

近代物理实验报告：单电子固态量子计算

学号 匡亚明学院

2019 年 2 月 29 日

目录

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 1 引言 | 2 |
| 1.1 量子计算背景 | 2 |
| 2 实验原理 | 2 |
| 2.1 量子计算基本概念 | 2 |
| 2.1.1 量子比特 | 3 |
| 2.1.2 量子逻辑门 | 3 |
| 2.1.3 量子测量 | 4 |
| 2.1.4 量子算法 | 4 |
| 2.2 量子计算的实验实现 | 7 |
| 2.2.1 DiVincenzo 判据 | 7 |
| 2.2.2 金刚石中的 NV 色心 | 7 |
| 2.2.3 自旋态初始化和读出 | 8 |
| 2.2.4 自旋态操控 | 8 |
| 3 实验装置 | 12 |
| 4 实验内容及结果 | 12 |
| 4.1 启动 | 12 |
| 4.2 连续波实验 | 12 |
| 4.3 拉比振荡实验 | 13 |
| 4.4 T_2 实验 | 14 |
| 4.5 D-J 算法实验 | 16 |
| 5 实验数据 | 17 |
| 6 思考题 | 17 |

1 引言

1.1 量子计算背景

过去的几十年中，经典计算机经历了快速的发展时期。第一台通用电子计算机 ENIAC 占地约 170 平方米，如今的掌上电脑已经可以放进口袋。体积的巨大变化，主要归功于集成电路工业的飞速发展。英特尔公司创始人之一戈登·摩尔曾提出著名的摩尔定律，用以总结和预期集成电路的发展，即集成电路上可容纳的晶体管数目，约每隔 18 个月便会翻一倍，其性能也会翻倍。然而随着电路集成度越来越高，摩尔定律也遇到了新的挑战。因为按照摩尔定律描述的发展趋势，集成电路的工艺已进入纳米尺度。在芯片上如此高密度的集成元器件，热耗散问题是一个巨大的挑战。更严重的是，随着集成电路的工艺进入纳米尺度，量子效应会逐渐显现并占据支配地位。当描述元器件工作的物理规律由经典物理转变为量子力学，试图按照原来的方式保持集成电路的发展趋势就非常困难了。

既然在微观尺度下，量子力学效应占主导，那有没有可能利用量子力学效应来构造计算机呢？费曼最先在 1982 年指出，采用经典计算机不可能以有效方式来模拟量子系统的演化。我们知道，经典计算机与量子系统遵从不同的物理规律，用于描述量子态演化所需要的经典信息量，远远大于用来以同样精度描述相应的经典系统所需的经典信息量。费曼提出用量子计算则可以精确而方便地实现这种模拟。1985 年，David Deutsch 深入研究了量子计算机是否比经典计算机更有效率的问题。他首次在理论上描述出了量子计算机的简单模型——量子图灵机模型，研究了它的一般性质，预言了它的潜在能力。但当时的人们还不知道有什么具体的可求解问题，量子计算能比经典计算更有优越性。1994 年，美国数学家 Peter Shor 从原理上指出，量子计算机可以用比经典计算机快得多的速度来求解大数的质因子分解问题。由于大数质因子分解问题是现代通信与信息安全的基石，Shor 的开创性工作引起了巨大的关注，其可期待的辉煌应用潜力有力地刺激了量子计算机和量子密码等领域的研究发展，成为量子信息科学发展的重要里程碑之一。1996 年 Grover 发现了另一种很有用的量子算法，即所谓的量子搜索算法，它适用于解决如下问题：从 N 个未分类的客体中找出某个特定的客体。经典算法只能是一个接一个地搜寻，直到找到所要的客体为止，这种算法平均地讲要寻找 $N/2$ 次，成功几率为 $1/2$ ，而采用 Grover 的量子算法则只需要 \sqrt{N} 次。

随着一系列量子算法的提出，量子计算对某些重要问题相对于已知的经典计算方式的计算能力的展现出巨大的优势。量子计算不仅吸引着众多的科研人员，其应用前景也吸引了谷歌、微软、IBM 等国际知名公司参与这一领域的竞争。近年来，各研究团队更是试图实现“量子霸权” (Quantum supremacy)，即通过量子计算实现对经典计算能力的极限的突破

