GAUSS Jordan

et par suite le déterminant de la matrice inverse est :

B

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{104}$$

a) **Solution exo 4 : a)** La forme matricielle du système linéaire est la suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}}_{B}$$

b) **b) Méthode de *Gauss-Jordan* :**

Soit la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right]$$

Ligne 1 reste inchangée

Ligne 2 sera remplacée par ligne 2 - $\frac{1}{2} \times$ ligne 1

Ligne 3 reste inchangée

Ligne 4 reste inchangée

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right]$$

Ligne 1 reste inchangée

Ligne 2 reste inchangée

Ligne 3 sera remplacée par ligne 3 - $12 \times$ ligne 2

Ligne 4 reste inchangée

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right]$$

Ligne 1 sera remplacée par ligne 1 - $2 \times$ ligne 2

Ligne 2 reste inchangée

Ligne 3 reste inchangée

Ligne 4 reste inchangée

B. Exercices Gauss

5

2) Résolution par la méthode de *Gauss* : Partons de la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ \underbrace{5 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & \underbrace{3}_{B} \end{array}\right]$$

et faisons subir cette matrice les transformations suivantes :

Ligne 2 : ligne 2 – ligne 1

Ligne 3 : ligne 3 - $\frac{5}{2}\times$ ligne 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 2-2 & 6-6 & 8-4 & 4-2 \\ 5-5 & 2-15 & 1-10 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -13 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2} L_1$

$\frac{5.2}{2}$ $\frac{5.6}{2}$ $\frac{5.4}{2}$ $\frac{5.2}{2}$

Faisons la permutation des deux dernières lignes puisque l'élément générateur est nul :

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -13 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi nous aboutissons au système triangulaire supérieur :

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ \quad -13x_2 - 9x_3 = -2 \\ \qquad\quad 4x_3 = 2 \end{cases}$$

et la solution du système d'équations donné est :

$$x_1 = \frac{15}{26},\quad x_2 = -\frac{5}{26} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

3) Le déterminant de la matrice des coefficients du système est :

$$\det A = -\left[2\times(-13)\times(4)\right] = 104$$

Et puisque $A^{-1}A = I$, alors :

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det A^{-1} \det A = 1$$

Solutions

Solution exo 1 : Soit à résoudre le système linéaire : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ -3x_2 - 12x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

1) En posant :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

le système linéaire s'écrit sous la forme matricielle suivante $A\,X = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) **Résolution du système par la méthode de Gauss** : Partons de la matrice augmentée : (Methode de Pivot

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \underbrace{}_{A} \; \underbrace{}_{B}$$

L'élément générateur $a_{11} = 2 \neq 0$. Remplaçons la $2^{\text{ème}}$ ligne par : ligne 2 - $(-2)\times$ la ligne 1

$L2 = L2 - (-2)L1$

$L2 \quad -4 \quad -2 \quad 3 \quad -7 \quad -9$

$(-)(-2)L1 \quad +4 \quad +2 \quad 0 \quad 8 \quad 4$

$0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ligne 2 - (-2) ligne 1

(-2).4

Remplaçons la troisième ligne par : ligne 3 - $2\times$ ligne 1

Ligne 2 - (-2) ligne 1

$L2 \quad -4 \quad -2 \quad 3 \quad -7 \quad -9$

$L(-2) \quad +4 \quad 2 \quad 0 \quad 8 \quad +4$

$0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad = L2$

$L'3 = L3 - 2L1$

$L3 = \quad 4 \quad 1 \quad -2 \quad 8 \quad 2$

$\quad -4 \quad -2 \quad 0 \quad -8 \quad -4$

$\quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad -2$

$L_3 = L_3 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Et puisque l'élément générateur a_{22} est nul, faisons une permutation entre la deuxième ligne et la troisième ligne :

$L3 \leftrightarrow L2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On remplace la quatrième ligne par : ligne 4 - 3 × ligne 2 :

