第六节 极限存在准则及两个重要极限

一、函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

二、 两个重要极限

HIGHER EDUCATION PRESS

一、 函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

1. 函数极限与数列极限的关系

定理1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ f(x_n)\text{有定义},$$

$x\to\infty$

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{有}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

$x_n\to\infty$

为确定起见，仅讨论 $x\to x_0$ 的情形.

定理1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \{x_n\}: x_n \neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

证: "$\Longrightarrow$" 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 即 $\forall e > 0, \exists d > 0$, 当

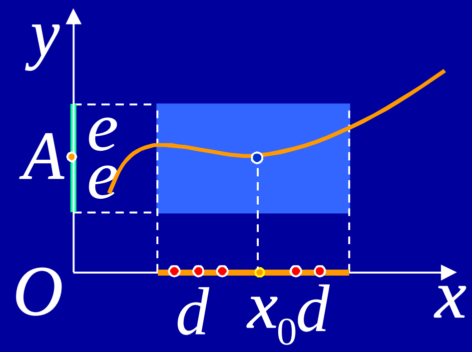
$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < e$.

$\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$,

对上述 d, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$,

于是当 $n > N$ 时 $|f(x_n) - A| < e$.

故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$



"$\Longleftarrow$" 可用反证法证明. (略)

定理1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0$, $f(x_n)$ 有定义

且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$
$(x_n\to\infty)$

说明: 此定理常用于判断函数极限不存在 .

法1 找一个数列 $\{x_n\}$: $x_n\neq x_0$，且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

证: 取两个趋于 0 的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi} \quad 及 \quad x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=1$$

由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

1. 夹逼准则 (准则1) (P46)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \mathrm{L}\ ) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall e > 0, \exists N_1, N_2,$

当 $n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$

当 $n > N_2$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1) $\quad a - e < y_n \le x_n \le z_n < a + e$

即 $|x_n - a| < e$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用夹逼准则 . 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$$

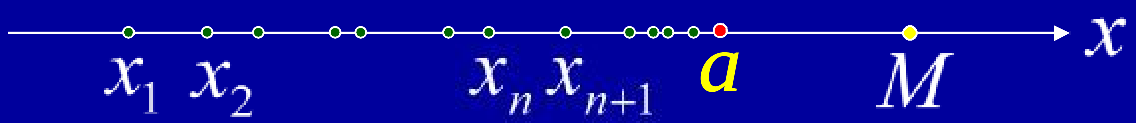
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

2. 单调有界数列必有极限 (准则2) (P48)

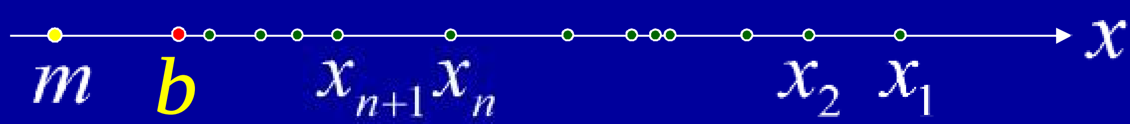
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ (\ge m)$$



(证明略)

例3 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在，并求极限。

解 记 $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots$，则有 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$,

显然 $x_n > 0,\ \ n = 1, 2, \cdots$ 且 $x_1 = \sqrt{2} < 2$,

假设 $x_{n-1} < 2$, 考虑 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$,

由数学归纳法， $x_n < 2,\ \ n = 1, 2, \cdots$

从而，数列 $\{x_n\}$ 有界。

$$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2+x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{(\sqrt{2+x_{n-1}} + x_{n-1})(\sqrt{2+x_{n-1}} - x_{n-1})}{\sqrt{2+x_{n-1}} + x_{n-1}}$$

$$= \frac{2+x_{n-1} - x_{n-1}^2}{\sqrt{2+x_{n-1}} + x_{n-1}} = \frac{(2-x_{n-1})(1+x_{n-1})}{\sqrt{2+x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0$$

数列 $\{x_n\}$ 单调有界，由单调有界数列必有极限，知数列 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+x_{n-1}}$ 得 $a = \sqrt{2+a}$

解得a=2, a=-1(舍)。

例4. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 . (P48～P51)

