

# M12 Saitenschwingungen

Daniel Kohlberger

11. April 2025

## 1 Lernziele

- Verständnis von Wellengleichung, Wellen, und stehenden Wellen
- Grund- und Oberschwingung
- Handhabung von Frequenzgenerator und Oszilloskop

## 2 Grundlegende Eigenschaften einer Welle einer Welle

**Schwingungen** sind ortsfest und wiederholen sich in periodischen zeitlichen Abständen (Periodendauer). Der zeitliche Verlauf der harmonischen Schwingung eines Federpendels kann durch

$$z(t) = z_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (1)$$

beschrieben werden. Hierbei ist  $z_0$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz<sup>1</sup> und  $\psi$  die Anfangsphase, in der sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet. Üblicherweise wird in der Experimentalphysik nach Möglichkeit der Start der Beobachtung so gewählt, dass  $\psi = 0$  oder  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ist, sodass

$$z(t) = z_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad z(t) = z_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (2)$$

ist. Wird  $\psi = \pi$  gewählt, so ergibt sich aus Gl.(1)

$$z(t) = z_0 \cdot \sin(-\omega t) \quad (3)$$

Eine **Welle**, kann als Schwingung, die sich im Raum ausbreiten, verstanden werden<sup>2</sup>. Sie kann durch

$$z(\vec{r}, t) = z_0 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \psi) \quad (4)$$

$$= z_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \psi^*) \quad (5)$$

beschrieben werden. Dabei sind Gl.(4) und Gl.(5) äquivalent, wenn  $\psi^* = \psi + \pi$  gewählt wird. Hierbei ist  $\vec{k}$  der Wellenvektor, der die Ausbreitungsrichtung der Welle beschreibt.

---

<sup>1</sup> Bei einem Federpendel ist  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ , wenn  $K$  die Federkonstante und  $m$  die Masse des Pendelkörpers ist,

<sup>2</sup> Auch wenn diese Beschreibung strenggenommen nicht ganz zutreffend ist, wie ergänzend hierzu in Kap. 2.1.1 erklärt wird.

## 2.1 Anschauliche Bedeutung

Angenommen auf dem Meer schwimmt eine Boje, und die Welle läuft unter der Boje, die sich z.B. am Ort  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  befindet hindurch<sup>3</sup>. Dann vollzieht die Boje eine Bewegung, die durch Gl.(3) beschrieben werden kann. Eine Boje an einem anderen Ort vollzieht entsprechend<sup>3</sup> mit einer Bewegung, die hierzu Phasenverschoben ist. Betrachtet man viele Bojen, die nebeneinander auf dem Meer schwimmen, so kann eine Welle als sich im Raum ausbreitende Schwingung verstanden werden. Dabei darf aber nicht vergessen werden, dass eine Welle wie sie durch Gl.(4) beschrieben werden kann, unendlich über den gesamten Raum ausgedehnt ist.

### 2.1.1 anschauliche Bedeutung von $\omega$

Abbildung 1 zeigt den zeitlichen Verlauf  $z(t)$  einer Boje, die sich an einem festen Ort  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  befindet. Die Zeit-Achse ist mit der **Kreisfrequenz**  $\omega$  „gestreckt“<sup>4</sup>.

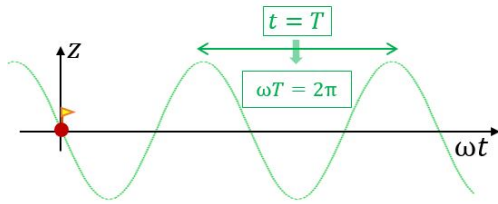


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf  $z(t)$  einer Boje, die sich an einem festen Ort  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  befindet.  $z(t)$  ist durch Gl.(3) beschreibbar.

Wie Abb. 1 zeigt, beginnt immer dann, wenn

$$\omega T = 2\pi \quad (6)$$

ist, eine neue Periode. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zeitdauer  $t = T$  vergangen ist, wobei  $T$  die Periodendauer ist. Mit der Frequenz  $f = \frac{1}{T}$  ergibt sich

$$\omega = 2\pi f \quad (7)$$

In Abb. 1 ist auf der Abszisse  $\omega t$  aufgetragen. Dies stellt eine Substitution  $\alpha(t) := \omega t$  in obigen Gleichungen dar.  $\alpha(t)$  hängt linear von der Zeit ab und es gilt  $\dot{\alpha} = \omega$ , weshalb  $\omega$  auch **Winkelgeschwindigkeit** genannt wird.

Betrachtet man einen festen Ort einer Welle, die durch Gl.(4) beschrieben werden kann, so ergibt sich an dieser Stelle eine harmonische Schwingung. Hierbei darf aber nicht übersehen werden, dass ein anderer fester Ort (z.B. direkt daneben) hierzu Phasenversetzt ebenfalls harmonische Schwingungen durchführt.

### 2.1.2 anschauliche Bedeutung von $\vec{k}$ und $k = |\vec{k}|$

Nachdem in Kap. 2.1.1 die zeitliche Entwicklung einer Welle an einem festen Ort betrachtet wurde, wird nun die Zeit „festgehalten“ und die Ortsabhängigkeit von  $z$  betrachtet. Dies kann mittels eines angehaltenen Videos (Foto) der Welle, wie es in Abb. 2 skizziert ist, realisiert werden.

Der **Wellenvektor**  $\vec{k}$  zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle.

Die Abszisse stellt den Ort  $\vec{r}$  in Ausbreitungsrichtung dar, wobei sie mit  $k$  skaliert ist<sup>5</sup>.

Immer dann, wenn  $\vec{k}\vec{r} = 2\pi$  im Ort zurückgelegt wurde, wiederholt sich  $z(\vec{r})$ . Zeigt die Betrachtete Raumrichtung  $\vec{r}$  in die Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  so ist dies genau dann der Fall, wenn  $|\vec{r}| = \lambda$  ist und es gilt

$$k\lambda = 2\pi \quad (8)$$

$k$  wird daher auch **Wellenzahl** genannt<sup>6</sup>.

<sup>3</sup> Die Boje muss sich nicht unbedingt im Ursprung befinden; lediglich an einem festen Punkt  $\vec{r} = \text{const.}$ , denn bei gegebenen  $\vec{k}$  ist auch  $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$  und dieses Skalarprodukt kann mathematisch entsprechend Gl.(1) als eine Anfangsphase interpretiert werden.

<sup>4</sup> Vergleichbar mit einem Video, das man mit mehrfacher Geschwindigkeit (z.B. 1,75-fache der Zeit) abspielen kann.

<sup>5</sup> Vergleichbar mit dem Maßstab auf einer Landkarte.

<sup>6</sup> Bitte beachten Sie die Analogie zwischen Gl.(6) und Gl.(8): So wie  $\omega$  trotz des  $2\pi$ -Faktors ein Maß dafür ist,

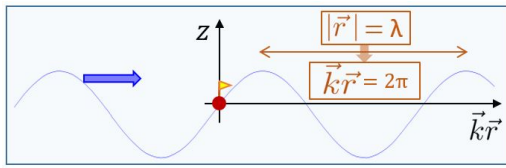


Abbildung 2: schematische Darstellung eines angehaltenen Videos von einer Welle, das Koordinatensystem ist so gewählt, dass  $r$  in Ausbreitungsrichtung der Welle zeigt. Der Koordinaten-Ursprung wurde so gewählt, dass  $z(r)$  durch Gl.(3) beschreibbar ist. Der blaue Pfeil deutet die Bewegungsrichtung der Welle an, wenn das Video gestartet würde.

## 2.2 Physikalische Grundlagen

### 2.2.1 transversal und longitudinal Wellen

Es gibt **transversal Wellen**, bei denen die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht: z.B. Licht oder Seilwellen.

Es gibt **longitudinale Wellen**, bei denen die Schwingung in Ausbreitungsrichtung erfolgt: z.B. Schallwellen.

