习题5

5.1 选择题

(1)一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$，则该物体在 $t = 0$ 时刻的动能与 $t = T/8$（T 为振动周期）时刻的动能之比为：

(A)1：4　（B）1：2　（C）1：1　(D) 2：1

[答案：D]

(2)弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为

(A)kA^2　　(B) $kA^2/2$

(C) $kA^2//4$　　(D)0

[答案：D]

(3)简谐振动过程中，动能和势能相等的位置的位移等于

(A)$\pm\dfrac{A}{4}$　　(B) $\pm\dfrac{A}{2}$

(C) $\pm\dfrac{\sqrt{3}A}{2}$　　(D) $\pm\dfrac{\sqrt{2}A}{2}$

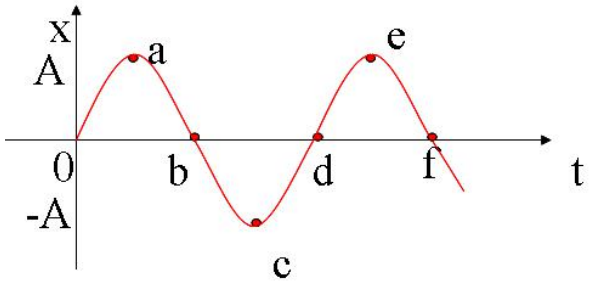
[答案：D]

5.2 填空题

(1)一质点在 X 轴上作简谐振动，振幅 A＝4cm，周期 T＝2s，其平衡位置取作坐标原点。若 t=0 时质点第一次通过 x＝－2cm 处且向 X 轴负方向运动，则质点第二次通过 x＝－2cm 处的时刻为____s。

[答案：$\dfrac{2}{3}s$]

(2)一水平弹簧简谐振子的振动曲线如题 5.2(2)图所示。振子在位移为零，速度为－ωA、加速度为零和弹性力为零的状态，对应于曲线上的____________点。振子处在位移的绝对值为 A、速度为零、加速度为－ω^2A 和弹性力为－KA 的状态，则对应曲线上的____________点。



题 5.2(2) 图

[答案：b、f；　a、e]

(3)一质点沿 x 轴作简谐振动，振动范围的中心点为 x 轴的原点，已知周期为 T，振幅为 A。

(a) 若 t=0 时质点过 x=0 处且朝 x 轴正方向运动，则振动方程为 x=____________________。

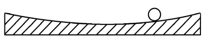
(b) 若 t=0 时质点过 x=A/2 处且朝 x 轴负方向运动，则振动方程为 x=__________________。

[答案：$x = A\cos(2\pi t/T - \pi/2)$；　$x = A\cos(2\pi t/T + \pi/3)$]

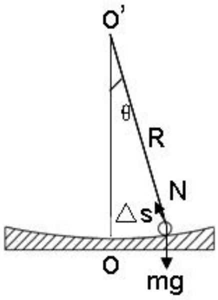
5.3　符合什么规律的运动才是谐振动?分别分析下列运动是不是谐振动：

(1)拍皮球时球的运动；

(2)如题5.3图所示，一小球在一个半径很大的光滑凹球面内滚动(设小球所经过的弧线很短)．



题5.3图



题5.3图(b)

解：要使一个系统作谐振动，必须同时满足以下三个条件：一，描述系统的各种参量，如质量、转动惯量、摆长……等等在运动中保持为常量；二，系统是在自己的稳定平衡位置附近作往复运动；三，在运动中系统只受到内部的线性回复力的作用． 或者说，若一个系统的运动微分方程能用

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\xi = 0$$

描述时，其所作的运动就是谐振动．

(1)拍皮球时球的运动不是谐振动．第一，球的运动轨道中并不存在一个稳定的平衡位置； 第二，球在运动中所受的三个力：重力，地面给予的弹力，击球者给予的拍击力，都不是线性回复力．

