第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质

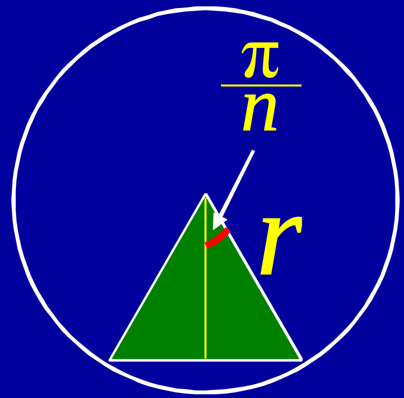
三、极限存在准则

HIGHER EDUCATION PRESS

一、数列极限的定义

引例. 设有半径为 r 的圆, 用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S .

如图所示 , 可知



$$A_n = n\,r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

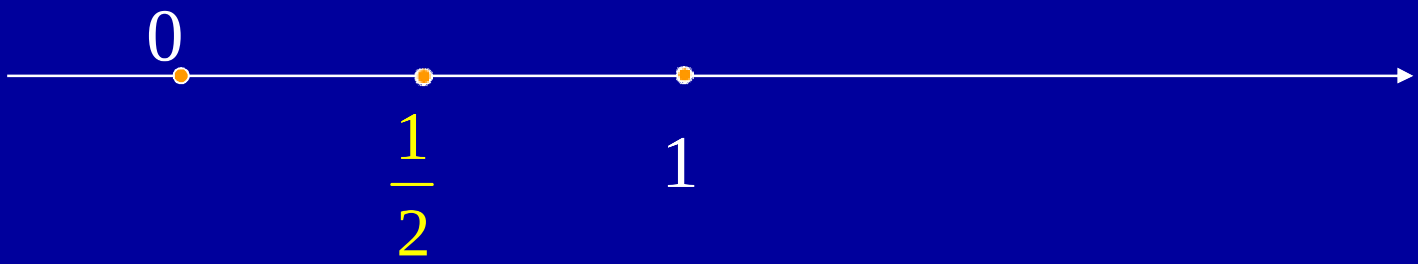
$$(n = 3, 4, 5, \cdots)$$

当 n 无限增大时, A_n 无限逼近 S . (刘徽割圆术)

数学语言描述: $\forall e > 0$, $\exists$正整数 N, 当 $n > N$ 时, 总有

$$|A_n - S| < e$$

观察数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$



$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<10^{-2}, \quad n>100, \quad 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \cdots$$

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<10^{-3}, \quad n>1000, \quad 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{999}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1001}, \cdots$$

定义: 自变量取正整数的函数称为**数列**, 记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$. x_n 称为**通项**(一般项) .

若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists 正数 N,\ 当\ n > N\ 时,\ 总有 \left| x_n - a \right| < \varepsilon$$

则称该数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a , 记作

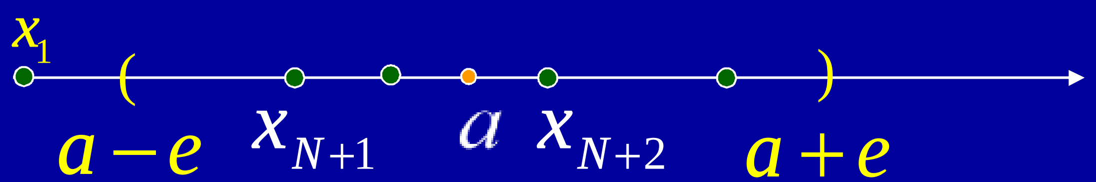
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

此时也称数列**收敛** , 否则称数列**发散** .

$$a - e < x_n < a + e \quad (n > N)$$

即 $x_n \in U(a, e) \quad (n > N)$

几何解释 :



例如, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \mathrm{L}, \frac{n}{n+1}, \mathrm{L}$

$$x_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

$$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

收敛

$2, 4, 8, \mathrm{L}, 2^n, \mathrm{L}$

$$x_n = 2^n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

$$x_n = (-1)^{n+1}$$ 趋势不定

发散

例1. 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为1.

