第五节

函数的微分

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

*四、微分在估计误差中的应用

一、微分的概念

引例: 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由x_0变到$x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

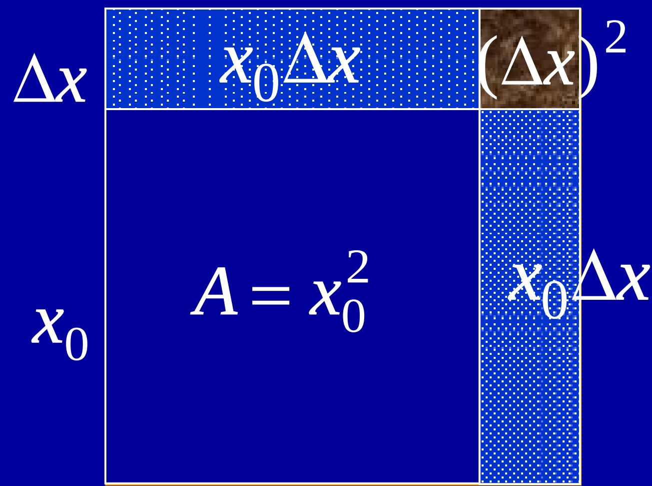
设薄片边长为x, 面积为A, 则$A=x^2$, 当x在x_0取得增量Δx时, 面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\triangle x\text{ 的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{ 时为高阶无穷小}}$$

关于△x 的线性主部

$\Delta x\to 0$时为高阶无穷小



故 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x$

称为函数在x_0的微分

定义: 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于 $\triangle x$ 的常数)

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可微**, 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**微分**, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x$$

定理: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

证："必要性"

已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A$

定理 : 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

"充分性" 已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+a \qquad (\lim_{Dx\to 0} a=0)$$

故 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+a\,\Delta x=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{}+o(\Delta x)$

即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

$f'(x_0)\neq 0$ 时
此项为Δy的
线性主部

说明： $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

所以 $\Delta x \to 0$ 时 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，故当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

HIGHER EDUCATION PRESS

微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \tan a \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y$

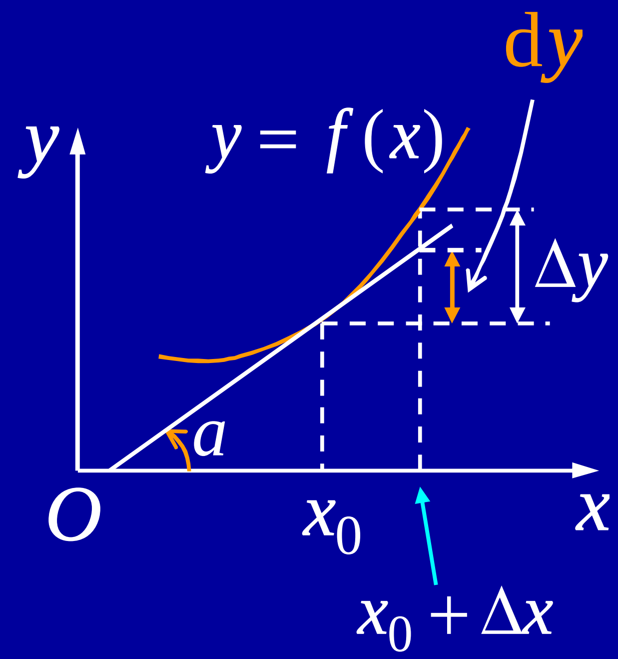
当 $y = x$ 时，

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}x$$

称 Δx 为**自变量的微分**，记作 $\mathrm{d}x$

则有 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$



导数也叫作微商

例如, $y = x^3$,

$$\mathrm{d}y\bigg|_{\substack{x=2\\ \mathrm{d}x=0.02}} = 3x^2 \cdot \mathrm{d}x\bigg|_{\substack{x=2\\ \mathrm{d}x=0.02}} = 0.24$$

又如, $y = \arctan x$,

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

基本初等函数的微分公式 (见 P116表)

二、 微分运算法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 均可微，则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

2. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ （C 为常数）

3. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

4. $\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$

5. 复合函数的微分

$y = f(u), u = \varphi(x)$ 分别可微，

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{j'(x)\,\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

微分形式不变

例1. $y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解:

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})$$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x$$

例2. 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求 $\mathrm{d}y$.

解: 利用一阶微分形式不变性，有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)\,(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

例3. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\,\frac{1}{2}x^2+C\,)=x\mathrm{d}x$ $\quad$ (C为任意常数)

(2) $\mathrm{d}(\,\frac{1}{w}\sin wt+C)=\cos wt\,\mathrm{d}t$

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.

