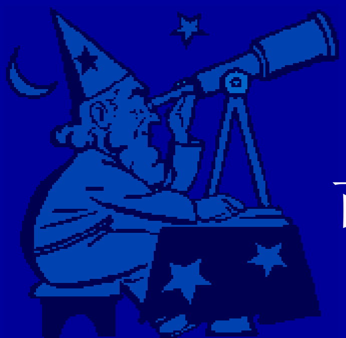
第七节 无穷小的比较

引例. $x\to 0$ 时, $3x$, x^2, $\sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$



可见无穷小趋于 0 的速度是多样的.

定义. 设 α , β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, 则称 β 是关于 α 的 **k 阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 或 $\beta \sim \alpha$

例如，当 $x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2)\,; \quad \sin x \sim x\,; \quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

又如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小，且

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

HIGHER EDUCATION PRESS

例1. 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$.

证: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \mathbf{L} + b^{n-1})$$

$\boxed{分子 = x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x}\,)^n - 1}{\frac{1}{n}x\,[(\sqrt[n]{1+x}\,)^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x}\,)^{n-2} + \cdots + 1]}$$

$$= 1$$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

例2. 证明: $e^x-1 \sim x$.

证: 令 $y=e^x-1$, 则 $x=\ln(1+y)$, 且 $x\to 0$时, $y\to 0$,

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

即有等价关系: $e^x-1 \sim x$

说明: 上述证明过程也给出了等价关系:

$$\ln(1+x)\sim x$$

定理1. $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow b = a + o(a)$

证: $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \lim \dfrac{b}{a} = 1$

$$\Longleftrightarrow \lim\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 0, \text{ 即 } \lim \frac{b-a}{a} = 0$$

$$\Longleftrightarrow b - a = o(a), \text{ 即 } b = a + o(a)$$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

定理2 . 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 , 则

$$\lim \frac{b}{a} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证: $$\lim \frac{b}{a} = \lim \left(\frac{b}{b'} \frac{b'}{a'} \frac{a'}{a} \right)$$

$$= \lim \frac{b}{b'} \lim \frac{b'}{a'} \lim \frac{a'}{a} = \lim \frac{b'}{a'}$$

例如, $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

说明: 设对同一变化过程 , a , b 为无穷小 , 由等价无穷小的性质, 可得简化某些极限运算的下述规则.

(1) 和差取大规则: 若 $b = o(a)$, 则 $a \pm b \sim a$

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$

(2) 和差代替规则: 若 $a \sim a', b \sim b'$ 且 b 与 a 不等价,

则 $a - b \sim a' - b'$, 且 $\lim\dfrac{a-b}{g} = \lim\dfrac{a'-b'}{g}$.

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x - \sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x}{\frac{1}{2}x} = 2$

注意 $a \sim b$ 时此结论未必成立！(见下页例3)

(3) 因式代替规则: 若 $a \sim b$, 且 $j(x)$ 极限存在或有界, 则

$$\lim a\, j(x) = \lim b\, j(x)$$

例如,
$$\lim_{x\to 0} \arcsin x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

例3. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解: 原式 $\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

原式 $\displaystyle \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解: 当 $x\to 0$ 时,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$$

$$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

例5. 证明: 当$x \to 0^+$时, $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$.

证: $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x})$

当$x \to 0^+$时,

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\ln(1-\sqrt{x}) = \ln(1+(-\sqrt{x})) \sim (-\sqrt{x})$$

$\ln(1-\sqrt{x})$ 与$\ln(1+x)$不等价

利用**和差代替与取大规则** 说明

$$\sim x - (-\sqrt{x})$$

$$\sim \sqrt{x}$$

内容小结

1. 无穷小的比较

设 a , b 对同一自变量的变化过程为无穷小, 且 $a \neq 0$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & b \text{ 是 } a \text{ 的高阶无穷小} \\ \infty, & b \text{ 是 } a \text{ 的低阶无穷小} \\ C\,(\neq 0), & b \text{ 是 } a \text{ 的同阶无穷小} \\ 1, & b \text{ 是 } a \text{ 的等价无穷小} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, \qquad b \text{ 是 } a \text{ 的 } k \text{ 阶无穷小}$$

常用等价无穷小：当$x \to 0$时，

$\sin x \sim x$，　$\tan x \sim x$，　$\arcsin x \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$，

$e^x - 1 \sim x$，　$\ln(1+x) \sim x$

2. 等价无穷小替换定理 Th 2

思考与练习　P59 题1，2

作业

P59　3；4 (2)，(3)，(4)；5 (3)