习题 3

3.1 选择题

(1) 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上：

① 这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零；

② 这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零；

③ 当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零；

④ 当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也一定是零.

在上述说法中，（　　）

(A) 只有①是正确的.

(B) ① 、②正确，③、④错误.

(C) ①、②、③都正确，④错误.

(D) ①、②、③、④都正确.

答案： (B)

(2) 一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体．物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为α．若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，滑轮的角加速度α将（　　）

(A) 不变.　　(B) 变小.

(C) 变大.　　(D) 如何变化无法判断.

答案： (C)

(3)关于刚体的转动惯量，下列说法中正确的是（　　）

（A）只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关；

（B）取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关；

（C）取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置；

（D）只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关。

答案： (C)

(4) 一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B．设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{KA}、E_{KB}，则应有（　　）

(A) $L_B > L_A$，$E_{KA} > E_{KB}$.

(B) $L_B > L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$.

(C) $L_B = L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$.

(D) $L_B < L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$.

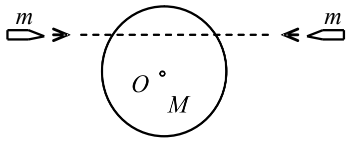
(E) $L_B = L_A$，$E_{KA} < E_{KB}$.

答案： (E)

(5) 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 O 转动，如图射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度ω（　　）

(A) 增大.　　(B) 不变.

(C) 减小.　　(D) 不能确定.



题 3.1（5）图

答案：(C)

3.2 填空题

(1) 三个质量均为 m 的质点，位于边长为 a 的等边三角形的三个顶点上．此系统对通过三角形中心并垂直于三角形平面的轴的转动惯量 J_0＝________，对通过三角形中心且平行于其一边的轴的转动惯量为 J_A＝__________，对通过三角形中心和一个顶点的轴的转动惯量为 J_B＝__________.

答案：ma^2 ； $\frac{1}{2}$ ma^2 ； $\frac{1}{2}$ ma^2

(2) 两个质量分布均匀的圆盘 A 和 B 的密度分别为ρ_A和ρ_B ($\rho_A>\rho_B$)，且两圆盘的总质量和厚度均相同。设两圆盘对通过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B，则有 J_A____J_B 。（填>、<或=）

答案：<。

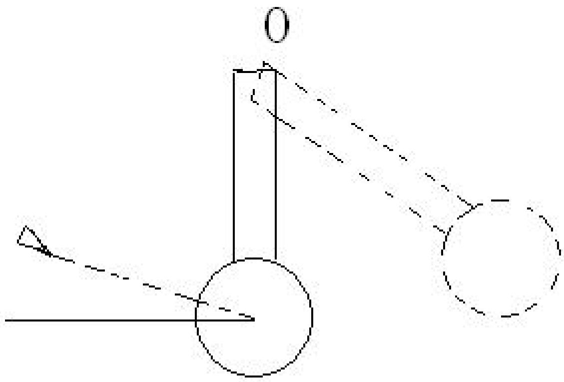
(3) 一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量 J＝3.0 kg •m²，角速度ω_0＝6.0 rad/s. 现对物体加一恒定的制动力矩 M ＝－12 N • m，当物体的角速度减慢到ω＝2.0 rad/s 时，物体已转过了角度$\Delta\theta$ ＝_________________.

答案：4.0rad

(4) 两个滑冰运动员的质量各为 70 kg，均以 6.5 m/s 的速率沿相反的方向滑行，滑行路线间的垂直距离为 10 m，当彼此交错时，各抓住一 10 m 长的绳索的一端，然后相对旋转，则抓住绳索之后各自对绳中心的角动量 L＝_______；它们各自收拢绳索，到绳长为 5 m 时，各自的速率υ ＝_______.