(2)小球在题5.3图所示的情况中所作的小弧度的运动，是谐振动．显然，小球在运动过程中，各种参量均为常量；该系统(指小球凹槽、地球系统)的稳定平衡位置即凹槽最低点，即系统势能最小值位置点O；而小球在运动中的回复力为$-mg\sin\theta$，如题5.3图(b)中所示，因$\Delta S << R$，故$\theta = \frac{\Delta S}{R} \to 0$，所以回复力为$-mg\theta$．式中负号，表示回复力的方向始终与角位移的方向相反．即小球在O点附近的往复运动中所受回复力为线性的．若以小球为对象，则小球在以O'为圆心的竖直平面内作圆周运动，由牛顿第二定律，在凹槽切线方向上有

$$mR\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\theta$$

令$\omega^2=\dfrac{g}{R}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

5.4 弹簧振子的振幅增大到原振幅的两倍时，其振动周期、振动能量、最大速度和最大加速度等物理量将如何变化？

解：弹簧振子的振动周期、振动能量、最大速度和最大加速度的表达式分别为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\quad E=\frac{1}{2}kA^2$$
$$v_m=\omega A,\quad a_m=\omega^2 A$$

所以当振幅增大到原振幅的两倍时，振动周期不变，振动能量增大为原来的 4 倍，最大速度增大为原来的 2 倍，最大加速度增大为原来的 2 倍。

5.5 单摆的周期受哪些因素影响？把某一单摆由赤道拿到北极去，它的周期是否变化？

解：单摆的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

因此受摆线长度和重力加速度的影响。把单摆由赤道拿到北极去，由于摆线长度不变，重力加速度增大，因此它的周期是变小。

5.6 简谐振动的速度和加速度在什么情况下是同号的？在什么情况下是异号的？加速度为正值时，振动质点的速率是否一定在增大？

解：简谐振动的速度和加速度的表达式分别为

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$
$$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

当$\sin(\omega t+\varphi_0)$与$\cos(\omega t+\varphi_0)$同号时，即位相在第 1 或第 3 象限时，速度和加速度同号；当$\sin(\omega t+\varphi_0)$与$\cos(\omega t+\varphi_0)$异号时，即位相在第 2 或第 4 象限时，速度和加速度异号。

加速度为正值时，振动质点的速率不一定增大。

5.7 质量为$10\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$的小球与轻弹簧组成的系统，按$x=0.1\cos(8\pi t+\dfrac{2\pi}{3})$ (SI) 的规律作谐振动，求：

(1)振动的周期、振幅和初位相及速度与加速度的最大值；

(2)最大的回复力、振动能量、平均动能和平均势能，在哪些位置上动能与势能相等?

(3) $t_2=5\mathrm{s}$ 与 $t_1=1\mathrm{s}$ 两个时刻的位相差；

解：(1)设谐振动的标准方程为$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$，则知：

$$A = 0.1\text{m}, \omega = 8\pi, \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4}\text{s}, \phi_0 = 2\pi/3$$

又 $$|v_m| = \omega A = 0.8\pi\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \ = 2.51\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$|a_m| = \omega^2 A = 63.2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) $$|F_m| = ma_m = 0.63\text{N}$$

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 = 3.16\times 10^{-2}\,\text{J}$$

$$\overline{E}_p = \overline{E}_k = \frac{1}{2}E = 1.58\times 10^{-2}\,\text{J}$$

当$E_k = E_p$时，有$E = 2E_p$，

即 $$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}kA^2)$$

∴ $$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm\frac{\sqrt{2}}{20}\text{m}$$

(3) $$\Delta\phi = \omega(t_2 - t_1) = 8\pi(5-1) = 32\pi$$

5.8　一个沿x轴作简谐振动的弹簧振子，振幅为A，周期为T，其振动方程用余弦函数表示．如果$t = 0$时质点的状态分别是：

(1) $x_0 = -A$；

(2)过平衡位置向正向运动；

(3)过$x = \frac{A}{2}$处向负向运动；

(4)过$x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$处向正向运动．

试求出相应的初位相，并写出振动方程．

解：因为 $$\begin{cases} x_0 = A\cos\phi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\phi_0 \end{cases}$$

