B	e
Hz	110	165	220	262	330

Akordui sugeneruoti, mes generuojame kiekvieną individualią stygą, ją normuojame, suvėliname per 50ms ir tada susumuojame signalus. Vėlinimas realizuojamas pastumiant kiekvienos stygos signalą į dešinę per 50ms atitinkantį diskretizavimo taškų pateiktam signalo diskretizavimo dažniui, tada likusias laisvas vietas kairėje užpildant nulinėmis reikšmėmis.

Reikšmių sumavimas atliekamas elementariai susumuojant individualių stygų amplitudes ties kiekvienu diskretinių tašku.

Pav 4. pavaizduotas sumodeliuotas stygų akordas. Informacija pateikiama laiko bei dažnių srityse. Matome daug triukšmingesnius signalus, negu individualių stygų atveju. Kiekviena styga įvedė savo papildomo triukšmo į signalą.

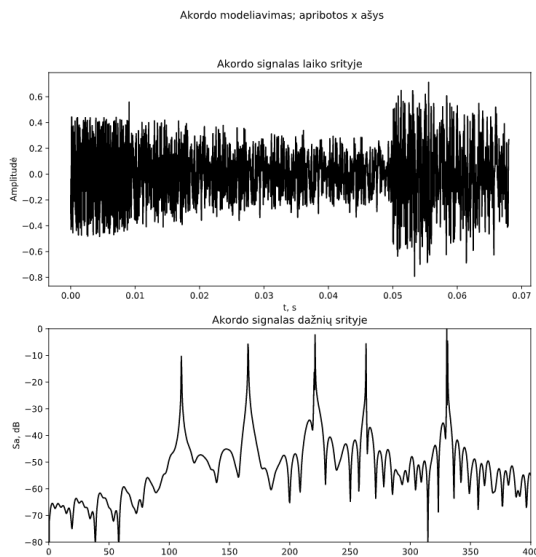
Akordo modeliavimas



4 pav. Gitaros akordo sumodeliuoto signalo laiko ir dažnių grafikai

Pav 5. pateikiamas apribotos X ašies vaizdas. Galime pastebėti pirmas penkas harmonikas dažnių srityje bei

antros, suvėlintos, stygos pradžia praėjus 50ms po pirmosios generavimo pradžios. Tarpai tarp harmonikų sąlyginai sutampa su pačių natų dažniais.



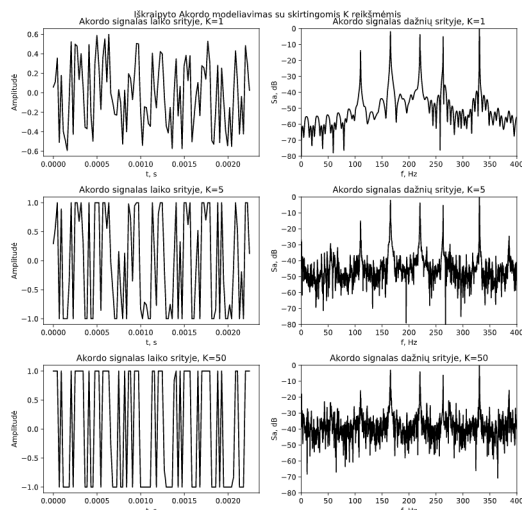
**5 pav.** Gitaros akordo sumodeliuoto signalo laiko ir dažnių grafikai apribojus X ašis.

## Papildomų efektų modeliavimas

### Iškraipymų efektas

Iškraipymo efektui išgauti sustiprinsime ankstesniu akordo generavimo metodu išgautą signalą  $K$  kartų ir tada apribosime jo amplitudę  $[-1,1]$  ribose. Eksperimentui panaudosime tris  $K$  reikšmes:  $[1,5,50]$ .

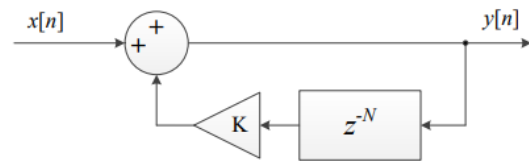
6 pav. pavaizduoti šio stiprinimo rezultatai žiūrint tik į pirmus kelis šimtus reikšmių. Matomas ryškus amplitudžių 'suaštrėjimas', daugeliui tolygių perėjimų iš neigiamų reikšmių į teigiamas pavirtus į staigius perėjimus. Dažnių srityje signalas taip pat prarado daug savo tolygumo perėjimuose. Susidarė savotiškas signalo triukšmas.  $K = 5$  koeficiento signalas dar yra pakenčiamas ir skamba kaip roko muzikos, tačiau keliant reikšmę link  $K = 50$  garsas tampa tiesiog aukšto dažnio triukšmu.



