第一章

函数与极限

分析基础 { 函数 — 研究对象；极限 — 研究方法；连续 — 研究桥梁

- 函数 — 研究对象
- 极限 — 研究方法
- 连续 — 研究桥梁

第一节 映射与函数

一、集合

二、函数

三、函数的性质

HIGHER EDUCATION PRESS

一、 集合

1. 定义及表示法

简称**集**

定义 1. 具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.

组成集合的事物称为**元素**.

简称**元**

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 Æ .

元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M，记作 $a \overline{\in} M$ (或 $a \notin M$) .

注： M 为数集 $\begin{cases} M^{*} \text{表示 } M \text{ 中排除 0 的集；} \\ M^{+} \text{表示 } M \text{ 中排除 0 与负数的集 .} \end{cases}$

表示法：

(1) 列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例： 有限集合 $A = \{ a_1, a_2, \cdots, a_n \} = \{ a_i \}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots \} = \{ n \}$

(2) 描述法：$M = \{ x \mid x \text{ 所具有的特征} \}$

例： 整数集合 $\mathbf{Z} = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ 或 } -x \in \mathbf{N}^+ \}$

有理数集 $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, \ p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$

实数集合 $\mathbf{R} = \{ x \mid x \text{ 为有理数或无理数} \}$

开区间 $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$

闭区间 $[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

半开区间 $[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$

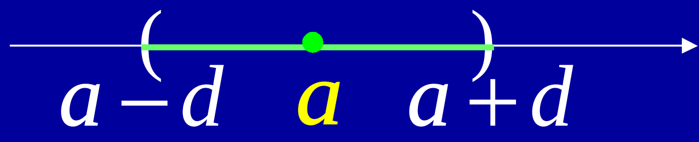
$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$$

无限区间 $[a, +\infty) = \{x \mid a \le x\}$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$$

邻域与去心邻域



点的 d 邻域 $U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$

$$= \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

去心 d 邻域 $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$

其中, a 称为邻域中心 , d 称为邻域半径 .

左 d 邻域 : $(a-\delta, a)$, 右 d 邻域 : $(a, a+\delta)$.

2. 集合之间的关系及运算

定义2． 设有集合 A, B, 若 $x \in A$ 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的**子集**, 或称 B 包含 A, 记作 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

例如, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

显然有下列关系 :

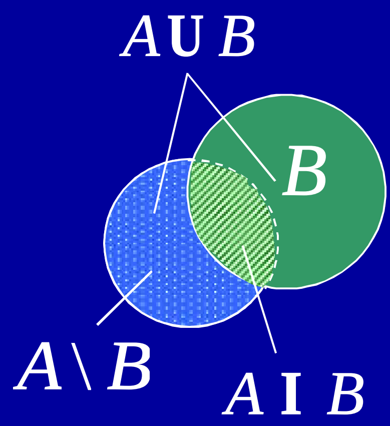
(1) $A \subset A$; $A = A$; Æ $\subset A$

(2) $A \subset B$ 且 $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

定义 3. 给定两个集合 A, B, 定义下列运算:

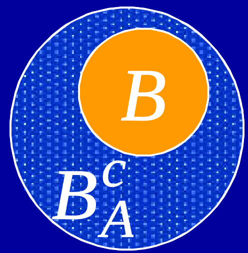
并集 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

交集 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$



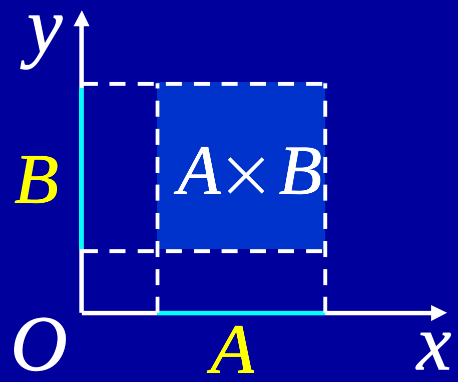
差集 $A\setminus B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

余集 $B_A^c=A\setminus B$ (其中 $B\subset A$)



直积 $A\times B=\{(x,y) \mid x\in A,\ y\in B\}$

特例: $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \overset{\text{记}}{=\!=} \mathbf{R}^2$ 为平面上的全体点集



三、函数

1. 函数的概念

当x在D内取定一点，y就按某种法则有唯一一个值和其对应

定义5. 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数 , 记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

