例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$\boxed{\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$$

$$= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例7. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

$$\text{原式}=2\int t\,e^t\,dt$$

令 $u=t$, $v'=e^t$

$$=2\left(t\,e^t-\int e^t\,dt\right)$$

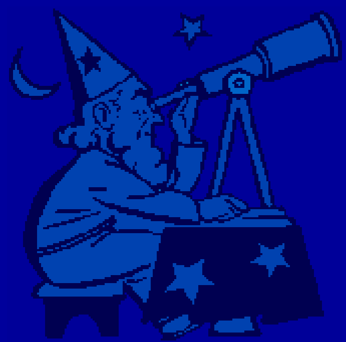
$$=2(t\,e^t-e^t)+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

第四节 有理函数的积分

- 基本积分法：直接积分法；换元积分法；
  分部积分法

- 初等函数 $\underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ 初等函数



本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$时, $R(x)$为真分式

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$

$\downarrow$ 分解

$\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in\mathbf{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$； (2) $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$； (3) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore \quad A=(x-2)\cdot 原式\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot 原式\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad 原式=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A = (1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1 = \frac{4}{5} + C \\ \frac{1}{6} = \frac{4}{15} + \frac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -\frac{2}{5} \\ C = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式 = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

四种典型部分分式的积分:

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

$$2.\ \int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$$

$$(x^2+px+q)' = 2x+p$$

$$3.\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$4.\ \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$$(p^2-4q<0,\ n\neq 1)$$

变分子为

$$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$$

再分项积分

HIGHER EDUCATION PRESS

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

例1(3)

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln\left|1+2x\right| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例1(3) 目录 上页 下页 返回 结束

例3. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

思考: 如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

提示: 变形方法同例3, 并利用书 P363 公式20 .

说明: 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. 求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解:

$$I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

本题用常规方法解很繁

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

注意本题技巧

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

(见P363 公式21)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

按常规方法解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 a, b, c, d. 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A, B, C, D.

第三步 分项积分.

此解法较繁!

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\boxed{t \text{ 的有理函数的积分}}$$

万能代换
(参考下页例7)

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解(法一)

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{\sin x(1+\cos x)(1-\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc^3 x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \csc^3 x dx = \int \csc x \cdot \csc^2 x dx$$

$$= -\int \csc x d\cot x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x + \int \cot x d\csc x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \cot^2 x \csc x dx$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int (\csc^2 x - 1) \csc x dx$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \csc^2 x \csc x dx + \int \csc x dx$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \csc^2 x \csc x dx + \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

解(法二)

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x(1+\cos x)}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\sin^2 x(1+\cos x)} + \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} + \int \sec^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{1}{2}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} + \tan \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \qquad t=\cos x$$

$$=\int \frac{dt}{(1-t^2)(1-t)}=\int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)^2}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt=\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C$$

例8. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\quad (ab \neq 0)$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 1

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$$

令 $t = \tan x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(at+b)^2} = -\frac{1}{a(at+b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$$

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$

解法 2 令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

$$原式 = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi) + C$$

$$\varphi = \arctan\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan\left(x - \arctan\frac{a}{b}\right) + C$$

例10. 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

$$\text{原式} = \int \frac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} = -\int \frac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2,\ \mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$原式 =\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u =3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$=3[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln\left|1+u\right|\ ]+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例12. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2 , 3 的最小公倍数 6， 令 $x=t^6$, 则有

$$原式 = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6[\,\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\,] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例13. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)\cdot t\cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \quad =-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & \text{三角函数有理式} \arrow[l, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & \text{简单无理函数} \arrow[ul, "\text{根式代换}"'] \arrow[u, "\text{三角代换}"']
\end{tikzcd}$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便， 要注意综合使用基本积分法，简便计算 .

思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1.\ \int \frac{x^2}{a^6 - x^6}\,\mathrm{d}x \quad (a>0) \qquad\qquad 2.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos x}$$

解: 1. 原式 $= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \dfrac{1}{6a^3}\ln\left|\dfrac{x^3+a^3}{x^3-a^3}\right| + C$

2. 原式 $= \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} + C$$

作业

P218　3，6，8，9，13，

15，17，18，20，24

备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

2.求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x} dx$.

