区间估计

标记	含义
heta	总体的一个参数
Θ	参数空间
1-lpha	置信水平

定义1: 若对任意 $\theta \in \Theta$,有 $P_{\theta}(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) \geq 1 - \alpha$,则称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

1 单个正态总体参数的置信区间

1.1σ 已知时 μ 的置信区间

$$egin{aligned} \overline{x} \sim N(\mu, rac{\sigma^2}{n}) \ G &= rac{\overline{x} - \mu}{rac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \ P(u_{rac{lpha}{2}} \leq G \leq u_{1-rac{lpha}{2}}) = 1 - lpha \ P(\overline{x} - u_{1-rac{lpha}{2}} \cdot rac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + u_{1-rac{lpha}{2}} \cdot rac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - lpha \end{aligned}$$

因此, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[\overline{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 。

1.2σ 未知时 μ 的置信区间

$$t = rac{rac{\overline{x}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{rac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}} = rac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s} \sim t(n-1) \ P(\overline{x}-t_{1-rac{lpha}{2}}(n-1)\cdotrac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x}+t_{1-rac{lpha}{2}}(n-1)\cdotrac{s}{\sqrt{n}}) = 1-lpha$$

因此,
$$\mu$$
的置信水平为 $1-lpha$ 的置信区间为 $[\overline{x}-t_{1-rac{lpha}{2}}(n-1)\cdotrac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{1-rac{lpha}{2}}(n-1)\cdotrac{s}{\sqrt{n}}]$ 。

$1.3 \sigma^2$ 的置信区间

$$rac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \ P(rac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-rac{lpha}{2}}(n-1)} \leq \mu \leq rac{(n-1)s^2}{\chi^2_{rac{lpha}{2}}(n-1)}) = 1-lpha$$

因此, σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $[rac{(n-1)s^2}{\chi_{1-rac{lpha}{2}}^2(n-1)},rac{(n-1)s^2}{\chi_{rac{lpha}{2}}^2(n-1)}]$ 。

2 两个正态总体下的置信区间

$2.1 \mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

$2.1.1 \sigma_1^2$ 和 σ_2^2 已知

$$\overline{x}-\overline{y}\sim N(\mu_1-\mu_2,rac{\sigma_1^2}{m}+rac{\sigma_2^2}{n})$$

同1.1, $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\overline{x}-\overline{y}\pm u_{1-rac{lpha}{2}}\cdot\sqrt{rac{\sigma_1^2}{m}+rac{\sigma_2^2}{n}}$ 。

2.1.2 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$ 未知

$$egin{split} \overline{x} - \overline{y} &\sim N(\mu_1 - \mu_2, (rac{1}{m} + rac{1}{n})\sigma^2) \ &rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(rac{1}{m} + rac{1}{n})\sigma^2}} \sim N(0, 1) \ &rac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2) \ &rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(rac{1}{m} + rac{1}{n})rac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}}} = rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w \sqrt{rac{1}{m} + rac{1}{n}}} \sim t(m+n-2) \end{split}$$

同
$$1.2$$
, $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-lpha$ 的置信区间为 $\overline{x}-\overline{y}\pm t_{1-rac{lpha}{2}}(m+n-2)\cdot s_w\sqrt{rac{1}{m}+rac{1}{n}}$ 。

2.1.3
$$rac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=c$$
已知

$$egin{split} \overline{x} - \overline{y} &\sim N(\mu_1 - \mu_2, (rac{1}{m} + rac{c}{n})\sigma_1^2) \ &rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(rac{1}{m} + rac{c}{n})\sigma_1^2}} \sim N(0, 1) \ &rac{(m-1)s_x^2 + (n-1)rac{s_y^2}{c}}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m+n-2) \ &rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(rac{1}{m} + rac{c}{n})rac{(m-1)s_x^2 + (n-1)rac{s_y^2}{c}}{\sigma_1^2}} = rac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w\sqrt{rac{1}{m} + rac{1}{n}}} \sim t(m+n-2) \end{split}$$