因变量

自变量

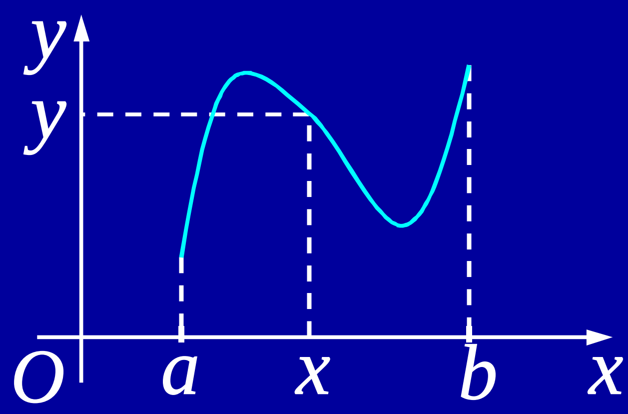
定义域

$$R_f = f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

称为值域

函数图形:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\} \subset D \times f(D)$$



$(D = [a, b])$

$$\forall x \in D \xmapsto{\ f\ } y \in R_f = f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

(定义域) (对应规则) (值域)

- **定义域** —— 使表达式或实际问题有意义的自变量集合.

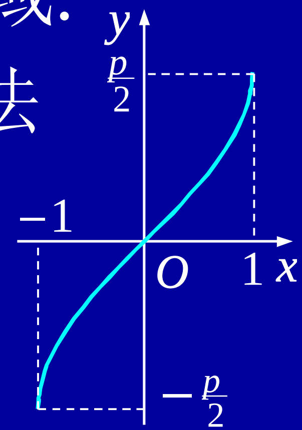
  对实际问题, 书写函数时必须写出定义域;

  对无实际背景的函数, 书写时可以省略定义域.

- **对应规律**的表示方法: 解析法、图像法、列表法

例如, 反正弦主值 $y = f(x) = \arcsin x$

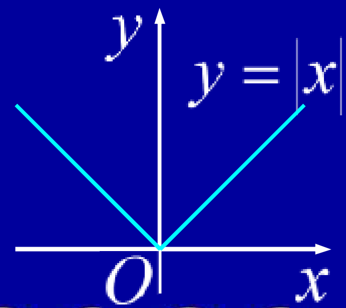
定义域 $D = [-1, 1]$, 值域 $f(D) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



又如, 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

定义域 $D = \mathbf{R}$

值　域 $f(D) = [0, +\infty)$

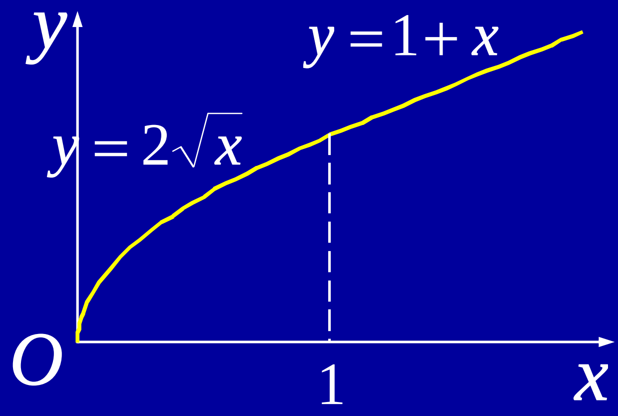


例4. 已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

写出 $f(x)$ 的定义域及值域, 并求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$.

解: $f(x)$ 的定义域 $D=[0,+\infty)$

值域 $f(D)=[0,+\infty)$



$$f(\tfrac{1}{2})=2\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$f(\tfrac{1}{t})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{t}, & 0<t<1\\ \dfrac{2}{\sqrt{t}}, & t\ge 1\end{cases}$$

2. 函数的几种特性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$, 且有区间 $I\subset D$.

(1) 有界性

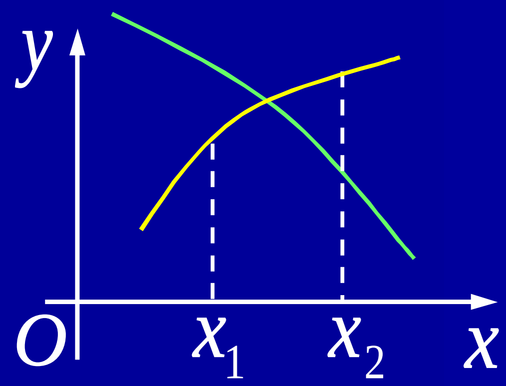
$\forall x\in D, \exists M>0$, 使 $|f(x)|\le M$, 称 $f(x)$ 为有界函数.

$\forall x\in I, \exists M>0$, 使 $|f(x)|\le M$, 称 $f(x)$ 在 I 上有界.

