第三节 分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \displaystyle\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ \text{或} \quad \displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{array}\right\}\text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算.

例1. 求 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x = x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

$$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\cos x = x^2\cos x-\int \cos x\mathrm{d}x^2$$

$$=x^2\cos x-\int 2x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\cos x-\int 2x\mathrm{d}\sin x = x^2\cos x-2x\sin x+2\int \sin x\mathrm{d}x$$

$$=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x+C$$

例求(212-11) $\int x^2 \cos x \, dx$

解:

$$\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 \, d\sin x$$

$$= x^2 \sin x - \int \sin x dx^2 = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$$

$$= x^2 \sin x + 2\int x d\cos x = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}e^x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$\int xe^{x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x^2} \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例2. 求 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\ \mathrm{d}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\ln x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

例3. 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\ \ \mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\arctan x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

例4. 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

解:

$$\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \; de^x$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \; d\sin x$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

故 原式 $= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

说明: 也可设 $u = e^x, v'$ 为三角函数，但两次所设类型必须一致.

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x$$

$$= \sec x \tan x - \int \tan x\mathrm{d} \sec x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \ln\left|\sec x - \tan x\right|$$

所以

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln\left|\sec x - \tan x\right|) + C$$

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法：

把被积函数视为两个函数之积，按 **"反对幂指三"** 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例5. 求 $\int \arccos x \,\mathrm{d}x$.

解： 原式$= x\arccos x - \int x \,\mathrm{d}\arccos x$

$$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

分部积分公式可以将求积分的问题转化为求微分的问题

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \mathrm{d}\ln x$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln x - x + C$$

例6. 求 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

$$(\ln \cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

解:

$$\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \ln \cos x \mathrm{d} \tan x$$

$$= \ln \cos x \quad \tan x - \int \tan x \mathrm{d} \ln \cos x$$

$$= \tan x \cdot \ln \cos x + \int \tan^2 x \mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln \cos x + \int (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln \cos x + \tan x - x + C$$

例7. 求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$\text{原式}=2\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

令 $u=t,\ v'=\mathrm{e}^t$

$$=2\left(t\,\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=2(t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t)+C$$

$$=2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例8. 求 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$

解: 令 $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $v'=1$, 则

$$u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad v=x$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

例9. 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v'=1$, 则 $u'=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v=x$

$$\therefore\ I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

说明: 已知 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1\right)$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例10. 设 $I_n=\int \sec^n x\,\mathrm{d}x$，证明递推公式:

$$I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad(n\geq 2)$$

证: $\boxed{I_n}=\int \sec^{n-2}x\cdot\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x$$

$$-(n-2)\int \sec^{n-3}x\cdot\sec x\tan x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x-(n-2)\int \sec^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sec^{n-2}x\cdot\tan x\boxed{-(n-2)I_n}+(n-2)I_{n-2}$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\cdot\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\qquad(n\geq 2)$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分 ;

2) 分部产生循环式 , 由此解出积分式 ;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变 , 解出积分后加 C)

例4

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:
$$\begin{aligned}\int x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}f(x)\\ &= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C\\ &= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例12. 求 $I=\int \dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

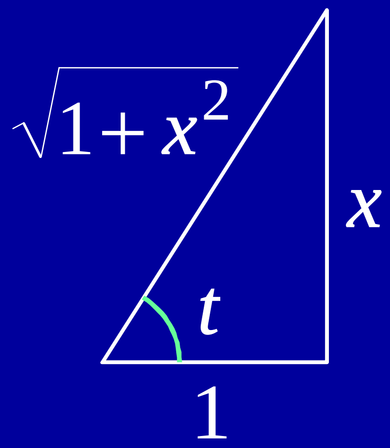
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 则

$$I=\int \frac{e^{t}}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,dt=\int e^{t}\cos t\,dt$$

$$=e^{t}\sin t-\int e^{t}\sin t\,dt$$

$$=e^{t}\sin t+e^{t}\cos t-\int e^{t}\cos t\,dt$$



故 $I=\dfrac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^{t}+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2 直接用分部积分法

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x} + \int \frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{\arctan x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}(1+x) - I$$

$$\therefore \quad I = \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x} + C$$

内容小结

分部积分公式 $\int u v' \mathrm{d}x = u v - \int u' v \mathrm{d}x$

1. 使用原则： v 易求出, $\int u' v \mathrm{d}x$ 易积分

2. 使用经验："反对幂指三"，前 u v'
后

3. 题目类型：

分部化简； 循环解出; 递推公式

4. 计算格式：

$$\begin{array}{ccc} u & & u' \\ & + & \Big| \; -\int \\ v' & & v \end{array}$$

例13. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

$$\therefore\quad I=\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sin t & & \cos t & & -\sin t & & \\ & + & & - & & +\int & \\ \mathrm{e}^t & & \mathrm{e}^t & & \mathrm{e}^t & & \end{array}$$

$$=\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

可用表格法求
多次分部积分

例14. 求 $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x$, 则 $x=\mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int \mathrm{e}^{3u}u^4\cdot\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\int u^4\,\mathrm{e}^{4u}\,\mathrm{d}u$$

u^4		$4u^3$		$12u^2$		$24u$		24		0		
	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-\int$	
e^{4u}		$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4u}$		$\frac{1}{4^2}\mathrm{e}^{4u}$		$\frac{1}{4^3}\mathrm{e}^{4u}$		$\frac{1}{4^4}\mathrm{e}^{4u}$		$\frac{1}{4^5}\mathrm{e}^{4u}$		

$$\text{原式}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4u}\Big(u^4-u^3+\frac{3}{4}u^2-\frac{3}{8}u+\frac{3}{32}\Big)+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4\Big(\ln^4x-\ln^3x+\frac{3}{4}\ln^2x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32}\Big)+C$$

思考与练习

1. 下述运算错在哪里? 应如何改正?

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \int \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \sin x \,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = 1, \quad 得\ 0 = 1$$

$$\boxed{= \ln|\sin x| + C}$$

答: 不定积分是原函数族 , 相减不应为 0 .

求此积分的正确作法是用换元法 .

2. 求 $I=\int \mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$

提示:

$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$-a^2\cos(ax+b)$
$+$	$-$	$+\int$
e^{kx}	$\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$	$\dfrac{1}{k^2}\mathrm{e}^{kx}$

得 $I=\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)-\dfrac{a}{k^2}\mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)-\dfrac{a^2}{k^2}I$

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $f(x)$ 可微且其反函数 $f^{-1}(x)$ 存在, 证明

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$$

证: $\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - \int x\,\mathrm{d}f^{-1}(x)$

$$= x f^{-1}(x) - \int f[f^{-1}(x)]\,\mathrm{d}f^{-1}(x)$$

$$= x f^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$$

注意:

$x = f[f^{-1}(x)]$

作业

P212

4，5，9，14，18，

20， 21，22 ，24

备用题. 求不定积分 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部 , 再换元)

$$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1} = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u \qquad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 4\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + 4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + C$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2),\ \mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

故 $$\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\int \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int \frac{1+u^2-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$