Relações Semânticas entre os Conectivos

Conectivos Completos

- Um conjunto de conectivos proposicionais ϕ é completo se e somente se, é possível expressar, equivalentemente, os conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ utilizando apenas os conectivos de ϕ.
- Este conceito é muito utilizado em ciência da computação e lógica, como por exemplo, para simplificar os conectivos empregados em um projeto de circuitos lógicos.
- **Exemplo:** Demonstre que $\phi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo.

Equivalências Clássicas ($H \Leftrightarrow G$)

IDENTIFICAÇÃO	FÓRMULA H	FÓRMULA G
Dupla Negativa	$\neg(\neg P)$	P
Propriedades de Identidade	$P \lor False$	P
	$P \land True$	P
Propriedades Complementares	$P \lor \neg P$	True
	$P \land \neg P$	False
Leis de Morgan	$\neg(P \land R)$	$\neg P \lor \neg R$
	$\neg(P \lor R)$	$\neg P \land \neg R$
Contraposição	$P \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg P$
Propriedades de Substituição	$P \rightarrow R$	$\neg P \lor R$
	$P \leftrightarrow R$	$(P \rightarrow R) \land (R \rightarrow P)$
Propriedades Comutativas	$P \lor R$	$R \lor P$
	$P \land R$	$R \land P$
Propriedades Associativas	$P \lor (R \lor S)$	$(P \lor R) \lor S$
	$P \land (R \land S)$	$(P \land R) \land S$
Propriedades Distributivas	$P \lor (R \land S)$	$(P \lor R) \land (P \lor S)$
	$P \land (R \lor S)$	$(P \land R) \lor (P \land S)$
Prova Condicional	$P \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(P \land R) \rightarrow S$

Demonstre que $\varphi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo.

- **Solução:**
  - dada uma fórmula *H*, do tipo $(\neg P)$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ ou $(P \leftrightarrow Q)$.
  - Podemos gerar uma fórmula *G*, equivalente a *H* e só contenha conectivos de ϕ.

- Para H = **$(\neg P)$** ou **$(P \vee Q)$**, temos **G = H**, pois os $\{\neg, \vee\} \in \phi$.

- Para H = **$(P \wedge Q)$**, temos G = **$\neg(\neg P \vee \neg Q)$**, pela aplicação da Lei de Morgan.

P	Q	¬P	¬Q	¬P ∨ ¬Q	P ∧ Q	¬(¬P ∨ ¬Q)	H ⇔ G
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T

Demonstre que $\varphi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo.

- Para H = **(P → Q)**, temos G = **(¬P ∨ Q)**, pela aplicação da propriedade de substituição do →.

- Para H = **(P ↔ Q)**, temos G = **¬(¬(¬P ∨ Q) ∨ ¬(¬Q ∨ P))**, pela sequência explicada abaixo:
  - **(P ↔ Q)** ⇔ (P → Q) ∧ (Q → P), pela aplicação da propriedade de substituição do ↔
  - ⇔ (¬P ∨ Q) ∧ (¬Q ∨ P), pela aplicação da propriedade de substituição do →
  - ⇔ **¬(¬(¬P ∨ Q) ∨ ¬(¬Q ∨ P))**, pela aplicação da Lei de Morgan.

- Logo, $\phi = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo.

Exercício de Fixação

- Encontre a fórmula G, equivalente a H, que só contenha conectivos de ϕ, onde $\phi = \{\neg, \vee\}$

$$H = (P \wedge Q) \vee (R \rightarrow S)$$

Utilizando as equivalências clássicas, temos que:

$\neg(P \wedge Q)$ equivale a $\neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q)$ equivale a $\neg P \wedge \neg Q$

Por meio destas equivalências podemos identificar que

$(P \wedge Q)$ equivale a $\neg(\neg P \vee \neg Q)$

$(R \rightarrow S)$ equivale a $(\neg R \vee S)$

Portanto, utilizando as equivalências identificadas, temos que:4

$G = \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \vee S)$

Formas Normais

- As fórmulas da lógica proposicional podem ser expressas utilizando vários conjuntos de conectivos completos. Além disso, também podemos representá-las através de estruturas pré-definidas, denominadas formas normais.
- **Forma Normal Disjuntiva (FND):** se a fórmula é uma disjunção de conjunções de literais (símbolos proposicionais ou suas negações).
- **Forma Normal Conjuntiva (FNC):** se a fórmula é uma conjunção de disjunções de literais.
- **Exemplos:**
  - $H = (\neg P \land Q) \lor (\neg R \land \neg Q \land P) \lor (P \land S)$ **FND**
  - $G = (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q \lor P) \land (P \lor S)$ **FNC**