证: $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

$\forall e > 0$, 欲使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{e}$

因此，取 $N = [\dfrac{1}{e}]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < e$$

故 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

例2. 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证: $\left|x_n-0\right|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}$

$\forall e\in(0,1)$, 欲使 $\left|x_n-0\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n+1}<e$, 即 $n>\dfrac{1}{e}-1$.

取 $N=[\dfrac{1}{e}-1]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|x_n-0\right|<e$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$

说明: N 与 e 有关, 但不唯一.

不一定取最小的 N.

也可由 $\left|x_n-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

取 $N=[\dfrac{1}{\sqrt{e}}-1]$

例3. 设 $|q|<1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限为0 .

证: $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $|q|^{n-1} < \varepsilon$, 即

$(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$, 亦即 $n > 1 + \dfrac{\ln e}{\ln|q|}$.

因此 , 取 $N = \left[1 + \dfrac{\ln e}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < e$$

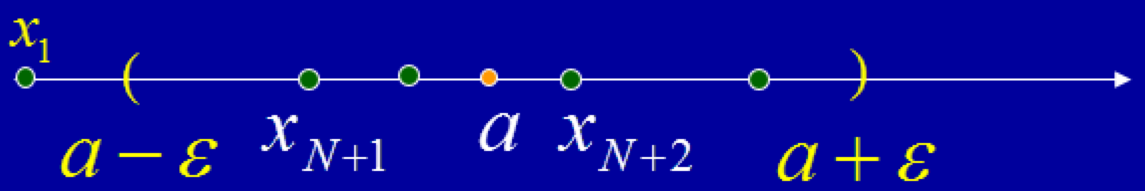
故 $$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

收敛数列 $\{u_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$,

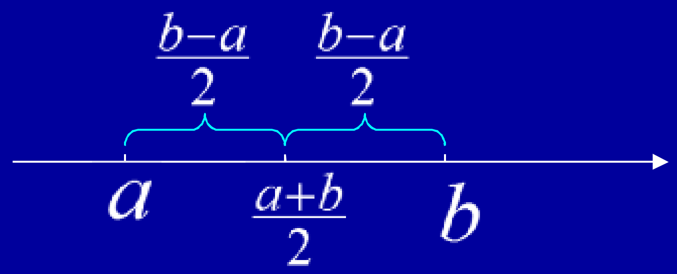
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$正数 N, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$



$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$(n > N)$

即 $x_n \in U(a, \varepsilon)$
$(n > N)$

二、收敛数列的性质



1. 收敛数列的极限唯一.

证: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 N_1, 使当 $n > N_1$ 时,

$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $x_n < \frac{a+b}{2}$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2, 使当 $n > N_2$ 时, 有

$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $x_n > \frac{a+b}{2}$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, x_n 满足的不等式矛盾, 故假设不真! 因此收敛数列的极限必唯一.

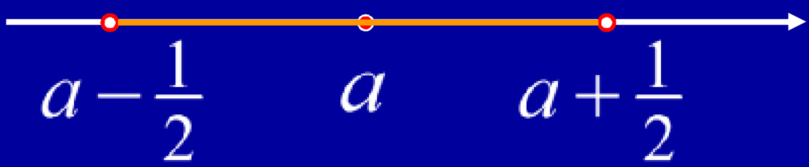
例4. 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 是发散的.

证: 用反证法.

假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则有唯一极限 a 存在 .

取 $e = \frac{1}{2}$, 则存在 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$a - \frac{1}{2} < x_n < a + \frac{1}{2}$$



但因 x_n 交替取值 1 与 −1 , 而此二数不可能同时落在长度为 1 的开区间 $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ 内, 因此该数列发散 .

2. 收敛数列一定有界.

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$|x_n - a| < 1$, 从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $\quad M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$

则有 $\quad |x_n| \le M \ (n = 1, 2, \cdots)$.

由此证明收敛数列必有界.

说明: 此性质反过来不一定成立. 例如,

数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛.

