# 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

二、初等函数的连续性

HIGHER EDUCATION PRESS

# 一、连续函数的运算法则

**定理1.** 在某点连续的有限个函数经有限次和 , 差 , 积 , 商(分母不为 0) 运算, 结果仍是一个在该点连续的函数 .

( 利用极限的四则运算法则证明)

**例如,** $\sin x, \cos x$ 连续

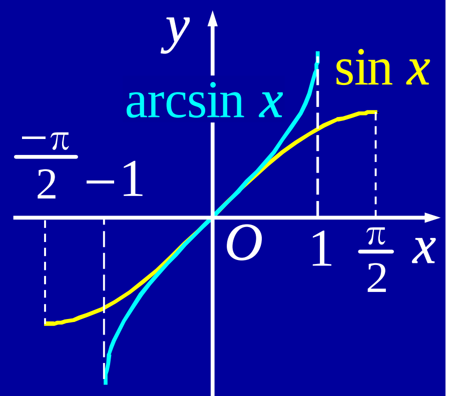
$\Longrightarrow \tan x, \cot x$ 在其定义域内连续

**定理2.** 连续单调递增函数的反函数也连续单调递增.
(递减) (递减)

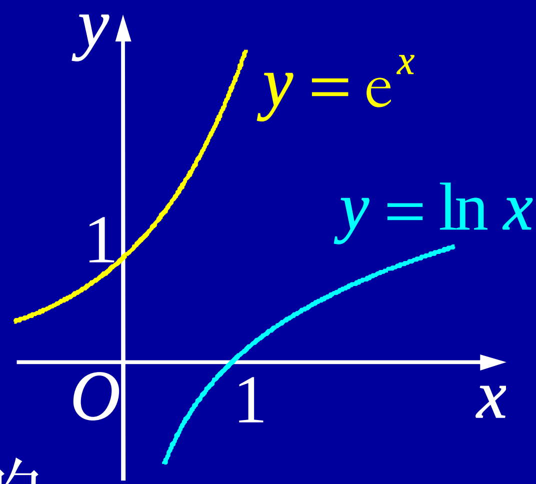
(证明略)

**例如,** $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续单调递增,

其反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也连续单调递增.



又如, $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续单调递增, 其反函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也连续单调递增.




**定理3.** 连续函数的复合函数是连续的.

**证:** 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 且 $j(x_0) = u_0$ .

函数 $y = f(x)$ 在点 $u_0$ 连续, 即 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$ .

于是

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[j(x_0)]$$

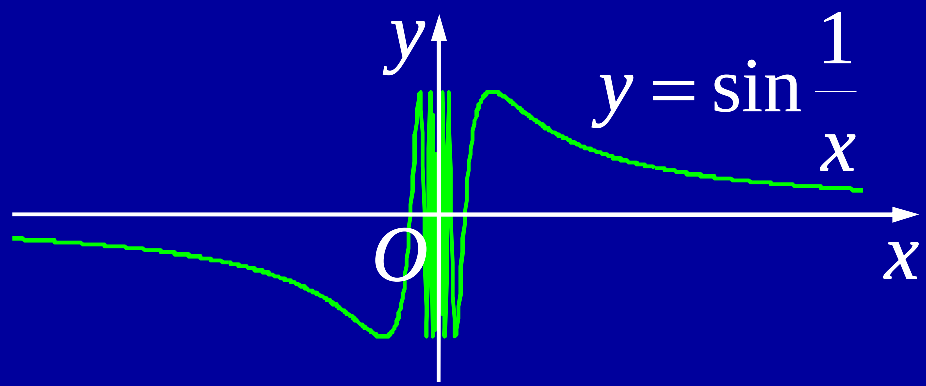
故复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x_0$ 连续.

例如, $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 是由连续函数链

$$y=\sin u,\quad u\in(-\infty,+\infty)$$

$$u=\frac{1}{x},\qquad x\in\mathbf{R}^*$$

复合而成，因此 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in\mathbf{R}^*$ 上连续 .



**例1．** 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

**证:** $\because\ \varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\,|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)\,\right]$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[\,f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\,\right]$$

根据连续函数运算法则，可知 $\varphi(x),\psi(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续 .

## 二、初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

一切初等函数在定义区间内连续

**例如,**

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)\,,\,n\in\mathbf{Z}$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi\,,\,n\in\mathbf{Z}$

因此它无连续点

**例2.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \mathrm{e} = \dfrac{1}{\ln a}$

**例3.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

**解:** 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$

**说明:** 由此可见当 $a=\mathrm{e}$, $x\to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x) \sim x \qquad \mathrm{e}^x-1 \sim x$$

**例4.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ .

**解:** 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = \mathrm{e}^{6}$

**说明:** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}[1+u(x)]^{v(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln[1+u(x)]}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

**例5.** 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$， $j(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$的连续性 .

**解:**

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} j^{2}(x), & j(x)\le 1 \\ 2-j(x), & j(x)>1 \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x\ne 1$时 $f[j(x)]$为初等函数，故此时连续；而

$$\lim_{x\to 1^-} f[j(x)]=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[j(x)]=\lim_{x\to 1^+}(-2-x)=-3$$

故 $f[\varphi(x)]$在点 $x=1$ 不连续， $x=1$为第一类间断点 .

## 内容小结

基本初等函数**在定义区间内**连续

连续函数的**四则运算**结果仍连续

连续函数的**反函数**连续

连续函数的**复合函数**连续

初等函数在定义区间内连续

**说明：** 分段函数在界点处是否连续需讨论其左、右连续性.

## 思考与练习

若 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，问 $f^2(x)$, $|f(x)|$ 在 $x_0$ 是否连续？反之是否成立？

**提示:** "反之" 不成立. 反例

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ -1, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

$f(x)$ 处处间断, $f^2(x)$, $|f(x)|$ 处处连续 .

### 作业

P69 3 (5) , (6) , (7) ;

4 (4) , (5) ,(6) ; 6