第三节

函数的极限

对 $y = f(x)$, 自变量变化过程的六种形式:

(1) $x \to x_0$　　(4) $x \to \infty$

(2) $x \to x_0^+$　　(5) $x \to +\infty$

(3) $x \to x_0^-$　　(6) $x \to -\infty$

本节内容：

一、自变量趋于有限值时函数的极限

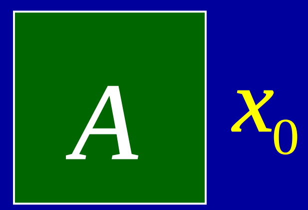
二、自变量趋于无穷大时函数的极限

一、自变量趋于有限值时函数的极限

1. $x \to x_0$ 时函数极限的定义

引例. 测量正方形面积. (真值: 边长为 x_0 ; 面积为 A)

直接观测值	确定直接观测值精度 δ :
边长 x	$\lvert x - x_0 \rvert < \delta$
$\Downarrow$	$\Uparrow$
间接观测值	任给精度 ε , 要求 $\lvert x^2 - A \rvert < \varepsilon$
面积 x^2	

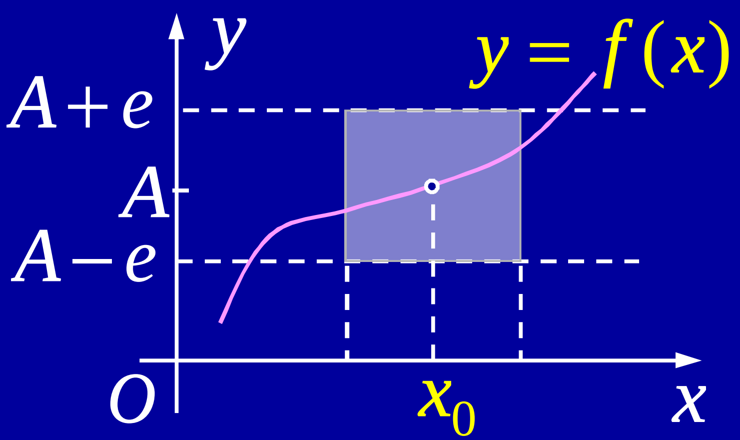


定义1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\forall e>0, \exists d>0$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，有 $|f(x)-A|<e$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (\text{当}\ x\to x_0)$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

几何解释:



这表明:

极限存在 $\Longrightarrow$ 函数局部有界

(P36定理2)

例1. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ (C为常数)

证: $|f(x) - A| = |C - C| = 0$

故$\forall \varepsilon > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

总有 $|C - C| = 0 < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

HIGHER EDUCATION PRESS

例2. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

证: $|f(x)-A| = |(2x-1)-1| = 2|x-1|$

$\forall e > 0$, 欲使 $|f(x)-A| < \varepsilon$, 只要 $|x-1| < \varepsilon/2$,

取 $d = e/2$, 则当 $0 < |x-1| < d$ 时, 必有

$$|f(x)-A| = |(2x-1)-1| < \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

证: $\left|f(x)-A\right| = \left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \left|x+1-2\right| = \left|x-1\right|$

故 $\forall e>0$, 取 $d=e$, 当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时, 必有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<e$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

例4. 证明: 当 $x_0 > 0$ 时 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

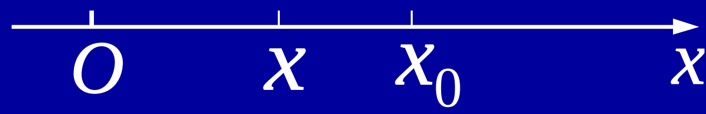
证: $\left| f(x) - A \right| = \left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| = \left| \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right|$

$$\le \frac{1}{\sqrt{x_0}} \left| x - x_0 \right|$$

$\forall e > 0$, 欲使 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, 只要 $\left| x - x_0 \right| < \sqrt{x_0}\,\varepsilon$, 且 $x \ge 0$. 而 $x \ge 0$ 可用 $\left| x - x_0 \right| \le x_0$ 保证 . 故取

$d = \min\{\sqrt{x_0}e ,\, x_0\}$, 则当 $0 < \left| x - x_0 \right| < d$ 时, 必有

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| < \varepsilon$$



因此 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

2. 保号性定理

定理1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$, 则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$,
$(A<0)$

使当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, $f(x)>0$. (P37定理3)
$(f(x)<0)$

