C 题 读书日购书计划的优化模型

摘要

本文研究读书日在五家网店购买书籍的最优购书策略问题，主要运用**混合整数线性规划模型**对各个问题进行求解。将购书计划转换为 0-1 变量，根据购书目标和金额的不同，建立相应的目标函数。利用**分段函数线性化的方法**，将每家网店的促销方式转换成线性约束条件。本文使用 **MATLAB** 软件提供的 **intlinprog** 进行求解。

针对问题一：第一阶段首先通过建立混合整数线性规划模型求解 250 元可购买书籍的最大数量。目标函数为购书数量的最大化，约束条件为每个类别的书籍数量限制、购买书籍总价限制。其中书籍总价需要考虑将运费和促销等条件转换为线性。使用 MATLAB 进行求解，可得 250 元**可购买书籍的最大数量为 9 本**。分析发现购买 9 本书籍可对应多种购书计划，因此我们进一步建立模型找出使购书总价最低的最优计划。第二阶段目标函数改为购书总价的最小化，约束条件增加购书数量为 9 本。对新的混合整数规划模型使用 MATLAB 进行求解，得到第一问的最优解：购买最多数量（9 本）书籍时，**最优购书计划为：在 S2 购买 A，B1，B2，D；在 S3 购买 F；在 S4 购买 C1+C2+C3，E**。**最低购书总价为 219.94 元**。

针对问题二（a）：我们假设两人在一起购书时将钱合并，并且共享书本不需要购买重复书籍，因此将问题转换为持有 500 元进行购书，寻找买齐所有书本最经济的策略。建立混合整数规划模型，目标函数为购书总价的最小化，约束中限制购书数量为书目类别总数（即 10 本）。使用 MATLAB 进行求解，得到该问题的最优解：**最优购书计划为：在 S2 购买 A，B1，B2，D；在 S3 购买 G，F；在 S4 购买 C1+C2+C3，E**。**最低购书总价为 260.296 元**，

针对问题二（b）：考虑到当多家网店的促销力度同时改变时，会使整体方案都发生较大变动，不利于进行快速反应。因此我们基于（a）中求出的最优方案，建立在单个网店促销力度变化的情况下的混合整数规划模型。0-1 决策变量指出是否放弃在其他网店购买的书籍而到该网店购买该书，从而减少购书总价。在此基本模型的基础上，以改变网店 S1 的促销为例，建立了具体的模型，并用 MATLAB 进行求解。当促销力度增加 11 元时，调整最优计划的方案为：**将 B2，G 和 F 调整到 S1 购买**，和原最优计划相比总价减少了 0.496 元。

最后，我们分析了本文模型的优缺点，并将模型进行现实的推广，提出了模型改进方向。

关键词：最优购书策略 整数规划 线性规划

一、 问题的重述

1.1 问题背景

随着我国网络购物消费的的迅猛发展，各类电商企业争相进入市场，网店数量不断增加，竞争也更加激烈。同类网店的数量增加，导致同一商品在不同店家往往有不同的价格。同时，促销作为最直接、最富吸引力的推销手段，在网店之间的竞争中发挥着越来越重要的作用。因此，不同店家采取了多种多样的网络促销策略，尤其是在购物节时，各种优惠政策更是令人眼花缭乱。

这虽然给顾客带来了更多的选择和优惠机会，但是也使顾客面临更加复杂的选择方案的确定。如何在不同的店家和促销方式下选择最优惠的方案以满足需求，成为顾客越来越关注的问题。

1.2 所需解决的问题

现有 5 家网店售卖工学、管理科学和理学三类书籍。任一网店购书不满 60 元需负担 5 元快递费。5 家网店的书目价格各有不同（具体价格表见附录一），也有不同的促销方式：

网店 S1 促销: 满 100 元减 10 元, 满 200 元减 25 元；

网店 S2 促销: 每满 100 元送全网读书日书券 15 元；

网店 S3 促销：全店书目打九二折，免运费；

网店 S4 促销：全店购书满 130 元，价格最低的一本书免费。

问题一：

现用 250 元钱购置三类书籍，最少要购买工学、管理科学和理学书各两本。制定一个最优购书计划，尽可能用完 250 元钱，买尽可能多的书籍。

问题二：

现有两人各有 250 元，计划一起购书，并共享购得的图书。

（a）如果所有促销方式不变，制定最优购书计划，用最经济的方式买下所有书目；

（b）如果促销力度比预期稍大，两人应如何做出快速反应？

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

问题一的求解目标可表示为：在满足一定条件的前提下，求出能够使得买到的书籍数量最大的购书方案。因此问题一为规划问题，目标为最大化购买书籍的数量。由于每家网店的每本书只有购买与不购买两个选项，因此我们引入 0-1 变量作为决策变量，考虑建立混合整数线性规划模型。

本题的难点在于约束条件的确定，约束条件可以分为两部分。

第一部分为书籍的约束。第一，工学、管理科学和理学类的书籍数量应满足最低限制要求。第二，由于书本不能重复，因此每一本书最多只能在 5 家网

店中的 1 家购买，并且当购买了书籍组合时，不能再单独购买其中任意一本。这两个约束可以通过限制书籍数量来实现。

第二部分为价格的约束，购买书籍的总价应不超过 250 元。但计算总价时需要考虑不满 60 元应多承担的 5 元运费，以及各个网店进行促销而优惠的价格。网店 S3 为折扣促销，可以直接用书价表示。其他网店的优惠价格及运费都需要根据不同的价格区间确定，可表示为分段函数。本题采用线性规划模型求解，因此通过引入罚因子 M 和 0-1 变量将分段函数表示成线性约束条件。

在列出所有约束条件后，利用 MATLAB 对混合整数线性规划模型进行求解，可以得到全局最优的解析解。

2.2 问题二（a）的分析

两人各有 250 元，一起购书并共享购得的图书。该问题可转换为用 500 元进行购书。由于所有书目的最高总价之和不超过 500 元，因此一定能够买齐所有书目，则此问题的目标可转换为：在满足一定条件的前提下，求出能够使买到全部书籍所花费价钱最低的购书方案。因此，目标函数为极小化购书总价，并且书籍数量的约束改为每一书目都需要购买。由于促销方式不变，因此价格约束不变。利用 MATLAB 进行求解。

2.3 问题二（b）的分析

当现有促销力度加大时，可能出现比原最优方案总价更低的方案，因此需要一定的办法进行及时判断和调整。为了进行更快速反应，可以单独研究一家网店促销力度发生变化时的计划调整情况：当某一网店促销力度加大时，是否放弃在其他网店购买的书籍而到该网店购买该书，使得购书总价降低，从而找到更优的购书计划。针对这一目标，可以构造 0-1 变量来表示是否进行调整，建立新的线性规划模型。目标函数为极大化新方案与原方案的价格之差，利用 MATLAB 进行求解。0-1 变量的求解结果可以提供快速反应的方案：结果为 1 时可以在促销力度加大的网店购买原方案对应的书籍。