答案：2275 $kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$，　13 $m\cdot s^{-1}$

(5) 如题 3.2（5）图所示，一匀质木球固结在一细棒下端，且可绕水平光滑固定轴 O 转动，今有一子弹沿着与水平面成一角度的方向击中木球而嵌于其中，则在此击中过程中，木球、子弹、细棒系统的____________________守恒，原因是________________。木球被击中后棒和球升高的过程中，对木球、子弹、细棒、地球系统的________________守恒。



题 3.2（5）图

答案：对 o 轴的角动量守恒，因为在子弹击中木球过程中系统所受外力对 o 轴的合外力矩为零，机械能守恒。

3.3 半径为 30cm 的飞轮，从静止开始以 $0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ 的角加速度作匀角加速转动，则飞轮边缘上一点在飞轮转过 240°时的切向加速度和法向加速度分别为多少？

解： 由题可知转的角度为 $\Delta\theta = 2\pi\dfrac{240}{360} = \dfrac{4}{3}\pi rad$

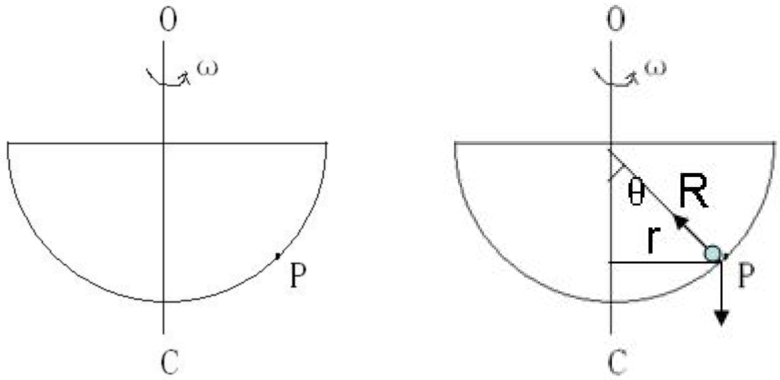
又 $\Delta\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \dfrac{1}{2}\times 0.5t^2 = \dfrac{4}{3}\pi$

由上式得 $t^2 = \dfrac{16}{3}\pi$

则飞轮边缘上一点的切向加速度为 $a_\tau = \alpha R = 0.5\times 0.3 = 0.15 rad\cdot s^{-2}$

法向加速度为 $a_n = \omega^2 R = \alpha^2 t^2 R = 0.5^2 \times \dfrac{16}{3}\pi \times 0.3 = 1.256 rad\cdot s^{-2}$

3.4 如题 3.4 图所示，一光滑的内表面半径为 10cm 的半球形碗，以匀角速度ω绕其对称轴 OC 旋转，若放在碗内表面上的一个小球 P 相对于碗静止，其位置高于碗底 4cm，则碗旋转的角速度为多少？



(a) (b)

题 3.4 图

解：小球受到重力和碗的支持力作用，其合力为向心力，如图（b）所示。设支持力

为 N，则有

$$N\cos\theta = mg$$

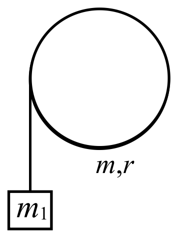
$$F_n = N\sin\theta = mgtg\theta = \frac{4}{3}mg$$

又 $$F_n = m\omega^2 r = \frac{4}{3}mg$$

$$r = 0.08m$$

所以 $$\omega = \sqrt{\frac{4\times 10}{3\times 0.08}} = 13rad/s$$

3.5 质量 m＝1.1 kg 的匀质圆盘，可以绕通过其中心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对轴的转动惯量 $J=\frac{1}{2}mr^2$（r 为盘的半径）. 圆盘边缘绕有绳子，绳子下端挂一质量 m_1＝1.0 kg 的物体，如题 3. 5 图所示．起初在圆盘上加一恒力矩使物体以速率υ_0＝0. 6 m/s 匀速上升，如撤去所加力矩，问经历多少时间圆盘开始作反方向转动．



解：撤去外加力矩后受力分析如图所示．

$$m_1g - T = m_1a$$

$$Tr = J\beta$$

$$a = r\beta$$

$$a = m_1gr / (m_1r + J/r)$$

代入 $J=\frac{1}{2}mr^2$， $$a = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{1}{2}m} = 6.32\ \mathrm{ms^{-2}}$$

∵ $$\nu_0 - at = 0$$

∴ $$t = \nu_0 / a = 0.095\ \mathrm{s}$$

3.6 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度ω_0转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为多少？
解：把转台和人作为一系统，人沿半径向外跑去过程中，外力对中心轴的力矩为零，

所以系统对轴的角动量守恒。即有

$$J\omega_0=(J+mR^2)\omega$$

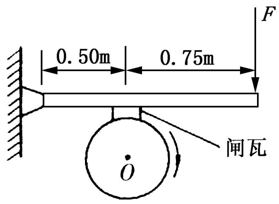
所以当人到达转台边缘时，转台的角速度为 $\omega=\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$