2 实验原理

2.1 量子计算基本概念

经典计算机需要信息的载体，逻辑操作，状态读出等一系列基本元素。量子计算机也类似，首先我们需要量子信息的载体，即量子比特。然后需要具备对量子比特进行初始化，操控和读出的能力。我们利用一系列的逻辑操作，构成量子算法，来实现特定的计算目的。

2.1.1 量子比特

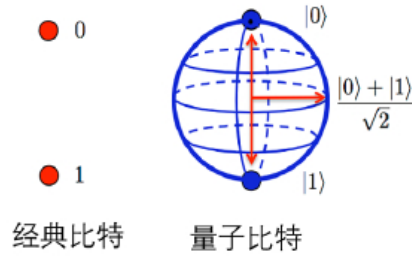


图 1: 经典比特与量子比特对比示意图

如果我们把数据送入计算机处理，就必须把数据表示成为计算机能识别的形式。在经典计算机中，信息单元用 1 个二进制位表示，它处于“0”态或“1”态。而在量子计算机中，信息单元称为“量子比特”，它除了可以处于“0”态或“1”态外，还可处于一种叠加态。我们用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示量子比特可取的状态基矢，单个量子比特可取的为

$$|Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1)$$

由于 $\alpha^* \alpha + \beta^* \beta = 1$ ，们也可以这样表示量子比特：

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2)$$

其中 $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. 显然 θ 和 ϕ 在单位三维球体上定义了一个点，这个球体通常被称为布洛赫球。单个量子比特的纯态可以与布洛赫球面上的点一一对应。

2.1.2 量子逻辑门

经典计算中用到很多基本逻辑门，包括与门、或门、非门、异或门、与非门和或非门等，这些元件组合在一起能构成用来计算任何函数的硬件电路。量子计算机与此类似，也由一系列的量子门组合而成，以此来完成复杂计算任务。图 (2) 列出了常用的量子逻辑门，其代表符号和矩阵表示。描述单个量子门的矩阵 U 要求必须是幺正的，即 $UU^\dagger = I$. C-NOT 门是一个两比特门，当控制比特是 $|0\rangle$ 时，目标比特不变。当控制比特是 $|1\rangle$ 时，目标比特发生翻转。





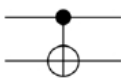
| 名称 | 符号 | 矩阵表示 |
|----------|---|--|
| Hadamard |  | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-X |  | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-Y |  | $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-Z |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| C-Not |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

图 2: 常用量子逻辑门的符号和矩阵表示

要实现实用的量子计算，需要的量子比特的数目远不止两个，因此需要能够实现多比特的量子逻辑门。而且，量子计算中需要施加的量子逻辑门与要解决的问题有关，也就是说，为了解决不同的问题，需要使用不同的量子逻辑门。那么，能不能只用一些基本的量子逻辑门，来实现任意的量子逻辑门的效果呢？理论上可以证明，对于任意的多比特量子逻辑门，都可以通过两比特受控非门结合单比特量子逻辑门的方式实现。我们称单比特量子逻辑门和受控非门形成一组普适的量子逻辑门。

2.1.3 量子测量

为了得到量子计算的结果，需要对末态进行量子测量。对于量子比特 $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，采用基矢 $|0\rangle$, $|1\rangle$ 进行测量，得到结果 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的几率分别为 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ 。如果选择另外的一组正交基矢：

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (3)$$

任意量子比特的态可以写成：

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (4)$$

测量之后，坍缩到 $|+\rangle$ 或者 $|-\rangle$ 的几率分别为 $|\alpha + \beta|^2/2$, $|\alpha - \beta|^2/2$ 。

一般情况下，给出任意的基矢 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ ，可以将任意态表示为 $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ ，只要 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是正交的，就可以进行相对于 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 的测量，以 $|\alpha|^2$ 的几率得到 $|a\rangle$ ，以 $|\beta|^2$ 的几率得到 $|b\rangle$ 。