三、 模型假设

为了使得问题更加易于理解，在购买书籍和计算促销价格时，我们作出以下合理假设：

（1）基于生活实际，同一本书只能购买一本；

（2）在判断是否负担 5 元快递费时，购书总价以促销前的原价格为参照；

（3）网店 S2 的全网读书日书券可以在其他任一网店购买书籍时使用，一家网店可以使用多张，并且在运费和优惠结算完成后才进行抵扣；

（4）网店 S4 若购买了书籍套装（B_1+B_2，$C_1+C_2+C_3$），计算促销时视为一本书进行价格的比较并折扣。

（5）假设问题二中两人买书时将各自拥有的钱进行合并。

四、 符号说明

本文建立线性规划模型进行求解，现对建模和求解过程中所使用的符号进行说明。

4.1 决策变量符号说明

表 1 决策变量符号说明

符号	说明
x_{ij}	0-1 变量，$x_{ij}=1$表示购买第 j 家网店的第 i 本书；否则，$x_{ij}=0$。
δ_{j1}	0-1 变量，$\delta_{j1}=1$表示在第 j 家网店购买书籍的总价在$(0,60)$之间。
δ_{j2}	0-1 变量，$\delta_{j2}=1$表示在第 j 家网店购买书籍的总价≥ 60。
δ_{j3}	0-1 变量，$\delta_{j3}=1$表示在第 j 家网店购买书籍的总价为 0。
y_1,y_2,y_3	0-1 变量，取 1 时分别表示在第 1 家网店购买书籍的总价<100，在$[100,200)$之间，≥ 200
y_4,y_5,y_6,y_7	0-1 变量，取 1 时分别表示在第 2 家网店购买书籍的总价<100，在$[100,200)$之间，在$[200,300)$之间，≥ 300
y_8	0-1 变量，取 1 时分别表示在第 4 家网店购买书籍的总价<100
p_m	在网店 S4 所购买书籍中的最低价格
ω_3	第 4 家网店的优惠价格
b_{i}	是否放弃原最优方案的第 i 本书而购买加大促销店铺中的该本书
s_i	第 j 家店放弃购买的书籍的总价
d_i	用于将L_j（见 4.2）线性化而引入的 0-1 变量

x_{ij}对应的具体书目和网店见附录二。

4.2 参数和其它变量符号说明

表 2 参数和其它变量符号说明

符号	说明
$\boldsymbol{x_j}$	在第 j 家网店的购书情况x_{ij}的列向量
p_{ij}	表示第 j 家网店对应第 i 本书的价格
$\boldsymbol{p_j}$	第 j 家网店所有书价的列向量
t_j	在第 j 家网店应担负的运费
ω_1	第 1 家网店的优惠价格
ω_2	第 2 家网店的优惠价格
P	问题二中变化方案与原最优方案之间的总价格差

c_i	第 i 本书在原最优方案中的对应价格
Δp_i	第 i 本书在变化方案与原最优方案两家网店中价格差
A	问题二原最优方案中购买书籍的集合
B_j	加大促销力度的网店所有书籍的集合
L_j	因放弃购买第 j 家网店书籍而丧失的优惠价格

$\boldsymbol{x_j}$表示在第 j 家书店的总体购书情况x_{ij}的列向量，可表示为：

$$\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\\x_{41}\\x_{51}\\x_{61}\\x_{71}\\x_{81}\\x_{91}\\x_{101}\end{pmatrix},\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\\x_{42}\\x_{52}\\x_{62}\\x_{c2}\\x_{72}\\x_{82}\\x_{92}\\x_{102}\end{pmatrix},\boldsymbol{x_3}=\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\\x_{43}\\x_{53}\\x_{63}\\x_{c3}\\x_{73}\\x_{83}\\x_{93}\\x_{103}\end{pmatrix},\boldsymbol{x_4}=\begin{pmatrix}x_{14}\\x_{24}\\x_{b4}\\x_{34}\\x_{44}\\x_{54}\\x_{64}\\x_{c4}\\x_{74}\\x_{84}\\x_{94}\\x_{104}\end{pmatrix},\boldsymbol{x_5}=\begin{pmatrix}x_{15}\\x_{25}\\x_{b5}\\x_{35}\\x_{45}\\x_{55}\\x_{65}\\x_{75}\\x_{85}\\x_{95}\\x_{105}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p_j}$表示第 j 家书店所有书价的列向量，则在第 j 家店购买的书目的总价格可表示为$\boldsymbol{p_j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x_j}$。$\boldsymbol{p_j}$具体值为：

$$\boldsymbol{p_1}=\begin{pmatrix}19.5\\22\\48.5\\36.1\\32.5\\33.6\\40\\25\\55\\30\end{pmatrix},\boldsymbol{p_2}=\begin{pmatrix}19.5\\22.5\\51\\39\\36\\33\\100\\38.8\\20\\55.5\\32.5\end{pmatrix},\boldsymbol{p_3}=\begin{pmatrix}20\\21.3\\49.3\\35.8\\34\\32\\99.9\\42\\19\\54\\29.5\end{pmatrix},\boldsymbol{p_4}=\begin{pmatrix}21\\20\\40\\50\\35.4\\35.4\\35\\102\\43.5\\22\\56\\31\end{pmatrix},\boldsymbol{p_5}=\begin{pmatrix}19\\21.5\\40\\48.9\\38.2\\35.5\\34\\46\\23\\52\\33\end{pmatrix}$$

五、 模型的建立与求解

5.1 分段函数线性化方法

各网店的快递费、促销价格都根据价格的不同而变化，需要用分段函数表示。由于本文采用线性规划求解，因此需要将分段函数转换为线性约束。本文

将通过引入罚因子 M 以及 0-1 变量将分段函数线性化，本小节具体说明转换方法。

5.1.1 分段常函数的线性化

使用 0-1 变量将一个分段常函数转换为线性约束。假设分段函数如下：

$$\omega=\begin{cases}a, & x_1\le x<x_2\\ b, & x_2\le x<x_3\\ c, & x\ge x_3\end{cases}$$

使用三个 0-1 变量和罚因子 M 可以将这个约束转换为普通的线性约束。其 y_1,y_2,y_3是 0-1 变量，当y_1，y_2，y_3各取 1 时，分别表示x正位于$x_1\le x<x_2$，$x_2\le x<x_3$，$x\ge x_3$三个阶段。M 为一个足够大的正数。转换成线性约束表示如下：

$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=1\\ \omega=ay_1+by_2+cy_3\\ x<x_2y_1+x_3y_2+My_3\\ x\ge x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\\ y_1,y_2,y_3\in\{0,1\}\end{cases}\tag{1}$$

根据$y_1+y_2+y_3=1$，结果共有三种情况：

$\begin{cases}y_1=1,y_2=0,y_3=0\\ y_1=0,y_2=1,y_3=0\\ y_1=0,y_2=0,y_3=1\end{cases}$，对应$\omega$的取值为$\begin{cases}\omega=a, & \begin{cases}x<x_2\\ x\ge x_1\end{cases}\\ \omega=b, & \begin{cases}x<x_3\\ x\ge x_2\end{cases}\\ \omega=c, & \begin{cases}x<M\\ x\ge x_3\end{cases}\end{cases}$，与原分段函数一致。因此，我们可以将一个分段常函数转换为如不等式组（1）所示的线性约束。

可以验证，当分段数量等于 2 或大于 3 时，此转换方式同样适用。

5.1.2 分段线性函数的线性化

当分段函数中含有变量时，无法使用（1）中的方法转换，因为此时转换后的约束条件会有两个决策变量的乘积，结果仍为非线性的。

下面介绍当分段数量为两段时，分段函数中含有关于决策变量的线性函数时的转换方法。假设分段函数如下：

$$\omega=\begin{cases}a, & x\le m\\ b, & x>m\end{cases}$$

其中 a，b 为变量，m 为任一常数。同样引入一个 0-1 变量δ和足够大的正数 M 来实现该分段函数的线性化。

首先令$x>m\Leftrightarrow\delta=1$，转换成线性约束表示如下：

$$\begin{cases}x\ge m+0.001-M(1-\delta)\\ x\le m+M\delta\\ \delta\in\{0,1\}\end{cases}\tag{2}$$