Deshalb sind  $z$  und  $z_0$  in Gl.(4) und (5) Vektoren, die senkrecht oder parallel zu  $\vec{k}$  stehen.

Mechanische Wellen breiten sich in einem Medium wie Wasser, Luft oder gekoppelte Kettenmitglieder aus. Elektromagnetische Wellen (z.B. Röntgenstrahlung, Gamma-, UV-Strahlung, Licht, IR-Strahlung, Mikrowellen, Radio, Radar-Strahlung) können sich auch im Vakuum ausbreiten.

Wie im Folgenden ausgeführt wird, hängt Ausbreitungsgeschwindigkeit stark von der Kopplungsstärke der schwingenden Systeme ab: Beispielsweise breitet sich Schall in Flüssigkeiten oder Festkörpern wesentlich schneller aus als in Gasen. Auch in diesem Versuch wird die Schallgeschwindigkeit von der Spannung der Saite, welche ein rückstellendes Moment ergibt, abhängen.

In diesem Versuch werden mechanische Wellen betrachtet, die in einem Potenzial „eingesperrt“ sind. Derartige Systeme finden z.B. Anwendung in Seiteninstrumenten, wie einer Gitarre. Darüber hinaus stellt dieser Versuch einen anschaulichen Bezug zu dem „unendlich hohen Potentialtopf“, der in der Quantenmechanik ein gängiges Lehrbeispiel ist, her.

### 2.2.2 Reflexion von Wellen

Trifft eine Welle, wie sie z.B. entlang eines Seils propagieren kann, auf ein Ende, so wird diese reflektiert. Sie läuft nach der Reflexion in entgegengesetzter Richtung weiter. Dabei ändert der Wellenvektor sein Vorzeichen und es gilt

$$\vec{k}_{\text{ref}} = -\vec{k}_{\text{ein}} \quad , \quad (9)$$

wobei die Indizes „ein“ und „ref“ für die einlaufende und reflektierte Welle stehen.

Es muss zwischen der Reflexion an einem festen Ende (z.B. Seil in einer Wand verankert) und einem losen (freien) Ende unterschieden werden. Wie Abb. 3 verdeutlicht, wird bei einem festen Ende ein „Wellenberg“ als „Wellental“ reflektiert. Bei einem losen Ende hingegen wird ein „Wellenberg“ als „Wellenberg“ reflektiert.

---

wie viele Schwingungen pro Sekunde vollzogen werden, so ist  $k$  ein **Maß** dafür, wie viele Wellenzüge in einen Meter passen.

(Hierbei aber nicht den  $2\pi$ -Faktor übersehen, weshalb man **nicht** sagen darf: Wellenzüge pro Meter)

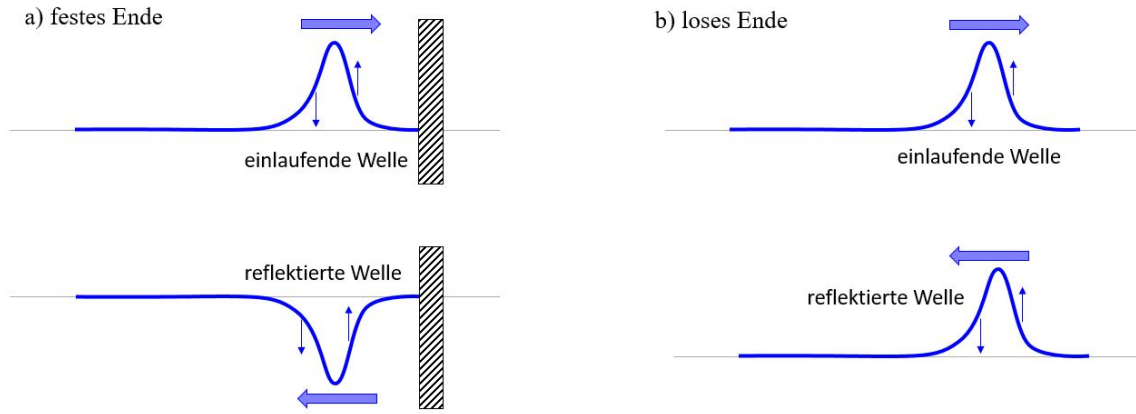


Abbildung 3: Reflexion einer nach rechts einlaufenden Transversalwelle an einem festen a) und einem losen Ende b). Die dicken Pfeile zeigen die Ausbreitungsrichtung der Welle an, die dünnen Pfeile veranschaulichen die Bewegung der einzelnen „Kettenglieder“.

Bei **Reflexion an einem festen Ende** spricht man davon, dass die reflektierte Welle invertiert<sup>7</sup> wird. Mathematisch bedeutet dies, dass die Welle einen Vorzeichenwechsel erfährt, was auch durch einen Phasensprung von  $\pi$  ausgedrückt werden kann. Für eine einlaufende Welle

$$\vec{z}_{\text{ein}}(\vec{r}, t) = \vec{z}_0 \cdot \sin(\vec{k}_{\text{ein}} \vec{r} - \omega t) \quad (10)$$

ist die reflektierte Welle durch

$$\vec{z}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = -\vec{z}_0 \cdot \sin(\vec{k}_{\text{ref}} \vec{r} - \omega t) = \vec{z}_0 \cdot \sin(\vec{k}_{\text{ref}} \vec{r} - \omega t + \pi) \quad (11)$$

gegeben.

Bei **Reflexion an einem losen Ende** vollzieht sich dieser Vorzeichenwechsel (bzw. Phasensprung von  $\pi$ ) nicht

$$\vec{z}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \vec{z}_0 \cdot \sin(\vec{k}_{\text{ref}} \vec{r} - \omega t) . \quad (12)$$

### 2.2.3 Superpositionsprinzip

Unterschiedliche Wellen, mit unterschiedlichen Amplituden Frequenzen, Wellenvektoren, Anfangsphasen

$$z_i(\vec{r}, t) = z_{0,i} \cdot \sin(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t + \psi_i)$$

addieren sich zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort entsprechend

$$z(\vec{r}, t) = \sum z_i(\vec{r}, t)$$

auf.

<sup>7</sup> Das hat nichts mit dem Kehrwert eines Bruches zu tun.

### 3 Theorie

In Kap. 2 wurde die mathematische Beschreibung einer Welle als gegeben vorausgesetzt, um hierauf fundamentale Grundlagen aufzubauen. Nun wird Gl.(4) für eine Welle entlang einer Saite in Kap. 28 hergeleitet.

#### 3.1 Wellengleichung und deren Lösung

Es wird eine Kette bzw. eine Saite betrachtet, die aus infinitesimal langen „Kettengliedern“ der Länge  $dx$  bestehen. Die Kopplung zwischen den „Kettengliedern“ besteht darin, dass die benachbarten „Kettenglieder“ eine Zugkraft  $F_0$  auf das betrachtete „Kettenglied“ ausüben. Wie Abb. 4 zeigt, wirkt hierbei die Zugkraft  $F_0$  des einen „Kettenglieds“ in die eine Richtung, während die des anderen „Kettenglieds“ in eine andere Richtung zeigt.

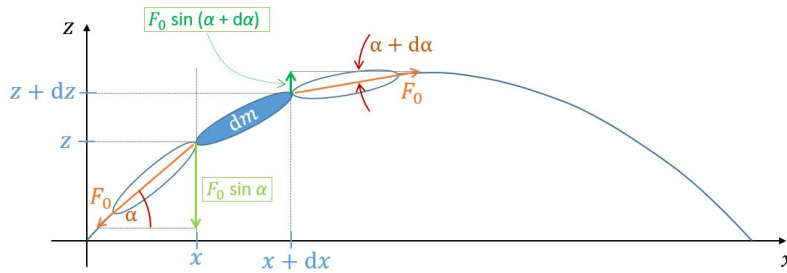


Abbildung 4: Schematische Darstellung infinitesimaler „Kettenglieder“ der Masse  $dm$ , wobei die beiden äußeren „Kettenglieder“ auf das mittlere die Kraft  $F_0$  unter dem jeweiligen abgegebenen Winkel ausüben.