$L4 = L4 - 3L2$

$$\begin{array}{lccccc} L_4 & 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \\ -3L_2 & 0 & +3 & +6 & 0 & +6 \\ \hline & 0 & 0 & -6 & -1 & 8 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

À l'étape suivante, nous remplaçons la 4ème ligne par : ligne 4 - $(-2)\times$ ligne 3 :

$$\begin{array}{lccccc} L_4 & 0 & 0 & -6 & -1 & 8 \\ +2L_3 & 0 & 0 & +6 & 2 & -10 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ $L4 - (-2)L3$

Nous avons abouti au système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d'où on tire les équations :

$$\begin{cases} x_4 = -2 \\ 3x_3 + x_4 = -5 & 3x_3 - 2 = -5 \quad 3x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 = -2 & -x_2 - 2(-1) = -2 \Rightarrow -x_2 = +4 \quad x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 & 2x_1 + 4 + 4(-2) = 2 \Rightarrow 2x_1 = 6 \quad x_1 = 3 \end{cases}$$

La solution du système est :

$x_1 = 3$ $x_2 = 4$ $x_3 = -1$ $x_4 = -2$

3) **Le déterminant de** A^{-1} **:**

Il faut se rappeler qu'on a effectué une permutation des lignes et à cet effet, il faut changer le signe du produit des éléments diagonaux de la matrice triangulaire supérieure pour obtenir le déterminant de la matrice A.

$$\det A = -1\times(2)\times(-1)\times(3)\times(1) = 6$$

Le déterminant de la matrice inverse, A^{-1}, se calcule de la manière suivante. On sait que si A est inversible, alors :

$$A^{-1}A = I$$

où I est la matrice identité dont le déterminant est égal à 1. Nous avons :

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det A^{-1}\det A = \det I = 1$$

Par conséquent :

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Ce qui donne dans notre cas :

$$\det A^{-1} = \frac{1}{6}$$

Méthode substitution

Solution exo 2 : Soit à résoudre le système : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -14 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$

Résolution par la méthode de Gauss : Partons de la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ -1 \\ -14 \\ -4 \end{matrix}}_{B} \end{array}\right]$$

et suivons les mêmes étapes de l'exercice précédent :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & -14 \\ -5 & 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2-2 & -1-2 & -1-2 & 1-(-2) & -1-(8) \\ 1-1 & 3-1 & -2-1 & 4-(-1) & -14-4 \\ -5-(-5) & 1-(-5) & 3-(-5) & 2-(5) & -4-(-20) \end{bmatrix} = \begin{matrix} L2-2L1 \\ L3-L1 \\ L4-(-5)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 34 \\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 reste inchangée
Ligne 2 reste inchangée
Ligne 3 reste inchangée

Ligne 4 sera remplacée par ligne 4 - $\frac{1}{17} \times$ ligne 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 34 \\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 sera remplacée par ligne 1 - $\frac{3}{17} \times$ ligne 3

Ligne 2 reste inchangée
Ligne 3 reste inchangée
Ligne 4 reste inchangée

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3/17 & 71/17 \\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 reste inchangée

Ligne 2 sera remplacée par ligne 2 + $\frac{3}{34} \times$ ligne 3

Ligne 3 reste inchangée
Ligne 4 reste inchangée

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3/17 & 71/17 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/34 & 96/68 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 sera remplacée par ligne 1 - $\frac{3}{52} \times$ ligne 4

Ligne 2 reste inchangée
Ligne 3 reste inchangée
Ligne 4 reste inchangée

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/34 & 96/68 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 reste inchangée

Ligne 2 sera remplacée par ligne $2 + \frac{3}{104} \times$ ligne 4
Ligne 3 reste inchangée
Ligne 4 reste inchangée

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Ligne 1 reste inchangée
Ligne 2 reste inchangée
Ligne 3 sera remplacée par ligne $3 + \frac{17}{52} \times$ ligne 4
Ligne 4 reste inchangée

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 34 & 0 & 170 \\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17 \end{bmatrix}$$