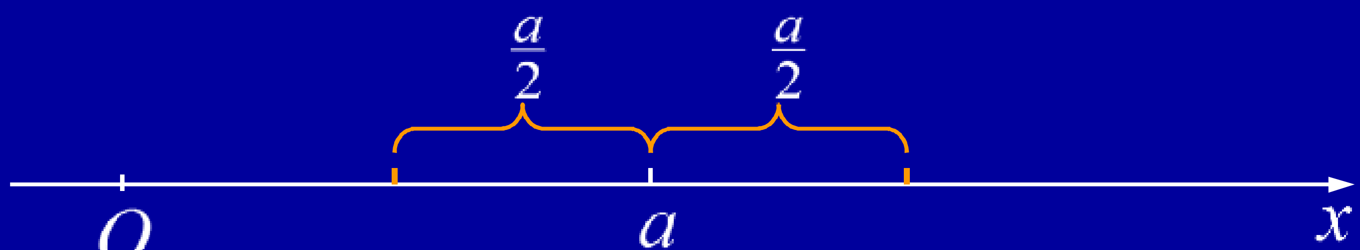
3. 收敛数列具有保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0$, 则 $\exists N \in \mathrm{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$

(< 0) (< 0)

证: 对 $a > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{a}{2}$, 则 $\exists N \in \mathrm{N}^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| x_n - a \right| < \frac{a}{2} \Longrightarrow x_n > a - \frac{a}{2} > 0$$



推论: 若数列从某项起 $x_n \geq 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$

(≤ 0) (≤ 0).

(用反证法证明)

4. 收敛数列的任一子数列收敛于同一极限 .

证: 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 .

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

现取正整数 K, 使 $n_K \ge N$, 于是当 $k > K$ 时, 有

$$n_k > n_K \ge N$$

x_N x_{n_K}

******************************** ··········

N n_K

从而有 $\left| x_{n_k} - a \right| < \varepsilon$, 由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

说明:

由此性质可知，若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散.

例如,

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 发散！}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$$

三、极限存在准则

夹逼准则；　单调有界准则；　*柯西审敛准则.

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{\text{大}} + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}_{\text{大}} + \cdots$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{正}}$$

比较可知 $x_n < x_{n+1} \; (n = 1, 2, \cdots)$

又 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

内容小结

1. 数列极限的 “ $e-N$ ” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限

3. 极限存在准则:

夹逼准则；单调有界准则；*柯西准则

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

方法1. 找一个趋于∞的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1=1,\ x_{n+1}=1+2x_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时, 下述作法是否正确? 说明理由.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a=1+2a \Longrightarrow a=-1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

作业

P30 1, *3 (2) , *4

P56 4 (1) , (3)

4 (3) 提示:

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_{n-1}}$$

可用数学归纳法证 $x_n \le 2$

备用题

1. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $x_1 > 0$, $a > 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

利用极限存在准则

解: $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n{}^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{a}) = 1$$

$\therefore$ 数列单调递减有下界，故极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

则由递推公式有 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{a}{A}) \Longrightarrow A = \pm\sqrt{a}$

$\because x_1 > 0$, $\therefore x_n > 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

2. 设 $a_i \ge 0\,(i=1,2,\cdots)$, 证明下述数列有极限 .

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

证: 显然 $x_n \le x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调增, 又

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}=1-\frac{1}{1+a_1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}<1 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n \text{ 存在}$$

“拆项相消” 法

刘徽(约225 – 295年)

我国古代魏末晋初的杰出数学家. 他撰写的《重差》对《九章算术》中的方法和公式作了全面的评注, 指出并纠正了其中的错误, 在数学方法和数学理论上作出了杰出的贡献 .他的 “ 割圆术 ” 求圆周率 π 的方法 :

“ 割之弥细 , 所失弥小, 割之又割 , 以至于不可割 , 则与圆合体而无所失矣 ”

它包含了“**用已知逼近未知 , 用近似逼近精确**”的重要极限思想 .

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学,复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷.其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》, 《微积分在几何上的应用》 等,有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 .他是经典分析的奠基人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.