Wird die Saite transversal ausgelenkt, wie es Abb. 4 zeigt, so wirkt auf das infinitesimale Saitenelement („Kettenglieder“) der Länge  $dx$  die rücktreibende resultierende Kraft

$$dF_{\text{beschl}} = F_0 \cdot \sin(\alpha + dx) - F_0 \cdot \sin\alpha, \quad (13)$$

die die infinitesimale Masse  $dm$  des „Kettenglieds“ beschleunigt. Im Anhang 8.1 wird ausgeführt, wie hieraus mit der Massenbelegung der Saite  $\mu$ , die auch lineare Massendichte genannt wird<sup>8</sup>, die eindimensionale Wellengleichung der Saite

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad (14)$$

abgeleitet werden kann. Hierbei ist  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und stellt in Gl.(14) mathematisch lediglich eine Substitution dar.

Gleichung 14 wird unter Anderem durch

$$z(x, t) = z_0 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \psi) \quad (15)$$

gelöst, wie Einsetzen von Gl.(15) in Gl.(14) zeigt. Hierbei ergibt sich  $-\omega^2 z = c^2 \cdot (-)k^2 z$ , also

$$c = \pm \frac{\omega}{k} \quad \rightarrow \quad k = \pm \frac{\omega}{c},$$

was den beiden Ausbreitungsrichtungen entlang der  $x$ -Achse entspricht.

Für weiterführende Informationen sei an dieser Stelle auf die Anleitung von Dr. Uwe Müller verwiesen.

<sup>8</sup> und nichts weiter als die Masse pro Länge der Saite ist

### 3.2 Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit (ergänzend)

Die Dispersionsrelation beschreibt die  $\omega(\vec{k})$ -Abhängigkeit einer Welle. Diese ist nicht notwendigerweise linear und kann auch von der Richtung, in der eine Welle durch ein Medium verläuft abhängen. Dies eröffnet ein immens großes Forschungsfeld in der Festkörperphysik und Optik.

Die **Phasengeschwindigkeit** ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit gleicher Phasen und durch

$$c_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (16)$$

gegeben. Mit Gl.(7) und Gl.(8) ergibt sich die Phasengeschwindigkeit

$$c_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \quad (17)$$

einer monochromatischen Welle. Demnach legt ein Punkt konstanter Phase in der Zeit  $T$  die Strecke  $\lambda$  zurück.

Ist die Dispersionsrelation nicht linear, so unterscheidet sich die Phasengeschwindigkeit von der **Gruppengeschwindigkeit**, die durch

$$c_{\text{gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (18)$$

gegeben ist. Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Hüllkurve eines Wellenpakets fortbewegt.

### 3.3 Stehende Wellen

Überlagerung von kontinuierlich einlaufenden Wellen mit den reflektierten Wellen kann zu stehenden Wellen führen, wenn die richtigen Rahmenbedingungen gegeben sind.

In einem endlich ausgedehnten Körper der Länge  $L$  trifft die Welle unweigerlich auf dessen Ende und wird dort reflektiert. Dies ist unabhängig davon, ob es sich um ein festes Ende, wie z.B. einer Gitarrensaite, oder um ein loses Ende, wie z.B. bei einer frei schwebenden Stahlstange der Fall ist. Aufgrund des Superpositionsprinzips addieren sich Wellen. Dies geschieht auch, wenn eine Welle zwischen zwei Enden immer wieder hin- und her-reflektiert wird.

Trifft eine Welle auf das Ende eines Körpers, so wird diese reflektiert. Die Superposition der einlaufenden und reflektierten Welle bildet eine stehende Welle, wie in Anhang 8.2.1 gezeigt wird. Hierbei bilden sich ortsfeste Knoten und Bäuche aus.

Wird eine Welle hingegen zwischen zwei Enden immer weiter hin und her reflektiert, so bildet sich im allgemeinen entsprechend Anhang 8.2.2 Phasenverschiebungen aus: dann kommt es nicht zum Fall der Resonanz.

#### 3.3.1 Resonanzfall

Für bestimmte Abhängigkeiten zwischen der Gesamtlänge des Körpers  $L$  und der Wellenlänge  $\lambda$  kommt es zur Resonanz<sup>9</sup>. Wie Abb. 5 illustriert, treten hierbei ortsfeste Knoten und Bäuche auf und das System schwingt<sup>10</sup> mit Amplituden, die ortsabhängig sind. An den Knoten schwingt die Saite nicht, an den Bäuchen maximal. Bei Reflexion am festen Ende gibt es an der Stelle der Reflexion einen Knoten<sup>11</sup>, am losen Ende einen Bauch<sup>12</sup>, wie Abb. 5 zeigt.

<sup>9</sup> , und zwar dann, wenn der Abstand der beiden Enden so groß ist, dass bei gegebener Wellenlänge  $\lambda$  entsprechend Anhang 8.2.2 kein Phasensprung entsteht.

<sup>10</sup> Auch wenn das System schwingt, so handelt es sich noch immer um Wellen, die sich entsprechend des Superpositionsprinzips addieren.

<sup>11</sup> z.B. Ende der Gitarrensaite

<sup>12</sup> z.B. Stahlstange, die auf der ISS im Schwerelos schwingt

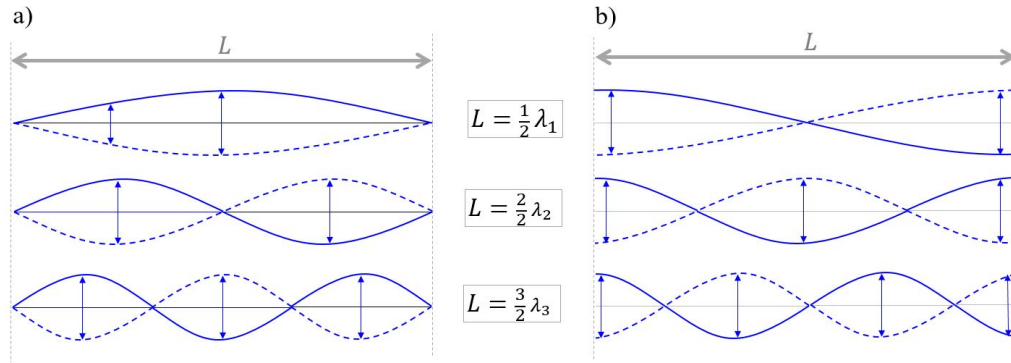


Abbildung 5: stehende Welle für die Grundfrequenz und die erste und zweite Oberschwingung im Fall von beidseitig festen Enden a) bzw. beidseitig losen (offenen) Enden b).

Abbildung 5 verdeutlicht, dass Stehwellen mit Wellenlängen  $\lambda_n$  entstehen, wenn

$$L = \frac{\lambda_n}{2} n \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

erfüllt ist. Die zu  $n$  gehörenden Stehwellen nennt man Schwingungsmoden. Entsprechend Gl.(17) sind den durch Gl.(19) definierten Wellenlängen  $\lambda_n$  Frequenzen  $f_n$  zugeordnet. Diese werden Resonanz- oder Eigenfrequenzen genannt.

Die zur tiefsten Frequenz, gehörende Schwingung wird Grundschiwingung genannt; im Fall der höheren Frequenzen werden die Moden Oberschwingung genannt<sup>13</sup>.

### 3.3.2 Zusammenhang von Resonanzfrequenzen $f_n$ , Grundfrequenz $f_1$ , Wellenlängen $\lambda_n$ und Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$

Mit Gl.(17) und Gl.(19) erhält man als Bedingung für die Resonanzfrequenzen einer schwingenden Saite

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} n = f_1 n$$

$\boxed{c = \lambda_n f_n}$      $\boxed{L = \frac{\lambda_n}{2} n}$      $\text{mit } f_1 = \frac{c}{2L}$

wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend Anhang 8.1 durch  $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$  gegeben ist.