说明: 还可定义有上界、有下界、无界 .

(2) 单调性

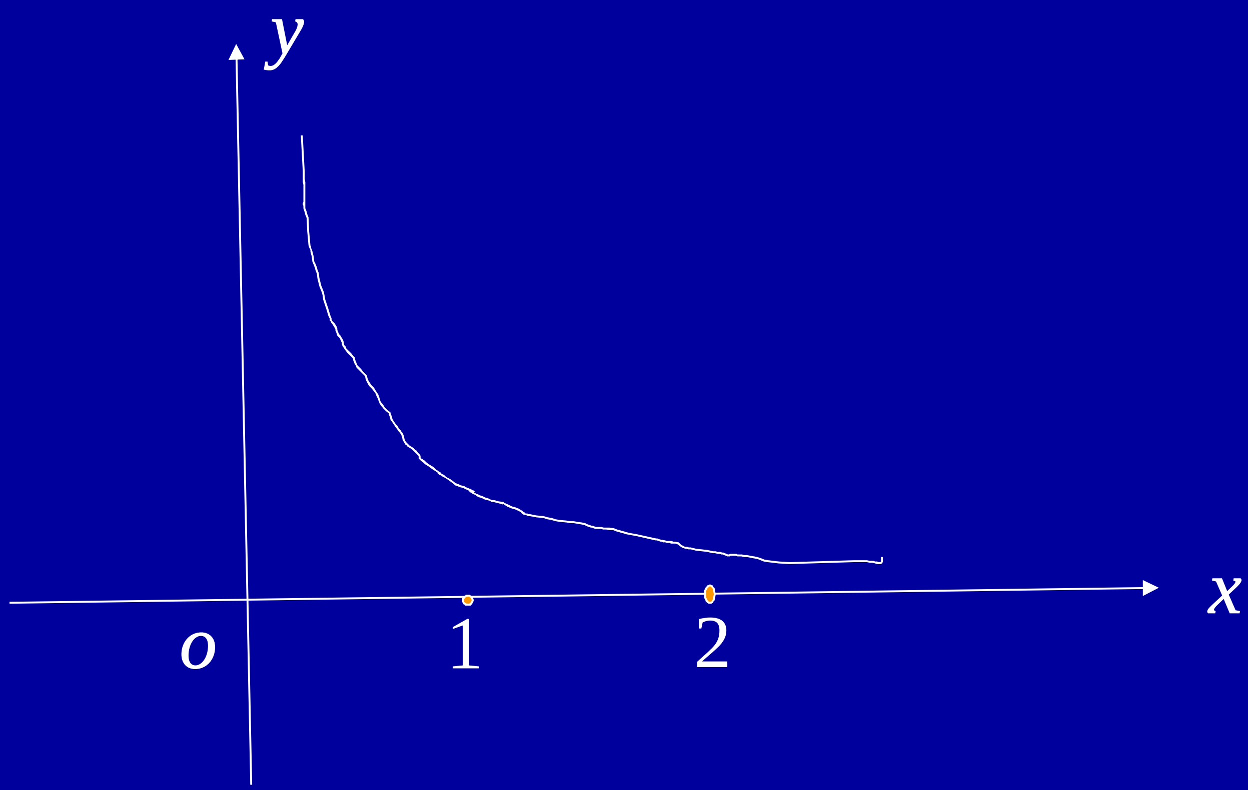
$\forall x_1, x_2\in I$, $x_1<x_2$ 时,



若 $f(x_1)<f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的 单调增函数 ;

若 $f(x_1)>f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的 单调减函数 .

例 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间[1,2]上有界，在区间(0,1)上无界，函数的有界性与区间密切相关。