Divisons la première ligne par 2, la deuxième par ½, la troisième par 34 et la dernière par (-52/17) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La solution du système linéaire est :

$$X_1 = 2 \qquad X_2 = 3 \qquad X_3 = 5 \qquad X_4 = -1$$

c- Pour calculer la matrice inverse par la méthode de *Gauss-Jordan* on applique ce procédé sur la matrice suivante :

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad 2 \quad -3}_{A}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{I}} \end{array}\right]$$

jusqu'à aboutir à une matrice de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{I} & & & & \underbrace{c_{41} \quad c_{42} \quad c_{43} \quad c_{44}}_{A^{-1}} & & & \end{array}\right]$$

Les éléments c_{ij} sont les éléments de la matrice inverse A^{-1}.

Solution exo 5 :

1) Méthode de *Gauss-Jordan* : Soit la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 3 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (A \mid B \mid I)$$

Remplaçons la deuxième ligne par : ligne 2 - $\frac{1}{3}\times$ ligne 1

et remplaçons la troisième ligne par : ligne 3 - $\frac{2}{3}\times$ ligne 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 3 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/3 & 4/3 & -2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -16/3 & 17/3 & -19/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Remplaçons maintenant la première ligne par : ligne 1 - $\left(-\frac{6}{5}\right)\times$ ligne 2

et remplaçons la troisième ligne par : ligne 3 - $\left(\frac{16}{5}\right)\times$ ligne 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 3 & 0 & 3/5 & 21/5 & 3/5 & 6/5 & 0 \\ 0 & -5/3 & 4/3 & -2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/5 & -21/5 & 2/5 & -16/5 & 1 \end{array}\right]$$

La première ligne sera remplacée par : ligne 1 - $\frac{3}{7}\times$ ligne 3

et la deuxième ligne par : ligne 2 - $\left(\frac{20}{21}\right)\times$ ligne 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 3 & 0 & 0 & 6 & 3/7 & 18/7 & -3/7 \\ 0 & -5/3 & 0 & 10/3 & -5/7 & 85/21 & -20/21 \\ 0 & 0 & 7/5 & -21/5 & 2/5 & -16/5 & 1 \end{array}\right] \quad (1)$$

Divisons la première ligne par 3, la deuxième par $-5/3$ et la troisième par $7/5$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix}2\\ -2\\ -3\end{matrix}}_{X} & \underbrace{\begin{matrix}1/7 & 6/7 & -1/7\\ 3/7 & -17/7 & 4/7\\ 2/7 & -16/7 & 5/7\end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

La solution du système linéaire est donnée par quatrième colonne :

$$x = 2 \qquad y = -2 \qquad z = -3$$

2) <u>Déterminant de</u> A : Le déterminant de la matrice A est égal au produit des élément diagonaux de la matrice constituée des 3 premières colonnes de la matrice augmentée (1) :

$$\det A = 3 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times \frac{7}{5} = -7$$

3) <u>Le calcul de</u> X **<u>si</u>** A^{-1} **<u>est connue</u> :** Si la matrice inverse A^{-1} est connue la solution du système linéaire s'obtient par multiplication directe de la matrice A^{-1} par la colonne des constantes B. En effet la multiplication à gauche de la relation $A\,X = B$ par A^{-1} donne :

$$\boxed{X = A^{-1}\,B}$$

On peut vérifier aisément cette relation puisque nous avons A^{-1} :

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}1/7 & 6/7 & -1/7\\ 3/7 & -17/7 & 4/7\\ 2/7 & -16/7 & 5/7\end{matrix}}_{A^{-1}}\right]\left[\underbrace{\begin{matrix}5\\ 1\\ -3\end{matrix}}_{B}\right] = \left[\underbrace{\begin{matrix}2\\ -2\\ -3\end{matrix}}_{X}\right]$$

<u>Solution exo 6</u> : Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ -6\end{bmatrix}$$

<u>Résolution par la méthode de *Gauss-Jordan*</u> :