Wie in Kap. 4 ausgeführt wird, wird die Saite mit der Gewichtskraft von Gewichten der Masse  $M$  gespannt. Die Spannkraft ist demnach durch  $F_0 = g M$  gegeben, wobei  $g$  die Gravitationsbeschleunigung ist.

Die Massenbelegung der Saite gibt die Masse der Saite  $m$  pro Länge  $L$  an und wird daher auch lineare Massendichte genannt. Sie ist durch  $\mu = \frac{m}{L}$  gegeben.

<sup>13</sup> Es sei angemerkt, dass häufig die Grundfrequenz  $n = 0$  zugeordnet wird, während  $n = 1, 2, 3, \dots$  die  $n$ -te Oberschwingung bezeichnet. In diesem Fall ergibt sich Gl.(19) zu  $L = \frac{\lambda_n}{2} (n + 1)$ .

## 4 Versuchsaufbau

Abbildung 6 zeigt den Versuchsaufbau. Die Saite [1] ist zwischen zwei Einspannstellen [2a] und [2b] gespannt. Die Einspannstellen [2b] ist an den Lasthebel [3] gekoppelt, wobei dieser um die Achse [4] drehbar ist. Die Massenstücke [5] ergeben eine wählbare Masse  $M$ , die eine Gewichtskraft  $F_g = M g$  ausübt. Wird eine Masse  $M$  in die  $i$ -te Kerbe von [3] gehängt, so wird aufgrund des Hebelgesetzes die Saite mit

$$F_0 = i \cdot M g + F_{LH} \quad (20)$$

gespannt<sup>14</sup>.  $F_{LH} = 0,52 \text{ N}$  ist hierbei die Zugkraft, die durch das Eigengewicht des Lasthebels (ohne zusätzliche Massestücke) ausgeübt wird.

$F_0$  darf 300 N nicht überschreiten! → Also maximal 1 kg an die dritte Kerbe hängen.

Mittels der beiden Reiter [6a] und [6b] kann eine Länge  $L$ , auf der die Saite schwingen kann, eingestellt werden.  $L$  kann mittels einer Skala (Maßband) abgelesen werden.

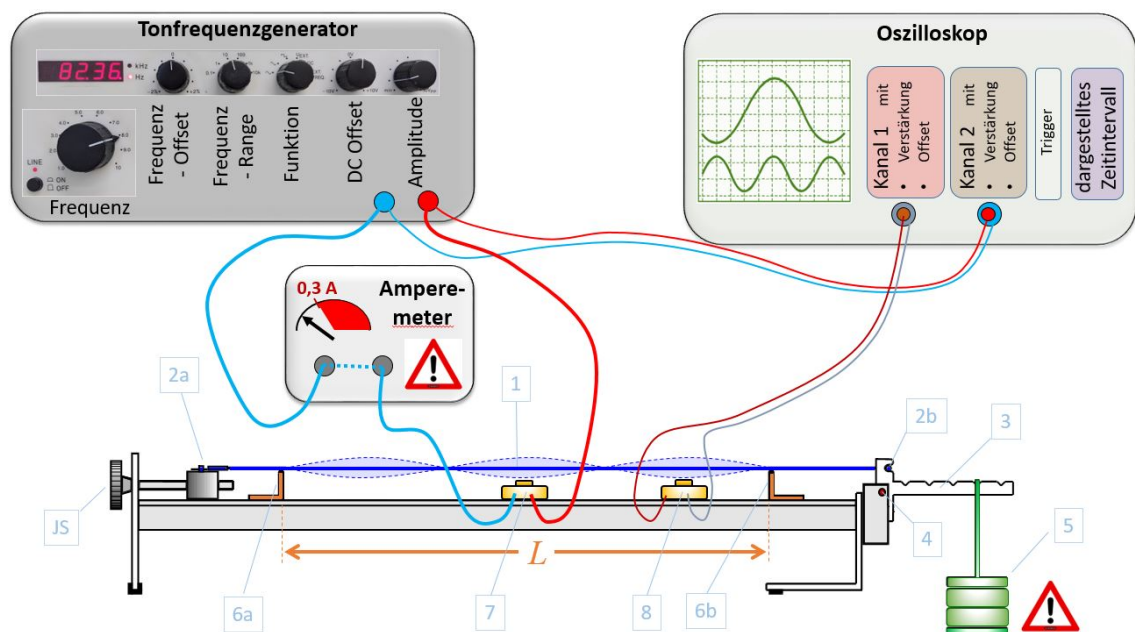


Abbildung 6: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Auf der Länge  $L$  wird die mittels der Masse [5] gespannte Saite [1] mittels eines Tonfrequenzgenerators und einer Erregerspule [7] zum Schwingen gebracht. Die übrigen Komponenten sind im Fließtext beschrieben.

Mit dem Tonfrequenzgenerators kann eine sin-förmige Wechselspannung mit einstellbarer Frequenz  $f_{FG}$  und Amplitude eingestellt werden<sup>15</sup>. Diese Wechselspannung erzeugt mittels des abgebildeten Stromkreises in der Erregerspule [7] einen Wechselstrom. Das in Reihe geschaltete Amperemeter dient hierbei der Kontrolle des fließenden Stromes.

Der durch die Erregerspule fließende Strom darf **niemals** 0,3 A überschreiten!

Die Anregung der Saite erfolgt durch diese auf einen Weicheisenkern gewickelte Erregerspule [7], durch die ein Wechselstrom fließt. Der Tonfrequenzgenerator liefert den Wechselstrom für die Spule und erlaubt eine Änderung der Erregerfrequenz, mit welcher die Saite (Draht) magnetisch zu Schwingungen angeregt wird<sup>16</sup>.

<sup>14</sup> Strenggenommen ist Gl.(20) nur gültig, wenn der Lasthebel [3] horizontal verläuft. Die lastabhängige Dehnung der Saite muss durch Drehen an der Justierschraube [JS] derart ausgeglichen werden, dass der Lasthebel bei allen Messungen die horizontale Lage beibehält.

<sup>15</sup> Mittels des Frequenzranges kann die Frequenz um ganze 10-er-Potenzen verändert werden. Mit dem Frequenzoffset können Feinanpassungen der eingestellten Frequenz vorgenommen werden.

<sup>16</sup> Überlegen Sie sich, weshalb die Anregungen mit doppelter Frequenz auf den Saite (Draht) wirken. Berücksichtigen Sie hierbei, dass der Draht sowohl von der Nordpol- als auch von der Südpol-Seite eines Stabmagneten angezogen wird.



**Einsatz des Zweikanal-Oszilloskops**

Ein Oszilloskop mit zwei Kanälen dient dazu, die Schwingungsform graphisch darzustellen. Mittels einer Detektorspule [8] kann das schwingende Verhalten der Saite an einer bestimmten  $x$ -Position visualisiert werden. Die schwingende Saite induziert hierbei eine Wechselspannung, die mit dem Kanal 1 des Oszilloskops ausgelesen werden kann.

Als weiteres Referenzsignal dient der Output des Tonfrequenzgenerators, der über Kanal 2 des Oszilloskops visualisiert wird.

Es ist zweckmäßig, die Spulen jeweils der Stelle eines Bauches zu platzieren<sup>17</sup>. Damit das Magnetfeld der Erregerspule nicht in die Detektorspule einkoppelt muss ein Mindestabstand zwischen DS und ES eingehalten werden. ein zweckmäßiger Mindestabstand kann durch Beobachtung der Signalform am Oszilloskop ausprobiert werden.

Werden die Kanäle an beiden Kanälen gleichzeitig angezeigt, dann beobachtet man im Resonanzfall an der Detektorspule (Kanal 1) gewöhnlich die doppelte Erregerfrequenz<sup>16</sup>. Für die ist also bei diesem Versuch immer die doppelte Erregerfrequenz maßgeblich.