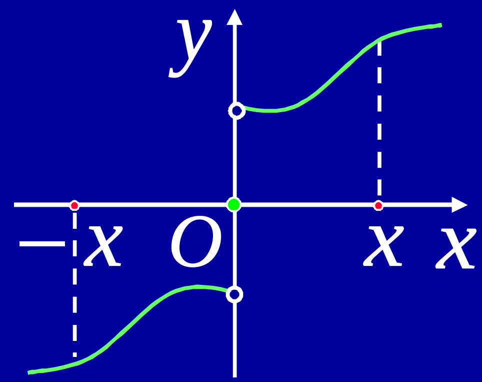


(3) 奇偶性 函数的定义域关于圆点对称

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

若 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

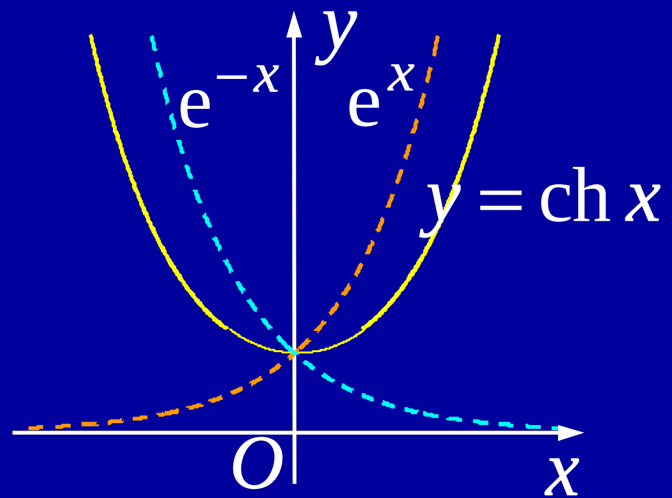


说明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义, 则当 $f(x)$ 为**奇函数**时, 必有 $f(0)=0$.

例如,

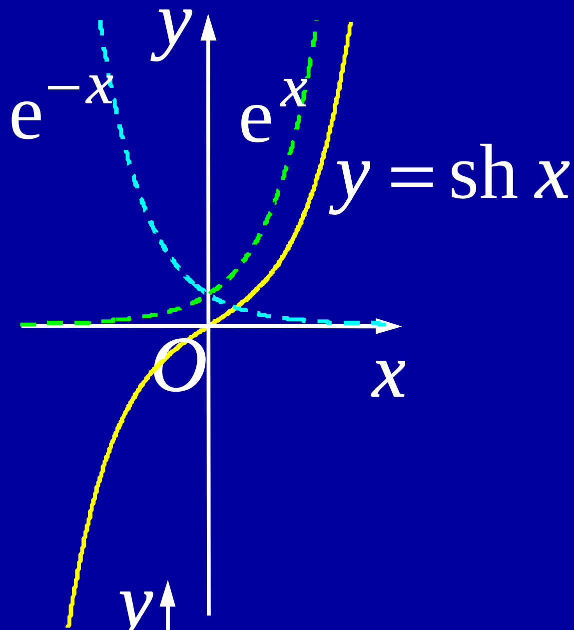
$$y=f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{偶函数}$$

$$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{ch} x \quad \text{双曲余弦}$$



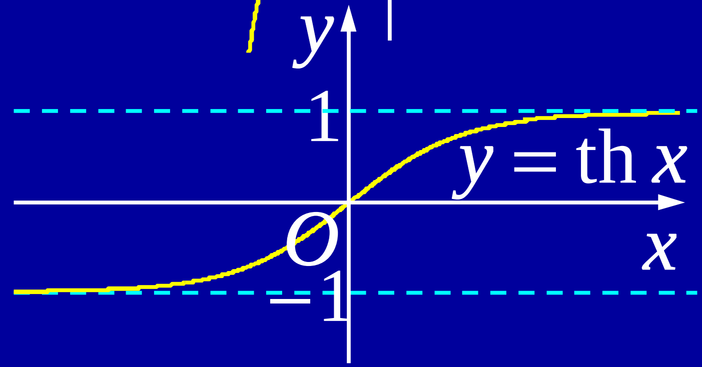
又如, $y=f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$　奇函数

$\overset{记}{=}\operatorname{sh}x$　双曲正弦



再如, $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$　奇函数

$\overset{记}{=}\operatorname{th}x$　双曲正切



说明: 给定 $f(x),\ x\in(-l,l)$

则 $f(x)=\underbrace{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{偶函数}}+\underbrace{\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{奇函数}}$

$$y = f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$ 奇函数

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

$$g(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$ 奇函数

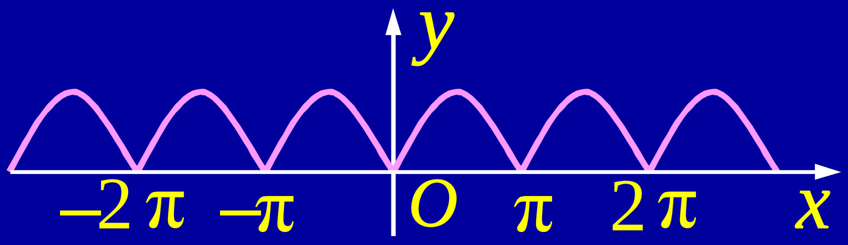
$$g(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -g(x)$$