Dans la matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remplaçons la deuxième ligne par : ligne 2 $-\frac{1}{2}\times$ ligne 1

et remplaçons la troisième ligne par : ligne 3 $-\frac{1}{2}\times$ ligne 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remplaçons la première ligne par : ligne 1 $-4\times$ ligne 2
et remplaçons la troisième ligne par : ligne 3 $-3\times$ligne 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Maintenant, remplaçons la première ligne par : ligne 1 $-\frac{8}{7}\times$ligne 3

et remplaçons la deuxième ligne par : ligne 2 - $\left(-\frac{1}{7}\right)\times$ ligne 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 & \frac{13}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{14} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Divisons la première ligne par 2 et la dernière par 7 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & \frac{13}{14} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{14} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

La solution du système est par la quatrième colonne: A^{-1}

$x_1 = 5$ $\qquad$ $x_2 = -1$ $\qquad$ $x_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & -18 \\ 0 & 6 & 8 & -3 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 2-(2) & -3-2 & 5-(-2) & -18-6 \\ 0 & 6-6 & 8-6 & -3-(-6) & 16-18 \end{bmatrix} = \begin{matrix} L_3 = (-\frac{2}{3}) L_2 \\ L_4 - (-2) L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -24 \\ 0 & 0 & 2-2 & -3-(-\frac{14}{5}) & -2-\frac{48}{5} \end{bmatrix} = L_4 - (\cdot \frac{2}{5}) L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{5} & -\frac{58}{5} \end{bmatrix}$$

De la dernière matrice nous obtenons le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -9 \\ -5x_3 + 7x_4 = -24 \\ \frac{29}{5} x_4 = -\frac{58}{5} \end{cases}$$

La solution de ce système se fait par substitution arrière et on trouve :

$x_1 = 1$ $\quad$ $x_2 = -1$ $\quad$ $x_3 = 2$ $\quad$ $x_4 = -2$

<u>Solution exo</u> 3 : : 1) Le système donné s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$A\,X = B$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

§ 6 - Les méthodes itératives

La résolution d'un système linéaire par une méthode directe (Gauss, Jordan, L.U.) nécessite toujours un nombre d'opérations qui croît comme n^3. Pour cette raison, il est pratiquement impossible de résoudre ainsi des systèmes de plus de quelques centaines d'équations. Lors du traitement de certains problèmes (p.ex. les équations aux dérivées partielles ; voir Calcu Numérique II), on peut être amené à des systèmes ayant des dizaines, voire des centaines de milliers d'équations. Heureusement, autant pour l'occupatic de mémoires que pour la durée du calcul, ces problèmes sont généralement caractérisés par des matrices creuses (c.-à-d. contenant beaucoup de zéros), souvent avec structure de bande. Dans ce dernier cas, la résolution directe possible : elle s'accompagne malheureusement de redoutables propagations d'e d'arrondi. Les méthodes itératives traitant toutes les équations et inconnue simultanément, sont moins sensibles à ce problème. Par contre, comme dans tc processus itératif, le problème de convergence pourra se poser.

A. La méthode de JACOBI

Cette méthode est apparentée à la méthode dite d'"itération simple" décrite au Ch.II de ce cours. Rappelons qu'elle résolvait l'équation $x = F(x$ au moyen de l'algorithme $x_{i+1} = F(x_i)$, sous certaines conditions de converge Dans la méthode de Jacobi, le système initial est mis sous la forme

$$X = M X + C$$

dans laquelle X est la matrice-colonne des inconnues, C une matrice-colonn connue et M une matrice carrée connue. Désignant par $X^{(k)}$ la matrice X lors de la k^e itération, l'algorithme de Jacobi consiste à faire

$$X^{(k+1)} = M X^{(k)} + C \tag{1}$$

et à arrêter le processus quand $X^{(k+1)}$ et $X^{(k)}$ sont identiques avec la pr sion souhaitée.

