第二章 导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Ferma 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton

德国数学家 Leibniz

微分学：

- **导数** —— 描述函数变化快慢
- **微分** —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)

第一节 导数的概念

一、引例

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的可导性与连续性的关系

五、单侧导数

一、 引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

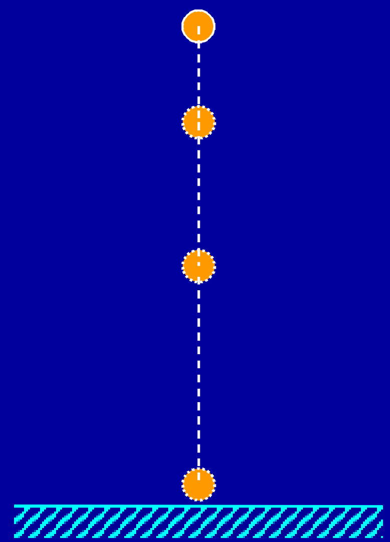
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



自由落体运动

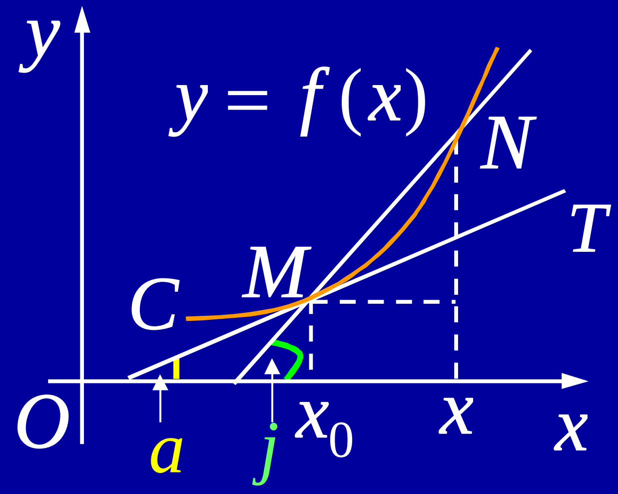
$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT

(当 $\varphi \to \alpha$ 时)



切线 MT 的斜率

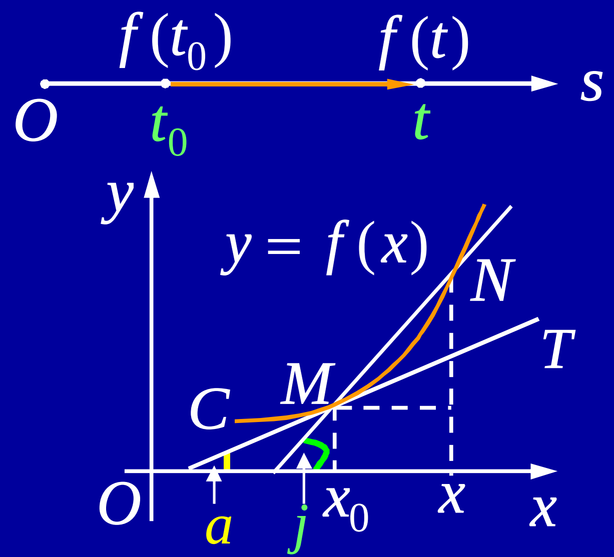
$$k = \tan\alpha = \lim_{j \to a} \tan j$$

割线 MN 的斜率 $\tan j = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

切线斜率 $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



两个问题的**共性:**

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

$\Bigg\}$ 变化率问题

. . .

二、导数的定义

定义1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,

若 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y=f(x)-f(x_0)\\ \Delta x=x-x_0\end{array}}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**, 并称此极限为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**导数**. 记作:

$$y'\big|_{x=x_0};\quad f'(x_0);\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0};\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即 $$y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

运动质点的位置函数 $s = f(t)$

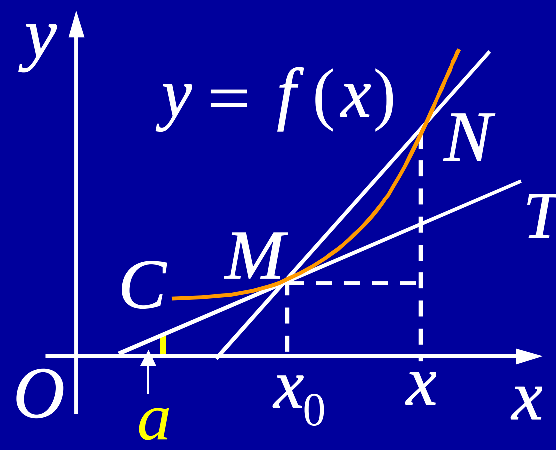
在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$



若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y = f(x) - f(x_0) \\ \Delta x = x - x_0\end{array}}$$

不存在, 就说函数在点 x_0 不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, 也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大 .