(4) 周期性

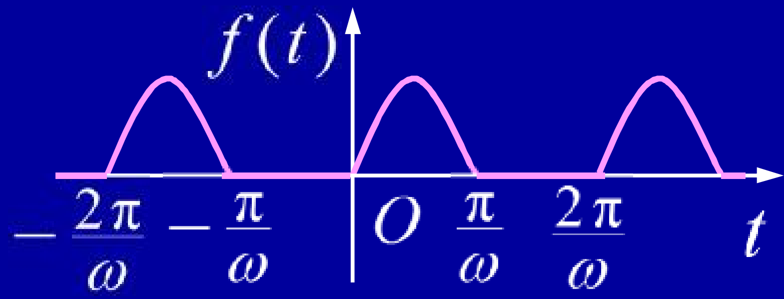
$\forall x \in D, \exists l > 0$, 且 $x \pm l \in D$, 若

$$f(x \pm l) = f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数 , 称 l 为周期 (一般指最小正周期).



周期为 π



周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

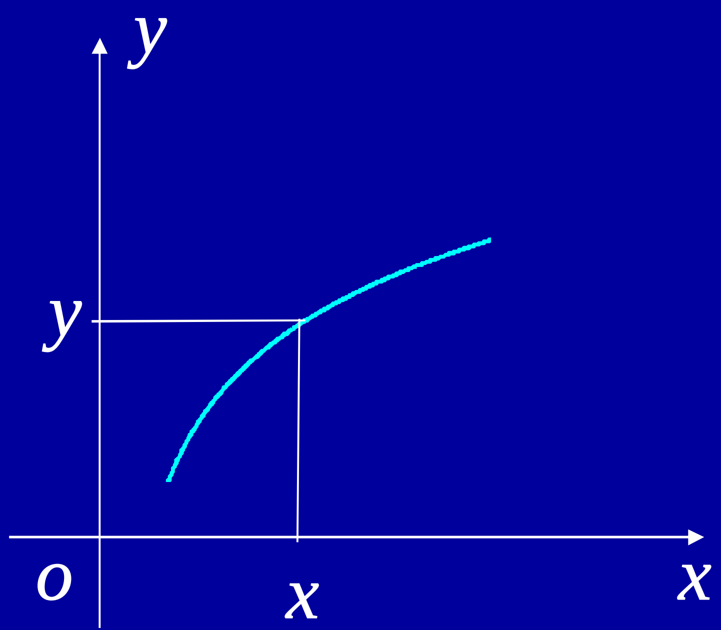
注: 周期函数不一定存在最小正周期 .

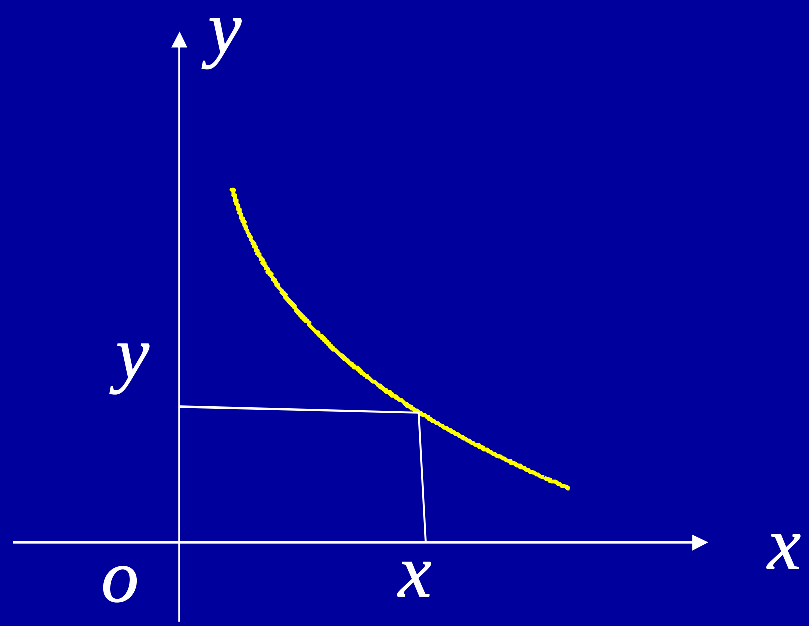
例如, 常量函数 $f(x) = C$

狄利克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

若函数 $f(x)$ 为单调函数，定义域为D,值域为W,

对任意的 $y \in W$, 按图中法则，有唯一的x和其对应，





x为y的函数。

例 $y=2x-1$

$x=\dfrac{y+1}{2}$ x是y的函数，

$y=\dfrac{x+1}{2}$ 是 $y=2x-1$ 的反函数。

$y=\dfrac{x+1}{2}$ 与 $y=2x-1$ 互为反函数。

3. 反函数与复合函数

若$x_1 \neq x_2$,则$f(x_1) \neq f(x_1)$,
则$f(x)$为单摄。

(1) 反函数的概念及性质

若函数 $f: D \to f(D)=W$ 为单射，则存在一新映射

$f^{-1}: f(D) \to D$, 使 $\forall y \in f(D), f^{-1}(y) = x$, 其中$f(x) = y$,

称此映射 f^{-1}为f 的反函数 .