En fait, la matrice M est un peu particulière, en ce sens que sa dia principale ne comporte que des zéros. En pratique, ceci veut dire qu'on tire de la 1e équation, x_2 de la 2e et ainsi de suite (ce qui suppose tous les a nuls, situation où l'on peut toujours se ramener par un éventuel échange d'é tions.

2

Si le système donné s'écrit

$$A \cdot X = B$$

on obtient immédiatement les matrices M et C par :

$$m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{(pour } j \neq i\text{)} \qquad (2)$$

$$m_{ii} = 0 \quad \text{si } j = i$$

$$C_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & 0 & & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple :

Soit à résoudre par la méthode de Jacobi, le système :

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 \quad\quad - x_4 &= 2 \\ -x_1 \quad\quad + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{1n} \\ m_{21} & 0 & m_{23} & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Sa solution se trouve très rapidement par la méthode de Gauss et on trouve

$$x_1 = 0.5 \quad x_2 = 0.75 \quad x_3 = 0.25 \quad x_4 = 0.5$$

Pour le résoudre par Jacobi, il faut donc l'écrire

$$x_1 = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + 1)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4 + 2)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + 1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

En l'absence de toute information sur les x_i, prenons $x_1^{(o)} = x_2^{(o)} = x_3^{(o)} = x_4^{(o)} = 0$.

Le tableau de la page suivante donne les résultats successifs des itérat

Exemples JACOBI

3

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Algorithme

$$X^{(k+1)} = MX^{(k)} + C$$

si $i \neq j$ $\begin{cases} m_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ \end{cases}$

si $i = j$ $\quad m_{ii} = 0$

$\cdot\ c_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & +\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & +\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & +\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & +\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & +\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & +\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

on peut aussi appliqué manuellement, l'algorithme du point fixe (4)

$$x_1 = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + 1) \qquad x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 1\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4 + 2) \longrightarrow x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k)} + x_4^{(k)} + 2\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_4) \qquad x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right)$$

$$x_4 = \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + 1) \qquad x_4^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 1\right)$$

$x_1^0 = 0{,}0$, $x_2^0 = 0{,}0$, $x_3^0 = 0{,}0$ et $x_4 = 0{,}0$

$k=0$

$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(0+0+1) = 0{,}25$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(0+0+2) = 0{,}5$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(0+0) = 0$

$x_4^{(1)} = \frac{1}{4}(0+0+1) = 0{,}25$

$\cancel{x_4^{(1)} = \frac{1}{4}(0+0+1) = 0{,}25}$

$k=1$

$\cancel{x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(+0{,}5 + \dots)}$ $0{,}5 +$

$= \frac{1}{4}(0{,}5 + 0 + 1) = 0{,}375$

$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(0{,}25 + 0{,}25 + 2) = 0{,}625$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(0{,}25 + 0{,}25) = 0{,}125$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(0{,}25 + 0{,}25 + 1) = 0{,}375$

$x_4^{(3)} = \frac{1}{4}($

$k=2$

$x_1^{(3)} = 0{,}4375$

$x_2^{(3)} = 0{,}6875$

$x_3^{(3)} = 0{,}1875$

$x_4^{(3)} = 0{,}4375$

$k=3$

$x_1^{(4)} = 0{,}46875$

$x_2^{(4)} = 0{,}71875$

$x_3^{(4)} = 0{,}21875$

$x_4^{(4)} = 0{,}46875$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0	0	0	0
1	0.25	0.5	0	0.25
2	0.375	0.625	0.125	0.375
3	0.4375	0.6875	0.1875	0.4375
4	0.46875	0.71875	0.21875	0.46875
5	0.48438	0.73438	0.23438	0.48438
6	0.49219	0.74219	0.24219	0.49219
7	0.49609	0.74609	0.24609	0.49609
8	0.49805	0.74805	0.24805	0.49805
9	0.49902	0.74902	0.24902	0.49902
10	0.49951	0.74951	0.24951	0.49951
11	0.49976	0.74976	0.24756	0.49976

on peut se rendre compte que la convergence de cette méthode n'est guère rapide.