将以上初值条件代入上式，使两式同时成立之值即为该条件下的初位相．故有

$$\phi_1 = \pi \qquad x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \pi)$$

$$\phi_2 = \frac{3}{2}\pi \qquad x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3}{2}\pi)$$

$$\phi_3 = \frac{\pi}{3} \qquad x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3})$$

$$\phi_4 = \frac{5\pi}{4} \qquad x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5}{4}\pi)$$

5.9　一质量为$10\times10^{-3}\,\mathrm{kg}$的物体作谐振动，振幅为$24\mathrm{cm}$，周期为$4.0\mathrm{s}$，当$t=0$时位移为$+24\mathrm{cm}$．求：

(1) $t=0.5\mathrm{s}$时，物体所在的位置及此时所受力的大小和方向；

(2)由起始位置运动到$x=12\mathrm{cm}$处所需的最短时间；

(3)在$x=12\mathrm{cm}$处物体的总能量.

解：由题已知　　　　　　$A = 24\times10^{-2}\,\mathrm{m}, T = 4.0\mathrm{s}$

∴　　　　　　$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0.5\pi \quad \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

又，$t=0$时，$x_0 = +A, \therefore \phi_0 = 0$

故振动方程为

$$x = 24\times10^{-2}\cos(0.5\pi t)\mathrm{m}$$

(1)将$t=0.5\mathrm{s}$代入得

$$x_{0.5} = 24\times10^{-2}\cos(0.5\pi t)\mathrm{m} = 0.17\mathrm{m}$$

$$\begin{aligned} F &= -ma = -m\omega^2 x \\ &= -10\times10^{-3}\times(\frac{\pi}{2})^2\times0.17 = -4.2\times10^{-3}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

方向指向坐标原点，即沿x轴负向.

(2)由题知，$t=0$时，$\phi_0 = 0$，

$t=t$时　　$x_0 = +\frac{A}{2}, 且 v<0, 故 \phi_t = \frac{\pi}{3}$

∴　　　　　　$t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\pi}{3}/\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\mathrm{s}$

(3)由于谐振动中能量守恒，故在任一位置处或任一时刻的系统的总能量均为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \\ &= \frac{1}{2}\times10\times10^{-3}(\frac{\pi}{2})^2\times(0.24)^2 \\ &= 7.1\times10^{-4}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

5.10　有一轻弹簧，下面悬挂质量为$1.0\mathrm{g}$的物体时，伸长为$4.9\mathrm{cm}$．用这个弹簧和一个质

量为8.0g的小球构成弹簧振子，将小球由平衡位置向下拉开1.0cm后，给予向上的初速度$v_0=5.0\text{cm}/\text{s}$，求振动周期和振动表达式.

解：由题知 $k=\dfrac{m_1 g}{x_1}=\dfrac{1.0\times10^{-3}\times9.8}{4.9\times10^{-2}}=0.2\quad \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

而$t=0$时，$x_0=-1.0\times10^{-2}\,\text{m}, v_0=5.0\times10^{-2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$（设向上为正）

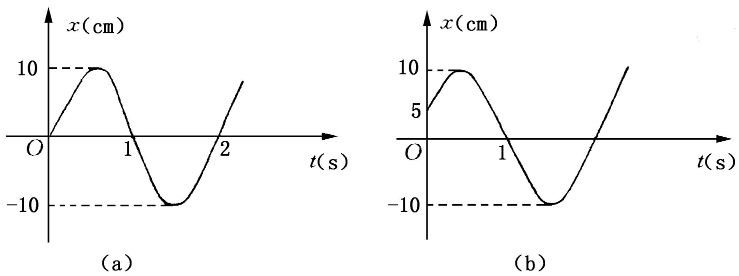
又 $$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0.2}{8\times10^{-3}}}=5,\text{即}T=\frac{2\pi}{\omega}=1.26\text{s}$$