OBTENÇÃO DAS FORMAS NORMAIS

- Considere a fórmula: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$.
  - Podemos escrever ***H1*** e ***H2***, de modo que:
    - ***H1*** seja *H* na **FND** e
    - ***H2*** seja *H* na **FNC**
  - **1º Passo:** Construção da tabela-verdade de *H*.

P	Q	R	H	Linha
F	F	F	F	1
F	F	T	T	2
F	T	F	F	3
F	T	T	T	4
T	F	F	F	5
T	F	T	F	6
T	T	F	F	7
T	T	T	T	8

OBTENÇÃO DA FND

- **2º Passo:** Geração de *H1* (**FND**):
- Extrair as linhas da tabela-verdade onde I[H] = T.
- Para cada linha *N*, gerar uma fórmula Y_N, formada apenas pela conjunção de literais, de modo que $I[Y_N] = T$, como apresentado abaixo:
- **2ª linha:** I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = T ⇒ Y2 = (¬P ∧ ¬Q ∧ R).
- **4ª linha:** I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = T ⇒ Y2 = (¬P ∧ Q ∧ R).
- **8ª linha:** I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = T ⇒ Y2 = (P ∧ Q ∧ R).
- Gerar *H1* a partir da disjunção das fórmulas geradas no item anterior:
  - ***H1* = (¬*P* ∧ ¬*Q* ∧ *R*) ∨ (¬*P* ∧ *Q* ∧ *R*) ∨ (*P* ∧ *Q* ∧ *R*)**

OBTENÇÃO DA FND (PASSO A PASSO)

- Considere a fórmula: $H = (P \rightarrow Q) \land R$.
  - Obter a FND (∧ interno e ∨ externo):
    - 1º - Identificar as linhas onde I[H] = T
    - 2º - Definir as subfórmulas originadas destas linhas com o conectivo ∧ (lembrar que se o símbolo for F, o símbolo será negado)
    - 3º - Unir as subfórmulas com o conectivo ∨

P	Q	R	H	Subfórmula
F	F	F	F	
F	F	T	T	$\neg P \land \neg Q \land R$
F	T	F	F	
F	T	T	T	$\neg P \land Q \land R$
T	F	F	F	
T	F	T	F	
T	T	F	F	
T	T	T	T	$P \land Q \land R$

$$H1 = (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R)$$

OBTENÇÃO DA FNC

- **3º Passo:** Geração de *H2* (**FNC**).
- Extrair as linhas da tabela-verdade onde I[H] = F.
- Para cada linha *N*, gerar uma fórmula X_N, formada apenas pela disjunção de literais, de modo que I[X_N] = T, como apresentado abaixo:
- **1ª linha:** I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = F ⇒ X1 = (P ∨ Q ∨ R).
- **3ª linha:** I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = F ⇒ X3 = (P ∨ ¬Q ∨ R).
- **5ª linha:** I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = F ⇒ X5 = (¬P ∨ Q ∨ R).
- **6ª linha:** I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T ⇒ X6 = (¬P ∨ Q ∨ ¬R).
- **7ª linha:** I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = F ⇒ X7 = (¬P ∨ ¬Q ∨ R).
- Gerar *H2* a partir da conjunção das fórmulas geradas no item anterior.
  - ***H2 = (P ∨ Q ∨ R) ∧ (P ∨ ¬Q ∨ R) ∧ (¬P ∨ Q ∨ R) ∧ (¬P ∨ Q ∨ ¬R) ∧ (¬P ∨ ¬Q ∨ R)***

OBTENÇÃO DA FNC (PASSO A PASSO)