证: 利用二项式公式 , 有

$$x_n=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n})$$

又 $$x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

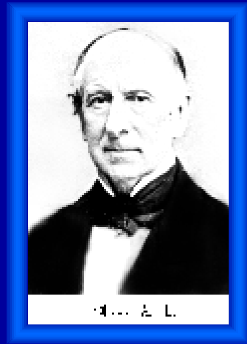
记此极限为 e , 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$$

e 为无理数 , 其值为

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$$

*3. 柯西极限存在准则(柯西审敛原理) (P51)



数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall e > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m > N$, $n > N$ 时,

有 $$|x_n - x_m| < e$$

证: "必要性". 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使当

$m > N$, $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < e/2, \quad |x_m - a| < e/2$$

因此 $$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)|$$

$$\le |x_n - a| + |x_m - a| < e$$

"充分性" 证明从略.

2. 函数极限存在的夹逼准则

定理2. 当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, d)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且

$(\,|x| > X > 0\,)$

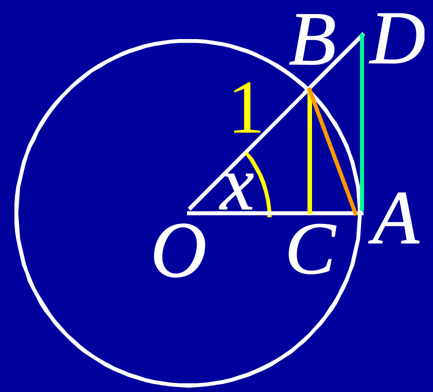
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$$

(利用定理1及数列的夹逼准则可证)

二、 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



证： 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$\triangle AOB$ 的面积 < 圆扇形 AOB 的面积 < $\triangle AOD$ 的面积

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

故有 $$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\qquad(0<x<\frac{\pi}{2})$$

显然有 $$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\qquad(0<|x|<\frac{\pi}{2})$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 注 $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

注

当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时

$$0 < |1 - \cos x| = 1 - \cos x$$

$$= 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解: 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 因此

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$$

HIGHER EDUCATION PRESS

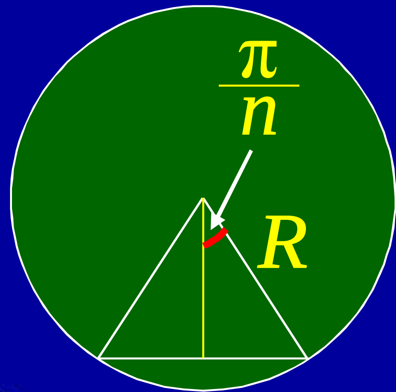
目录 上页 下页 返回 结束

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$

例8. 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$



证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.

证: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi R^2\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\dfrac{\pi}{n}=\pi R^2$

说明: 计算中注意利用 $\boxed{\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$

证: 当 $x>0$ 时, 设 $n\le x<n+1$, 则

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \mathrm{e} \qquad \text{(P53~54)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})] = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$

当 $x\to-\infty$ 时, 令 $x=-(t+1)$, 则 $t\to+\infty$, 从而有

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}[(1+\frac{1}{t})^{t}(1+\frac{1}{t})]=\mathrm{e}$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$

说明: 此极限也可写为 $\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$

例9. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解: 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

说明: 若利用 $\lim\limits_{j(x)\to\infty}(1+\frac{1}{j(x)})^{j(x)}=\mathrm{e}$, 则

$$原式=\lim_{-x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$$

例10. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\,(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\,\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}$$

内容小结

1. 函数极限与数列极限关系的应用

(1) 利用数列极限判别函数极限不存在

法1 找一个数列 $\{x_n\}: x_n \neq x_0$，且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

(2) 数列极限存在的夹逼准则

$\Longrightarrow$ 函数极限存在的夹逼准则

2. 两个重要极限

(1) $$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

(2) $$\lim_{\square \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$$

或 $$\lim_{\square \to 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

注: $\square$ 代表相同的表达式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=0.$$

HIGHER EDUCATION PRESS

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = e^{-1}, \quad \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1},$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}[(x-\frac{1}{x})^{-x}]^{-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(x-\frac{1}{x})^{-x}} = \frac{1}{e}$$

思考与练习

填空题 (1～4)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \underline{\quad e^{-1} \quad}$;

作业

P52 1 (4)，(5)，(6)；

2 (2)，(3)，(4)；

4 (4) , (5)

第六节 极限存在准则及两个重要极限

一、函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

二、 两个重要极限

HIGHER EDUCATION PRESS

一、 函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

1. 函数极限与数列极限的关系

定理1.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \{x_n\}:\ x_n \neq x_0,\ f(x_n) \text{ 有定义},$$

$x \to \infty$

$$x_n \to x_0\ (n \to \infty), \text{ 有 } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

$x_n \to \infty$

为确定起见，仅讨论 $x \to x_0$ 的情形.