接着可以用δ的取值表示ω的取值：$\delta=1\Rightarrow\omega=b$；$\delta=0\Rightarrow\omega=a$。线性约束表示如下：

$$\begin{cases} b - M(1-\delta) \le \omega \le b + M(1-\delta) \\ a - M\delta \le \omega \le a + M\delta \\ \delta \in \{0,1\} \end{cases} \tag{3}$$

因此，我们可以将一个分段线性函数转换为如不等式组（2）、（3）所示的线性约束。

5.2 问题一的建模和求解

小张的购书计划为在尽可能把 250 元钱花掉的条件下，买到尽可能多的书籍。根据这两个要求，我们将问题一分为两个阶段。第一阶段首先求出在所花费金额小于 250 元的限制下，能够购买书籍的最大数量。我们发现，求出的结果对应了多种购书方案，因此需要进一步取所有方案中所花费金额最小的方案作为最优的计划。第二阶段求出在购买书籍数为最大数量时，所花费的最小金额。阶段二求得的方案即为在满足要求的最优购书方案。

5.2.1 阶段一：求解购买书籍的最大数量

1. 阶段一的建模

目标函数

目标函数为书籍数量的最大化。由于是否购买书籍表示为 0-1 变量，因此购买的书籍总数可表示为是否购买书籍的所有 0-1 变量之和。同时考虑到变量中有书籍套装（B_1+B_2，C_1+C_2+C_3），因此书籍套装的书籍数量应乘上相应的系数。目标函数可表示如下：

$$\max \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} + 2(x_{b4} + x_{b5}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \tag{4}$$

约束条件

（1）数量约束：

问题要求最少要购买工学、管理科学和理学书各两本，因此每个类别书本数量应大于或等于 2。

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5}(x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}) + 2(x_{b4} + x_{b5}) \ge 2 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} + x_{7j}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \ge 2 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{8j} + x_{9j} + x_{10j}) \ge 2 \end{cases} \tag{5}$$

（2）书籍组合约束：

由于书籍不能重复，因此书籍在所有网店中最多只能购买一次。同时，有网店可以购买组合书籍（B_1+B_2，C_1+C_2+C_3），因此当购买了书籍套装时，应保证不再购买单独其对应的所有书籍；反之，当单独购买了其中的书籍时，应保证不购买书籍套装。该约束可表达如下：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1,\ \ i = 1,2,\ldots,10 \\ x_{b4} + x_{b5} \le 1 \\ x_{c2} + x_{c3} + x_{c4} \le 1 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{1j} + x_{2j}) + 2(x_{b4} + x_{b5}) \le 2 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \le 3 \end{cases} \tag{6}$$

（3）运费约束：

由于目前在任一网店购书不满 60 元时需要承担 5 元快递费，因此每家店的快递费用可表示成一个分段函数。由于网店 S3 免运费，因此可以不计算。

$$t_j=\begin{cases}0 & p_j^{\mathrm{T}}x_j\le 0\\ 5 & 0<p_j^{\mathrm{T}}x_j\le 59.999,\qquad j=1,2,4,5\\ 0 & p_j^{\mathrm{T}}x_j>59.999\end{cases}$$

根据 5.1.1 中分段常函数的线性化方法，将此分段函数转换为线性约束：

$$\begin{cases}\delta_{j3}+\delta_{j1}+\delta_{j2}=1\\ p_j^{\mathrm{T}}x_j\le 59.999\delta_{j1}+M\delta_{j2}\\ p_j^{\mathrm{T}}x_j>-0.001\delta_{j3}+59.999\delta_{j2}\\ j=1,2,4,5\end{cases}\tag{7}$$

此时t_j可表示为$t_j=5\delta_{j1}$。其中，$\delta_{j3},\delta_{j1},\delta_{j2}$为 0-1 变量，$\delta_{j3}=1$表示$p_j^{\mathrm{T}}x_j=0$，即没有在该网店购买书籍，不需要运费；$\delta_{j1}=1$表示$0<p_j^{\mathrm{T}}x_j<60$，即总价不满 60 元，需要 5 元运费；$\delta_{j2}=1$表示$p_j^{\mathrm{T}}x_j\ge 0$，即总价满 60 元，可免运费。

（4）促销约束：

网店 S1，S2，S3，S4 都采取了不同的促销方式，因此在计算总价时应该分别考虑在每一家网店购买书籍时的折扣费用。

对于网店 S1，根据其满减的促销方式，优惠价格可表示为：

$$\omega_1=\begin{cases}0 & p_1^{\mathrm{T}}x_1<100\\ 10 & 100\le p_1^{\mathrm{T}}x_1\le 200\\ 25 & p_1^{\mathrm{T}}x_1>100\end{cases}$$

根据 5.1.1 中分段常函数的线性化方法，将此分段函数转换为线性约束：

$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=1\\ p_1^{\mathrm{T}}x_1\le 100y_1+200y_2+My_3+0.001\\ p_1^{\mathrm{T}}x_1\ge 100y_2+200y_3\end{cases}\tag{8}$$
$$y_1,y_2,y_3\in\{0,1\}$$

此时ω_1可表示为$10y_2+25y_3$。

对于网店 S2，其每满 100 元赠送全网读书日书券 15 元，而全网读书日书券可在其它网店买书时直接抵扣，因此可直接视为优惠价格。计算可得购买网店 S2 全部书籍的最高总价为 347.8 元，因此网店 S2 的优惠价格可以简化为以下的分段函数：

$$\omega_2=\begin{cases}0 & p_2^{\mathrm{T}}x_2<100\\ 15 & 100\le p_2^{\mathrm{T}}x_2<200\\ 30 & 200\le p_2^{\mathrm{T}}x_2<300\\ 45 & p_2^{\mathrm{T}}x_2\ge 300\end{cases}$$

根据 5.1.1 中分段常函数的线性化方法，将此分段函数转换为线性约束：

$$\begin{cases} y_4+y_5+y_6+y_7=1 \\ p_2^{\mathrm{T}}x_2 \le 100y_4+200y_5+300y_6+My_7+0.001 \\ p_2^{\mathrm{T}}x_2 \ge 100y_5+200y_6+300y_7 \end{cases} \quad (9)$$

$$y_4,y_5,y_6,y_7 \in \{0,1\}$$

此时ω_2可表示为$15y_5+30y_6+45y_7$。

对于网店 S3，直接享受九二折优惠，因此直接取书籍价格的 92%即可。

对于网店 S4，其满 130 元可减去购买的书籍中的最低书价，因此网店 S4 的优惠价格可以简化为以下的分段函数：

$$\omega_3=\begin{cases} 0 & p_3^{\mathrm{T}}x_3<130 \\ p_m & p_1^{\mathrm{T}}x_1 \ge 130 \end{cases}$$

其中p_m表示在网店 S4 所购买书籍中的最低价格，是一个决策变量。因此应利用 5.1.2 中分段线性函数的线性化方法，将此分段函数转换为线性约束：

$$\begin{cases} 130 \ge p_4^{\mathrm{T}}x_4+0.01-M(1-y_8) \\ 130 \le p_4^{\mathrm{T}}x_4+My_8 \\ \omega_3 \ge -M(1-y_8) \\ \omega_3 \le M(1-y_8) \\ \omega_3 \ge p_m-My_8 \\ \omega_3 \le p_m+My_8 \end{cases} \quad (10)$$

$$y_8 \in \{0,1\}$$

当不在网店 S4 购书时，p_m为 0；在网店购书时，p_m为购买书籍中的最低价格，应小于或等于所有购买书籍的书价。将其转换为线性约束可表示为：

$$\begin{cases} p_m \ge 0 \\ p_m \le M\sum x_{i4} \\ p_m \le p_{i4}x_{i4}+0.5M(1-x_{i4}) \ \ i=1,2,\ldots,10,b,c \end{cases} \quad (11)$$