习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

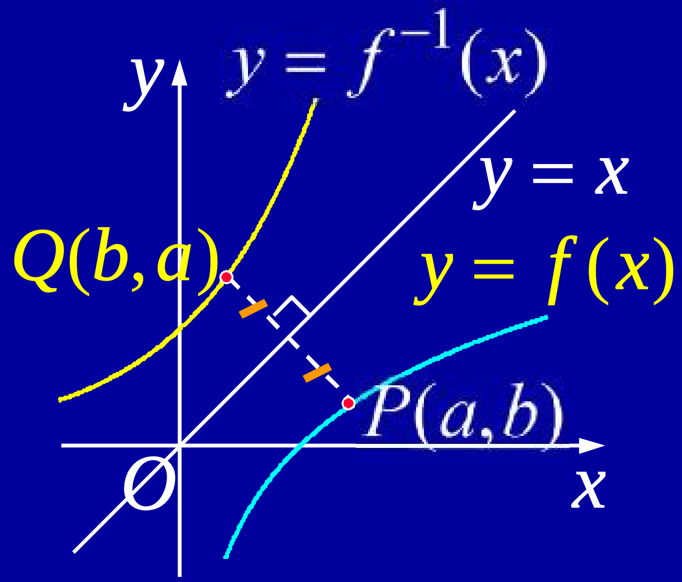
$$y = f^{-1}(x)\ , x \in f(D)$$

我们记 $y = f^{-1}(x) = g(x)$

性质:

1) $y = f(x)$ 单调递增(减) , 其反函数$y = f^{-1}(x) = g(x)$ 存在，且也单调递增 (减) .

2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



例如 ,

$$\left.\begin{array}{l}\text{指数函数 } y=\mathrm{e}^x,\ x\in(-\infty,+\infty)\\ \text{对数函数 } y=\ln x,\ x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\text{互为反函数},$$

它们都单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

注意函数与反函数的定义域与值域的关系。

例求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数。

解 令 $u=e^x>0$, 则有 $y=\dfrac{u-\dfrac{1}{u}}{2}$, $u^2-2yu-1=0$,

$$u=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1},\quad u=y+\sqrt{y^2+1},$$

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1},\quad x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

反三角函数

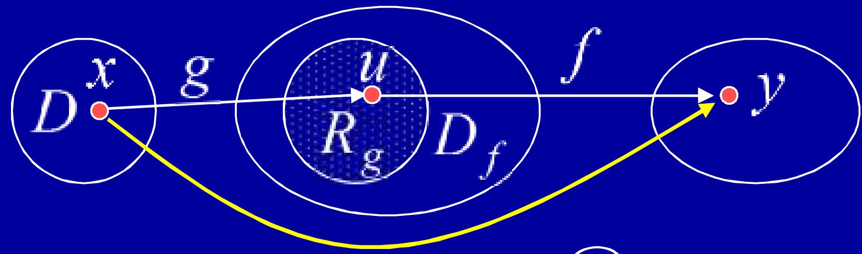
$y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$单调，$y \in [-1,1]$,

反正弦函数记为 $y = \arcsin x, \quad x \in [-1,1].$

$y = \cos x$ 在区间 $[0, p]$单调，$y \in [-1,1]$,

反余弦函数记为 $y = \arccos x, \quad x \in [-1,1].$

(2) 复合函数



设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_f \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D,\ 且\ R_g \subset D_f \qquad ②$$

则
$$y = f[g(x)],\ x \in D$$

称为由①, ②确定的复合函数, u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $R_g \subset D_f$ 不可少.

