

Tableaux Semântico na Lógica Proposicional

Introdução


- O Tableau Semântico é um sistema de dedução, que também estabelecem estruturas que permitem a representação e a dedução formal de conhecimento.
 - Sendo um dos sistemas de dedução mais adequados para implementação em computadores.
 - Tableaux semânticos na Lógica de predicados é uma sequência de fórmulas construída de acordo com certas regras e geralmente apresentada sob a forma de uma árvore.
 - O tableau semântico contém apenas regras de dedução, que definem o mecanismo de inferência, permitindo a dedução de conhecimento.
-

Regras de Inferência do tableau semântico

$$R_1 = A \wedge B$$

A
B


$$R_2 = A \vee B$$


A B

$$R_3 = A \rightarrow B$$


 $\neg A$ B


$$R_4 = A \leftrightarrow B$$


 $A \wedge B$ $\neg A \wedge \neg B$

$$R_5 = \neg \neg A$$

A

$$R_6 = \neg (A \wedge B)$$


 $\neg A$ $\neg B$

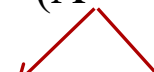
$$R_7 = \neg (A \vee B)$$

$\neg A$
 $\neg B$

$$R_8 = \neg (A \rightarrow B)$$

A
 $\neg B$

$$R_9 = \neg (A \leftrightarrow B)$$


 $\neg A \wedge B$ $A \wedge \neg B$

Conceitos básicos em Tableau Semântico

- Aplique preferencialmente as regras R_1 , R_5 , R_7 e R_8
 - Ramo Fechado: Um ramo em um tableau é fechado se ele contém uma fórmula A e sua negação $\neg A$.
 - Ramo Aberto: Um ramo em um tableau é aberto se ele não contém uma fórmula A e sua negação $\neg A$.
 - Tableau Fechado: Um tableau é fechado quando todos os seus ramos são fechados.
 - Tableau Aberto: Um tableau é aberto se ele possui algum ramo aberto.
-

Consequência Lógica em Tableau Semântico

- Prova e teorema em tableaux semânticos: Seja H uma fórmula. Uma prova de H é um tableau fechado iniciado com a fórmula $\neg H$.
- Considere a fórmula:

$$H = \neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg \neg P)$$

- O primeiro passo para obter uma prova da fórmula H utilizando tableau semântico é negar H:

$$\neg H = \neg(\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg \neg P))$$

- Posteriormente, aplicar as regras do tableau semântico, dando preferência em aplicar as regras: R_1 , R_5 , R_7 e R_8 .
 - Neste caso, obtém-se todos os ramos fechados, o que constitui uma prova de H, ou seja, H é uma tautologia.
-

Consequência Lógica em Tableau Semântico

$$H = \neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg \neg P)$$

1. $\neg H = \neg(\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg \neg P))$ **1º Passo (negar a fórmula)**

2. $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg \neg P$ **Regra: R5, linha1**

3. $P \rightarrow Q$ **RegraR1, linha2**

4. $\neg(P \leftrightarrow Q)$ **RegraR1, linha2**

5. $\neg \neg P$ **RegraR1, linha2**

6. P **RegraR5, linha5**

7. $\neg P$ **RegraR3, linha3**

Fechado

Q

8. $\neg P \wedge Q$ $P \wedge \neg Q$ **RegraR9, linha4**

9. $\neg P$ P **RegraR1, linha8**

10. Q $\neg Q$ **RegraR1, linha8**

Fechado

Fechado

Todos os ramos do Tableau estão fechados.
Desta forma obtivemos uma prova de H.
Portanto, H é válida ou é uma tautologia!

Consequência Lógica em Tableau Semântico

- Considere agora a fórmula:

$$G = ((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$$

- O primeiro passo para obter uma prova da fórmula G utilizando tableau semântico é negar G :

$$\neg G = \neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$$

- Posteriormente, aplicar as regras do tableau semântico, dando preferência em aplicar as regras: R_1 , R_5 , R_7 e R_8 .
 - Neste caso, não é possível obter um tableau fechado, iniciando com $\neg G$, portanto, não obtém-se uma prova de G , ou seja G não é uma tautologia.
-

Consequência Lógica em Tableau Semântico

$$G = (P \leftrightarrow Q) \vee \neg P$$

1. $\neg G = \neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$ **1º Passo (negar a fórmula)**

2. $\neg(P \leftrightarrow Q)$ **Regra R7, linha1**

3. $\neg \neg P$ **Regra R7, linha2**

4. **P** **Regra R5, linha3**

5. $\neg P \wedge Q$ $P \wedge \neg Q$ **Regra R9, linha2**

6. $\neg P$ P **Regra R1, linha5**

7. Q $\neg Q$ **Regra R1, linha5**

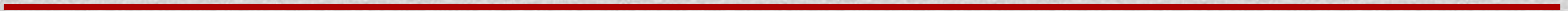
Fechado

Aberto

Não conseguimos obter todos os ramos do Tableau fechados.
Desta forma não obtivemos uma prova de H.
Portanto, H NÃO é válida ou NÃO é uma tautologia!