（5）总价约束：

在计算了优惠价格和运费后，最终购书的总价应不超过 250 元。

$$p_1^{\mathrm{T}}x_1-(10y_2+25y_3)+p_2^{\mathrm{T}}x_2-(15y_5+30y_6+45y_7)+0.92p_3^{\mathrm{T}}x_3+ p_4^{\mathrm{T}}x_4-\omega_3+p_5^{\mathrm{T}}x_5+5(\delta_{11}+\delta_{21}+\delta_{41}+\delta_{51}) \le 250 \quad (12)$$

2. 阶段一的求解

（1）MATLAB 求解混合整数线性规划说明

利用 MATLAB 软件求解混合整数线性规划求解器（intlinprog）求问题的最小值，标准形式如下（变量 x 需为整数）：

$$min f^T x$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(\mathrm{intcon})\ \mathrm{are\ integers}} \\ \boldsymbol{A\cdot x \le b} \\ \boldsymbol{Aeq\cdot x = beq} \\ \boldsymbol{lb \le x \le ub.} \end{cases}$$

例如，利用 intlinprog 求解 ：

$$\min(-3x_1-2x_2-x_3)$$

$$\text{subject to} \begin{cases} x_3 \text{ binary} \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1+x_2+x_3 \le 7 \\ 4x_1+2x_2+x_3=12 \end{cases}$$

Step1：编写目标函数向量和由整数变量组成的向量。

```
f = [-3;-2;-1];
intcon = 3;
```

Step2：通过将“大于”不等式乘以 -1，将所有不等式转换为 $Ax \le b$的形式。

```
A = [1,1,1];
b = 7;
```

Step3：编写线性等式约束。

```
Aeq = [4,2,1];
beq = 12;
```

Step4：编写边界约束。

```
lb = zeros(3,1);
ub = [Inf;Inf;1]; % Enforces x(3) is binary
```

Step5：调用 intlinprog。

```
x = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

得出结论：

```
LP:                Optimal objective value is -12.000000.

Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is
within a gap tolerance of the optimal value,
options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the defaultvalue). The intcon
variables are integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-
05 (the default value).
x = 3×1