∴ $$\begin{aligned}A&=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}\\&=\sqrt{(1.0\times10^{-2})^2+(\frac{5.0\times10^{-2}}{5})^2}\\&=\sqrt{2}\times10^{-2}\,\text{m}\end{aligned}$$

$$\tan\phi_0=-\frac{v_0}{x_0\omega}=\frac{5.0\times10^{-2}}{1.0\times10^{-2}\times5}=1,\text{即}\phi_0=\frac{5\pi}{4}$$

∴ $$x=\sqrt{2}\times10^{-2}\cos(5t+\frac{5}{4}\pi)\text{m}$$

5.11 题5.11图为两个谐振动的$x-t$曲线，试分别写出其谐振动方程.



题5.11图

解：由题5.11图(a)，∵ $t=0$时，$x_0=0, v_0>0, \therefore \phi_0=\dfrac{3}{2}\pi$，又，$A=10\text{cm}, T=2\text{s}$

即 $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

故 $$x_a=0.1\cos(\pi t+\frac{3}{2}\pi)\text{m}$$

由题5.11图(b)∵ $t=0$时，$x_0=\dfrac{A}{2}, v_0>0, \therefore \phi_0=\dfrac{5\pi}{3}$

$t_1=0$时，$x_1=0, v_1<0, \therefore \phi_1=2\pi+\dfrac{\pi}{2}$

又 $$\phi_1=\omega\times 1+\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

∴ $$\omega=\frac{5}{6}\pi$$

故 $$x_b=0.1\cos(\frac{5}{6}\pi t+\frac{5\pi}{3})m$$

5.12　一轻弹簧的倔强系数为k，其下端悬有一质量为M的盘子．现有一质量为m的物体从离盘底h高度处自由下落到盘中并和盘子粘在一起，于是盘子开始振动．
(1)此时的振动周期与空盘子作振动时的周期有何不同?
(2)此时的振动振幅多大?
(3)取平衡位置为原点，位移以向下为正，并以弹簧开始振动时作为计时起点，求初位相并写出物体与盘子的振动方程．

解：(1)空盘的振动周期为$2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$，落下重物后振动周期为$2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$，即增大．

(2)按(3)所设坐标原点及计时起点，$t=0$时，则$x_0=-\frac{mg}{k}$．碰撞时，以m,M为一系统动量守恒，即

$$m\sqrt{2gh}=(m+M)v_0$$

则有 $$v_0=\frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}$$

于是

$$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}=\sqrt{(\frac{mg}{k})^2+\frac{m^2 2gh}{k(m+M)}}$$
$$=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}$$

（3）$\tan\phi_0=-\frac{v_0}{x_0\omega}=\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}$（第三象限)，所以振动方程为

$$x=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}\quad\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m+M}}t+\arctan\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}\right]$$

5.13　有一单摆，摆长$l=1.0\mathrm{m}$，摆球质量$m=10\times10^{-3}\mathrm{kg}$，当摆球处在平衡位置时，若给小球一水平向右的冲量$F\Delta t=1.0\times10^{-4}\mathrm{kg\cdot m/s}$，取打击时刻为计时起点$(t=0)$，求振动的初位相和角振幅，并写出小球的振动方程．
解：由动量定理，有

$$F\cdot\Delta t=mv-0$$

∴ $$v=\frac{F\cdot\Delta t}{m}=\frac{1.0\times10^{-4}}{1.0\times10^{-3}}=0.01\quad \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

按题设计时起点，并设向右为x轴正向，则知$t=0$时，$x_0=0, v_0=0.01\mathrm{m\cdot s^{-1}}>0$

∴ $\phi_0=3\pi/2$

又 $$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=\sqrt{\frac{9.8}{1.0}}=3.13\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