2.1.4 量子算法

经典计算机在处理某些问题的时候，速度是很快的，比如计算乘法 $127 \times 229 = ?$ 。但如果将这个问题反过来，求解 29083 这个数能分解成哪两个质数是乘积 $? \times ? = 29083$ ，这时候经典计算机可能要花费很长的时间来处理。尤其是当要分解的数非常大的时候，普通计算可能要运算几年或者更长的时间才能得到结果。而此时如果采用量子算法，则大数质因子分解问题可以迎刃而解。利用量子计算机，几乎可以瞬间完成大数分解。

量子算法与经典算法相比，其差别在于，量子算法融入了量子力学的很多特征。经典算法本质上不

依赖于量子物理，只是数学上的技巧。而量子算法中用到了量子相干性、量子叠加性、量子并行性、波函数坍缩等量子力学特性，进而大大提高了来计算效率。这种崭新的计算模式，给计算科学带来重大影响。有些问题，依据经典计算复杂性理论，是不存在有效算法的，但在量子算法的框架里却找到了有效法。最为典型的量子算法有：Shor 算法（质因数分解），QEA 算法（组合优化求解），Grover 算法（量子搜索算法）等。这些量子算法可能处理的问题不同，但是都是采用了量子力学物理性质进行计算。每一种算法都有其独特性，比如 Shor 算法对质因素分解将直接威胁 RSA 加密体系，Grover 算法在搜索方面，指数级的加速。这些都有潜在的应用价值。下面我们以 Deutsch-Jozsa 算法为例，说明量子并行性的优势。

Deutsch-Jozsa 算法

考虑定义在 $\{0,1\}^n$ 上的函数 $f(x)$ ，满足 $f(x) \in \{0,1\}$ ，且 $f(x)$ 的输出分为两种情况。一种是，对于任意输入，它只输出 0 或者 1，我们称之为常函数；另一种情况是，恰好对于一半的输入，输出为 0，另一半输入，输出为 1，我们称之为平衡函数。问题是：对于未知的 $f(x)$ ，我们要区分它是常函数还是平衡函数。如果采用经典计算的方式，需要挨个检查输出结果，要得到准确无误的判断，最坏的情况需要进行 $2^{n-1} + 1$ 次计算。这是因为，如果进行了 2^{n-1} 次计算后，得到的是 2^{n-1} 个相同的输出，这时候仍不能确定 $f(x)$ 是常函数还是平衡函数。若果采用量子计算的方式，对于同样的问题，只需要一次计算就可以得出结果，解决这个问题的量子算法称为 Deutsch-Jozsa 算法（简称 D-J 算法）。D-J 算法是 1992 年由 David Deutsch 和 Richard Jozsa 提出的 [1]，是对 1985 年 David Deutsch 单独提出的 Deustsh 算法的一般性推广。Deutsch 算法即是 D-J 算法 $n = 1$ 的情况。因为 Deutsch 算法更易说明，下面我们就详细讲解 Deutsch 算法。

函数 $f(x)$ ，其定义域为 $\{0,1\}$ ，且 $f(x) \in \{0,1\}$ ，那么这样的函数共有四种情况，如下图所示：

| $f_1(x)$ | | $f_2(x)$ | |
|----------|----|----------|----|
| 输入 | 输出 | 输入 | 输出 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

| $f_3(x)$ | | $f_4(x)$ | |
|----------|----|----------|----|
| 输入 | 输出 | 输入 | 输出 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

图 3: 常函数与平衡函数举例： $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是常函数， $f_3(x)$ 与 $f_4(x)$ 是平衡函数。

现在我们需要判断 $f(x)$ 是常函数还是平衡函数，采用经典计算的方法，需要分别计算 $f(0)$ 和 $f(1)$ ，然后判断 $f(0)$ 和 $f(1)$ 是否相等，共需进行两次计算。如果采用量子计算中的 Deutsch 算法，则只需一次计算就能够判定。如图 (4) 所示，是 Deutsch 算法的量子线路图。该量子算法需要两个量子比特，其初态是 $|a\rangle = |01\rangle$ ，然后对两个比特分别施加 Hadamard 门，得到的态为：