同2.1.2,
$$\mu_1-\mu_2$$
的置信水平为 $1-lpha$ 的置信区间为 $\overline{x}-\overline{y}\pm t_{1-rac{lpha}{2}}(m+n-2)\cdot s_w\sqrt{rac{1}{m}+rac{c}{n}}$ 。

2.1.4 一般情况下的近似置信区间

Behrens-Fisher问题,有近似方法可以进行区间估计,详见茆诗松《概率论与数理统计》第三版P310。

$$T=rac{\overline{x}-\overline{y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_0}, s_0^2=rac{s_x^2}{m}+rac{s_y^2}{n} \ T\sim t(l), l=rac{s_0^4}{rac{s_x^2}{m^2(m-1)}+rac{s_y^2}{n^2(n-1)}}$$

 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为1 - lpha的置信区间为 $\overline{x} - \overline{y} \pm s_0 t_{1-rac{lpha}{2}}(l)$ 。

$2.2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

$$egin{split} rac{(m-1)s_x^2}{\sigma_1^2} &\sim \chi^2(m-1); rac{(n-1)s_y^2}{\sigma_2^2} &\sim \chi^2(n-1) \ F &= rac{rac{s_x^2}{\sigma_1^2}}{rac{s_y^2}{\sigma_2^2}} &= rac{s_x^2}{s_y^2} rac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} &\sim F(m-1,n-1) \end{split}$$

因此, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为1-lpha的置信区间为 $\left[\frac{s_x^2}{s_y^2} \frac{1}{F_{1-rac{lpha}{2}} \left(m-1,n-1
ight)}, \frac{s_x^2}{s_y^2} \frac{1}{F_{rac{lpha}{2}} \left(m-1,n-1
ight)}
ight]$ 。

3 大样本置信区间

当样本量充分大时,可以使用渐进正态分布来构造近似的置信区间。

3.1 二点分布参数p的置信区间

由中心极限定理,样本均值 \overline{x} 的渐近分布为 $N(p,\frac{p(1-p)}{n})$, $u=\frac{\overline{x}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ 渐近服从标准正态分布。

$$egin{aligned} P(|rac{\overline{x}-p}{\sqrt{rac{p(1-p)}{n}}}| & \leq u_{1-rac{lpha}{2}}) pprox 1-lpha \ \lambda & = u_{1-rac{lpha}{2}}^2, (1+rac{\lambda}{n})p^2 - (2\overline{x}+rac{\lambda}{n})p + \overline{x}^2 \leq 0 \ & rac{1}{1+rac{\lambda}{n}}(\overline{x}+rac{\lambda}{2n}\pm\sqrt{rac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\lambda + rac{\lambda^2}{4n^2}) \ & n
ightarrow +\infty, rac{\lambda}{n}
ightarrow 0, \overline{x}\pm u_{1-rac{lpha}{2}}\sqrt{rac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \end{aligned}$$

4 样本量的确定

绝对误差: 置信区间的半径(长度的一半) d_0 。

4.1σ 已知时 μ 的置信区间

$$egin{aligned} d_0 &\geq u_{1-rac{lpha}{2}} \cdot rac{\sigma}{\sqrt{n}} \ n &\geq (u_{1-rac{lpha}{2}} \cdot rac{\sigma}{d_0})^2 \end{aligned}$$

4.2 二点分布参数p的置信区间

$$egin{aligned} d_0 &\geq u_{1-rac{lpha}{2}} \sqrt{rac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \ & n \geq u_{1-rac{lpha}{2}}^2 \cdot rac{\overline{x}(1-\overline{x})}{d_0^2} \end{aligned}$$

5 单侧置信区间

定义2: 若对任意 $\theta \in \Theta$,有 $P_{\theta}(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$,则称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的同等置信区间。

定义3: 若对任意 $\theta\in\Theta$,有 $P_{\theta}(\hat{\theta}_L\leq\theta)\geq 1-\alpha$,则称随机区间 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限。

定义4: 若对任意 $\theta \in \Theta$,有 $P_{\theta}(\hat{\theta}_U \geq \theta) \geq 1-\alpha$,则称随机区间 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限。

6 SPSS应用

"分析"一"描述统计"一"探索"一因变量列表一"统计"一"描述"一平均值的置信区间