∴ $$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}=\frac{v_0}{\omega}=\frac{0.01}{3.13}=3.2\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

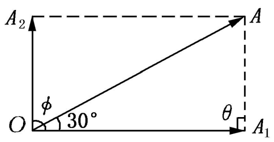
故其角振幅

$$\Theta=\frac{A}{l}=3.2\times10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

小球的振动方程为

$$\theta=3.2\times10^{-3}\cos(3.13t+\frac{3}{2}\pi)\mathrm{rad}$$

5.14 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合成振动的振幅为$0.20\mathrm{m}$，位相与第一振动的位相差为$\frac{\pi}{6}$，已知第一振动的振幅为$0.173\mathrm{m}$，求第二个振动的振幅以及第一、第二两振动的位相差.



题5.14图

解：由题意可做出旋转矢量题5.14图.

由图知

$$\begin{aligned}A_2^2&=A_1^2+A^2-2A_1A\cos30^\circ\\&=(0.173)^2+(0.2)^2-2\times0.173\times0.2\times\sqrt{3}/2\\&=0.01\end{aligned}$$

∴ $$A_2=0.1\mathrm{m}$$

设角AA_1O为θ，则

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\theta$$

即 $$\cos\theta=\frac{A_1^2+A_2^2-A^2}{2A_1A_2}=\frac{(0.173)^2+(0.1)^2-(0.02)^2}{2\times0.173\times0.1}$$
$$=0$$

即$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，这说明，A_1与A_2间夹角为$\dfrac{\pi}{2}$，即二振动的位相差为$\dfrac{\pi}{2}$.

5.15 试用最简单的方法求出下列两组谐振动合成后所得合振动的振幅：

(1) $\begin{cases} x_1=5\cos(3t+\dfrac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=5\cos(3t+\dfrac{7\pi}{3})\text{cm} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1=5\cos(3t+\dfrac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=5\cos(3t+\dfrac{4\pi}{3})\text{cm} \end{cases}$

解：(1)∵ $$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\frac{7\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\pi,$$

∴合振幅 $$A=A_1+A_2=10\text{cm}$$

(2)∵ $$\Delta\phi=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi,$$

∴合振幅 $$A=0$$

5.16 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，振动方程为
$$\begin{cases} x_1=0.4\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})\text{m} \\ x_2=0.3\cos(2t-\dfrac{5}{6}\pi)\text{m} \end{cases}$$
试分别用旋转矢量法和振动合成法求合振动的振动幅和初相，并写出谐振方程。

解：∵ $$\Delta\phi=\frac{\pi}{6}-(-\frac{5}{6}\pi)=\pi$$

∴ $$A_{合}=|A_1-A_2|=0.1\text{m}$$

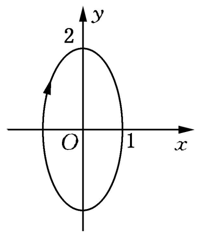
$$\tan\phi=\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}=\frac{0.4\times\sin\dfrac{\pi}{6}-0.3\sin\dfrac{5\pi}{6}}{0.4\cos\dfrac{\pi}{6}+0.3\cos\dfrac{5\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

∴ $$\phi=\frac{\pi}{6}$$

其振动方程为
$$x=0.1\cos(2t+\frac{\pi}{6})\text{m}$$

（作图法略）

*5.17 如题5.17图所示，两个相互垂直的谐振动的合振动图形为一椭圆，已知x方向的振动方程为$x=6\cos2\pi t\text{cm}$，求y方向的振动方程.



题5.17图

解：因合振动是一正椭圆，故知两分振动的位相差为$\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$；又，轨道是按顺时针方向旋转，故知两分振动位相差为$\frac{\pi}{2}$. 所以 y 方向的振动方程为

$$y = 12\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})\text{cm}$$