**6 pav.** Gitaros akordo sumodeliuoto signalo laiko ir dažnių grafikai su iškraipymo efektais.

### Reverberacijos efektas

Reverberacijos efektui išgauti naudosime skaitmeninį neribotos impulsinės reakcijos filtrą. Struktūrinė diagrama pateikiama 7 pav.



**7 pav.** Reverberacijos efekto modeliavimo schema.

Iš diagramos išgauname lygtis [12-16], kurią išreiškia-  
me Z ašyje. Viršutiniai nariai -  $a$  koeficientai, apatiniai -  
 $b$ .

$$y[n] = x[n] + K \cdot y[n - N] \quad (12)$$

$$y[z] = x(z)^0 + K \cdot y(z)^{-N} \quad (13)$$

$$H[z] = \frac{1}{1 - Kz^{-N}} \quad (14)$$

$$a = [1] \quad (15)$$

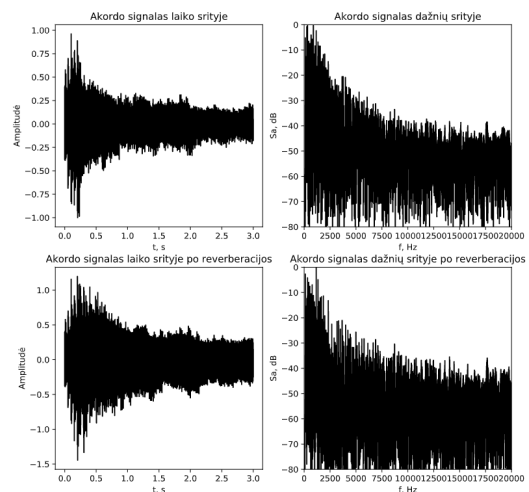
$$b = [1, 0, \dots, 0, -K] \quad (16)$$

Tarp vieneto ir  $K$  kintamojo turime  $N-2$  nulines reikšmes.

Eksperimentiniu būtu susiradome reverberacijos efektą gerai išreiškiantį vėlinimo koeficientą:  $N = 4400$  atskaitų.  $K$  koeficientą pasirinkome 0.7, nes tai sukelia aukštesnės amplitudės reverberaciją, kuri geriau girdisi.

Žiūrint į 8 pav. laiko srityje galime pastebėti naujų aukštesnės amplitudės bangų signalo pradžioje, o žvelgiant į dažnių sritį - didesnį skirtingo decibelų lygio reprezentavimą kintant signalo dažniui. Reverberacijos efektas suteikė signalui naujų verčių pasekoje pradinio akordo.

Akivaizdu, kad  $K$  reikšmę palikus nuliui, signalas išliktų visiškai toks pat kaip prieš tai, o  $K=1$  smarkiai moduluotų signalą pagal reverberaciją.



**8 pav.** Gitaros akordo sumodeliuoto signalo laiko ir dažnių grafikai su reverberacijos efektu.

### Amplitudinė ir žiedinė moduliacijos

Realizuojame du skirtingus moduliacijos metodus - amplitudinį bei žiedinį.

Amplitudinė moduliacija aprašoma lygtimi 17. Žiedinė moduliacija aprašoma lygtimi 18.

$$y[n] = (1 + \alpha \cdot \sin(2\pi n \frac{f_a}{f_d})) \cdot x[n] \quad (17)$$

$$y[n] = \sin(2\pi n \frac{f_m}{f_d}) \cdot x[n] \quad (18)$$

Eksperimentavimo būdu, galime pastebėti, kad amplitudinės moduliacijos atveju,  $\alpha$  koeficientas įtakoja moduliacijos intensyvumą. Tą taip pat galime pastebėti iš formulės, jeigu  $\alpha$  koeficientas yra parenkamas 0, tada mūsų sinusoidinė išraiška tiesiog neįtakos įeinančio signalo išgausime  $y[n] = x[n]$ . Tačiau keliant  $\alpha$ , stiprėja į reverberacijos efektą panašus efektas. Svarbų atkreipti dėmesį, kad vieneto pridėjimas šiuo atveju paverčia šį efektą savotiškai 'pridėtinu', t.y jis tik pakoreguoja įeinantį signalą su papildomu skambesiu. Moduliavimo dažnis įtakoja šio efekto periodo ilgį. Mažesnis dažnis - ilgesni periodai.