- Considere a fórmula: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$.
  - Obter a FNC:
    - 1º - Identificar as linhas onde I[H] = F (∨ interno e ∧ externo)
    - 2º - Definir as subfórmulas originadas destas linhas com o conectivo ∨ (lembrar que se o símbolo for T, o símbolo será negado)
    - 3º - Unir as subfórmulas com o conectivo ∧

P	Q	R	H	Subfórmula
F	F	F	F	$P \vee Q \vee R$
F	F	T	T	
F	T	F	F	$P \vee \neg Q \vee R$
F	T	T	T	
T	F	F	F	$\neg P \vee Q \vee R$
T	F	T	F	$\neg P \vee Q \vee \neg R$
T	T	F	F	$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	T	T	T	

$$H2 = (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

Exercício de Fixação

1. Dada a fórmula Dada a fórmula

   $H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow (\neg R \leftrightarrow \neg P)$.

   Construa a fórmula G, equivalente a H, utilizando apenas os conectivos do conjunto $\phi = \{\neg, \lor\}$.

2. Dada a fórmula $H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \lor \neg P)$,

   gere as fórmulas equivalentes na FND e FNC.

Exercício de Fixação - Resposta

1. Dada a fórmula $H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow (\neg R \leftrightarrow \neg P)$

   Construa a fórmula G, equivalente a H, utilizando apenas os conectivos do conjunto $\phi = \{\neg, \lor\}$.

   Para este desenvolvimento serão utilizadas as equivalências Clássicas.

$H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow (\neg R \leftrightarrow \neg P)$

$(\neg R \leftrightarrow \neg P)$ equivale a $((\neg R \rightarrow \neg P) \land (\neg P \rightarrow \neg R))$

$((P \rightarrow Q)$ equivale a $(\neg P \lor Q)$, então:

$= ((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow ((\neg R \rightarrow \neg P) \land (\neg P \rightarrow \neg R))$

$(\neg R \rightarrow \neg P)$ equivale a $(\neg\neg R \lor \neg P)$

$(\neg P \rightarrow \neg R)$ equivale a $(\neg\neg P \lor \neg R)$, então:

$= ((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow ((\neg\neg R \lor \neg P) \land (\neg\neg P \lor \neg R))$

$\neg\neg R$ equivale a R

$\neg\neg P$ equivale a P, então:

$= ((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow ((R \lor \neg P) \land (P \lor \neg R))$

$((R \lor \neg P) \land (P \lor \neg R))$ equivale a $\neg(\neg(R \lor \neg P) \lor \neg(P \lor \neg R))$, então

$= ((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R)) \rightarrow \neg(\neg(R \lor \neg P) \lor \neg(P \lor \neg R))$

$((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R))$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg Q \lor R))$, então:

$= \neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg Q \lor R)) \lor \neg(\neg(R \lor \neg P) \lor \neg(P \lor \neg R))$

Esta fórmula só possui os conectivos do conjunto $\phi = \{\neg, \lor\}$, portanto:

$G = \neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg Q \lor R)) \lor \neg(\neg(R \lor \neg P) \lor \neg(P \lor \neg R))$

Exercício de Fixação - Resposta

2. Dada a fórmula $H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \lor \neg P)$, gere as fórmulas equivalentes na FND e FNC.

1º passo: gerar a tabela verdade:

P	Q	R	¬P	¬Q	¬R	P → Q	¬Q ↔ R	((P → Q) ∧ (¬Q ↔ R))	(¬R ∨ ¬P)	H	Linha
F	F	F	T	T	T	T	F	F	T	F	1
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	2
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T	3
F	T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	4
T	F	F	F	T	T	F	F	F	T	F	5
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	T	6
T	T	F	F	F	T	T	T	T	T	T	7
T	T	T	F	F	F	T	F	F	F	T	8

Exercício de Fixação - Resposta

2º passo: verificar as saídas T e F:

P	Q	R	H	FND	FNC
F	F	F	F		$P \vee Q \vee R$
F	F	T	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	
F	T	F	T	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	
F	T	T	F		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
T	F	F	F		$\neg P \vee Q \vee R$
T	F	T	T	$P \wedge \neg Q \wedge R$	
T	T	F	T	$P \wedge Q \wedge \neg R$	
T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	

FND: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

FNC: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$