解： 原式 $= \int \frac{1}{3+\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{3+\cos x} dx$

前式令 $u = \tan \frac{x}{2}$；后式配元

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du - \int \frac{1}{3+\cos x} d(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2} du - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}) - \ln|3+\cos x| + C$$

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例7. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

$$\text{原式}=2\int t\,e^t\,dt$$

$$\Big\downarrow \text{令 } u=t,\ v'=e^t$$

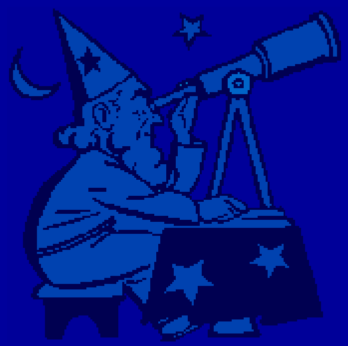
$$=2\left(t\,e^t-\int e^t\,dt\right)$$

$$=2(t\,e^t-e^t)+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

第四节 有理函数的积分

- 基本积分法：直接积分法；换元积分法；
  分部积分法
- 初等函数 $\underset{\cancel{\text{积分}}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ 初等函数



本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$为真分式

有理函数 $\underline{\underline{\quad\text{相除}\quad}}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分 式}}$

$\downarrow$ 分解

$\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathbf{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{1}{x(x-1)^2};\qquad (2)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\qquad (3)\ \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

HIGHER EDUCATION PRESS

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore\quad A=(x-2)\cdot 原式\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot 原式\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad 原式=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=(1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1=\dfrac{4}{5}+C \\ \dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{2}{5} \\ C=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

$(x^2+px+q)' = 2x+p$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

$(p^2-4q<0,\, n\neq 1)$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解: 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

例1(3)

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例1(3) 目录 上页 下页 返回 结束

例3. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考: 如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

提示: 变形方法同例3, 并利用书 P363 公式20 .

说明: 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. 求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解:
$$I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

本题用常规方法解很繁

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

注意本题技巧

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

(见P363 公式21)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x \neq 0)$$

按常规方法解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 a,b,c,d. 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式. 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 A,B,C,D.

第三步 分项积分.

此解法较繁!

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

万能代换
(参考下页例7)

t 的有理函数的积分

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t| \right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

例7. 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解(法一)

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{\sin x(1+\cos x)(1-\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sin^3 x}\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc^3 x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} + \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\int \csc^3 x\mathrm{d}x = \int \csc x \cdot \csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$= -\int \csc x\mathrm{d}\cot x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x + \int \cot x\mathrm{d}\csc x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \cot^2 x \csc x\mathrm{d}x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int (\csc^2 x - 1)\csc x\mathrm{d}x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \csc^2 x \csc x\mathrm{d}x + \int \csc x\mathrm{d}x$$

$$= -\csc x \cdot \cot x - \int \csc^2 x \csc x\mathrm{d}x + \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$$

解(法二)

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x(1+\cos x)}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\sin^2 x(1+\cos x)}+\int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}+\int \sec^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{1}{2}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}+\tan\frac{x}{2}$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

$$\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \qquad t = \cos x$$

$$= \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-t)} = \int \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C$$

例8. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\quad (ab \neq 0)$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时, 用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 1

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } t = \tan x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(at + b)^2} = -\frac{1}{a(at + b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$$

例9. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \quad (ab\neq 0)$

解法 2 令 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ ， $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$

$$原式=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi)+C$$

$$\varphi=\arctan\frac{a}{b}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan\left(x-\arctan\frac{a}{b}\right)+C$$

例10. 求 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

$$\text{原式}=\int \frac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}=-\int \frac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$=-\int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}=-\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t=-\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令 \ t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令 \ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2,\ \mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$= 3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$= 3[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\ ]+C$$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例12. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2 , 3 的最小公倍数 6， 令 $x=t^6$, 则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6[\,\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\,] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

例13. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)\cdot t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \quad =-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$
\begin{tikzcd}
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & & \text{三角函数有理式} \arrow[ll, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单无理函数} \arrow[ull, "\text{根式代换}"'] \arrow[u, "\text{三角代换}"']
\end{tikzcd}
$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便，要注意综合使用基本积分法，简便计算 .

思考与练习

如何求下列积分更简便？

1. $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} \mathrm{d}x \quad (a > 0)$　　2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos x}$

解: 1. 原式 $= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C$

2. 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + C$$

作业

P218　3，6， 8， 9，13，

15，17，18，20，24

备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

2.求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x} \mathrm{d}x$.

解： 原式 $= \int \frac{1}{3+\cos x} \mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{3+\cos x} \mathrm{d}x$

前式令 $u = \tan \frac{x}{2}$；后式配元

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u - \int \frac{1}{3+\cos x} \mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2} \mathrm{d}u - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right) - \ln|3+\cos x| + C$$