Žiedinės moduliacijos atveju, tiesioginis įeinančio signalo dauginimas, nepridedant vieneto paverčia tai į visišką signalo transformaciją, kurios metu mes priverčiame savotišką aido efektą pradiniam akordui.  $\alpha$  koeficiento neegzistavimas panaikina bet kokią papildomą slopinimo efektą, dėl to garso slopinimas tiesiogiai priklauso nuo įeinančio signalo.

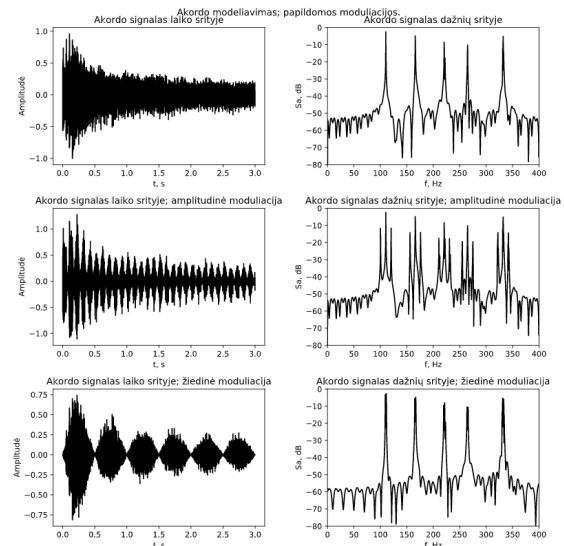
9 pav. matome moduliacijų efektus pradiniam akordo signalui. Šiuo atveju buvo naudojamos:  $f_m = 1\text{Hz}$ ,  $f_a = 10\text{Hz}$ ,  $\alpha = 0.7$  koeficientų reikšmės. Amplitudinės moduliacijos atveju matome atsiradusį periodinį amplitudžių kitimą laike, o dažninė charakteristika parodo atsiradusias papildomas harmonikas tarp pagrindinių penkių. Žiedinės moduliacijos atveju, visas signalas radikaliai pakeistas į keletą intensyvių periodų, tačiau pačios harmonikos dažnių srityje stambiai nepakito, nes mes nepakeitėme pradinės harmonikos, o tiesiog pradėjome generuoti jos savotišką aidą.

### Išvados

Šio laboratorinio darbo metu sumodeliavome atskirą gitaros stygą, pilną penkių stygų akordą ir pritaikėme įvairius signalo moduliacijos efektus.

Palyginus paprastos funkcijos mums padėjo išgauti itin tikroviškus garsus tokius kaip reverberacija ir aidas.

Taip pat pastebėjome, kad labai nedideli parametrų pakeitimai gali radikaliai pakeisti visą sugeneruotą signalą. Dažninė signalų charakteristika padeda pastebėti signalo pokyčius kurių galėjome nepastebėti iš laikinės diagramos. Galiausiai, pastebėjome kaip svarbu pažvelgti į signalus iš arčiau. Mūsų sumodeliuoto akordo atveju, žiūrint tik į pilnų trejų sekundžių laiko diagramą, galima lengvai praleisti stambius moduliavimo efektus, kurie išryškėja tik pažvelgus į amplitudžių svyravimus iš arti. Pavyzdžiui, iškraipymo efektas gali įnešti didelį triukšmo kiekį į signalą, kuris gali būti nepastebėtas žiūrint į signalą 'iš toli'.



9 pav. Gitaros akordo sumodeliuoto signalo laiko ir dažnių grafikai su papildomomis moduliacijomis.

Tik priartėjus pamatome, kaip amplitudžių peršokimo periodai gali prarasti tolydumą ir susidary peršokimai sukelti triukšmo efektą.

### Literatūra

- [1] A. S. K. Karplus, Digital synthesis of plucked-string and drum timbres, *Computer Music Journal*, no. 7, pp. 43–55, 1983.
- [2] numpy python skaičiavimų paketas. Nuoroda: <https://numpy.org>.
- [3] scipy python mokslinių skaičiavimų paketas. Nuoroda: <https://www.scipy.org>.
- [4] matplotlib python paketas. Nuoroda: [https://matplotlib.org/api/pyplot\\_api.html](https://matplotlib.org/api/pyplot_api.html).
- [5] scipy lfilter funkcija. Nuoroda: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.lfilter.html>.

### Priedai

#### Pagrindinės programos kodas