3.7 飞轮的质量 m =60kg，半径 R =0.25m，绕其水平中心轴 O 转动，转速为900rev·min^{-1}.现利用一制动的闸杆，在闸杆的一端加一竖直方向的制动力 F ，可使飞轮减速．已知闸杆的尺寸如题3.7图所示，闸瓦与飞轮之间的摩擦系数 μ =0.4，飞轮的转动惯量可按匀质圆盘计算．试求：

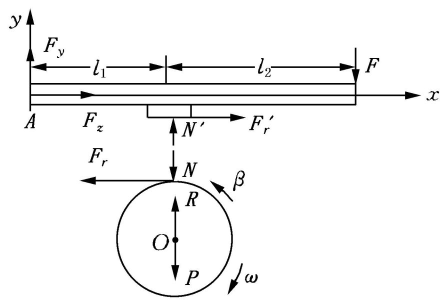
(1)设 F =100 N，问可使飞轮在多长时间内停止转动?在这段时间里飞轮转了几转?

(2)如果在2s内飞轮转速减少一半，需加多大的力 F ？

解:(1)先作闸杆和飞轮的受力分析图(如图(b))．图中 N 、 N' 是正压力， F_r 、 F_r' 是摩擦力，F_x 和 F_y 是杆在 A 点转轴处所受支承力，R 是轮的重力，P 是轮在 O 轴处所受支承力．



题 3.7 图（a）



题 3.7 图(b)

杆处于静止状态，所以对 A 点的合力矩应为零，设闸瓦厚度不计，则有

$$F(l_1+l_2)-N'l_1=0 \qquad N'=\frac{l_1+l_2}{l_1}F$$

对飞轮，按转动定律有 $\alpha=-F_rR/J$ ，式中负号表示 β 与角速度 ω 方向相反．

∵ $$F_r=\mu N \qquad N=N'$$

∴ $$F_r=\mu N'=\mu\frac{l_1+l_2}{l_1}F$$

又∵
$$J=\frac{1}{2}mR^2,$$

∴
$$\alpha=-\frac{F_rR}{J}=\frac{-2\mu(l_1+l_2)}{mRl_1}F \qquad ①$$

以 $F=100$ N 等代入上式，得

$$\alpha=\frac{-2\times0.40\times(0.50+0.75)}{60\times0.25\times0.50}\times100=-\frac{40}{3}\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

由此可算出自施加制动闸开始到飞轮停止转动的时间为

$$t=-\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{900\times2\pi\times3}{60\times40}=7.06\ \mathrm{s}$$

这段时间内飞轮的角位移为

$$\phi=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{900\times2\pi}{60}\times\frac{9}{4}\pi-\frac{1}{2}\times\frac{40}{3}\times(\frac{9}{4}\pi)^2$$
$$=53.1\times2\pi\ \mathrm{rad}$$

可知在这段时间里，飞轮转了53.1转.

(2) $\omega_0=900\times\frac{2\pi}{60}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，要求飞轮转速在 $t=2$ s 内减少一半，可知

$$\alpha=\frac{\frac{\omega_0}{2}-\omega_0}{t}=-\frac{\omega_0}{2t}=-\frac{15\pi}{2}\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

用上面式(1)所示的关系，可求出所需的制动力为

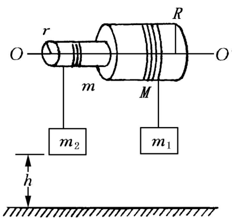
$$F=-\frac{mRl_1\alpha}{2\mu(l_1+l_2)}=\frac{60\times0.25\times0.50\times15\pi}{2\times0.40\times(0.50+0.75)\times2}=177N$$

3.8 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕其光滑的水平对称轴 OO' 转动.设大小圆柱体的半径分别为 R 和 r，质量分别为 M 和 m．绕在两柱体上的细绳分别与物体 m_1 和 m_2 相连，m_1 和 m_2 则挂在圆柱体的两侧，如题3.8图所示．设 R ＝0.20m, r ＝0.10m，m ＝4 kg，M ＝10 kg，m_1 ＝ m_2 ＝2 kg，且开始时 m_1，m_2 离地均为 h ＝2m．求：