        0
   5.5000
   1.0000
```

（2）模型求解

将目标函数表达式（4）和线性约束（5）—（12）进行汇总，可得阶段一完整的线性规划模型如下：

$$\max \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} + 2(x_{b4} + x_{b5}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4})$$

数量约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5}(x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}) + 2(x_{b4} + x_{b5}) \ge 2 \\ \sum_{j=1}^{5}\left(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} + x_{7j}\right) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \ge 2 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{8j} + x_{9j} + x_{10j} \ge 2 \end{cases}$$

书籍组合约束：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1, \quad i = 1,2,\dots,10 \\ x_{b4} + x_{b5} \le 1 \\ x_{c2} + x_{c3} + x_{c4} \le 1 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{1j} + x_{2j}) + 2(x_{b4} + x_{b5}) \le 2 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \le 3\end{cases}$$

运费约束：

$$\begin{cases}\delta_{j3} + \delta_{j1} + \delta_{j2} = 1 \\ p_j^{\mathrm{T}} x_j \le 59.999\delta_{j1} + M\delta_{j2} \\ p_j^{\mathrm{T}} x_j \ge -0.001\delta_{j3} + 59.999\delta_{j2} + 0.0001 \\ j = 1,2,4,5\end{cases}$$

促销约束：

$$\text{S1：}\begin{cases}y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ p_1^{\mathrm{T}} x_1 \le 100y_1 + 200y_2 + My_3 + 0.001 \\ p_1^{\mathrm{T}} x_1 \ge 100y_2 + 200y_3\end{cases}$$

$$\text{S2：}\begin{cases}y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 1 \\ p_2^{\mathrm{T}} x_2 \le 100y_4 + 200y_5 + 300y_6 + My_7 + 0.001 \\ p_2^{\mathrm{T}} x_2 \ge 100y_5 + 200y_6 + 300y_7\end{cases}$$

$$\text{S4：}\begin{cases}130 \ge p_4^{\mathrm{T}} x_4 + 0.01 - M(1 - y_8) \\ 130 \le p_4^{\mathrm{T}} x_4 + My_8 \\ \omega_3 \ge -M(1 - y_8) \\ \omega_3 \le M(1 - y_8) \\ \omega_3 \ge p_m - My_8 \\ \omega_3 \le p_m + My_8\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_m \ge 0 \\ p_m \le M\sum x_{i4} \\ p_m \le p_{i4}x_{i4} + 0.5M(1 - x_{i4}) \;\; i = 1,2,\dots,10,b,c\end{cases}$$

总价约束：

$$\begin{aligned}p_1^{\mathrm{T}} x_1 - (10y_2 + 25y_3) + p_2^{\mathrm{T}} x_2 - (15y_5 + 30y_6 + 45y_7) + 0.92p_3^{\mathrm{T}} x_3 \\ + p_4^{\mathrm{T}} x_4 - \omega_3 + p_5^{\mathrm{T}} x_5 + 5(\delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{41} + \delta_{51}) \le 250\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x_{ij} \in \{0,1\} \\ \delta_{j3}, \delta_{j1}, \delta_{j2} \in \{0,1\}, j = 1,2,4,5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 \in \{0,1\}\end{cases}$$

此模型为混合整数线性规划模型，利用 MATLAB 程序的 intlinprog 进行求解，程序代码见附录三，软件输出结果见附录四。解得可购买书籍的最大数量为 9 本，此时的购书方案为在 S1 购买 D，F；S3 购买 A，B1，B2；在 S4 购买 G，C1+C2+C3。**购书总价为 227.476 元。**购书方案如下表 3。

表 3 问题一阶段一购书方案结果

书目	类别	网店S1	网店S2	网店S3	网店S4	网店S5
B1	工学	19.5	19.5	20	21	19
B2	工学	22	22.5	21.3	20	21.5
B1+B2	工学	/	/	/	40	40
G	工学	48.5	51	49.3	50	48.9
C1	管理科学	36.1	39	35.8	35.4	38.2
C2	管理科学	32.5	36	34	35.4	35.5
C3	管理科学	33.6	33	32	35	34
C1+C2+C3	管理科学	/	100	99.9	102	/
D	管理科学	40	38.8	42	43.5	46
A	理学	25	20	19	22	23
E	理学	55	55.5	54	56	52
F	理学	30	32.5	29.5	31	33

3. 阶段一的结果讨论

阶段一可求出，当用 250 元钱购书时，在满足要求的前提下，最多可以购买 9 本书。

但是通过对比可以发现，购买 9 本书时，满足总价不超过 250 元钱的购书方案不止一种。例如上述方案中将 B1 改为在 S1 购买，仍可满足要求。

因此，如果要确定最优的购书计划，还需要对所有满足最大书籍数量的方案进行筛选。结合生活实际，在满足同样要求的条件下，花费较低的方案应该为更优方案。因此我们进一步将购买书籍的数量限制为最大数量 9 本，求解使总价最低的方案，作为最优的购书方案。

5.2.2 阶段二：求解购买最大数量书籍时的最低价格

1. 阶段二的建模

目标函数

此时的目标函数改为极小化购书总价。根据不等式（12）对购书总价的表示，可得阶段二的目标函数如下：

$$\min\ p_1^{\mathrm{T}}x_1-(10y_2+25y_3)+p_2^{\mathrm{T}}x_2-(15y_5+30y_6+45y_7)+0.92p_3^{\mathrm{T}}x_3+p_4^{\mathrm{T}}x_4 \\ -\omega_3+p_5^{\mathrm{T}}x_5+5(\delta_{11}+\delta_{21}+\delta_{41}+\delta_{51})$$

约束条件

此时购买书籍的数量应该为最大数量 9 本。当购买 9 本书籍时，一定能够满足工学、管理科学和理学书至少各两本，因此该约束可以省去。因此该阶段模型的数量约束表示为：

$$\sum_{j=1}^{5}\left(x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}\right)+\sum_{j=1}^{5}\left(x_{4j}+x_{5j}+x_{6j}+x_{7j}\right)+2(x_{b4}+x_{b5}) \\ +3(x_{c2}+x_{c3}+x_{c4})=9$$

同时，由于目标函数转换为书籍总价的最小化，因此总价约束也可省去。其余的约束条件应当与阶段一的约束条件一致。

2. 阶段二的求解

阶段二的线性规划模型如下：

$$\min\ p_1^{\mathrm{T}}x_1-(10y_2+25y_3)+p_2^{\mathrm{T}}x_2-(15y_5+30y_6+45y_7)+0.92p_3^{\mathrm{T}}x_3 \\ +p_4^{\mathrm{T}}x_4-\omega_3+p_5^{\mathrm{T}}x_5+5(\delta_{11}+\delta_{21}+\delta_{41}+\delta_{51})$$

数量约束：

$$\sum_{j=1}^{5}\left(x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}\right)+\sum_{j=1}^{5}\left(x_{4j}+x_{5j}+x_{6j}+x_{7j}\right)+2(x_{b4}+x_{b5}) \\ +3(x_{c2}+x_{c3}+x_{c4})=9$$

书籍组合约束：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{5}x_{ij}\le 1,\ \ i=1,2,\dots,10\\ x_{b4}+x_{b5}\le 1\\ x_{c2}+x_{c3}+x_{c4}\le 1\\ \sum_{j=1}^{5}(x_{1j}+x_{2j})+2(x_{b4}+x_{b5})\le 2\\ \sum_{j=1}^{5}(x_{4j}+x_{5j}+x_{6j})+3(x_{c2}+x_{c3}+x_{c4})\le 3\end{cases}$$

运费约束：

$$\begin{cases}\delta_{j3}+\delta_{j1}+\delta_{j2}=1\\ p_j^{\mathrm{T}}x_j\le 59.999\delta_{j1}+M\delta_{j2}\\ p_j^{\mathrm{T}}x_j\ge -0.001\delta_{j3}+59.999\delta_{j2}+0.0001\\ j=1,2,4,5\end{cases}$$

促销约束：

$$\text{S1：}\begin{cases}y_1+y_2+y_3=1\\ p_1^{\mathrm{T}}x_1\le 100y_1+200y_2+My_3+0.001\\ p_1^{\mathrm{T}}x_1\ge 100y_2+200y_3\end{cases}$$

$$\text{S2：}\begin{cases}y_4+y_5+y_6+y_7=1\\ p_2^{\mathrm{T}}x_2\le 100y_4+200y_5+300y_6+My_7+0.001\\ p_2^{\mathrm{T}}x_2\ge 100y_5+200y_6+300y_7\end{cases}$$

$$\text{S4：}\begin{cases}130\ge p_4^{\mathrm{T}}x_4+0.01-M(1-y_8)\\ 130\le p_4^{\mathrm{T}}x_4+My_8\\ \omega_3\ge -M(1-y_8)\\ \omega_3\le M(1-y_8)\\ \omega_3\ge p_m-My_8\\ \omega_3\le p_m+My_8\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_m\ge 0\\ p_m\le M\sum x_{i4}\\ p_m\le p_{i4}x_{i4}+0.5M(1-x_{i4})\ \ i=1,2,\dots,10,b,c\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{ij}\in\{0,1\}\\ \delta_{j3},\delta_{j1},\delta_{j2}\in\{0,1\},j=1,2,4,5\\ y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8\in\{0,1\}\end{cases}$$