---

<sup>17</sup> Überlegen Sie sich, weshalb dies zweckmäßig ist.

## 5 Versuchsdurchführung

Aufgrund des induktiven Widerstandes der Erregerspule ist der durch sie fließende harmonische Wechselstrom frequenzabhängig: Er darf **niemals** dauerhaft mehr als 0,3 A betragen, da sonst die Wicklung zerstört wird. (Kontrolle mit dem Amperemeter!)

### 5.1 Grundsätzliches zur Rohdatenerhebung

Es werden Resonanzfrequenzen der Saite gemessen. Als Rohdaten werden hierbei

- die Länge  $L$  des zum schwingenden angeregten Bereiches der Saite
- die Masse  $M$ , mit der die Saite gespannt wird
- die Frequenz, die der Tonfrequenzgenerator im Resonanzfall anzeigt

notiert. Die Amplitude des Outputs muss so schwach gewählt werden, dass die Saite im Resonanzfall nicht an die Spulen 7 und 8 anstößt.

### 5.2 Vertrautmachen mit dem Versuchsaufbau

- Hängen Sie **sehr vorsichtig**  $M \cong 1 \text{ kg}$  in die dritte Kerbe von 3<sup>18</sup>.
- Wählen Sie die Länge  $L \cong 60 \text{ cm}$
- Am Frequenzgenerator:
  - Drehen Sie die Amplitude für den Output auf 0.
  - **Schalten sie erst jetzt den Frequenzgenerator ein.**
  - Wählen Sie den kleinstmöglichen Range, mit dem Sie 95 Hz erreichen können.
  - Stellen Sie den Frequenzoffset auf 0
  - Stellen Sie am Frequenzgenerator  $f_{\text{FG}} \approx 65 \text{ Hz}$  ein.
  - Erhöhen Sie **vorsichtig** die Amplitude des Outputs, bis das Amperemeter  $\approx 0,1 \text{ A}$  anzeigt.
  - verringern Sie die Frequenz **vorsichtig und langsam**:
    - ⇒ Sie werden feststellen, dass bei geringeren Frequenzen der fließende Strom bis in den verbotenen Bereich, der bei 0,3 A beginnt, ansteigt.
    - ⇒ **Lernziel: Niemals bei aufgedrehter Amplitude die Frequenz drastisch verringern.**
- **Auffinden der Grundfrequenz** (für  $F_0 \cong 300 \text{ N}$ ) und  $L \cong 60 \text{ cm}$ :
  - Erhöhen Sie von  $f_{\text{FG}} \approx 70 \text{ Hz}$  beginnend die Frequenz **langsam**.  
(bei einem Output von  $\approx 0,1 \text{ A}$  **oder weniger**)
  - ⇒ Sie werden feststellen, dass sie sich bei  $f_{\text{FG}} \approx 80 \text{ Hz}$  der Resonanzfall (der Grundschwingung) **annähern**.
  - ⇒ Bei einem Output von  $\approx 0,1 \text{ A}$  beginnt die Saite so stark zu schwingen, dass sie an die Spulen 7 und 8 anstößt. (stark summendes Geräusch)
  - ⇒ verringern Sie die Output-Amplitude etwas, sodass die Saite nicht mehr an die Spulen 7 und 8 anstößt.
  - ⇒ Lassen Sie die Saite etwas einschwingen.
  - ⇒ Optimieren Sie **langsam**  $f_{\text{FG}}$  so, dass Sie sich weiter der Grundschwingung der Saite annähern. Dennoch sollten Sie aus didaktischen Gründen  $f_{\text{FG}}$  **noch nicht perfekt** einstellen. (Gegebenenfalls muss die Amplitude weiter reduziert werden.)  
(Lassen sie den Frequenz-Offset **noch** auf 0 stehen.)

<sup>18</sup> Das ist die maximal erlaubte Zugspannung

- **Umgang mit dem Oszilloskop:**

Lassen sie die Saite entsprechend vorangegangenen Punkt möglichst nahe an der Grundfrequenz schwingen, und schalten Sie das Oszilloskop ein. Das Oszilloskop wird im  $y(t)$ -Betrieb<sup>19</sup> und ohne externen Trigger<sup>20</sup> betrieben.

Durch Drücken von Knöpfen können diese „nach innen gestellt“ werden, d.h. die Funktion ist aktiviert; bzw. durch erneutes drücken nach „nach außen gestellt“ werden, d.h. die Funktion ist deaktiviert.

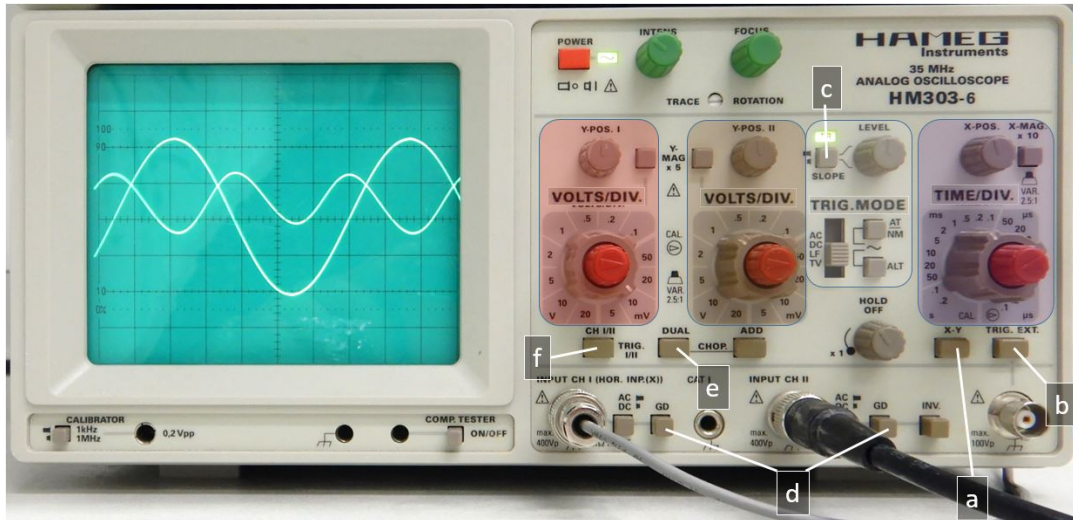


Abbildung 7: Fotografie eines Zweikanaloszilloskop im  $y(t)$ -Betrieb. Die Einstellungen werden im Fließtext beschrieben.

Die in Abb. 7 hervorgehobenen Druckknöpfe werden nun einzeln erklärt.

- ⇒ Die Druckknöpfe für  $(x, y)$ -Betrieb [a] sowie externen Trigger [b] müssen deaktiviert sein.
- ⇒ Der Druckknopf für Trigger [c] muss aktiviert sein.
- ⇒ Die Druckknöpfe für den Ground (GD) der beiden Kanäle [d] müssen deaktiviert sein<sup>21</sup>.
- ⇒ Der Druckknopf „DUAL“ [e] entscheidet darüber, ob ausschließlich ein Kanal dargestellt wird, oder beide Kanäle gemeinsam.

<sup>19</sup> d.h. es werden die Spannungen  $U_{Ch1}$  und  $U_{Ch2}$ , die mit den Kanälen 1 und 2 gemessen werden, in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  dargestellt.  
Der  $y(t)$ -Betrieb unterscheidet sich vom  $(x, y)$ -Betrieb, bei dem die Spannung  $U_{Ch2}$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U_{Ch1}$  dargestellt wird.