例如, 函数链 : $y = \arcsin u$, $u = \cos x$, 可定义复合函数

$$y = \arcsin \cos x,\ x \in \mathbf{R}$$

当改 $u = 1 - x^2$ 时, 虽不能在自然域 $\mathbf{R}$ 下构成复合函数,

但可定义复合函数 $y = \arcsin(1 - x^2),\ x \in [-1, 1]$

两个以上函数也可构成复合函数. 例如,

$$y=\sqrt{u}\,,\ u\ge 0$$

$$u=\cot v\,,\ v\ne k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$v=\frac{x}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

可定义复合函数:

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad x\in(2k\pi,(2k+1)\pi\,],\ \ k\in\mathbf{Z}$$

约定: 为简单计, 书写复合函数时不一定写出其定义域,
默认对应的函数链顺次满足构成复合函数的条件.

$$k\pi<\frac{x}{2}\le k\pi+\frac{\pi}{2}\text{时},\ \cot\frac{x}{2}\ge 0$$

4. 初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

(2) 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.否则称为非初等函数.

例如，$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$，故为初等函数.

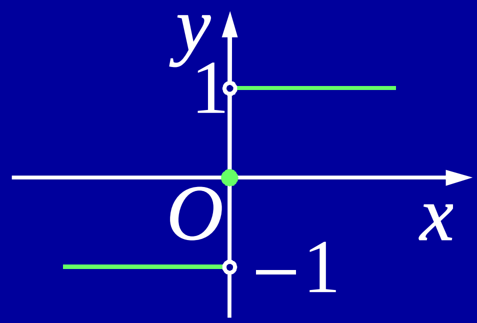
又如，双曲函数与反双曲函数也是初等函数.

(自学, P17 – P20)

非初等函数举例:

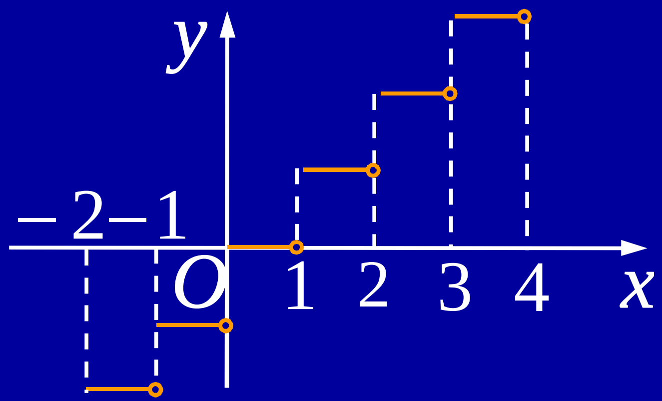
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n\,,\ \text{当 } n \le x < n+1\,,\ n \in \mathbf{Z}$$



例5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解:

x 换为 $f(x)$

$$f[f(x)]=\begin{cases}\underline{3f(x)+1}, & \boxed{f(x)<1} \longrightarrow \boxed{x<0}\\ f(x), & f(x)\ge 1\end{cases}$$

$$\boxed{3(3x+1)+1}$$

$$=\begin{cases}9x+4, & x<0\\ 3x+1, & 0\le x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

例6. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.

解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

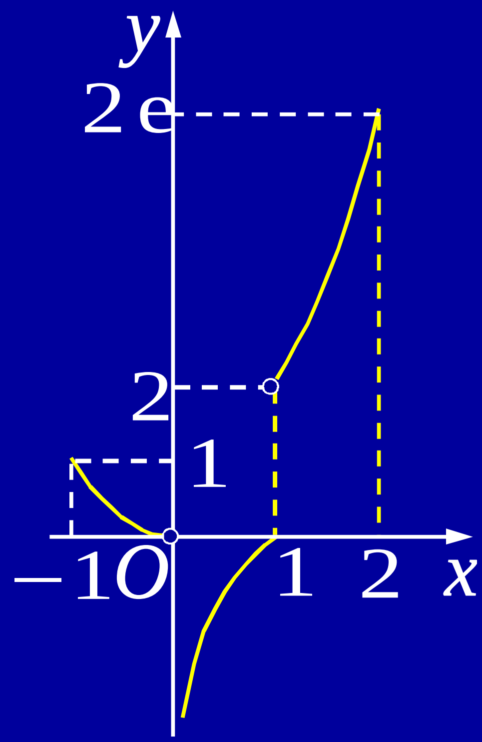
则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^{y}$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2e]$



反函数 $y=\begin{cases} e^{x}, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2e]$

内容小结

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases} \text{定义域} \\ \text{对应规律} \end{cases}$

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性,
奇偶性, 周期性

4. 初等函数的结构

作业

P16 1 (1),(3) ,(5)，(7); 6; 8; 9;
11;13 ;

备用题

1. 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$时$a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$ 为奇函数 .