利用 MATLAB 程序的 intlinprog 对新模型进行求解，程序代码见附录三，软件输出结果见附录四。解得在购买书籍为 9 本时，最优购书方案为在 S2 购买

A，B1，B2，D；在 S3 购买 F；在 S4 购买 C1+C2+C3，E。**购书总价为 219.94 元。**购书方案如下表 4 所示。

表 4 问题一阶段二购书方案结果

书目	类别	网店S1	网店S2	网店S3	网店S4	网店S5
B1	工学	19.5	19.5	20	21	19
B2	工学	22	22.5	21.3	20	21.5
B1+B2	工学	/	/	/	40	40
G	工学	48.5	51	49.3	50	48.9
C1	管理科学	36.1	39	35.8	35.4	38.2
C2	管理科学	32.5	36	34	35.4	35.5
C3	管理科学	33.6	33	32	35	34
C1+C2+C3	管理科学	/	100	99.9	102	/
D	管理科学	40	38.8	42	43.5	46
A	理学	25	20	19	22	23
E	理学	55	55.5	54	56	52
F	理学	30	32.5	29.5	31	33

5.2.3 问题一的结果

综合阶段一和阶段二，我们可以得到问题一的最优解：在持有 250 元购买书籍时，**最多可以买 9 本书，最低花费金额为 219，94 元**。**最优购书计划**为：在 S2 购买 A，B1，B2，D；在 S3 购买 F；在 S4 购买 C1+C2+C3，E。

5.3 问题二（a）的建模与求解

5.3.1 问题二（a）的建模

1. 目标函数

小张两个室友的计划为在购买到所有图书的情况下，花尽可能少的钱。将小张两个室友的钱合并之后可以认为只有一个人拿着 500 元资金进行购买的行为。由于他们共享所购得的书，因此**假定每本书仅需要一本，不会购买多余的相同图书。**

每一种书目均取五家网店中的最高价，并且不考虑促销，可计算得到购买所有书籍的最高总价为 364.5 元，远低于 500 元，因此 500 元一定能够买齐所有书籍。因此，本题考虑的问题为如何用最经济的方式买下所有书籍，目标函数即为最小化购买书籍的总金额。由于促销方式不变，因此可以继续使用问题一中的模型。根据不等式（12）对购书总价的表示，此问题的目标函数可表示为：

$$\min p_1^{\mathrm{T}}x_1-(10y_2+25y_3)+p_2^{\mathrm{T}}x_2-(15y_5+30y_6+45y_7)+0.92p_3^{\mathrm{T}}x_4+p_4^{\mathrm{T}}x_4 \\ -\omega_3+p_5^{\mathrm{T}}x_5+5(\delta_{11}+\delta_{21}+\delta_{41}+\delta_{51})$$

2. 约束条件

（1）数量约束：

该问要求买齐所有的书本，与问题一相比，数量约束需要发生变化。

对于不能购买组合的书籍（除 B_1+B_2，$C_1+C_2+C_3$ 外），同一本书购买的数量均等于 1，即：

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=1 \quad i=3,7,8,9,10$$

对于能够购买组合的书籍（B_1+B_2，C_1+C_2+C_3），可以选择单独购买或者购买组合，并且 B 图书单独购买和组合购买的图书数量总和等于 2，C 图书单独购买和组合购买的图书数量总和等于 3。约束条件可表示为：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1 \quad i = 1,2,4,5,6 \\ \sum_{j=1}^{5}\left(x_{1j} + x_{2j}\right) + 2(x_{b4} + x_{b5}) = 2 \\ \sum_{j=1}^{5}\left(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j}\right) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) = 3 \end{cases}$$

（2）运费约束、促销约束：

由于促销方式不变，因此运费和促销的约束与问题一一致。

（3）总价约束：

由于该问转换为求书籍总价的极小化，因此不再需要总价约束

5.3.2 问题二（a）的求解

根据上述建模的过程，问题二（a）完整的线性规划模型如下：

$$\min p_1^{\mathrm{T}} x_1 - (10y_2 + 25y_3) + p_2^{\mathrm{T}} x_2 - (15y_5 + 30y_6 + 45y_7) + 0.92 p_3^{\mathrm{T}} x_4$$
$$+ p_4^{\mathrm{T}} x_4 - \omega_3 + p_5^{\mathrm{T}} x_5 + 5(\delta_{j1} + \delta_{j2} + \delta_{j4} + \delta_{j5})$$

数量约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad i = 3,7,8,9,10 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1 \quad i = 1,2,4,5,6 \\ \sum_{j=1}^{5}\left(x_{1j} + x_{2j}\right) + 2(x_{b4} + x_{b5}) = 2 \\ \sum_{j=1}^{5}\left(x_{4j} + x_{5j} + x_{6j}\right) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) = 3 \end{cases}$$

书籍组合约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 1, \ \ i = 1,2,\dots,10 \\ x_{b4} + x_{b5} \le 1 \\ x_{c2} + x_{c3} + x_{c4} \le 1 \\ \sum_{j=1}^{5}(x_{1j} + x_{2j}) + 2(x_{b4} + x_{b5}) \le 2 \\ \sum_{j=1}^{5}(\ x_{4j} + x_{5j} + x_{6j}) + 3(x_{c2} + x_{c3} + x_{c4}) \le 3 \end{cases}$$

运费约束：

$$\begin{cases} \delta_{j3} + \delta_{j1} + \delta_{j2} = 1 \\ p_j^{\mathrm{T}} x_j \le 59.999\delta_{j1} + M\delta_{j2} \\ p_j^{\mathrm{T}} x_j \ge -0.001\delta_{j3} + 59.999\delta_{j2} + 0.0001 \\ j = 1,2,4,5 \end{cases}$$

促销约束：

$$\text{S1：}\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ p_1^{\mathrm{T}} x_1 \le 100y_1 + 200y_2 + My_3 + 0.001 \\ p_1^{\mathrm{T}} x_1 \ge 100y_2 + 200y_3 \end{cases}$$

$$\text{S2：}\begin{cases} y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 1 \\ p_2^{\mathrm{T}} x_2 \le 100y_4 + 200y_5 + 300y_6 + My_7 + 0.001 \\ p_2^{\mathrm{T}} x_2 \ge 100y_5 + 200y_6 + 300y_7 \end{cases}$$

$$
\text{S4:}\begin{cases}130 \ge p_4^{\mathrm{T}}x_4 + 0.01 - M(1-y_8)\\130 \le p_4^{\mathrm{T}}x_4 + My_8\\\omega_3 \ge -M(1-y_8)\\\omega_3 \le M(1-y_8)\\\omega_3 \ge p_m - My_8\\\omega_3 \le p_m + My_8\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}p_m \ge 0\\p_m \le M\sum x_{i4}\\p_m \le p_{i4}x_{i4} + 0.5M(1-x_{i4})\ \ i = 1,2,\dots,10,b,c\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}x_{ij} \in \{0,1\}\\\delta_{j3},\delta_{j1},\delta_{j2} \in \{0,1\}, j = 1,2,4,5\\y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8 \in \{0,1\}\end{cases}
$$

利用 MATLAB 程序的 intlinprog 对新模型进行求解，程序代码见附录三，软件输出结果见附录四。

解得问题二（a）的最优解为：**最优购书计划为：在 S2 购买 A，B1，B2，D；在 S3 购买 G，F；在 S4 购买 C1+C2+C3，E。最低购书总价为 260.296 元**。购书方案如下表 5 所示。

表 5 问题二（a）购书方案结果

书目	类别	网店S1	网店S2	网店S3	网店S4	网店S5
B1	工学	19.5	19.5	20	21	19
B2	工学	22	22.5	21.3	20	21.5
B1+B2	工学	/	/	/	40	40
G	工学	48.5	51	49.3	50	48.9
C1	管理科学	36.1	39	35.8	35.4	38.2
C2	管理科学	32.5	36	34	35.4	35.5
C3	管理科学	33.6	33	32	35	34
C1+C2+C3	管理科学	/	100	99.9	102	/
D	管理科学	40	38.8	42	43.5	46
A	理学	25	20	19	22	23
E	理学	55	55.5	54	56	52
F	理学	30	32.5	29.5	31	33

5.4 问题二（b）的建模与求解

当某一家网店的促销力度加大时，我们关心的是**是否应该改变原有的购书计划，而在该店买更多的书，以获得更大的优惠，减少花费**。因此，本题我们基于问题二（a）中得出的最优购书方案建立线性规划模型，每次调整一家网店的促销力度，而保持其他网店的促销力度不变，求出使总价减少最多的变化方案。该变化方案指出了当某家网店促销力度加大时，是否会导致购书总价的减少而吸引消费者将其余网店的购书策略改为在本店增加购入。此方案能够帮助我们在促销力度发生变化时做出快速反映。

问题中提及促销力度比预期稍大，但并没有详细说明变化方式及程度，因此，此问主要根据判断方法建立基本模型，再以一个具体的网店促销力度的变化进行建模并求解，测试模型的正确性。

5.4.1 建立基本模型

1. 确定决策变量

我们希望求出一个变化方案，判断当某家网店加大了促销力度之后，是否放弃现最优方案中购买的其他网店的书籍，转而购买此家书店对应的书。根据问题二（a）的最优方案（如表 5），一共在网店 S2、S3 和 S4 三家店铺购买了 8 本书籍或书籍组合。因此设 0-1 变量b_{i}，其表示当网店 Sj 加大促销力度时，是否放弃现方案的第 i 本书而购买网店 Sj 中的该本书。$b_{\mathrm{i}}=1$时表示放弃，$b_{\mathrm{i}}=0$时表示保持原方案。

其中，i=1,2,…,8，依次对应表 5 最优方案中购买的书籍 B1，B2，G，C1+C2+C3，D，A，E，F。

2. 书籍总价变化的确定

本题希望求出在某网店加大促销力度时，能够使得总金额降低最多的变化方案。因此，目标函数可表示为最大化与原最优方案的价格差。设该价格差为 P，则 P=因转而购买网店书籍而获得的优惠价格 – 因放弃购买原店书籍而丧失的优惠价格。下面具体讨论 P 的确定。

（1）计算因放弃购买原店书籍而丧失的优惠价格L_j

设c_i表示第 i 本书在原最优方案中的对应价格，s_j表示第 j 家店放弃购买书籍的总价。设集合A为表 5 最优方案中购买书籍的集合，$A=\{x_{12},x_{22},x_{33},x_{c4},x_{72},x_{82},x_{94},x_{103}\}$，集合$B$为加大促销力度的网店所有书籍的集合。。则$s_j$可表示为：

$$s_{\mathrm{j}}=\sum_{x_{ij}\in A}c_i b_{\mathrm{i}}$$

设L_j表示因放弃购买第 j 家网店书籍而丧失的优惠价格。因为促销价格是由购买书籍的总价决定的，并且原最优方案的总价已知，因此L_j一定可以表示为关于s_j的函数：$L_j=f(s_j)$。