若函数在开区间 I 内每点都可导, 就称函数在 I 内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作: y'; $f'(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} \neq \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

例1. 求函数 $f(x)=C$ (C 为常数) 的导数.

解: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

即 $\boxed{(C)'=0}$

例2. 求函数 $f(x)=x^n\ (n\in\mathbf{N}^+)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$=n\,a^{n-1}$$

说明：

对一般幂函数 $y = x^m$ (m 为常数)

$$\boxed{(x^m)' = m\,x^{m-1}}$$

（以后将证明）

例如， $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = \frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例3. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解: 令 $h=\Delta x$, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

即 $$\boxed{(\sin x)'=\cos x}$$

类似可证得 $$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

例4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 的导数.

解: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln\left[(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

即 $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

HIGHER EDUCATION PRESS

例5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

证: Q $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$

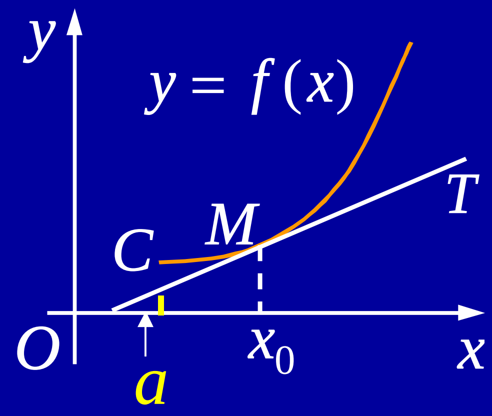
$\therefore \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在 ,即 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

例6. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)}\right]$

$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$$

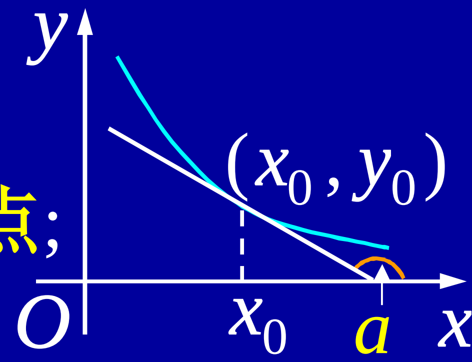
三、 导数的几何意义



曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0\,,\, y_0)$ 的切线斜率为

$$\tan a = f'(x_0)$$

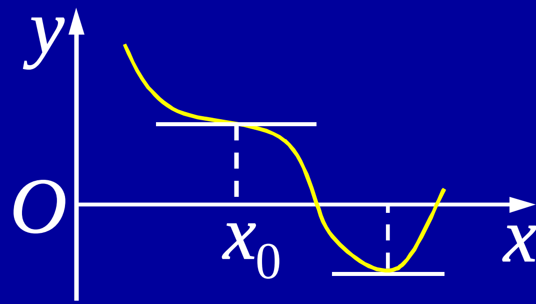
若 $f'(x_0) > 0$, 曲线过 $(x_0\,,\, y_0)$ 上升;



若 $f'(x_0) < 0$, 曲线过 $(x_0\,,\, y_0)$ 下降;

若 $f'(x_0) = 0$, 切线与 x 轴平行, x_0 称为**驻点**;

若 $f'(x_0) = \infty$, 切线与 x 轴垂直 .



$f'(x_0) \neq \infty$ 时, 曲线在点 $(x_0\,,\, y_0)$ 处的

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ $\;(\, f'(x_0) \neq 0\,)$

例7. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有铅直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad\therefore\ y'\big|_{x=0}=\infty$,

故在原点 $(0,0)$ 有铅直切线 $x=0$

令 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$，得 $x=\pm1$，对应 $y=\pm1$，

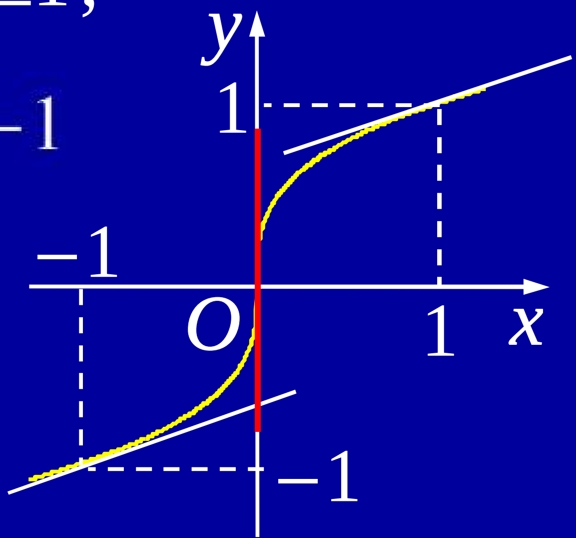
则在点$(1,1)$，$(-1,-1)$ 处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即