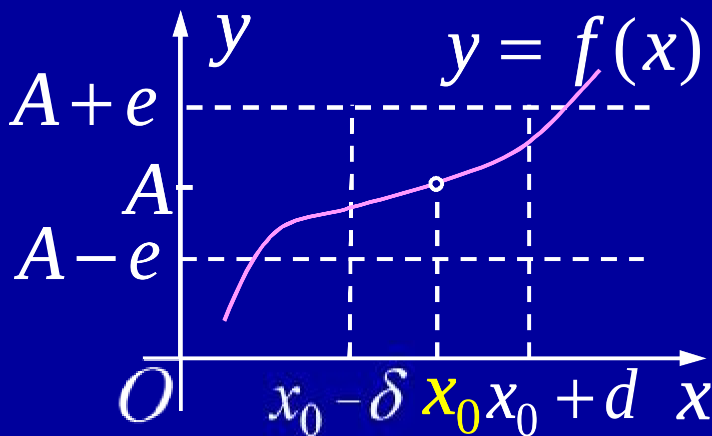
证: 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall \varepsilon>0, \exists\, \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 当

$x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

当 $A>0$ 时, 取正数 $\varepsilon\le A$,
(<0) $(\varepsilon\le -A)$

则在对应的邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 上

$f(x)>0$.
(<0)



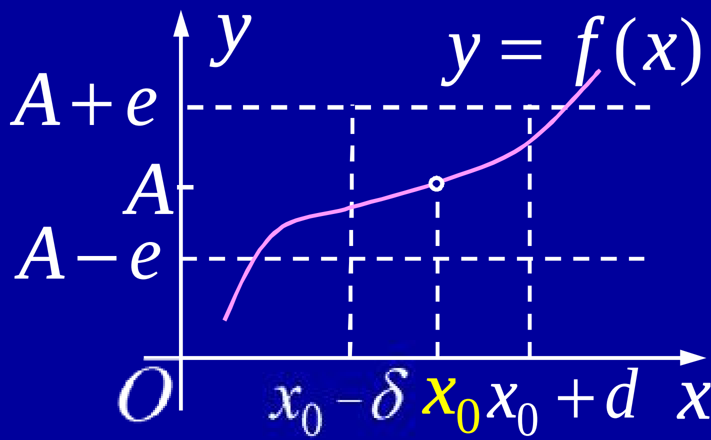
推论: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$, 则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 使当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时, 有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$. (P37定理3′)

分析: $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

若取 $e=\dfrac{|A|}{2}$, 则在对应的邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 上

$$A>0:\ \underline{\frac{A}{2}<f(x)}<\frac{3A}{2}$$

$$A<0:\ -\frac{3|A|}{2}<\underline{f(x)<-\frac{|A|}{2}}$$



定理 2. 若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\ge 0$，且 $(f(x)\le 0)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\ge 0.$ $(A\le 0)$

证: 用反证法. 当$f(x)\ge 0$时, 假设 $A<0$，则由定理 1, 存在 x_0 的某去心邻域，使在该邻域内 $f(x)<0$，与已知条件矛盾, 所以假设不真，故 $A\ge 0$.

(同样可证 $f(x)\le 0$ 的情形)

思考: 若定理 2 中的条件改为$f(x)>0$, 是否必有 $A>0$?

不能! 如 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

3. 左极限与右极限

左极限： $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$

时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$

时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

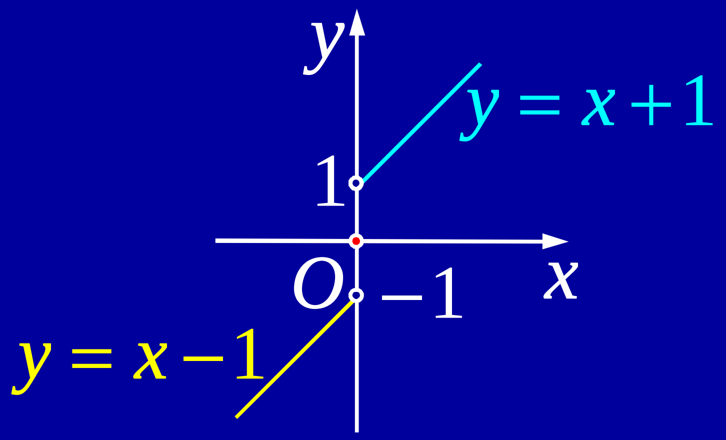
定理 3 .

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

(P39 题*11)

例5. 给定函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\ \ , & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在 .

