

## 第四节

# 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

# 一、无穷小

**定义1.** 若  $x \rightarrow x_0$  时, 函数  $f(x) \rightarrow 0$ , 则称函数  $f(x)$   
(或  $x \rightarrow \infty$ )

为  $x \rightarrow x_0$  时的**无穷小**.  
(或  $x \rightarrow \infty$ )

例如:

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ , 函数  $x-1$  当  $x \rightarrow 1$  时为无穷小;

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 函数  $\frac{1}{x}$  当  $x \rightarrow \infty$  时为无穷小;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$ , 函数  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  当  $x \rightarrow -\infty$  时为无穷小.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

**定义1.** 若  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 函数  $f(x) \rightarrow 0$ , 则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的**无穷小**.

---

**说明:** 除 0 以外任何很小的常数都不是无穷小!  
因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,} \\ |C - 0| < \varepsilon$$

显然  $C$  只能是 0!



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

## 定理 1. ( 无穷小与函数极限的关系 )

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + a$ , 其中  $a$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量.

证:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists d > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < d$  时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

$\xleftrightarrow{a = f(x) - A} \lim_{x \rightarrow x_0} a = 0$

对自变量的其他变化过程类似可证.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

## 二、无穷大

**定义2.** 若任给  $M > 0$ , 总存在  $\delta > 0$  (正数  $X$ ), 使对一切满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  ( $|x| > X$ ) 的  $x$ , 总有

$$|f(x)| > M \quad \text{①}$$

则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

若在定义中将 ①式改为  $f(x) > M$  ( $f(x) < -M$ ),

则记作  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty$  ( $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty$ )



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

## 注意:

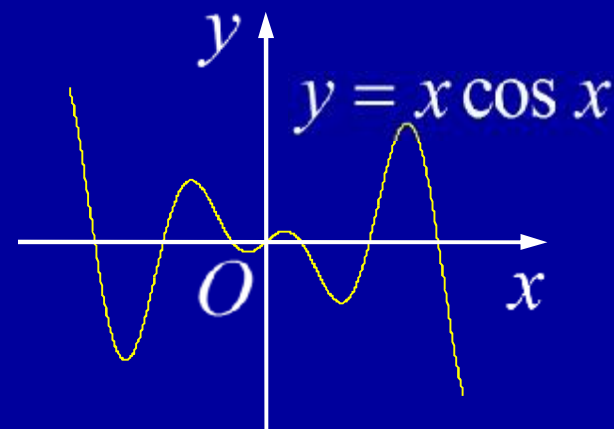
1. 无穷大不是很大的数,它是描述函数的一种状态.
2. 函数为无穷大,必定无界.但反之不真!

例如, 函数  $f(x) = x \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(2n\pi) = 2n\pi \rightarrow \infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty)$$

$$\text{但 } f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

所以  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  不是无穷大!



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束

例. 证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

证: 任给正数  $M$ , 要使  $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$ , 即  $|x-1| < \frac{1}{M}$ ,

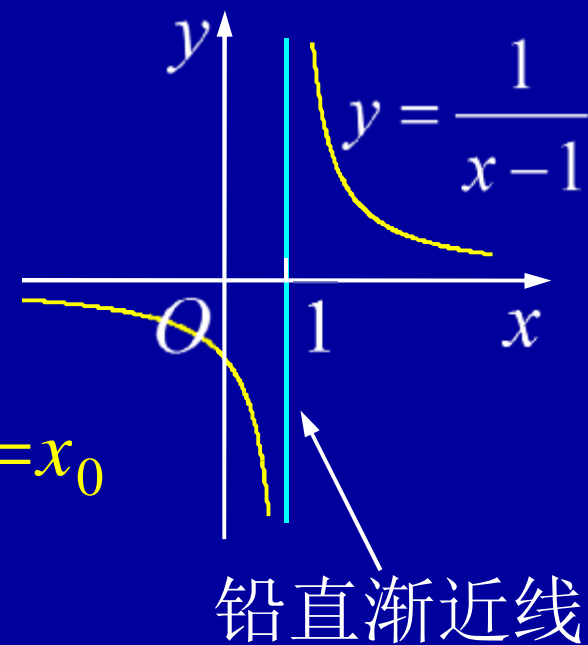
只要取  $\delta = \frac{1}{M}$ , 则对满足  $0 < |x-1| < \delta$  的一切  $x$ , 有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

说明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则直线  $x = x_0$

为曲线  $y = f(x)$  的铅直渐近线.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束



### 三、无穷小与无穷大的关系

**定理2.** 在自变量的同一变化过程中,

若  $f(x)$  为无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小;

若  $f(x)$  为无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大.

(自证)

**说明:** 据此定理, 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.



HIGHER EDUCATION PRESS



目录



上页



下页



返回



结束



## 内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义
2. 无穷小与函数极限的关系 Th1
3. 无穷小与无穷大的关系 Th2

## 思考与练习

P42 题1, \*3

P42 题\*3 提示:

$$|y| = \left| \frac{1}{x} + 2 \right| \geq \left| \frac{1}{x} \right| - 2, \quad \therefore 0 < |x| \leq \frac{1}{10^4 + 2}$$

## 作业

P42 \*2 (2) ; 4 (1) ; 8



HIGHER EDUCATION PRESS



第五节 目录 上页 下页 返回 结束