区间估计

标记	含义
θ	总体的一个参数
Θ	参数空间
$1-\alpha$	置信水平

定义1: 若对任意$\theta \in \Theta$，有$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) \ge 1-\alpha$，则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

1 单个正态总体参数的置信区间

1.1 σ已知时μ的置信区间

$$
\begin{gathered}
\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \\
G = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \\
P(u_{\frac{\alpha}{2}} \le G \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \\
P(\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha
\end{gathered}
$$

因此，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$。

1.2 σ未知时μ的置信区间

$$t=\frac{\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s}\sim t(n-1)$$
$$P(\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

因此，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\overline{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}]$。

1.3 σ^2的置信区间

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$
$$P(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\mu\le\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)})=1-\alpha$$

因此，σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}]$。

2 两个正态总体下的置信区间

2.1 $\mu_1-\mu_2$的置信区间

2.1.1 σ_1^2和σ_2^2已知

$$\overline{x}-\overline{y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$$

同1.1，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\overline{x}-\overline{y}\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$。

2.1.2 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$未知

$$\overline{x}-\overline{y} \sim N(\mu_1-\mu_2, (\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\sigma^2)$$
$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\sigma^2}} \sim N(0,1)$$
$$\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$
$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}}} = \frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

同1.2，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\overline{x}-\overline{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\cdot s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$。

2.1.3 $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = c$已知

$$\overline{x}-\overline{y} \sim N(\mu_1-\mu_2, (\frac{1}{m}+\frac{c}{n})\sigma_1^2)$$
$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{c}{n})\sigma_1^2}} \sim N(0,1)$$
$$\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)\frac{s_y^2}{c}}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$
$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{c}{n})\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)\frac{s_y^2}{c}}{m+n-2}}} = \frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

同2.1.2，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\overline{x}-\overline{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\cdot s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}}$。

2.1.4 一般情况下的近似置信区间

Behrens-Fisher问题，有近似方法可以进行区间估计，详见茆诗松《概率论与数理统计》第三版P310。

$$T=\frac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_0}, s_0^2=\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}$$
$$T\sim t(l), l=\frac{s_0^4}{\frac{s_x^2}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^2}{n^2(n-1)}}$$

$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\overline{x}-\overline{y}\pm s_0 t_{1-\frac{\alpha}{2}}(l)$。

2.2 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

$$\frac{(m-1)s_x^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1); \frac{(n-1)s_y^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$$
$$F=\frac{\frac{s_x^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_y^2}{\sigma_2^2}}=\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(m-1,n-1)$$

因此，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$[\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}, \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}]$。

3 大样本置信区间

当样本量充分大时，可以使用渐进正态分布来构造近似的置信区间。

3.1 二点分布参数p的置信区间

由中心极限定理，样本均值$\overline{x}$的渐近分布为$N(p, \frac{p(1-p)}{n})$，$u=\frac{\overline{x}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$渐近服从标准正态分布。

$$P(|\frac{\overline{x}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}| \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \approx 1-\alpha$$

$$\lambda = u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2, (1+\frac{\lambda}{n})p^2 - (2\overline{x}+\frac{\lambda}{n})p + \overline{x}^2 \le 0$$

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}(\overline{x}+\frac{\lambda}{2n} \pm \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}\lambda + \frac{\lambda^2}{4n^2}})$$

$$n \to +\infty, \frac{\lambda}{n} \to 0, \overline{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}$$

4 样本量的确定

绝对误差：置信区间的半径（长度的一半）d_0。

4.1 σ已知时μ的置信区间

$$d_0 \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n \ge (u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{d_0})^2$$

4.2 二点分布参数p的置信区间

$$d_0 \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}$$

$$n \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{d_0^2}$$

5 单侧置信区间

定义2: 若对任意$\theta \in \Theta$，有$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$，则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的同等置信区间。

定义3: 若对任意$\theta \in \Theta$，有$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta) \ge 1 - \alpha$，则称随机区间$\hat{\theta}_L$为$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的置信下限。

定义4: 若对任意$\theta \in \Theta$，有$P_\theta(\hat{\theta}_U \ge \theta) \ge 1 - \alpha$，则称随机区间$\hat{\theta}_U$为$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的置信上限。

6 SPSS应用

“分析”—“描述统计”—“探索”—因变量列表—“统计”—“描述”—平均值的置信区间