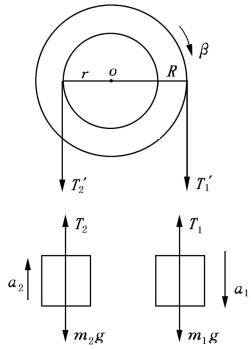
(1)柱体转动时的角加速度；

(2)两侧细绳的张力．

解：设 a_1，a_2 和β分别为 m_1，m_2 和柱体的加速度及角加速度，方向如图(如图 b)．



题 3.8(a)图



题 3.8(b)图

(1) m_1, m_2和柱体的运动方程如下：

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \qquad ①$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \qquad ②$$

$$T_1' R - T_2' r = J\alpha \qquad ③$$

式中 $T_1' = T_1, T_2' = T_2, a_2 = r\alpha, a_1 = R\alpha$

而 $$J = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

由上式求得

$$\alpha = \frac{Rm_1 - rm_2}{J + m_1R^2 + m_2r^2} g$$

$$= \frac{0.2\times 2 - 0.1\times 2}{\frac{1}{2}\times 10\times 0.20^2 + \frac{1}{2}\times 4\times 0.10^2 + 2\times 0.20^2 + 2\times 0.10^2} \times 9.8$$

$$= 6.13\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

(2)由①式

$$T_2 = m_2 r\alpha + m_2 g = 2\times 0.10\times 6.13 + 2\times 9.8 = 20.8\ \mathrm{N}$$

由②式

$$T_1 = m_1 g - m_1 R\alpha = 2\times 9.8 - 2\times 0.2.\times 6.13 = 17.1\ \mathrm{N}$$

3.9 计算题3.9图所示系统中物体的加速度．设滑轮为质量均匀分布的圆柱体，其质量为M，半径为r，在绳与轮缘的摩擦力作用下旋转，忽略桌面与物体间的摩擦，设m_1＝50　kg，m_2＝200 kg,M＝15 kg, r＝0.1 m

解：分别以m_1，m_2滑轮为研究对象，受力图如图(b)所示．对m_1，m_2运用牛顿定律，有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \qquad ①$$

$$T_1 = m_1 a \qquad ②$$

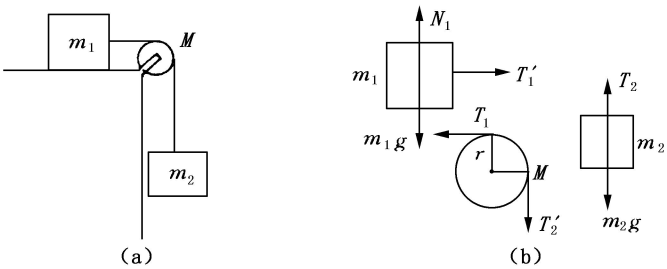
对滑轮运用转动定律，有

$$T_2 r - T_1 r = (\frac{1}{2}Mr^2)\beta \qquad ③$$

又，
$$a = r\beta \qquad ④$$

联立以上 4 个方程，得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = \frac{200 \times 9.8}{5 + 200 + \frac{15}{2}} = 7.6 \qquad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

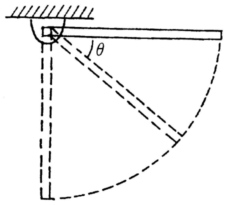


题 3.9(a)图　　　　题 3.9(b)图

3.10 如题3.10图所示，一匀质细杆质量为m，长为l，可绕过一端O的水平轴自由转动，杆于水平位置由静止开始摆下．求：

(1)初始时刻的角加速度；

(2)杆转过θ角时的角速度.



题 3.10 图

解：(1)由转动定律，有

$$mg\frac{1}{2}l = (\frac{1}{3}ml^2)\beta$$

∴
$$\beta = \frac{3g}{2l}$$

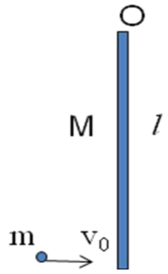
(2)由机械能守恒定律，有

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

∴
$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

3.11 如题3.11图所示，质量为M，长为l的均匀直棒，可绕垂直于棒一端的水平轴O无摩

擦地转动，它原来静止在平衡位置上．现有一质量为m速度为v_0的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直地相撞．设这碰撞为弹性碰撞，试计算碰撞后小球的速度和直棒获得的初角速度。



题 3.11 图

解： 设棒经小球碰撞后得到的初角速度为ω，而小球的速度变为v，按题意，小球和棒作弹性碰撞，所以碰撞时遵从角动量守恒定律和机械能守恒定律，可列式：

$$mv_0 l = J\omega + mvl \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad ②$$