以网店 S3 为例，原最优方案中在网店 S3 购买的书籍总价为 78.8 元，进行九二折的折扣，因此促销价格为$78.8\times(1-0.92)$元。假设现在放弃在 S3 购买第 i 本书籍，$s_2=c_i b_{\mathrm{i}}$表示在 S2 少购买了s_2元钱的书籍，此时第 i 本书不再享受九二折促销，因此促销价格会减少，减少的价格$L_3=s_2\times(1-0.92)$元，是s_2的线性函数。

（2）计算因转而购买该网店书籍获得的优惠价格

因转而购买该网店 Sj 的书籍获得的优惠价格包括书籍原价的差价$\Delta p_i = c_i - p_{ij}$，以及购买网店 Sj 的书籍而获得的促销价格。促销价格ω与问题一中的一致，为关于总价的分段函数。

P 同时还应减去在该网店购书可能不满 60 元而多承担的运费，运费t同样与问题一中的一致。

因此，P 的表达式为：

$$P = \sum_{i \in A \cap B} \Delta p_i \, b_{\mathrm{i}} + \omega - \sum_{j \in A-B} L_j - t$$

3. 建立模型

综合上述条件，本题的基本模型可表示如下：

$$\max \sum_{i \in A \cap B} \Delta p_i \, b_{\mathrm{i}} + \omega - \sum_{j \in A-B} L_j - t$$

$$s.t. \begin{cases} \text{促销价格}\omega\text{的线性化约束} \\ \text{运费}t\text{的线性化约束} \\ L_j\text{的线性化约束} \\ b_{\mathrm{i}} \in \{0,1\} \end{cases}$$

5.4.2 以网店 S1 为例的建模和求解

假设网店 S1 的促销力度变为满 100 元减 10 + m 元, 满 200 元减 25 + n 元，现根据上述的基本模型进行建模和求解。

1. 建模

网店 S1 的促销价格$\omega_1 = \begin{cases} 0 & p_1^{\mathrm{T}} b < 100 \\ 10 + m & 100 \le p_1^{\mathrm{T}} b \le 200 \\ 25 + n & p_1^{\mathrm{T}} b > 100 \end{cases}$。

网店 S1 的运费$t_1 = \begin{cases} 0 & p_1^{\mathrm{T}} b \le 0 \\ 5 & 0 < p_1^{\mathrm{T}} b \le 59.999 \\ 0 & p_1^{\mathrm{T}} b > 59.999 \end{cases}$。

s_j表示第 j 家店放弃购买书籍的总价，则：$s_2 = 19.5b_1 + 22.5b_2 + 38.8b_5 + 20b_6$，$s_3 = 49.3b_3 + 29.5b_8$，$s_4 = 102b_4 + 56b_7$。

L_{j}表示第 j 家店由于减少了s_{j}元的购书金额而减少的优惠价格：

$$L_2=\begin{cases}0 & s_2\le 0.8\\ 15 & 0.8<s_2\le 40.8\\ 15+5 & 40.8\le s_2\le 100.7\\ 15 & s_2>100.7\end{cases}$$

$$L_3=0.08s_3$$

$$L_4=\begin{cases}0 & s_4\le 0\\ 56 & 0<s_4\le 56\\ 56+5 & 56<s_4\le 102\\ 56 & s_4>102\end{cases}$$

P表示多优惠的钱与少优惠的钱之差：

$$P=\sum_{i=1}^{8}\Delta p_i b_{\mathrm{i}}+\omega_1-L_2-L_3-L_4-t_1$$

2. **求解**

根据上述建模的过程，利用 5.1.1 的分段函数线性化方法将分段函数转换为线性约束，可得网店 S1 购书变化情况完整的线性规划模型如下：

$$\max\sum_{i=1}^{8}\Delta p_i b_{\mathrm{i}}+(10+m)y_2+(25+n)y_3-(15d_2+20d_3+15d_4)-0.08s_3\\ -(56d_6+61d_7+56d_8)-5\delta_{11}$$

S1 促销价格：

$$\begin{cases}y_1+y_2+y_3=1\\ p_1^{\mathrm{T}}b\le 100y_1+200y_2+My_3+0.001\\ p_1^{\mathrm{T}}b\ge 100y_2+200y_3\end{cases}$$

S1 运费：

$$\begin{cases}\delta_{13}+\delta_{11}+\delta_{12}=1\\ p_1^{\mathrm{T}}b\le 59.999\delta_{11}+M\delta_{12}\\ p_1^{\mathrm{T}}b>-0.001\delta_{13}+59.999\delta_{12}\end{cases}$$

s_j：

$$\begin{cases}s_2=19.5b_1+22.5b_2+38.8b_5+20b_6\\ s_3=49.3b_3+29.5b_8\\ s_4=102b_4+56b_7\end{cases}$$

L_2：

$$\begin{cases}d_1+d_2+d_3+d_4=1\\ s_2\le 0.8d_1+40.8d_2+100.7d_3+Md_4\\ s_2>-0.001d_1+0.8d_2+40.8d_3+100.7d_4\end{cases}$$

L_4：

$$\begin{cases}d_5+d_6+d_7+d_8=1\\ s_4\le 56d_6+102d_7+Md_8\\ s_4>-0.001d_5+56d_7+102d_8\end{cases}$$

$$\begin{cases} b_j, d_j \in \{0,1\} \ j = 1,2,\dots,8 \\ \delta_{13}, \delta_{11}, \delta_{12} \in \{0,1\} \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

我们对 m 和 n 进行不同的赋值，利用 MATLAB 程序的 MILP 对进行求解，得到了不同的调整方案结果。

当 m=10，n=0 时，目标函数值=0，不进行调整。

当 m=11，n=25 时，目标函数值=0.496，调整后可多降低 0.496 元。

当 m=20，n=25 时，目标函数值=9.496，调整后可多降低 9.496 元。

下面展示当 m=11，n=25 时的具体结果。程序代码见附录三，软件输出结果见附录四。

当加大网店 S1 促销力度，且 m=11，n=25 时的购书方案为：**将 B2，G 和 F 调整到 S1 购买**。**最低购书总价为 259.8 元，与原方案相比降低 0.496 元**。购书方案如下表 5 所示。

表 5 问题二（b）改变网店 S1 促销力度的购书方案结果

书目	类别	网店S1	网店S2	网店S3	网店S4	网店S5
B1	工学	19.5	19.5	20	21	19
B2	工学	22	22.5	21.3	20	21.5
B1+B2	工学	/	/	/	40	40
G	工学	48.5	51	49.3	50	48.9
C1	管理科学	36.1	39	35.8	35.4	38.2
C2	管理科学	32.5	36	34	35.4	35.5
C3	管理科学	33.6	33	32	35	34
C1+C2+C3	管理科学	/	100	99.9	102	/
D	管理科学	40	38.8	42	43.5	46
A	理学	25	20	19	22	23
E	理学	55	55.5	54	56	52
F	理学	30	32.5	29.5	31	33

5.4.3 问题二（b）的解答

通过上述模型，我们可以根据决策变量b_i的结果判断：当某家网店促销力度加大时，是否可以将第 i 本书转到该店购买，以减少花费。当$b_i = 1$时则将第 i 本书转到该店购买，否则保持原方案不变。

以网店 S1 为例，当促销力度变化 m=11，n=0 时，求得$b = (0,1,1,0,0,0,0,1)^T$，因此可以将 B2，G 和 F 转到网店 S1 购买，比原方案的总价降低了 0.496 元。

六、 模型的评价、改进与推广

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

（1）通过分段函数线性化的方法，将促销方式转换成线性约束，从而可以直接利用线性规划模型进行求解。该线性化方法也有助于其他优化问题的研究。

（2）针对寻找最优购书计划的前两个问题，本文对建立的前三个模型进行精确求解，实现了全局优化。得出的解为全局最优，并且给出了精确解。

（3）本文建立了混合整数线性规划模型，在解决大规模问题时求解速度快，因此在问题规模增大时也可以很好地适用。

6.1.2 模型的缺点

（1）在建模过程中，对促销方式进行了简化。网店 S2 的每满 100 送 15 元全网书券根据本题的价格范围简化为了分段函数，并且本文假设了该书券可以在其他书店任意使用。

（2）最后一个问题，由于需要尽可能快地给出购书策略，建立的模型仅考虑了局部最优，只考虑了基于该网店的调整方案，同时假设只有一家网店的促销力度发生改变，而无法改变整体方案以达到全局最优。对于该问题，如果需要到达全局最优，可以使用第一问的模型，修改参数从而得到全局最优解。

6.2 模型的推广与改进

本文中的模型对多选择的购物方案优化问题提供了一定的思路，具有一定的实际价值。随着网络购物的日益发展，现实中各大平台、网店的促销方式越来越复杂，但是针对这一现象的方案优化研究总体还比较缺乏。此模型给出了在解决此问题时的一种思路：将促销方式转换为线性约束，通过规划模型进行方案优化。本文的模型仅针对题目中具体的促销方式和力度，可以考虑进一步改进模型约束条件的表达，增强通用性，让其更加灵活地应用于不同的促销方式的组合中。

参考文献

[1] 周雅颂.网络促销方式对感知价值的影响及促销组合策略研究[J].经营与管理,2020(12):58-61.

[2] 王美芹. 考虑非线性电池折旧的电动车路径规划问题[D].清华大学,2018.

[3] 胡运权. 运筹学教程(第四版)[M]. 清华大学出版社, 2012.

[4] Hamdy A. Taha. Operations Research an Introduction[M]. Pearson Education, 2017.

附录

附录一：书目价格表

书目	类别	网店 S1	网店 S2	网店 S3	网店 S4	网店 S5
B1	工学	19.5	19.5	20	21	19
B2	工学	22	22.5	21.3	20	21.5
B1+B2	工学	/	/	/	40	40
G	工学	48.5	51	49.3	50	48.9
C1	管理科学	36.1	39	35.8	35.4	38.2
C2	管理科学	32.5	36	34	35.4	35.5
C3	管理科学	33.6	33	32	35	34
C1+C2+C3	管理科学	/	100	99.9	102	/
D	管理科学	40	38.8	42	43.5	46
A	理学	25	20	19	22	23
E	理学	55	55.5	54	56	52
F	理学	30	32.5	29.5	31	33

附录二：决策变量x_{ij}的含义

书目	类别	网店S1	网店S2	网店S3	网店S4	网店S5
B1	工学	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
B2	工学	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
B1+B2	工学	/	/	/	x_{b4}	x_{b5}
G	工学	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}
C1	管理科学	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}
C2	管理科学	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}
C3	管理科学	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}
C1+C2+C3	管理科学	/	x_{c2}	x_{c3}	x_{c4}	/
D	管理科学	x_{71}	x_{72}	x_{73}	x_{74}	x_{75}
A	理学	x_{81}	x_{82}	x_{83}	x_{84}	x_{85}
E	理学	x_{91}	x_{92}	x_{93}	x_{94}	x_{95}
F	理学	x_{101}	x_{102}	x_{103}	x_{104}	x_{105}

附录三： MATLAB 求解 intlinprog 源程序(以第一问为例)