解: 利用定理 3 . 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

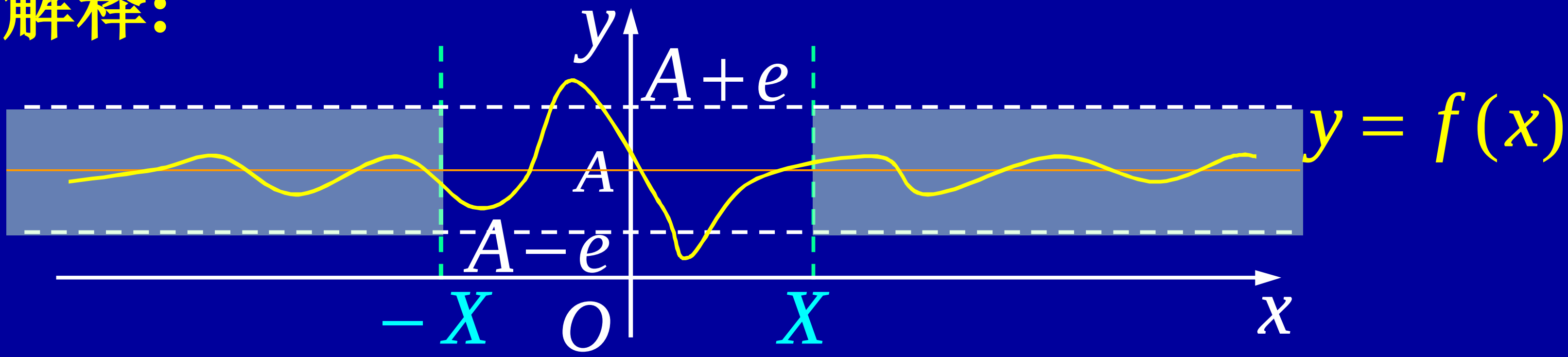
二、自变量趋于无穷大时函数的极限

定义2 . 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall e>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \ (\text{当}\, x\to\infty)$$

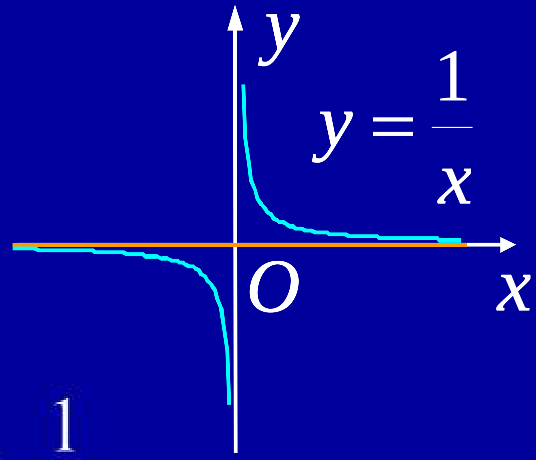
$\boxed{x<-X \text{ 或 } x>X}$ $\qquad$ $\boxed{A-e<f(x)<A+e}$

几何解释:



直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线 .

例6. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$



证: $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}$

故 $\forall e>0$, 欲使 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

取 $X=\dfrac{1}{e}$, 当 $|x|>X$时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

注: $y=0$为$y=\dfrac{1}{x}$的水平渐近线.

两种特殊情况：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \rightleftharpoons \forall e>0,\ \exists X>0,\ \text{当 } x>X \text{ 时, 有}$$

$$|f(x)-A|<e$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \rightleftharpoons \forall e>0,\ \exists X>0,\ \text{当 } x<-X \text{ 时, 有}$$

$$|f(x)-A|<e$$

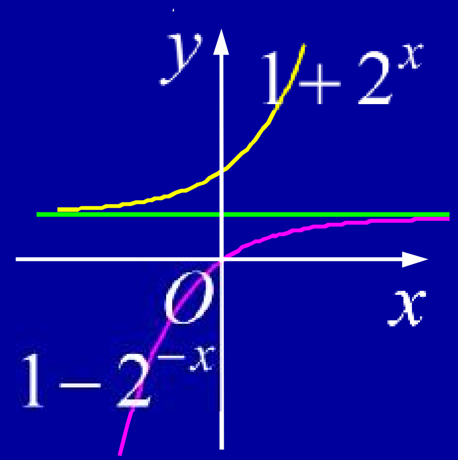
几何意义： 直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 .

例如, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

都有水平渐近线 $y=0$;

又如, $f(x)=1-2^{-x}$, $\quad g(x)=1+2^{x}$

都有水平渐近线 $y=1$.



内容小结

1. 函数极限的"$\varepsilon - \delta$" 或"$\varepsilon - X$" 定义及应用

2. 函数极限的性质: 保号性定理 Th1 Th2

与左右极限等价定理 Th3

思考与练习

1. 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 是否一定有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

例3

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a x^2, & x \le 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 存在, 则

$a =$ ___3___ .

作业

P37 1 ; 4 ; *5(2) ; *6(2) ; *9