<sup>20</sup> **Der Trigger** sorgt dafür, dass periodische  $U_{Ch1}(t)$ - und  $U_{Ch2}(t)$ -Signale im  $y(t)$ -Betrieb als stabiles Bild dargestellt werden. Hierfür ist es essentiell, dass die sich **periodisch wiederholenden dargestellte(n)**  $U_{Ch1}(t)$ - oder (und)  $U_{Ch2}(t)$ -**Kurve(n)** am linken Bildschirmrand grundsätzlich **mit der gleichen Phase beginnen**. Es gibt einen Trigger, der in dem Oszilloskop integriert ist. Hierbei „entscheidet“ das Oszilloskop durch „eigene Beobachtung“, wann der richtige Zeitpunkt gekommen ist, um eine neue Bildaufnahme, die alle mit der gleichen Phase beginnen, zu starten.  
Neben dem internen Trigger gibt es auch die Möglichkeit in das externen Triggers: hierbei wird ein zusätzliches externes Signal in das Oszilloskop eingespeist. Dieses externe Signal „teilt dem Oszilloskop mit“, wann eine neue Periode beginnt. Das Oszilloskop beginnt die Bildaufnahme entsprechend dieser externen Vorgabe. Häufig haben Frequenzgeneratoren hierfür einen weiten Ausgang, an dem ein Rechtecksignal (mit gleicher Periode wie der Output) ausgegeben wird.

<sup>21</sup> Elektrische Geräte, insbesondere im Falle von Wechselspannungen werden sehr häufig so betrieben, dass eine der elektrischen Leitungen auf Erdniveau liegt. (So z.B. die metallischen Schienen der Straßenbahn, die mit der Erde verbunden sind.) Auf der anderen Leitung liegt das Signal bzw. die Spannung gegenüber dem Erdniveau. (So z.B. die Oberleitung der Straßenbahn.) Der Strom „kommt“ über diese Leitung, durchfließt das Gerät (z.B. Elektromotor der Straßenbahn) und fließt in den Boden. Durch drücken des Ground-Tasters wird der Außenleiter des Oszilloskop-Eingangs auf Ground gelegt. Ist Ground jedoch deaktiviert, so misst das Oszilloskop die Differenz zwischen Innen- und Außenleiter ohne den Außenleiter auf das Potential der Erde zu legen.

- ⇒ Wenn der „DUAL“-Knopf  $\boxed{e}$  nicht gedrückt ist, entscheidet der Druckknopf Ch I/II  $\boxed{f}$  darüber ob Kanal 1 oder Kanal 2 angezeigt wird.  
Ist der „DUAL“-Knopf gedrückt, so kann mit  $\boxed{f}$  vorgegeben werden, auf welches Signal das Oszilloskop triggern soll.
- ⇒ Mittels der grünen Drehknöpfe kann die Intensität und der Fokus des Elektronenstrahls, dessen Ablenkung die Liniendarstellung der eingespeisten Spannungssignale verantwortlich ist, eingestellt werden.

Neben den oben genannten Einstellmöglichkeiten hinsichtlich des Messverfahrens gibt es noch die in Abb. 7 farblich hinterlegten Bereiche, um Einstellungen hinsichtlich des automatischen Triggers, sowie des dargestellten Zeitintervalls, wie auch der Spannungsintervalle von den beiden Kanäle vorzunehmen.

### Einstellungen des dargestellten Zeitintervalls

Mit dem in Abb. 8 abgebildeten dicken Drehknopfes (i) kann das Zeitintervall entlang der  $x$ -Richtung eingestellt werden. Entsprechend (i) ist als Einheit 1 ms ausgewählt; dies würde **eigentlich** bedeuten, dass in  $x$ -Richtung jedes Kästchen 1 ms abbildet. Die visualisierte Periodendauer von Kanal 2 beträgt  $T_{FG} \approx 6,5$  Kästchen was demnach  $\approx 6,5$  ms **entsprechen würde**. Entsprechend der eingestellten Frequenz  $f_{FG} \cong 82,36$  Hz beträgt aber  $T_{FG} \cong 12,14$  ms. Diese Diskrepanz kann darauf zurückgeführt werden, dass der rote Drehknopf (ii) fast gänzlich nach links gedreht ist, wie das weiße Dreieck verdeutlicht. Dieser rote Drehknopf (ii) dient dazu, den eingestellten Range kontinuierlich (entsprechend der Stellung von (ii)) zum nächst größeren Range (das wären 2 ms) zu variieren.

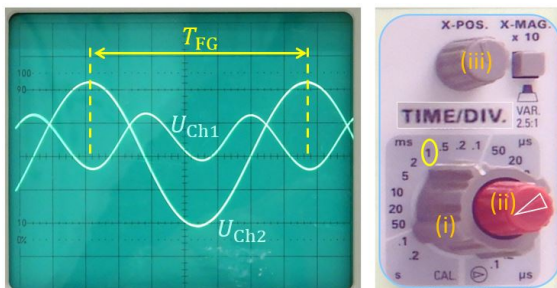


Abbildung 8: Ausschnitte aus Abb. 7, die den Bildschirm und die Einheit für Zeiteinstellungen am Oszilloskop zeigen.

Die Kombination der Drehknopfstellungen (i) und (ii) ergibt eine Maßstab entlang der  $x$ -Achse, der jedem Kästchen eine Zeit von  $\approx 1,87$  ms zuordnet. Es ist demnach sehr zweckmäßig, (ii) ganz nach rechts zu drehen, sodass jedes Kästchen in  $x$ -Richtung das Zeitintervall, das in (i) eingestellt ist, repräsentiert. Der Drehknopf (iii) dient dazu, die dargestellten Kurven horizontal zu verschieben.

### Einstellungen des dargestellten Spannungsintervalls von Kanal 2

Abbildung 9 zeigt die Einstellungen, die zur Verstärkung der Darstellung von  $U_{Ch2}$  vorgenommen wurden. Der Rote Drehknopf (ii) ist ganz nach links gedreht, sodass jedes Kästchen in  $y$ -Richtung einer Spannungsdifferenz von 1 V darstellt, wie die abgebildete Einstellung von (i) zeigt.

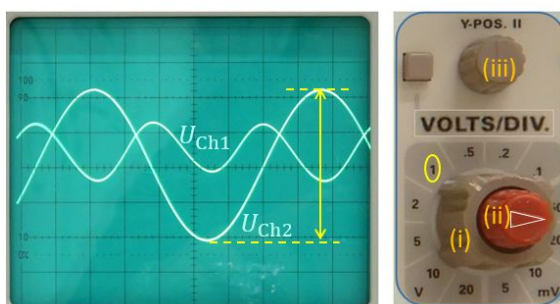


Abbildung 9: Ausschnitte aus Abb. 7, die den Bildschirm und die Einheit für  $U_{Ch2}$ -Einstellungen am Oszilloskop zeigen.

Mit dem Drehknopf (iii) kann die  $U_{Ch2}(t)$  entsprechend eines Offsets vertikal verschoben werden.

### Einstellungen des dargestellten Spannungsintervalls von Kanal 1

Analog zur Beschreibung von Kanal 2 können für den Kanal 1 Einstellungen für die Verstärkung von  $U_{\text{Ch1}}$  vorgenommen werden. Entsprechend der Einstellung von (i) und (ii) repräsentiert jedes Kästchen in  $y$ -Richtung eine Spannungsdifferenz von 10 mV

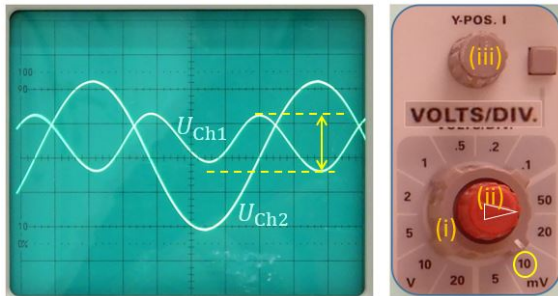


Abbildung 10: Ausschnitte aus Abb. 7, die den Bildschirm und die Einheit für  $U_{\text{Ch1}}$ -Einstellungen am Oszilloskop zeigen.