定理1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

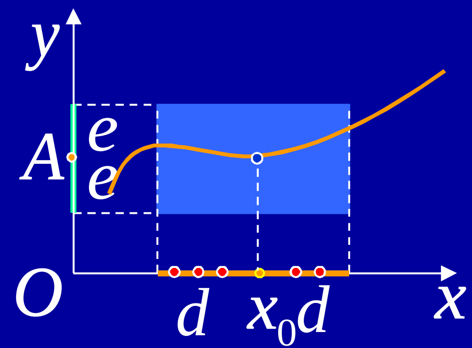
证: “$\Longrightarrow$” 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall e>0, \exists d>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<e$.

$\forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

对上述 d, $\exists\, N$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

于是当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<e$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$



“$\Longleftarrow$”可用反证法证明. (略)

定理1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0$, $f(x_n)$ 有定义

且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$
$(x_n\to\infty)$

说明: 此定理常用于判断函数极限不存在 .

法1 找一个数列 $\{x_n\}$: $x_n\neq x_0$, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

证: 取两个趋于 0 的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi} \text{ 及 } x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

有
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=1$$

由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

1. 夹逼准则 (准则1)　(P46)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \mathrm{L}\ ) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall e > 0, \exists N_1,\ N_2,$

$$\text{当}\ n > N_1\ \text{时},\ |y_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{当}\ n > N_2\ \text{时},\ |z_n - a| < \varepsilon$$

令 $N = \max\{N_1\,,\ N_2\}$, 则当 $n > N$ 时，有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1)　$a - e < y_n \le x_n \le z_n < a + e$

即 $|x_n - a| < e$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用夹逼准则 . 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$$

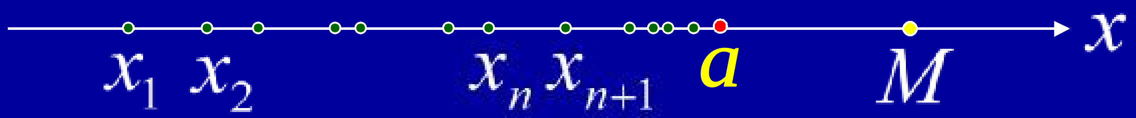
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

2. 单调有界数列必有极限 (准则2) (P48)

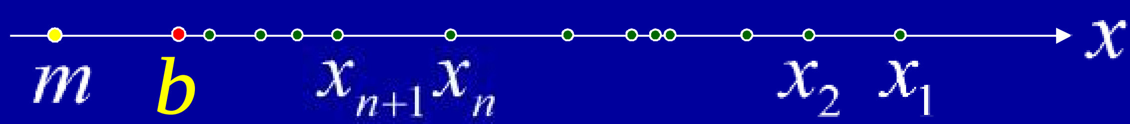
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \ (\le M\ )$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ \ (\ge m\ )$$



(证明略)

例3 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在，并求极限。

解 记 $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots$，则有 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，

显然 $x_n>0,\ \ n=1,2,\cdots$ 且 $x_1=\sqrt{2}<2$,

假设 $x_{n-1}<2$, 考虑 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$,

由数学归纳法， $x_n<2,\ \ n=1,2,\cdots$

从而，数列 $\{x_n\}$ 有界。

$$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2+x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{(\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1})(\sqrt{2+x_{n-1}}-x_{n-1})}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}}$$

$$= \frac{2+x_{n-1}-x_{n-1}^2}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}} = \frac{(2-x_{n-1})(1+x_{n-1})}{\sqrt{2+x_{n-1}}+x_{n-1}} > 0$$

数列 $\{x_n\}$ 单调有界，由单调有界数列必有极限，知数列 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+x_{n-1}}$ 得 $a = \sqrt{2+a}$

解得a=2, a=-1(舍)。

例4. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在. (P48～P51)