Teorema da Completude

- Se H é uma tautologia, então existe uma prova de H utilizando tableau semântico.



Consequência Lógica em Tableau Semântico

- Considere as seguintes sentenças:
 - Guga é determinado.
 - Guga é inteligente.
 - Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
 - Guga é um atleta se é um amante do tênis.
 - Guga é um amante do tênis se é inteligente.
- A afirmação:
 - Guga não é um perdedor.
- É uma consequência lógica das sentenças anteriores?
- Considere as seguintes correspondências:

P = Guga é determinado.

Q = Guga é inteligente

R = Guga é atleta.

P1 = Guga é um perdedor.

Q1 = Guga é amante do tênis.

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P1) \wedge (Q1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q1)) \rightarrow \neg P1$$

Desenvolvimento Tableau Semântico

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P1) \wedge (Q1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q1)) \rightarrow \neg P1$$

$$1. \neg H = \neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P1) \wedge (Q1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q1)) \rightarrow \neg P1) \text{ (negar H)}$$

$$2. P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P1) \wedge (Q1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q1) \quad \text{Regra: R8, linha1}$$

$$3. \neg \neg P1 \quad \text{RegraR8, linha1}$$

$$4. P1 \quad \text{RegraR5, linha3}$$

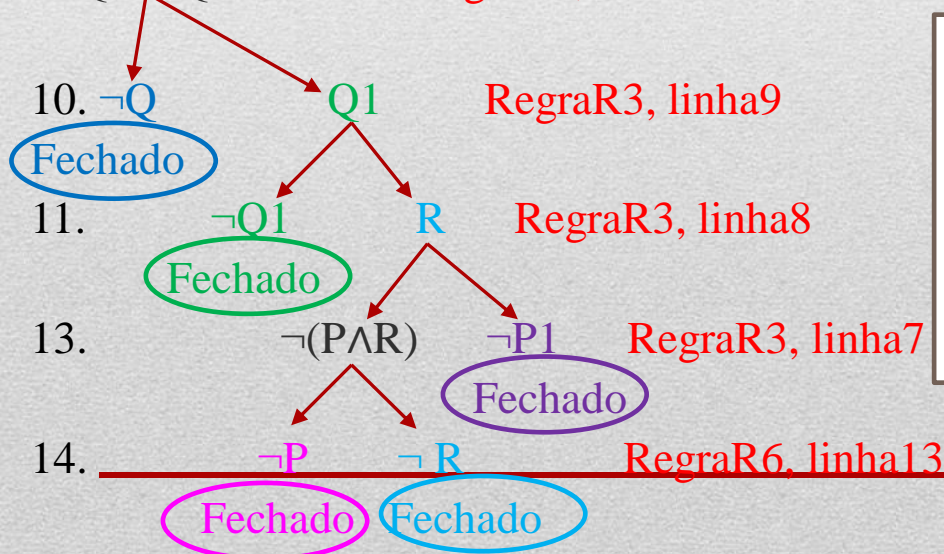
$$5. P \quad \text{RegraR1, linha2}$$

$$6. Q \quad \text{RegraR1, linha2}$$

$$7. (P \wedge R) \rightarrow \neg P1 \quad \text{RegraR1, linha2}$$

$$8. Q1 \rightarrow R \quad \text{RegraR1, linha2}$$

$$9. Q \rightarrow Q1 \quad \text{RegraR1, linha2}$$



Todos os ramos do Tableau estão fechados. Desta forma obtivemos uma prova de H. Portanto, H é válida ou é uma tautologia! E também comprovamos que a consequência lógica ocorre, ou seja, Guga não é um perdedor.

Consequência Lógica em Tableau Semântico

- Outro exemplo:
- Considere as sentenças:
 - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
 - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato
- A sentença:
 - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece.
- É uma consequência lógica dos argumentos anteriores?

Para representar as sentenças na lógica proposicional, considere as seguintes correspondências:

P = Guga joga uma partida de tênis.

Q = A torcida comparece.

R = O ingresso é barato.

Consequência Lógica em Tableau Semântico

- Outro exemplo:
- Considere as sentenças:
 - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
 - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato
- A sentença:
 - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece.
- É uma consequência lógica dos argumentos anteriores?

Para representar as sentenças na lógica proposicional, considere as seguintes correspondências:

P = Guga joga uma partida de tênis.

Q = A torcida comparece.

R = O ingresso é barato.

Consequência Lógica em Tableau Semântico

Demonstre, utilizando tableau semântico, se os argumentos a seguir são válidos, ou seja, se a consequência lógica ocorre.

- Se professor William dá uma palestra, seus alunos comparecerão se o ingresso for barato e não estiver chovendo. Se professor Marcelo dá uma palestra, o ingresso será barato. **Portanto**, se professor Marcelo dá uma palestra, seus alunos comparecerão ou estará chovendo.
-