- Entsprechend obiger Einstellungen sollte die Saite nach wie vor durch den Frequenzgenerator, dessen Frequenz auf  $f_{\text{FG}} \approx 80 \text{ Hz}$  eingestellt ist, mit der Grundfrequenz schwingen.
  - ⇒ Drehen Sie die drei roten Drehknöpfe (ii) des Oszilloskops nach rechts, sodass die jeweiligen Einstellungen von (i) der Darstellung eines Kästchens auf dem Bildschirm entspricht.
  - ⇒ Drehen Sie die Drehknöpfe (iii) auf die mittlere Position
  - ⇒ Wählen Sie geeignete Verstärkungsfaktoren für die Drehknöpfe (i), damit Sie ein bis zwei Perioden des  $U_{\text{Ch2}}(t)$ -Signals auf dem Bildschirm sehen
- Variieren Sie etwas die Amplitude des Outputs vom Frequenzgenerator.
  - ⇒ Beobachten Sie parallel hierzu wie sich auf dem Oszilloskop die Amplitude von  $U_{\text{Ch2}}$  verändert.
- Optimieren Sie **bestmöglich**  $f_{\text{FG}}$ , mit der Sie die Grundfrequenz anregen durch sehr kleine langsame<sup>22</sup> Änderungen am Frequenzgenerator von  $f_{\text{FG}}$ . Besonders feine  $f_{\text{FG}}$ -Anpassungen können mit dem Frequenzoffset vorgenommen werden.
  - ⇒ Beobachten Sie parallel zu Ihren Änderungen am Frequenzgenerator die  $U_{\text{Ch1}}(t)$  Darstellung auf dem Oszilloskop.
  - ⇒ Je näher die Anregung an der Grundfrequenz liegt, um so stärker schwingt die Saite. Dies wird durch einen Anstieg der Amplitude von  $U_{\text{Ch1}}$  auf dem Oszilloskop visualisiert.
  - ⇒ Sollte die Saite an den Spulen anstoßen, so muss die Amplitude des Outputs von dem Frequenzgenerator verringert werden.
  - ⇒ Sollte die auf dem Oszilloskop dargestellte Amplitude von  $U_{\text{Ch1}}$  so groß werden, dass  $U_{\text{Ch1}}(t)$  in vertikaler Richtung nicht mehr vollständig darstellbar ist, so muss der Verstärkungsfaktor (Drehknopf (i) in Abb.10) angepasst werden.

<sup>22</sup> damit die Saite Zeit findet sich entsprechend des neuen  $f_{\text{FG}}$  einzuschwingen

### 5.3 Experimentelle Bestimmung von Resonanzfrequenzen $n = 1$ bis $n = 8$ bei fester Länge $L$ und fester Saitenspannung $F_0$

Entsprechend des in Kap. 5.2 beschriebenen Vorgehens und dem in Abb. 6 dargestellten Versuchsaufbaus :

- Wählen Sie mit den in Abb. 6 dargestellten Reitern  $\boxed{6a}$  und  $\boxed{6b}$  die Länge  $L \cong 60$  cm.
- Hängen Sie **vorsichtig** die Masse  $\boxed{5}$   $M \cong 1000$  g in die dritte Kerbe des Lasthebels  $\boxed{3}$ .
- Suchen und notieren Sie die Frequenzen des Frequenzgenerators  $f_{\text{FG}, n}$ , bei denen die Saite resonant schwingt; für  $n = 1$  bis  $n = 8$ .

Wiederholen Sie diese Messreihe mit zwei weiteren Zugspannung  $F_0$ :

$\Rightarrow$  geeignet wären z.B.  $M \cong 500$  g in der dritten Kerben und  $M \cong 500$  g in der ersten Kerbe.

### 5.4 Experimentelle Bestimmung der Grundfrequenz $n = 1$ in Abhängigkeit von der Länge $L$ und fester Saitenspannung $F_0$

Durch Verschieben der in Abb. 6 dargestellten Reitern  $\boxed{6a}$  und  $\boxed{6b}$  können unterschiedliche Längen  $L$  realisiert werden.

- Wählen Sie  $L \cong 65$  cm
- Hängen Sie **vorsichtig** die Masse,  $M \cong 1000$  g in die dritte Kerbe des Lasthebels.
- Bestimmen Sie die Grundfrequenz.
- **Entlasten Sie durch entfernen der Masse vom Lasthebel die Saite.**
- Wählen Sie eine andere  $L$ , bei der Sie die Grundfrequenz bestimmen wollen.
- Bestimmen Sie für ca. neun verschiedene Längen die Grundfrequenz (bei einer Spannung der Saite von  $M \cong 1000$  g in die dritte Kerbe).

### 5.5 Experimentelle Bestimmung der Grundfrequenz $n = 1$ in Abhängigkeit von der Saitenspannung $F_0$ und fester Länge $L$

- Wählen Sie  $L \cong 60$  cm
- Bestimmen Sie für ca. neun verschiedene Saitenspannungen die Grundfrequenz

## 6 Auswertung und Diskussion

### 6.1 Auswertung der entsprechend Kap. 5.3 erhobenen Rohdaten

- Bestimmen Sie für die drei Messreihen die Resonanzfrequenz der Saite in Abhängigkeit von  $n$
- Stellen Sie die Resonanzfrequenz drei Messreihen in Abhängigkeit von  $n$  in einem Plot dar.
- Generieren Sie geeignete Fits an diese geplotteten Messergebnisse und leiten Sie hieraus die Grundfrequenz der jeweiligen Messreihe ab.
- Bestimmen Sie Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Transversalwelle für die drei Messreihen.
- Bestimmen Sie die linearen Massendichte  $\mu$  der Saite für die drei untersuchten Messreihen.
- Diskutieren Sie kurz diese Ergebnisse.

### 6.2 Auswertung der entsprechend Kap. 5.4 erhobenen Rohdaten

- Zeigen Sie anhand einer grafischen Darstellung der erzielten Messergebnisse, dass die Grundfrequenz umgekehrt proportional zur Saitenlänge ist.
- Generieren Sie einen geeigneten Fit an die dargestellten Messergebnisse.
- Geben Sie den funktionalen Zusammenhang zwischen der Steigung der Ausgleichsgeraden und der Ausbreitungsgeschwindigkeit an
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis das Sie entsprechend der in Kap. 6.1 vorgestellten Auswertung erzielt haben.

### 6.3 Auswertung der entsprechend Kap. 5.5 erhobenen Rohdaten

- Verifizieren Sie die Gültigkeit des theoretischen Modells  $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$  durch geeignete Linearisierung Ihrer Messergebnisse.
- Fitten Sie eine Ausgleichsgerade an die Messergebnisse.
- Bestimmen Sie  $\mu$ .
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den zuvor erzielten Ergebnissen.
- Stellen Sie alle Ergebnisse von  $\mu$  in einem Plot dar.

## 7 Fazit

.....



## 8 Anhang

### 8.1 Herleitung der Wellengleichung

Ausgehend von Abb. 4 kann mit der Kleinwinkelnäherung

$$\sin \alpha \cong \alpha \cong \frac{\partial z}{\partial x} , \quad (21)$$

aus der sich

$$\sin(\alpha + d\alpha) \cong \alpha + d\alpha \cong \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \quad (22)$$

ergibt, Gl.(13) entsprechend

$$dF_{\text{beschl}} \cong F_0 \cdot (\alpha + dx - \alpha) \cong F_0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \quad (23)$$

ausgedrückt werden kann.

Hat die betrachtete Saite den Flächenquerschnitt  $A$  und besteht sie aus einem Material der Dichte  $\rho$ , so ist die „Masse pro Länge“ der Saite durch

$$\mu = A \rho \quad (24)$$

gegeben. Weil  $\mu$  die „Masse pro Länge“ der Saite ist, gilt grundsätzlich

$$dm = \mu \cdot dx \quad (25)$$

$\mu$  ist die Massenbelegung der Saite, die auch lineare Massendichte genannt wird.