证: 利用二项式公式, 有

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

又 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

记此极限为 e , 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$$

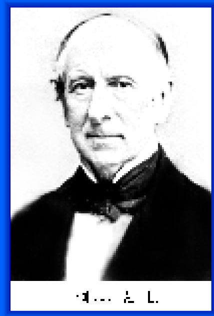
e 为无理数 , 其值为

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$$

HIGHER EDUCATION PRESS

内容小结 目录 上页 下页 返回 结束

*3. 柯西极限存在准则(柯西审敛原理) (P51)



数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall e > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m > N$, $n > N$ 时,

有
$$|x_n - x_m| < e$$

证: "必要性". 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使当

$m > N$, $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < e/2, \quad |x_m - a| < e/2$$

因此
$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)|$$
$$\le |x_n - a| + |x_m - a| < e$$

"充分性" 证明从略 .

2. 函数极限存在的夹逼准则

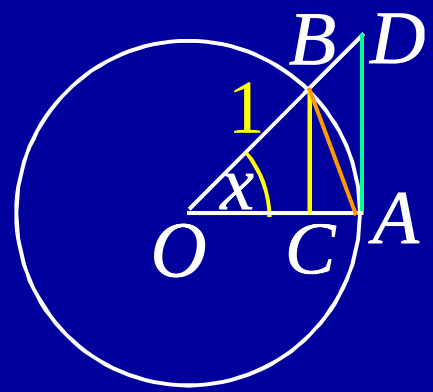
定理2. 当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, d)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且
$(|x| > X > 0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$$

(利用定理1及数列的夹逼准则可证)

二、两个重要极限



1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证： 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$\triangle AOB$ 的面积 < 圆扇形 AOB 的面积 < $\triangle AOD$ 的面积

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

故有 $$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\qquad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

显然有 $$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\qquad (0<|x|<\frac{\pi}{2})$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 注 $\qquad \therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

注

当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时

$$0 < |1 - \cos x| = 1 - \cos x$$

$$= 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解: 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 因此

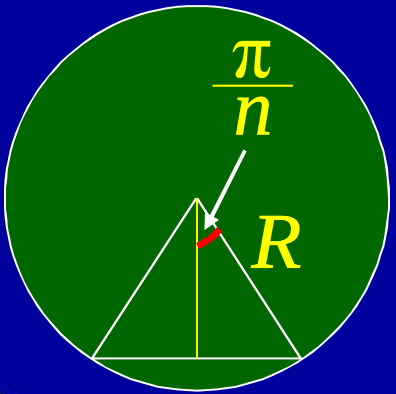
原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$

例8. 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n = nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$



证明: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\pi R^2$.

证: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi R^2\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$

说明: 计算中注意利用 $\boxed{\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1}$

2. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$

证: 当 $x>0$ 时, 设 $n\le x<n+1$, 则

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \mathrm{e} \quad \text{(P53~54)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})] = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$

当 $x \to -\infty$ 时, 令 $x = -(t+1)$, 则 $t \to +\infty$, 从而有

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty} \left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \left(1+\frac{1}{t}\right)\right] = \mathrm{e}$$

故 $$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

说明: 此极限也可写为 $\lim\limits_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}$

例9. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解： 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

说明： 若利用 $\lim\limits_{j(x)\to\infty}(1+\frac{1}{j(x)})^{j(x)}=\mathrm{e}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{-x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$$

例10. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\,(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\,\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}$$

内容小结

1. 函数极限与数列极限关系的应用

(1) 利用数列极限判别函数极限不存在

法1 找一个数列$\{x_n\}$: $x_n \neq x_0$, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在 .

法2 找两个趋于x_0的不同数列$\{x_n\}$及$\{x_n'\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

(2) 数列极限存在的夹逼准则

$\Longrightarrow$ 函数极限存在的夹逼准则

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin \square}{\square} = 1$

(2) $\lim\limits_{\square \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\square}\right)^{\square} = e$

或 $\lim\limits_{\square \to 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e$

注: $\square$ 代表相同的表达式

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = e^{-1}, \quad \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1},$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}[(x-\frac{1}{x})^{-x}]^{-1} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}(x-\frac{1}{x})^{-x}} = \frac{1}{e}$$

思考与练习

填空题（1～4）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \underline{\quad e^{-1} \quad}$;

作业

P52 1 (4), (5), (6);

2 (2), (3), (4);

4 (4), (5)