

第十节

闭区间上连续函数的性质

一、最值定理

二、介值定理

*三、一致连续性



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

一、最值定理

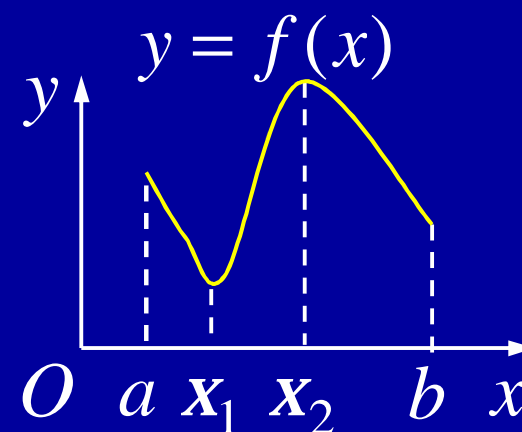
定理1. 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

即: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使

$$f(x_1) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$$f(x_2) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

(证明略)



注意: 若函数在开区间上连续, 或在闭区间内有间断点, 结论不一定成立.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页

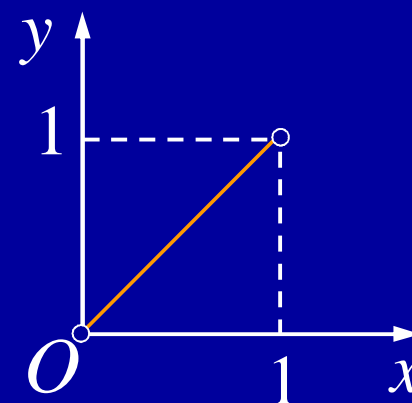


返回



结束

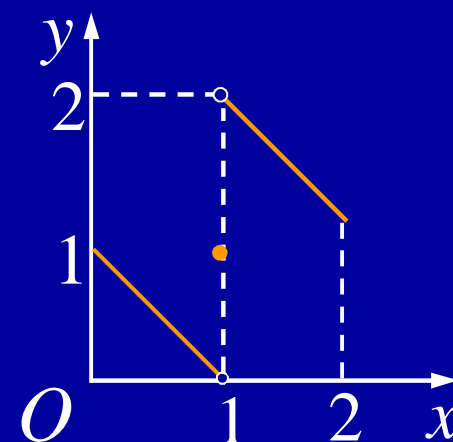
例如, $y = x, x \in (0, 1)$
无最大值和最小值



又如,

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

也无最大值和最小值



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



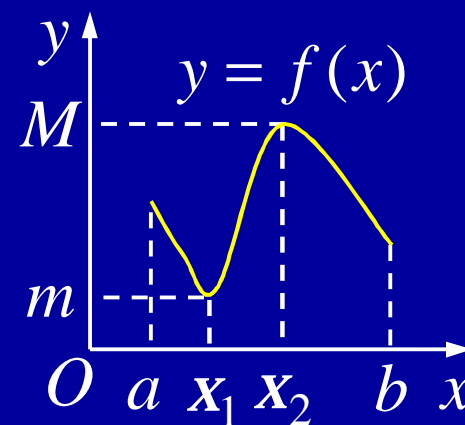
结束

推论 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证: 设 $f(x) \in C[a, b]$, 由定理 1 可知有

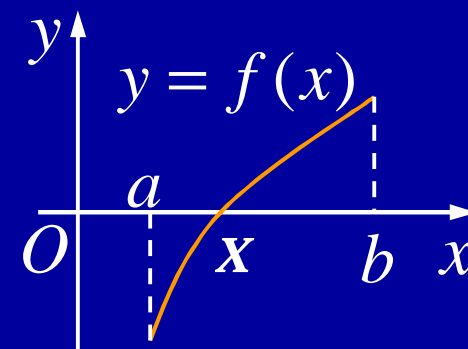
$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

故 $\forall x \in [a, b]$, 有 $m \leq f(x) \leq M$,
因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.



二、介值定理

定理2. (零点定理) $f(x) \in C[a, b]$,
且 $f(a)f(b) < 0 \implies$ 至少有一点
 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$. (证明略)



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

定理3. (介值定理) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$, 则对 A 与 B 之间的任一数 C , 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = C$.