注

数学中的反问题往往出现多值性，例如

$$2^2 = (4) \qquad (\pm 2)^2 = 4$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

三、 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = x_0 + \Delta x$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1) $f(x_0)$, $f'(x_0)$ 好算;

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0 = 0$，$|x|$ 很小时，

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式：（$|x|$ 很小）

(1) $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

证明： 令 $f(x) = (1+x)^\alpha$

得 $f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时，$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

(2) $\sin x \approx x$

(3) $e^x \approx 1 + x$

(4) $\tan x \approx x$

(5) $\ln(1+x) \approx x$

例4. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$,

取 $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $x=29^\circ=\frac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^0=\sin\frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485 \qquad \boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

例5. 计算$\sqrt[5]{245}$的近似值 .

$$3^5 = 243$$

解: $\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$

$$= 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{(1+x)^a \approx 1+a\,x}$$

$$\approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243}\right)$$

$$\approx 3.004938$$

$$\boxed{\sqrt[5]{245} = 3.004942\cdots}$$

例6. 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克 .（铜的密度：$8.9\,\mathrm{g/cm^3}$）

解: 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1,\Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV,

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} =4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13=1.16\ (\mathrm{g})$$

*四、 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A，其近似值为 a，

$|A-a|$ 称为a 的**绝对误差**

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为a 的**相对误差**

若 $|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的**绝对误差限**

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的**相对误差限**

误差传递公式：

若直接测量某量得 x, 已知测量误差限为 d_x ,

按公式 $y = f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\le |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $d_y \approx |f'(x)| \cdot d_x$

相对误差限约为 $\dfrac{d_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot d_x$

例7. 设测得圆钢截面的直径 $D = 60.03$ mm, 测量D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05$ mm , 欲利用公式 $A = \frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积 , 试估计面积的误差 .

解:计算 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A = |A'| \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.0 \times 0.05$$

$$\approx 4.715 \quad (\mathrm{mm}^2)$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|} = \frac{\frac{\pi}{2} D \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2\frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.0} = 0.17\ \%$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

内容小结

1. 微分概念

• 微分的定义及几何意义

• 可微 $\Longleftrightarrow$ 可导

2. 微分运算法则

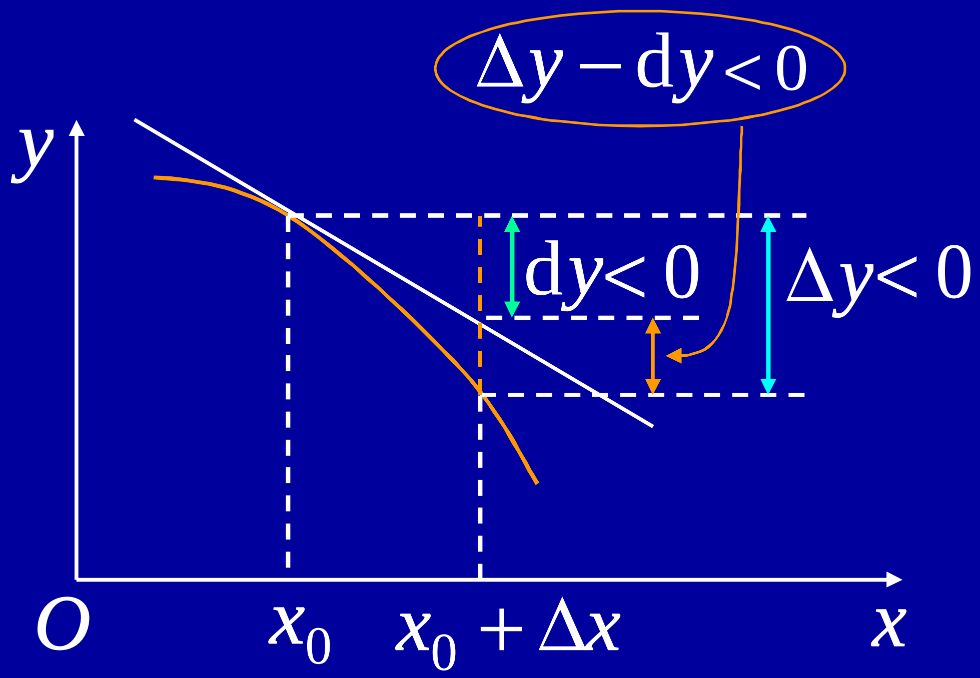
微分形式不变性：$\mathrm{d}f(u) = f'(u)\,\mathrm{d}u$

（ u 是自变量或中间变量 ）

3. 微分的应用 $\begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$

思考与练习

1. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y$, Δy 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



2. $\mathrm{d}(\arctan \mathrm{e}^{-x}) = \underline{\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$

$$= \underline{\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}}\,\mathrm{d}x$$

3. $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \underline{\sec^3 x}$

4. $\mathrm{d}\left(\underline{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}\right) = \sin 2x\,\mathrm{d}x$

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定，求 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}$.

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2\,\mathrm{d}\,x+3y^2\,\mathrm{d}\,y-3\cos 3x\,\mathrm{d}\,x+6\,\mathrm{d}\,y=0$$

当 $x=0$ 时 $y=0$, 由上式得 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x$

6. 设 $a>0$, 且 $|b|<<a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n+b}\approx a+\frac{b}{n\,a^{n-1}}$$

HIGHER EDUCATION PRESS

目录 上页 下页 返回 结束

作业

P123　1；

3 (4) , (7) , (8) , (9) , (10)；

4；　5;　8(1)；　9(2)；

*12

备用题

1\. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解： 因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

所以

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=-\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\mathrm{d}x$$

2. 已知 $xy = \mathrm{e}^{x+y}$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解:方程两边求微分, 得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - \mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y} - x}\,\mathrm{d}\,x$$

HIGHER EDUCATION PRESS

习题课 目录 上页 下页 返回 结束