证: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $a\,f(\frac{1}{t})+b\,f(t)=ct$

由
$$\begin{cases} a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ a\,f(\frac{1}{x})+b\,f(x)=cx \end{cases}$$

消去 $f(\frac{1}{x})$, 得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\quad (x\neq 0)$$

显然 $f(-x)=-f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数 .

2 . 设函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$, $y=b\ (a<b)$ 均对称, 求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证: 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x)=f(a-x),\qquad f(b+x)=f(b-x)$$

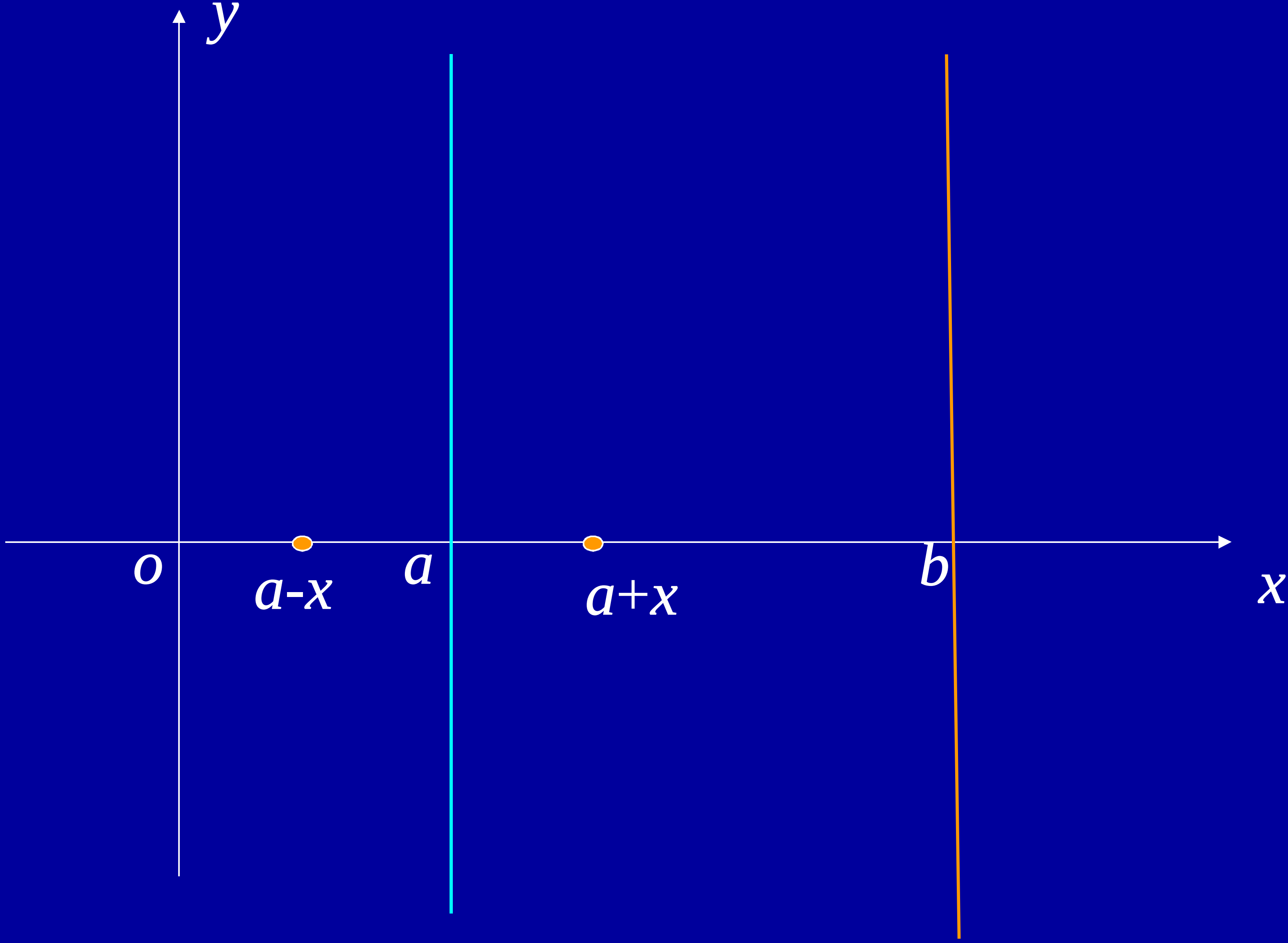
于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f[a+(x-a)] \\ &= f[a-(x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b+(2a-x-b)] \\ &= f[b-(2a-x-b)] \\ &= f[x+2(b-a)] \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数 , 周期为 $T=2(b-a)$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束



y
o
a-x
a
a+x
b
x