证: 作辅助函数

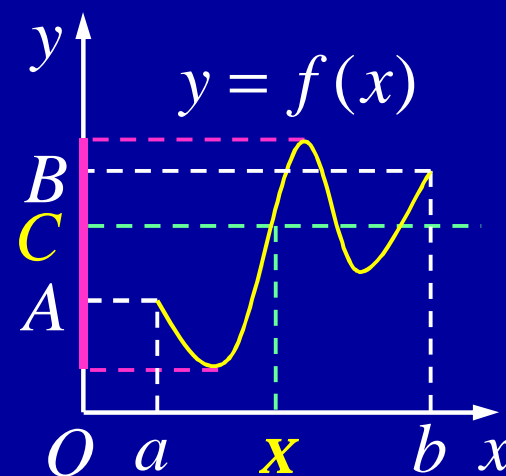
$$j(x) = f(x) - C$$

则 $j(x) \in C[a, b]$, 且

$$j(a)j(b) = (A - C)(B - C) < 0$$

故由零点定理知, 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = C.$$



推论: 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证: 显然 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1 \in C[0,1]$, 又

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -2 < 0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$$

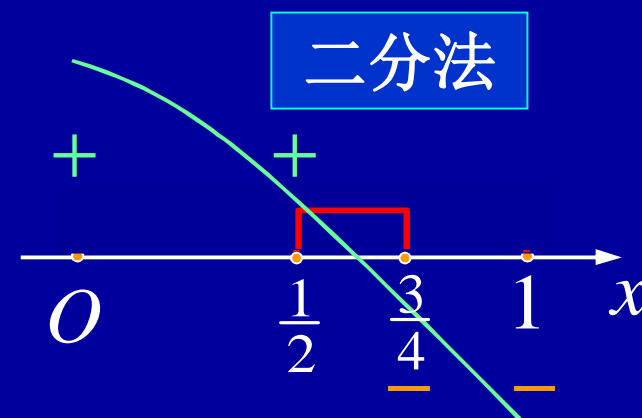
说明:

取 $[0,1]$ 的中点 $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} > 0$,

则 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内必有方程的根;

取 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的中点 $x = \frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4}) < 0$,

则 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 内必有方程的根; \therefore 可用此法求近似根.



HIGHER EDUCATION PRESS

*三. 一致连续性

已知函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 即:

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x_0) > 0, \text{当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时,} \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

一般情形, δ 与 ε, x_0 都有关. 若 δ 与 x_0 无关时, 就引出了一致连续的概念.

定义: 对 $f(x), x \in I$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

显然: $f(x)$ 在区间 I 上一致连续

$\xrightarrow{\quad} f(x)$ 在区间 I 上连续



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例如, $f(x) = \frac{1}{x} \in C(0, 1]$, 但不一致连续.

因为 $\forall \varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < 1$), 取点 $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^+$),

则 $|x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$ 可以任意小

但 $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon$

这说明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续.

定理4. 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.
(证明略)

思考: P74 题 *7

提示: 设 $f(a^+)$, $f(b^-)$ 存在, 作辅助函数

$$F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$$

显然

$$F(x) \in C[a, b]$$



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

内容小结

设 $f(x) \in C[a, b]$, 则

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;
2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上达到最大值与最小值;
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值;
4. 当 $f(a)f(b) < 0$ 时, 必存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

思考与练习

1. 任给一张面积为 A 的纸片(如图), 证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.

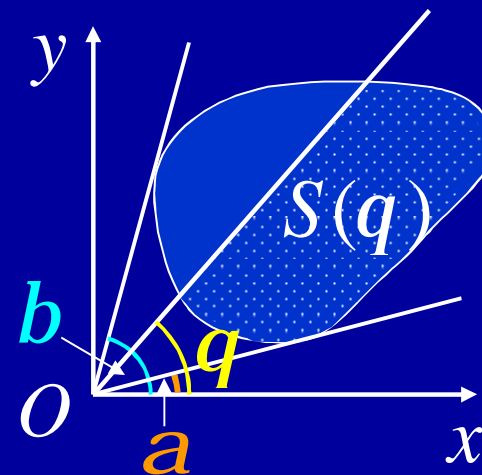
提示: 建立坐标系如图.

则面积函数 $S(q) \in C[a, b]$

因 $S(a) = 0, S(b) = A$

故由介值定理可知:

$$\exists q_0 \in (a, b), \text{ 使 } S(q_0) = \frac{A}{2}.$$



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

2. 设 $f(x) \in C[0, 2a]$, $f(0) = f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi \in [0, a]$, 使 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

提示: 令 $\varphi(x) = f(x+a) - f(x)$,
则 $\varphi(x) \in C[0, a]$, 易证 $\varphi(0)\varphi(a) \leq 0$

作业

P74 (习题1—10) 2 ; 3; 5



HIGHER EDUCATION PRESS



习题课



目录



上页



下页



返回



结束

备用题 证明 $x = e^{x-3} + 1$ 至少有一个不超过 4 的正根.

证: 令 $f(x) = x - e^{x-3} - 1$

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 4]$ 上连续, 且

$$f(0) = -e^{-3} - 1 < 0$$

$$f(4) = 4 - e^{4-3} - 1 = 3 - e > 0$$

根据零点定理, 在开区间 $(0, 4)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0, 4)$, 使 $f(\xi) = 0$, 原命题得证.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束