

第八节

函数的连续性与间断点

一、函数连续性的定义

二、函数的间断点



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

一、函数连续性的定义

定义： 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 连续.

可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须具备下列条件：

- (1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

若 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续, 则称它在该区间上连续, 或称它为该区间的**连续函数**.

在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的集合记作 $C[a, b]$.

例如, $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ (有理整函数)

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

又如, 有理分式函数 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

在其定义域内连续.

只要 $Q(x_0) \neq 0$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

对自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$, 有函数的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续有下列等价命题:

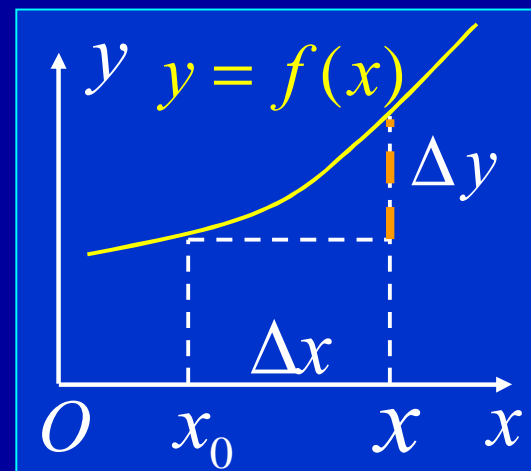
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\iff \underline{f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)}$$

左连续

右连续



$$\iff \forall \epsilon > 0, \exists d > 0, \text{ 当 } |x - x_0| = |\Delta x| < d \text{ 时, 有}$$
$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \epsilon$$



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例. 证明函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$|\Delta y| = 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \left| \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \right|$$

$$\leq 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot 1 = |\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

这说明 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

同样可证: 函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

二、函数的间断点

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 则下列情形之一, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义;

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

这样的点 x_0 称为**间断点**.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

间断点分类:

第一类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在,

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 称 x_0 为可去间断点.

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在,

若其中有一个为 ∞ , 称 x_0 为无穷间断点.

若其中有一个为振荡, 称 x_0 为振荡间断点.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回

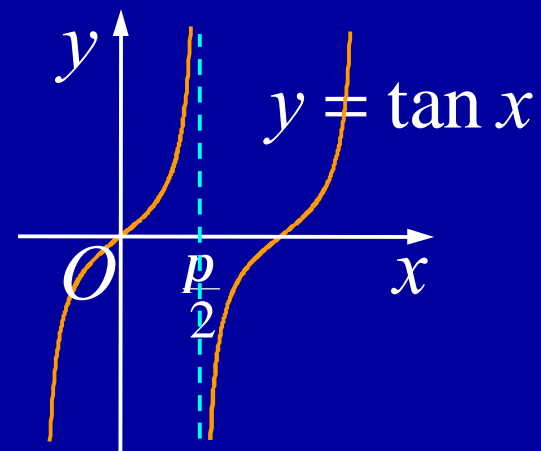


结束

例如:

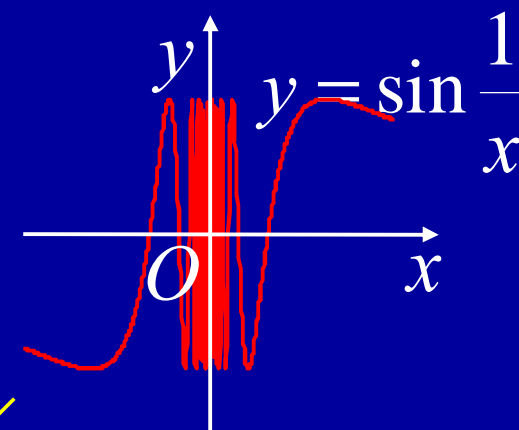
(1) $y = \tan x$

$x = \frac{\pi}{2}$ 为其无穷间断点.