```
clear
clc

%% Load Data
load('MIP-1.mat');
f = -objFunc1';
intcon = intCon1;
A = nonEqualConstrain1;
b = nonEqualB1;
Aeq = equalContrain1;
beq = equalB1;
lb = lowBound1;
ub = upBound1;

%% Solver
[x,fval,exitflag,output] = intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

附录四： MATLAB 输出结果

问题一阶段一：

```
LP:                Optimal objective value is -10.000000.

Cut Generation:    Applied 3 clique cuts, 3 cover cuts,
                   and 2 mir cuts.
                   Lower bound is -10.000000.

Heuristics:        Found 1 solution using diving.
                   Upper bound is -8.000000.
                   Relative gap is 22.22%.

Cut Generation:    Applied 1 clique cut.
                   Lower bound is -10.000000.
                   Relative gap is 22.22%.

Branch and Bound:

   nodes     total   num int        integer       relative
explored  time (s)  solution           fval        gap (%)
     246      0.14         2  -9.000000e+00   1.000000e+01
     643      0.23         2  -9.000000e+00   0.000000e+00

Optimal solution found.

Intlinprog stopped because the objective value is within a gap
```

```
tolerance of the optimal value,
options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon
variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the
default value).


fval =

  -9.0000
```

问题一阶段二：

```
LP:                Optimal objective value is -9371.090450.

Cut Generation:    Applied 56 Gomory cuts, 27 mir cuts,
                   10 clique cuts, and 8 cover cuts.
                   Lower bound is -5337.667461.

Heuristics:        Found 1 solution using diving.
                   Upper bound is 243.300000.
                   Relative gap is 2.28e+03%.

Cut Generation:    Applied 4 clique cuts.
                   Lower bound is -5337.481619.
                   Relative gap is 2.28e+03%.

Branch and Bound:

   nodes     total   num int        integer       relative
explored  time (s)  solution           fval        gap (%)
      71      0.36         2   2.406200e+02   1.302725e+01
      87      0.38         3   2.281200e+02   8.217084e+00
     172      0.41         4   2.263200e+02   6.609848e+00
     176      0.41         5   2.199400e+02   3.913056e+00
     241      0.44         5   2.199400e+02   0.000000e+00

Optimal solution found.

Intlinprog stopped because the objective value is within a gap
tolerance of the optimal value,
options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon
variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the
default value).
```

```
fval =

  219.9400
```

问题二（a）：

```
LP:                Optimal objective value is -9324.280538.

Cut Generation:    Applied 48 Gomory cuts, 11 clique cuts,
                   10 cover cuts, and 25 mir cuts.
                   Lower bound is -5375.274819.

Heuristics:        Found 3 solutions using total rounding.
                   Upper bound is 279.800000.
                   Relative gap is 2.01e+03%.

Cut Generation:    Applied 6 clique cuts, 1 cover cut,
                   12 Gomory cuts, and 1 implication cut.
                   Lower bound is -4873.156234.
                   Relative gap is 1.84e+03%.

Branch and Bound:

   nodes     total   num int        integer       relative
explored  time (s)  solution           fval        gap (%)
      47      0.37         4   2.793000e+02   2.622692e+01
      68      0.40         5   2.730000e+02   7.928210e+00
     135      0.43         6   2.728000e+02   5.010742e+00
     138      0.43         7   2.715000e+02   4.557582e+00
     148      0.44         8   2.602960e+02   3.210414e-01
     153      0.44         8   2.602960e+02   0.000000e+00

Optimal solution found.

Intlinprog stopped because the objective value is within a gap
tolerance of the optimal value,
options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon
variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the
default value).


fval =
```

```
  260.2960
```

问题二（b）：

```
LP:                Optimal objective value is -18.589539.

Cut Generation:    Applied 4 Gomory cuts, 13 cover cuts,
                  5 mir cuts, and 3 clique cuts.
                  Lower bound is -0.496000.
                  Relative gap is 0.00%.


Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value
is within a gap tolerance of the
optimal value, options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default
value). The intcon variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the
default value).


fval =

   -0.4960
```