第五节
极限运算法则

一、无穷小运算法则

二、 极限的四则运算法则

三、 复合函数的极限运算法则

HIGHER EDUCATION PRESS

一、 无穷小运算法则

定理1. 有限个无穷小的和还是无穷小 .

证: 考虑两个无穷小的和 . 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$,

$\forall e>0$, $\exists\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时 , 有 $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时 , 有 $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $d=\min\{d_1, d_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<d$ 时, 有

$$|a+b|\le|a|+|b|<\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=e$$

因此 $$\lim_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0.$$

这说明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha+\beta$ 为无穷小量 .

类似可证: **有限个**无穷小之和仍为无穷小 .

说明: 无限个无穷小之和**不一定**是无穷小 !

例如,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

(P57 题 4 (2))

解答见课件第二节 例5

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

定理2. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证: 设 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_1)$, $|u| \le M$

又设 $\lim\limits_{x \to x_0} a = 0$, 即 $\forall e > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_2)$

时, 有 $|a| \le \frac{e}{M}$

取 $d = \min\{d_1, d_2\}$, 则当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, d)$ 时, 就有

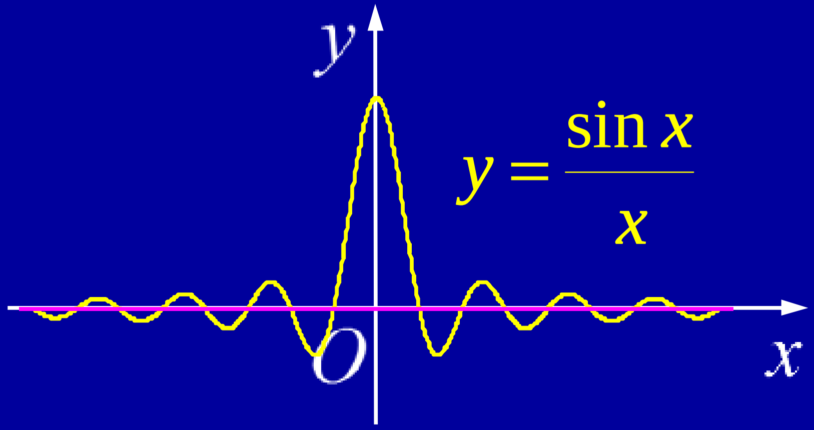
$$|u a| = |u||a| \le M \cdot \frac{e}{M} = e$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} u\alpha = 0$, 即 $u\alpha$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

推论 1. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2. 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解: $\because\ |\sin x|\le 1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

利用定理 2 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

说明 : $y=0$ 是 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线 .

二、 极限的四则运算法则

定理 3 . 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

证: 因 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则有

$$f(x)=A+\alpha \ , \ g(x)=B+\beta$$

(其中 α , β 为无穷小)

于是
$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)$$
$$=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$$

由定理 1 可知 $\alpha\pm\beta$ 也是无穷小, 再利用极限与无穷小的关系定理 , 知定理结论成立 .

推论: 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 且 $f(x)\geq g(x)$,

则 $A\geq B$. **(P46 定理 5)**

提示: 令 $j(x)=f(x)-g(x)$

利用保号性定理证明 .

说明: 定理 3 可推广到有限个函数相加、减的情形 .

定理 4 . 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则有

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$$

提示: 利用极限与无穷小关系定理及本节定理2 证明 .

说明: 定理 4 可推广到有限个函数相乘的情形 .

推论 1 . $\lim[C\,f(x)]=C\lim f(x)$ (C 为常数)

推论 2 . $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$ (n 为正整数)

例2. 设 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 试证 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$.

证: $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)=a_0+a_1\lim\limits_{x\to x_0}x+\cdots+a_n\lim\limits_{x\to x_0}x^n$

$$=P_n(x_0)$$

定理 5 . 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，且 $B \neq 0$，则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$$

证: 因 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，有

$$f(x) = A + a \ , \ g(x) = B + b \ ,$$ 其中 a , b 为无穷小

设

$$\gamma = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+a}{B+b} - \frac{A}{B} = \underbrace{\frac{1}{B(B+b)}}_{\text{有界}} \underbrace{(Ba - Ab)}_{\text{无穷小}}$$

因此 g 为无穷小, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + g$

由极限与无穷小关系定理，得 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

定理6 . 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, 则有

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = AB$

(3) 当 $y_n \neq 0$ 且 $B \neq 0$ 时, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$

提示: 因为数列是一种特殊的函数 , 故此定理 可由定理3 , 4 , 5 直接得出结论 .

例3. 设有分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 都是多项式，若 $Q(x_0)\neq 0$, 试证: $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)$.

证:

$$\lim_{x\to x_0} R(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)$$

说明: 若 $Q(x_0)=0$, 不能直接用商的运算法则 .

例4.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+3}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$x=3$ 时分母为 0 !

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

例5 . 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解: $x=1$ 时, 分母 = 0 , 分子≠0 , 但因

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot1+4}{2\cdot1-3}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$.

解: $x\to\infty$ 时, 分子 $\to\infty$, 分母 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^2, 则

“抓大头”

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4-3\frac{1}{x}+9\frac{1}{x^2}}{5+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{5}$$

一般有如下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

$(a_0b_0\neq 0, m, n$ 为非负常数 $)$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n=m \quad (如 P47 例5) \\ 0, & 当 n>m \quad (如 P47 例6) \\ \infty, & 当 n<m \quad (如 P47 例7)\end{cases}$$

三、 复合函数的极限运算法则

定理7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$\varphi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证: $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$, 当 $0<|u-a|<\eta$

时, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$, $\exists\delta_2>0$, 当

$0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|\varphi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

故 $\quad |f[\varphi(x)]-A| = |f(u)-A|<\varepsilon$, 因此①式成立.

定理7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$\varphi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u)=A$$

说明: 若定理中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, 则类似可得

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to\infty} f(u)=A$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ ，仿照例4 例4

$$\lim_{x\to 3} u=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad 原式=\lim_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

(见P34 例5)

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

解：方法 1 令 $u=\sqrt{x}$，则 $\lim\limits_{x\to1}u=1$，

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{u^2-1}{u-1}=u+1$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{u\to1}(u+1)=2$$

方法 2

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)$$

$$=2$$

内容小结

1\. 极限运算法则 Th1 Th2 Th3 Th4 Th5 Th7

(1) 无穷小运算法则

(2) 极限四则运算法则

(3) 复合函数极限运算法则

} 注意使用条件

2\. 求函数极限的方法

(1) 分式函数极限求法

1) $x \to x_0$ 时, 用代入法 (要求分母不为 0)

2) $x \to x_0$ 时, 对 $\frac{0}{0}$ 型 , 约去公因子

3) $x \to \infty$ 时 , 分子分母同除最高次幂 "抓大头"

(2) 复合函数极限求法 —— 设中间变量

思考及练习

1. 若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 问 $\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在． 否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在，与已知条件矛盾.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right]=?$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解法 1

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

解法 2 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t\to 0^+$

$$原式=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1}=\frac{1}{2}$$

4. 试确定常数 a 使 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0.$

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $$-1-a=0$$

因此 $$a=-1$$

作业

P49　1 (5)，(7)，(9)，(12)，(14)

2 (1)，(3)

3 (1)

5

备用题 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

解: 利用前一极限式可令

$$f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$$

再利用后一极限式，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(a+\frac{b}{x})$$

可见 $a=3,\ b=0$

故 $f(x)=2x^3+2x^2+3x$