$$x-3y\pm2=0$$



四、 函数的可导性与连续性的关系

定理1. $f(x)$在点x处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$在点x处连续

证: 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

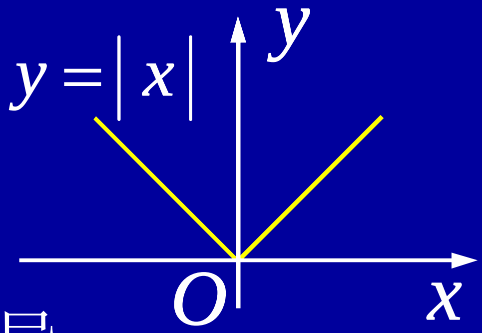
存在，因此必有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha\text{，其中}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

故 $$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\,\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$$

所以函数 $y=f(x)$ 在点 x 连续 .

注意: 函数在点 x **连续，但在该点未必可导.**

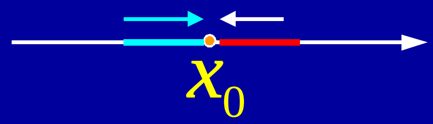


反例: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

五、 单侧导数

定义2 . 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右(左)邻域内有定义, 若极限

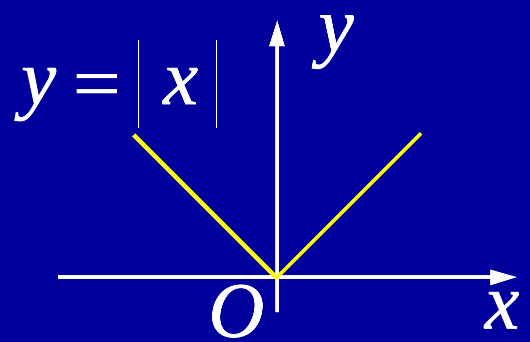
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右(左) 导数, 记作

$f'_+(x_0)\ \ (f'_-(x_0))$

即 $$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



例如, $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处有

$$f'_+(0)=+1,\qquad f'_-(0)=-1$$

定理2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

简写为 $\boxed{f'(x_0)\text{存在} \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)}$

定理3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右(左)导数存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必右(左)连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

显然:

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导 $\Longrightarrow$ $f(x)\in C[a,b]$

内容小结

1. 导数的实质: 增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$

3. 导数的几何意义: 切线的斜率;

4. 可导必连续, 但连续不一定可导;

5. 已学求导公式 :

$$(C)'=0; \qquad (x^m)'=m\,x^{m-1}; \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x; \qquad (\cos x)'=-\sin x;$$

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续, 一定不可导.} \\ \text{直接用导数定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases}$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别: $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值;

联系: $\left. f'(x) \right|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \cancel{\overset{?}{=}} [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\underline{\;-f'(x_0)\;}.$$

3. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=k_0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\underline{\;k_0\;}$.

4. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导?

解: 由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且

$$f'(0)=0$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x\,, & x<0\\ a\,x\,, & x\ge 0\end{cases}$，问 a 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$，此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x\,, & x<0\\ 1\,, & x\ge 0\end{cases}$$

作业

P86

2，5，6, 7, 11, 16(2)，18，20

牛顿(1642 – 1727)

伟大的英国数学家，物理学家, 天文学家和自然科学家. 他在数学上的卓越贡献是创立了微积分. 1665年他提出正流数 (微分) 术，次年又提出反流数(积分)术,并于1671年完成《流数术与无穷级数》一书 (1736年出版). 他还著有《自然哲学的数学原理》和《广义算术》等.

HIGHER EDUCATION PRESS

莱布尼茨 (1646 – 1716)

德国数学家, 哲学家. 他和牛顿同为微积分的创始人，他在《学艺》杂志上发表的几篇有关微积分学的论文中, 有的早于牛顿， 所用微积分符号也远远优于牛顿 . 他还设计了作乘法的计算机，系统地阐述二进制计数法，并把它与中国的八卦联系起来 .

HIGHER EDUCATION PRESS

备用题

1. 设 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求 $f'(1)$.

解: 因为

$$-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

所以 $f'(1)=-2$.

HIGHER EDUCATION PRESS

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

证: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0)=0$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.