假设检验

1 假设检验的基本步骤

1.1 建立假设

原假设（零假设）与备择假设（对立假设）：

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

简单假设：$H_0 : \theta = \theta_0$

此时的备择假设有如下三种可能：

1. $H_1 : \theta \neq \theta_0$，双侧假设
2. $H_1 : \theta < \theta_0$，单侧假设
3. $H_1 : \theta > \theta_0$，单侧假设

1.2 选择检验统计量，给出拒绝域形式

把样本空间Ω划分为两个互不相交的部分W与$\overline{W}$，样本属于W则拒绝H_0，否则就接受H_0。则W与$\overline{W}$分别称为检验的拒绝域、接受域。

1.3 选择显著性水平

检验的两类错误：

	总体H_0为真	总体H_1为真
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$	第一类错误	正确
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{W}$	正确	第二类错误

第一类错误概率：$\alpha(\theta)=P_\theta(\mathbf{X}\in W),\theta\in\Theta_0$；第二类错误概率：$\beta(\theta)=P_\theta(\mathbf{X}\in\overline{W}),\theta\in\Theta_1$。

定义1: 样本观测值$\mathbf{X}$落在拒绝域W内的概率称为该检验的势函数，记为：

$$g(\theta)=P_\theta(\mathbf{X}\in W),\theta\in\Theta$$

即，

$$g(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta),\theta\in\Theta_0\\1-\beta(\theta),\theta\in\Theta_1\end{cases}$$

在样本量一定的条件下不可能找到一个使$\alpha(\theta)$与$\beta(\theta)$都小的检验。同时，犯第二类错误的概率在不少场合不易求出。因此，通常的做法是限制犯第一类错误的概率。

定义2: 若一个检验满足对任意$\theta\in\Theta_0$，都有$g(\theta)\le\alpha$，则称该检验为显著性水平为α的显著性检验。

最常用的选择是$\alpha=0.05$。

1.4 给出拒绝域

根据合适的显著性水平，通过$g(\theta)\le\alpha$，确定具体的拒绝域W。

1.5 做出判断

由样本观测值，计算检验统计量并判断其是否属于拒绝域，作出最终判断

1.6 补充：检验的p值

定义3: 利用样本观测值能够作出的拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的p值。

- 如果$p\le\alpha$，则在显著性水平α下拒绝H_0；
- 如果$p>\alpha$，则在显著性水平α下接受H_0。

2 正态总体参数假设检验

2.1 单个正态总体均值的检验

2.1.1 $\sigma = \sigma_0$已知时的u检验

(1) $H_0: \mu \le \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}, W_1 = \{z \ge c\}$$

$$g(\mu) = P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c) = P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu + \mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c)$$
$$= P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}) = 1 - \Phi(c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}})$$

$g(\mu)$是μ的增函数，因此只要$g(\mu_0) = \alpha$，就可以保证$\mu \le \mu_0$时，$g(\mu) \le \alpha$。

$$g(\mu_0) = 1 - \Phi(c) = \alpha$$
$$c = u_{1-\alpha}$$
$$W_1 = \{z \ge u_{1-\alpha}\}$$

此时，拒绝域为$W_1 = \{z \ge u_{1-\alpha}\}$。

考察检验的p值，即：

$$p_1 = \min \alpha$$
$$\text{s.t. } u_{1-\alpha} \le z$$

则$p_1 = 1 - \Phi(z)$。

(2) $H_0: \mu \ge \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$

$$W_2 = \{z \le c\}$$
$$g(\mu) = P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le c) = P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu + \mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le c)$$
$$= P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}) = \Phi(c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}})$$

$g(\mu)$是μ的减函数，因此只要$g(\mu_0) = \alpha$，就可以保证$\mu \ge \mu_0$时，$g(\mu) \le \alpha$。

$$g(\mu_0) = \Phi(c) = \alpha$$
$$c = u_\alpha$$
$$W_2 = \{z \le u_\alpha\}$$

此时，拒绝域为$W_2 = \{z \le u_\alpha\}$。

考察检验的p值，即：

$$p_2 = \min \alpha$$
$$\text{s.t. } u_\alpha \ge z$$

则$p_2 = \Phi(z)$。

(3) $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \ne \mu_0$

$$W_3 = \{|z| \ge c\}$$
$$g(\mu) = P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le -c) + P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c)$$
$$= P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu + \mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le -c) + P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu + \mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c)$$
$$= P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \le -c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}) + P_\mu(\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \ge c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}})$$
$$= \Phi(-c - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}) + \Phi(-c + \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}})$$

$\mu = \mu_0$时，$g(\mu) = 2\Phi(-c) = 2(1 - \Phi(c)) = \alpha$。

$$c = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$W_3 = \{|z| \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

此时，拒绝域为$W_3 = \{|z| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$。

考察检验的p值，即：

$$\begin{gathered} p_3 = \min \alpha \\ \text{s.t. } u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq |z| \end{gathered}$$