上两式中$J = \frac{1}{3}Ml^2$

联立①②式，可得

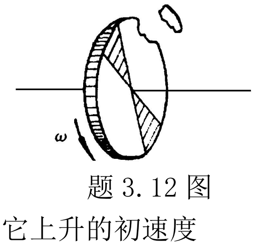
$$v = \frac{3m - M}{3m + M}v_0$$

$$\omega = \frac{6mv_0}{(3m + M)l}$$

3.12 一个质量为M、半径为R并以角速度ω转动着的飞轮 (可看作匀质圆盘)，在某一瞬时突然有一片质量为m的碎片从轮的边缘上飞出，见题3.12图．假定碎片脱离飞轮时的瞬时速度方向正好竖直向上．

(1)问它能升高多少?

(2)求余下部分的角速度、角动量和转动动能．



题 3.12 图

解：(1)碎片离盘瞬时的线速度即是它上升的初速度

$$v_0 = R\omega$$

设碎片上升高度h时的速度为v，则有

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

令$v=0$，可求出上升最大高度为

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}R^2\omega^2$$

(2)圆盘的转动惯量$J=\frac{1}{2}MR^2$，碎片抛出后圆盘的转动惯量$J'=\frac{1}{2}MR^2-mR^2$，碎片脱离前，盘的角动量为$J\omega$，碎片刚脱离后，碎片与破盘之间的内力变为零，但内力不影响系统的总角动量，碎片与破盘的总角动量应守恒，即

$$J\omega = J'\omega' + mv_0R$$

式中ω'为破盘的角速度．于是

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = (\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega' + mv_0R$$

其中 $$v_0 = R\omega$$

得$\omega'=\omega$ (即角速度不变)
圆盘余下部分的角动量为

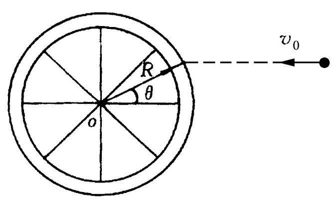
$$(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega$$

转动动能为$E_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2)\omega^2$

3.13 一质量为m、半径为R的自行车轮，假定质量均匀分布在轮缘上，可绕轴自由转动．另一质量为m_0的子弹以速度v_0射入轮缘(如题3.13图所示方向)．

(1)开始时轮是静止的，在质点打入后的角速度为何值?

(2)用m，m_0和θ 表示系统(包括轮和质点)最后动能和初始动能之比．



题 3.13 图

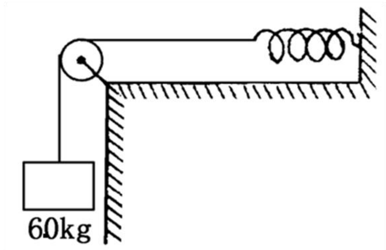
解: (1)射入的过程对O轴的角动量守恒

$$R\sin\theta m_0 v_0 = (m+m_0)R^2\omega$$

∴ $$\omega = \frac{m_0 v_0 \sin\theta}{(m+m_0)R}$$

(2)
$$\frac{E_k}{E_{k_0}}=\frac{\frac{1}{2}[(m+m_0)R^2][\frac{m_0 v_0 \sin\theta}{(m+m_0)R}]^2}{\frac{1}{2}m_0 v_0^2}=\frac{m_0\sin^2\theta}{m+m_0}$$

3.14 弹簧、定滑轮和物体的连接如题3.14图所示，弹簧的劲度系数为2.0 N·m^{-1}；定滑轮的转动惯量是0.5kg·m^2，半径为0.30m ，问当6.0 kg质量的物体落下0.40m 时，它的速率为多大？假设开始时物体静止而弹簧无伸长.



题 3.14 图

解： 以重物、滑轮、弹簧、地球为一系统，重物下落的过程中，机械能守恒，以最低点为重力势能零点，弹簧原长为弹性势能零点，则有

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}kh^2$$

又
$$\omega=v/R$$

故有
$$v=\sqrt{\frac{(2mgh-kh^2)R^2}{mR^2+I}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2\times 6.0\times 9.8\times 0.4-2.0\times 0.4^2)\times 0.3^2}{6.0\times 0.3^2+0.5}}$$
$$=2.0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$