B. Méthode de GAUSS-SEIDEL

Cette méthode est analogue à celle de JACOBI à l'exception du fait que, en cours de calcul, on utilise toujours les valeurs les plus récentes des inconnues. C'est-à-dire qu'après avoir calculé $x_1^{(k+1)}$ comme dans la méthode de JACOBI, on calcule $x_2^{(k+1)}$ au moyen de $x_1^{(k+1)}$, $x_3^{(k)}$, $x_4^{(k)}$ .... $x_n^{(k)}$ puis $x_3^{(k+1)}$ avec $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_4^{(k)}$ ....$x_n^{(k)}$ etc...

D'une manière plus formelle, ayant déterminé la matrice M utilisée plus haut, on écrit :

$$M = L + U \qquad \text{avec (3)}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & \bigcirc \\ m_{21} & 0 & \\ m_{31} & m_{32} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{et } U = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \cdots \\ & 0 & m_{23} & \cdots \\ \bigcirc & & \ddots & \\ & & 0 & \cdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

et l'algorithme de GAUSS-SEIDEL s'écrit :

$$x^{(k+1)} = L\,x^{(k+1)} + U\,x^{(k)} + C$$

Exemples de GAUSS SEIDEL 5 6

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & +4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algorithme

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ si } \cancel{i} \neq j$$
$$= 0 \text{ si } i = j$$

$$C_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$M = L + U$ avec

$$\begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & 0 & & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & \\ m_{21} & 0 & & 0 \\ m_{31} & m_{32} & & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & & \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & m_{23} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{34} \cdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

matrice triangulaire inferieur

Matrice triangulaire superieure

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & +\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Algorithme de Gauss - Seidel

$$X^{(k+1)} = L\,X^{(k+1)} + U\,X^{(k)} + C$$

6

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1^0 = 0 \\ x_2^0 = 0 \\ x_3^0 = 0 \\ x_4^0 = 0 \end{cases}$$

$k=0$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5625 \\ 0,0625 \\ 0,40625 \end{bmatrix}$$

On peut aussi appliquer manuellement l' l'algorithme:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 1\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)} + 2\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)} + 1\right) \end{cases}$$

$x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$ et $x_4^{(0)} = 0$

$k=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 1\right) = 0,25 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(1)} + x_4^{(0)} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(0,25 + 0 + 2\right) = 0,5625 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(0,25 + 0,5625\right) = 0,0625 \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{4}\left(0,5625 + 0,0625\right) = 0,40625 \end{cases}$$

7

$$X^{k+1)} = L.X^{(k+1)} + U.X^{(k)} + C \qquad (5)$$

Exemple

Reprenons l'exemple donné pour JACOBI (p V.37)
Avec encore $x_1^{(o)} = x_2^{(o)} = x_3^{(o)} = x_4^{(o)} = 0$, on obtient :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0	0	0	0
1	0.25	0.5625	0.0625	0.40625
2	0.40625	0.703125	0.203125	0.47656
3	0.476563	0.738281	0.238281	0.494141
4	0.494141	0.747070	0.247070	0.498535
5	0.498535	0.749268	0.249268	0.499634
6	0.499634	0.749817	0.249817	0.499908

Dans cet exemple, la convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL est deux fois plus rapide que celle de la méthode de JACOBI. C'est souvent le cas, mais il peut arriver que la méthode de GAUSS-SEIDEL diverge alors que celle de JACOBI converge.

Remarques :

Les méthodes itératives sont très simples à programmer ; de plus, à chaque itération, le nombre d'opérations est proportionnel à n^2. Il ne croît donc pas aussi vite, pour les grands systèmes, que pour les méthodes directes. Par contre, la convergence n'est pas garantie : ce problème sera étudié ci-dessous.

C. Convergence des méthodes itératives

Pour étudier ce problème, recherchons d'abord une expression de la matrice M utilisée dans la méthode de JACOBI [relations (2)].

Appelons D la matrice diagonale constituée des éléments diagonaux de A ($d_{ii} = a_{ii}$; $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).