则$p_3 = 2(1-\Phi(|z|))$。

2.1.2 σ未知时的t检验

(1) $H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

$$\begin{gathered} z = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s}, W_1 = \{z \geq c\} \\ g(\mu) = P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s} \geq c) = P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s} \geq c) \\ = P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s} \geq c - \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{s}) = 1 - F_{t(n-1)}(c - \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{s}) \end{gathered}$$

$g(\mu)$是μ的增函数，因此只要$g(\mu_0) = \alpha$，就可以保证$\mu \leq \mu_0$时，$g(\mu) \leq \alpha$。

$$\begin{gathered} g(\mu_0) = 1 - F_{t(n-1)}(c) = \alpha \\ c = t_{1-\alpha}(n-1) \\ W_1 = \{z \geq t_{1-\alpha}(n-1)\} \end{gathered}$$

此时，拒绝域为$W_1 = \{z \geq t_{1-\alpha}(n-1)$。

考察检验的p值，即：

$$\begin{gathered} p_1 = \min \alpha \\ \text{s.t. } t_{1-\alpha}(n-1) \leq z \end{gathered}$$

则$p_1 = 1 - F_{t(n-1)}(z)$。

(2) $H_0: \mu \geq \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$

同上，此时拒绝域为$W_2 = \{z \leq t_\alpha(n-1)\}$，$p_2 = F_{t(n-1)}(z)$。

(3) $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

同上，此时拒绝域为$W_3 = \{|z| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$，$p_3 = 2(1 - F_{t(n-1)}(|z|))$。

2.1.3 假设检验与置信区间的关系

以σ未知时的t检验为例，检验$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$的拒绝域为$W_3 = \{|z| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$，接受域为$\overline{W_3} = \{|z| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$。若接受原假设，则$\mu_0 \in [\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$，这也就是$\mu$的$1-\alpha$置信区间。

2.2 两个正态总体均值差的检验

2.2.1 σ_1, σ_2已知时的u检验

(1) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}, W_1 = \{z \geq c\}$$

$$g(\mu_1 - \mu_2) = P_{\mu_1 - \mu_2}\left(\frac{(\bar{x} - \mu_1) - (\bar{y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \geq c\right) \leq \alpha$$

$$1 - \Phi\left(c - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}\right) \leq \alpha$$

$g(\mu_1 - \mu_2)$关于$\mu_1 - \mu_2$单调递增，$\mu_1 - \mu_2 = 0$时，若$1 - \Phi(c) = \alpha$，则不等式满足。此时，拒绝域为$W_1 = \{z \geq u_{1-\alpha}\}$，$p_1 = 1 - \Phi(z)$。

(2) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

同上，此时拒绝域为$W_2 = \{z \leq u_\alpha\}$，$p_2 = \Phi(z)$。

(3) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

同上，此时拒绝域为$W_3=\{|z|\geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$，$p_3=2(1-\Phi(|z|))$。

2.2.2 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$但未知时的t检验

(1) $H_0:\mu_1-\mu_2\leq 0$ vs $H_1:\mu_1-\mu_2>0$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2\sim\chi^2(m-1)$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\sim\chi^2(n-1)$$
$$S^2=\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2)\sim\chi^2(m+n-2)$$
$$\frac{(\bar{x}-\mu_1)-(\bar{y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2}{m+n-2}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}\sigma}\sim t(m+n-2)$$
$$z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{S^2}{m+n-2}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})}\sigma},W_1=\{z\geq c\}$$

此时，拒绝域为$W_1=\{z\geq t_{1-\alpha}(m+n-2)\}$。

考察检验的p值，即：

$$p_1=\min\alpha$$
$$\text{s.t. }\ t_{1-\alpha}(m+n-2)\leq z$$

则$p_1=1-F_{t(m+n-2)}(z)$。

(2) $H_0:\mu_1-\mu_2\geq 0$ vs $H_1:\mu_1-\mu_2<0$

同上，此时拒绝域为$W_2=\{z\leq t_\alpha(m+n-2)\}$，$p_2=F_{t(m+n-2)}(z)$。

(3) $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ vs $H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$

同上，此时拒绝域为$W_3=\{|z|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\}$，
$p_3=2(1-F_{t(m+n-2)}(|z|))$。

2.2.3 成对数据检验

在对两个总体均值进行比较时，有的数据是成对出现的。可以进行以下两种检验:

(1) 双样本t检验

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

(2) 单样本t检验

$$d = x - y$$
$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 0$$

在双样本t检验中，没有消除试验单元之间的影响，S会变得较大，$|z|$会变得较小，比单样本t检验更容易接受原假设。

2.3 正态总体方差的检验

2.3.1 单个正态总体方差的χ^2检验

(1) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$
$$z = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}, W_1 = \{z \geq c\}$$
$$g(\sigma^2) = P_{\sigma^2}(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq c) = P_{\sigma^2}(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \geq c)$$
$$= P_{\sigma^2}(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \frac{c\sigma_0^2}{\sigma^2}) = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(\frac{c\sigma_0^2}{\sigma^2}) \leq \alpha$$