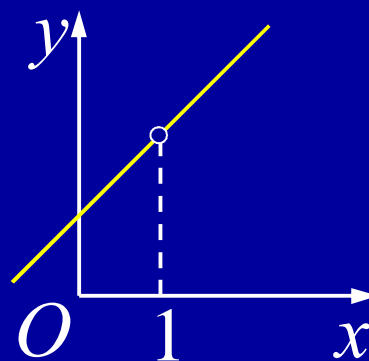
(2) $y = \sin \frac{1}{x}$

$x = 0$ 为其振荡间断点.



(3) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$x = 1$ 为可去间断点.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回

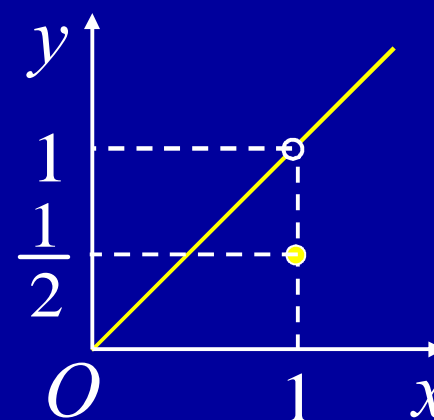


结束

$$(4) \quad y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

显然 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$

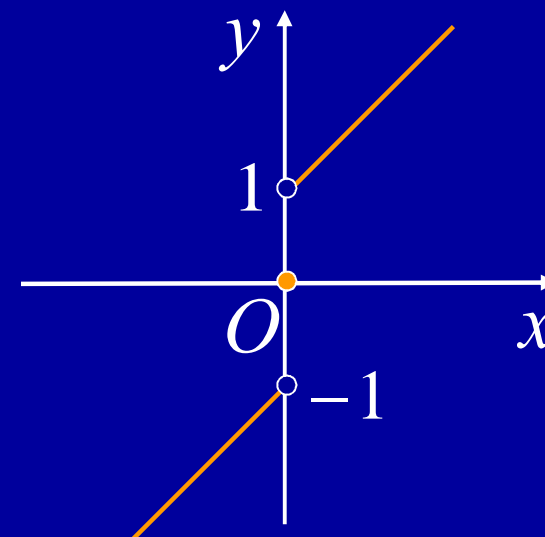
$x = 1$ 为其可去间断点.



$$(5) \quad y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(0^-) = -1, \quad f(0^+) = 1$$

$x = 0$ 为其跳跃间断点.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) &\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \\ &\iff \underbrace{f(x_0^-)}_{\text{左连续}} = f(x_0) = \underbrace{f(x_0^+)}_{\text{右连续}}\end{aligned}$$

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{可去间断点} \\ \text{跳跃间断点} \end{array} \right\}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{无穷间断点} \\ \text{振荡间断点} \end{array} \right\}$ 左右极限至少有一个不存在



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

思考与练习

1. 讨论函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 间断点的类型.

答案: $x = 1$ 是第一类可去间断点,
 $x = 2$ 是第二类无穷间断点.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ a + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, $a = \underline{0}$ 时 $f(x)$ 为连续函数.

提示: $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = f(0) = a$

3. P65 题 3, *8



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



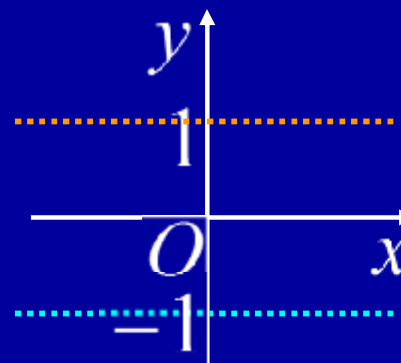
返回



结束

P65 题*8 提示:

$$f(x) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{x}}$$



作业

P65 4 ; 5



HIGHER EDUCATION PRESS



第九节



目录



上页



下页



返回



结束

备用题 确定函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解: 间断点 $x = 0, x = 1$

Q $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \therefore x = 0$ 为无穷间断点;

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $\frac{x}{1-x} \rightarrow +\infty, \therefore f(x) \rightarrow 0$

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\frac{x}{1-x} \rightarrow -\infty, \therefore f(x) \rightarrow 1$

故 $x = 1$ 为跳跃间断点.

在 $x \neq 0, 1$ 处, $f(x)$ 连续.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束