Für die Masse des Massenelementes  $dm$  ergibt sich

$$dF_{\text{beschl}} = dm \ddot{z} , \quad (26)$$

woraus sich mit Gl.(23) und Gl.(25)

$$F_0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx = \mu dx \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (27)$$

ergibt. Die Wellengleichung ist demnach durch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F_0}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (28)$$

gegeben. Mit der Substitution  $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  ergibt sich Gl.(14)



## 8.2 Herleitung stehender Wellen

Eine Welle kann auch in komplexer Schreibweise ausgedrückt werden.

### 8.2.1 Stehende Wellen bei Reflexion an einem Ende

Für die Superposition einer in  $x$ -Richtung einlaufenden und in  $-x$ -Richtung reflektierten Welle gleicher Amplitude gilt

$$z(x, t) = z_0 \cdot e^{i(k_{\text{ein}}x - \omega t)} - z_0 \cdot e^{i(k_{\text{ref}}x - \omega t)} \quad (29)$$

$$= z_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left( \underbrace{e^{ik_{\text{ein}}x}}_{=\cos(kx) + i\sin(kx)} - \underbrace{e^{ik_{\text{ref}}x}}_{=\cos(-kx) + i\sin(-kx)} \right), \quad (30)$$

wenn es sich um Reflexion am **festes Ende** handelt. Hierbei ist  $k = k_{\text{ein}} = -k_{\text{ref}}$ . Mit  $\cos(-kx) = \cos(kx)$  und  $\sin(-kx) = -\sin(kx)$  ergibt sich aus Gl.(29)

$$z(x, t) = \underbrace{z_0 \cdot 2 \sin(kx)}_{=:A(x)} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (31)$$

Für die Reflexion an einem **losen Ende** ergibt sich

$$z(x, t) = z_0 \cdot \underbrace{e^{i(k_{\text{ein}}x - \omega t)}}_{=\cos(kx) + i\sin(kx)} - z_0 \cdot \underbrace{e^{i(k_{\text{ref}}x - \omega t)}}_{=\cos(-kx) + i\sin(-kx)} = \underbrace{z_0 \cdot 2 \cos(kx)}_{=:A(x)} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (32)$$

Gleichung (31) und Gl.(32) können so verstanden werden, dass eine Amplitude  $A(x)$  entlang der  $x$ -Richtung cos- bzw. sin-förmig moduliert, aber nicht zeitabhängig ist. Abhängig von der jeweiligen Stelle  $x$  „schwingt“ diese Stelle dann mit  $A \cdot e^{-i\omega t}$ . Es bleibt allerdings eine Welle, in die der Wellenvektor nach wie vor eingeht!

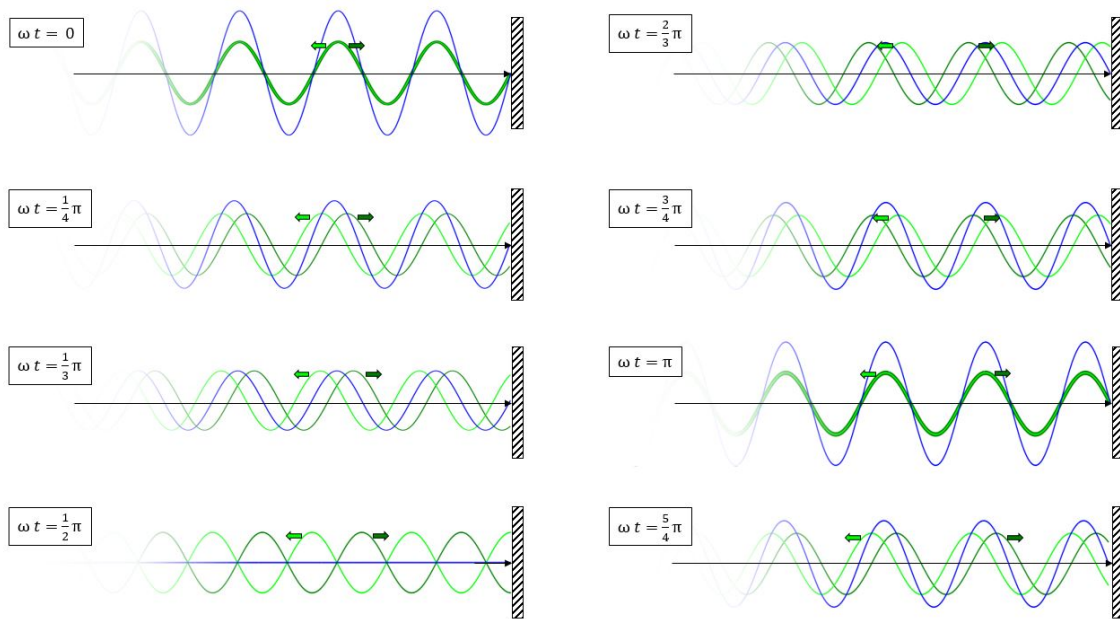


Abbildung 11: Aus dem (negativ-) Unendlichen kommende einlaufende Welle (dunkelgrün), die an einem festen Ende reflektiert wird (hellgrün). Die Pfeile deuten ihre Ausbreitungsrichtung an. Ihre Superposition entsprechend Gl.(31) ist blu dargestellt. Es bilden sich ortsfeste Knoten und Bäuche.

Abbildung 11 zeigt eine aus dem unendlichen kommende einlaufende Welle (dunkelgrün). Sie wird an einem festen Ende reflektiert. Die reflektierte Welle (hellgrün) bewegt sich in die Gegenrichtung. Beide Wellen addieren sich entsprechend Gl.(31) und bilden gemeinsam eine stehende Welle (blau) mit ortsfesten Knoten und Bäuchen.

### 8.2.2 Wellen bei Reflexion an einem zweiten Ende

Trifft nun die in Abb. 11 hellgrün dargestellte reflektierte Welle auf ein weiteres Ende, das in Abb. 12 grau dargestellt ist, so wird sie hier wiederum reflektiert. Diese Welle ist in Abb. 12 türkis dargestellt.

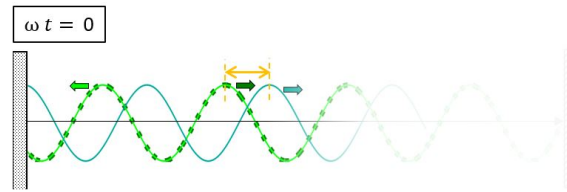


Abbildung 12: in die negative  $x$ -Richtung laufende hellgrüne Welle. Sie wird am linken festen Ende reflektiert. Die durch diese Reflexion erzielte Welle (türkis) bewegt sich in die positive  $x$ -Richtung (ebenso wie die ursprüngliche aus Abb. 11 bekannte dunkelgrüne Ursprungswelle). Zwischen den in positiver  $x$ -Richtung verlaufenden Wellen besteht ein Phasenversatz.

Einzeln betrachtet ergeben die aus Abb. 11 bekannten grün dargestellten Wellen durch Superposition nach wie vor die in Abb. 11 blau dargestellte stehende Welle. Ebenso bildet die hellgrün dargestellte Welle mit der türkis dargestellten Welle eine stehende Welle, wenn nur diese beiden betrachtet werden. Zwischen der dunkelgrün und der türkis dargestellten Welle ergibt sich ein Phasenversatz, der abhängig von dem Abstand der beiden festen Enden ist.

Wird die türkis dargestellte Welle wiederum auf der rechten Seite reflektiert werden, so hätte die neue Welle, die dann wieder in negativer  $x$ -Richtung verläuft, eine Phasendifferenz bezüglich der hellgrün dargestellten Welle.

Bei jeder Reflexion addiert sich eine weitere Phasendifferenz, zwischen den Wellen, die in eine Richtung propagieren. Im Mittel heben sich die Wellen gegenseitig weitestgehend weg. Nur für ganz bestimmte bestimmte Abstände der beiden Enden, gibt es keine Phasendifferenz: dann addieren sich die Wellen grundsätzlich in Form von stehenden Wellen auf. Man spricht von Resonanz, die in Kap. 3.3 ausgeführt wird.