$g(\sigma^2)$关于σ^2单调递增，$\sigma^2 = \sigma_0^2$时，若$1 - F_{\chi^2(n-1)}(c) = \alpha$，则不等式满足。此时，拒绝域为$W_1 = \{z \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$。

考察检验的p值，即:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \min \alpha \\
\text{s.t. } & \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \le z
\end{aligned}
$$

则$p_1 = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(z)$。

(2) $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

同上，此时拒绝域为$W_2 = \{z \le \chi^2_\alpha(n-1)\}$，$p_2 = F_{\chi^2(n-1)}(z)$。

(3) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$

$$
\begin{aligned}
W_3 &= \{z \le c_1\} \cup \{z \ge c_2\} \\
g(\sigma^2) &= P_{\sigma^2}\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le c_1\right) + P_{\sigma^2}\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge c_2\right) \\
&= F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{c_1\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{c_2\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) \le \alpha
\end{aligned}
$$

$\sigma^2 = \sigma_0^2$时，$F_{\chi^2(n-1)}(c_1) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}(c_2) \le \alpha$，取$c_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), c_2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，即可得拒绝域。

考察检验的p值，即：

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \min \alpha \\
\text{s.t. } & \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \ge z \text{ or } \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le z
\end{aligned}
$$

则$p_3 = 2\min\{F_{\chi^2(n-1)}(z), 1 - F_{\chi^2(n-1)}(z)\}$。

2.3.2 两个正态总体方差比的F检验

(1) $H_0: \sigma_x^2 \le \sigma_y^2$ vs $H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

$$\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sim F(m-1,n-1)$$

$$z=\frac{s_x^2}{s_y^2}, W_1=\{z\geq c\}$$

$$g(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2})=P_{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}(\frac{s_x^2}{s_y^2}\geq c)=P_{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}(\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\geq c\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2})$$

$$=1-F_{F(m-1,n-1)}(c\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2})\leq\alpha$$

$g(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2})$关于$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$单调递减，$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}=1$时，若$1-F_{F(m-1,n-1)}(c\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2})\leq\alpha$，则不等式满足。此时，拒绝域为$W_1=\{z\geq F_{1-\alpha}(m-1,n-1)\}$，$p_1=1-F_{F(m-1,n-1)}(z)$。

(2) $H_0:\sigma_x^2\geq\sigma_y^2$ vs $H_1:\sigma_x^2<\sigma_y^2$

同上，此时拒绝域为$W_2=\{z\leq F_\alpha(m-1,n-1)\}$，$p_2=F_{F(m-1,n-1)}(z)$。

(3) $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$ vs $H_1:\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$

同上，此时拒绝域为
$W_3=\{z\leq F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\}\cup\{z\geq F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\}$，
$p_3=\min\{F_{F(m-1,n-1)}(z),1-F_{F(m-1,n-1)}(z)\}$。

3 其他分布参数的假设检验

3.1 比率p的检验

对于伯努利试验，以x为事件发生的次数，则$x\sim b(n,p)$。

(1) $H_0:p\leq p_0$ vs $H_1:p>p_0$

$$W_1=\{x\geq c\}$$

$$P(x\geq c;p_0)=\sum_{i=c}^{n}(C_n^i p_0^i(1-p_0)^{n-i})=\alpha\cdots(1)$$

但是(1)式的等式往往很难恰巧成立，因此往往寻找c_0：

$$\sum_{i=c_0}^{n}(C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i}) > \alpha > \sum_{i=c_0+1}^{n}(C_n^i p_0^i (1-p_0)^{n-i})$$

此时，

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \geq c_0 + 1\} \\ p_1 &= P(x \geq x_0; p_0) \end{aligned}$$

x_0为样本观测值。

(2) $H_0 : p \geq p_0$ vs $H_1 : p < p_0$

此时，

$$\begin{aligned} W_2 &= \{x \leq c\} \\ p_2 &= P(x \leq x_0; p_0) \end{aligned}$$

(3) $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p \neq p_0$

此时，

$$\begin{aligned} W_3 &= \{x \leq c_1\} \cup \{x \geq c_2\} \\ p_2 &= 2\min\{P(x \leq x_0; p_0), P(x \geq x_0; p_0)\} \end{aligned}$$

3.2 大样本检验

如果样本量较大，经常采用渐进正态分布。设总体均值为θ，方差为θ的函数，记为$\sigma^2(\theta)$，$\hat{\theta}$为θ的极大似然估计。

$$u = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta)}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta})}}$$

样本量较大时，u近似服从标准正态分布。于是，与单样本正态分布类似。

对于二点分布$b(1, \theta)$均值的检验，

$$\sigma^2(\theta) = \theta(1-\theta)$$

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}}$$

对于两个二点分布总体均值差的检验，可以使用

$$z = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\hat{\theta}_x(1-\hat{\theta}_x)}{m}+\frac{\hat{\theta}_y(1-\hat{\theta}_y)}{n}}}$$