$$|b\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (5)$$

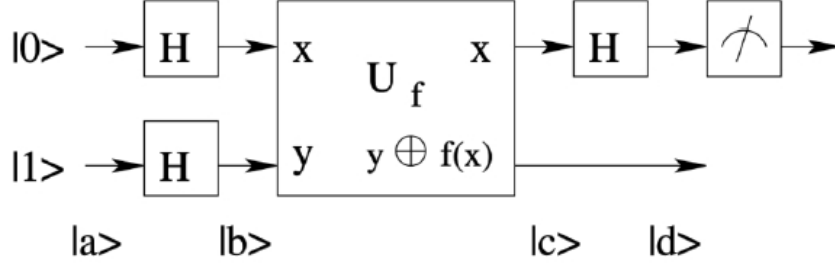


图 4: Deutsch 算法的量子线路图

对 $|b\rangle$ 施加量子逻辑门 U_f ，其中 U_f 对量子比特态的作用为

$$U_f |x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle \quad (6)$$

$y \oplus f(x)$ 代表 $y + f(x)$ 以 2 的余数。因此有

$$\begin{cases} U_f |x, 0\rangle = |x, f(x)\rangle \\ U_f |x, 1\rangle = |x, 1 - f(x)\rangle \end{cases} \quad (7)$$

所以

$$U_f |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = |x\rangle \left(\frac{|f(x)\rangle - |1 - f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (8)$$

如果 $f(0) = f(1)$ ，即 $f(x)$ 是常函数，经过 U_f 作用之后得到的态是：

$$|c\rangle = \pm \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (9)$$

如果 $f(0) \neq f(1)$ ，即 $f(x)$ 是平衡函数，经过 U_f 作用之后得到的态是：

$$|c\rangle = \pm \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (10)$$

算法运行到这一步，第一个量子比特的态，已经与 $f(x)$ 是常函数还是平衡函数产生关联。若 $f(x)$ 是常函数，则第一个量子比特的态是 $\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。若 $f(x)$ 是平衡函数，则第一个量子比特的态是 $\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。

然后对第一个量子比特施加 Hadamard 门，如果 $f(0) = f(1)$ ，即 $f(x)$ 是常函数，我们得到：

$$|d\rangle = \pm |0\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (11)$$

如果 $f(0) \neq f(1)$ ，即 $f(x)$ 是平衡函数，我们得到：

$$|d\rangle = \pm |1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (12)$$

以 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 作为基矢，对第一个量子比特进行测量。如果 $f(x)$ 是常函数，则测量结果是 0；如果 $f(x)$ 是平衡函数，则测量结果是 1。

总结一下 Deutsch 算法的过程，我们将量子比特制备到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态，只需进行一次计算，就可以根据末态的测量结果是 0 还是 1，来判断 $f(x)$ 是常函数还是平衡函数。根据经典算法，则需进行两次计算。将 Deutsch 算法的定义域从 $\{0, 1\}$ 推广到 $\{0, 1\}^n$ ，其解决方法即是 D-J 算法。D-J 算法是最早提出的量子算法之一，虽然 D-J 算法解决的问题不具备太多实际意义，但该算法向人们展示了，解决某些问题时，量子计算能够比经典计算更高效。下面我们将讨论如何在实验上实现这一算法。

2.2 量子计算的实验实现

建造量子计算机的困难在于要找到一个可以编码量子比特，并且能够有效地被外界控制，但又与环境有很好的隔离，不致使系统很快退相干失去量子特性的物理系统。在介绍量子计算的物理实现技术之前，下面先介绍一下 DiVincenzo 关于量子计算物理实现技术的判据 [2]。

2.2.1 DiVincenzo 判据

2000 年，DiVincenzo 讨论了实现量子计算的物理要求，并提出了如下的 7 条判据：

1. 可扩展的具有良好特性的量子比特系统；
2. 能够制备量子比特到某个基准态；
3. 具有足够长的相干时间来完成量子逻辑门操作；
4. 能够实现一套通用量子逻辑门操作；
5. 能够测量量子比特；
6. 能够使飞行量子比特和静止量子比特互相转化；
7. 能够使飞行量子比特准确地在不同的地方之间传送。

后面两条是针对量子计算机之间通信提出的要求，前面五条是实现量子计算的要求。人们已经在多种系统上试验了量子计算机的实现方案，包括离子阱、超导约瑟夫森结、腔量子电动力学、硅基半导体、量子点、液体核磁共振等等。下面我们以金刚石中的 NV 色心为例，说明量子计算的实验实现。

2.2.2 金刚石中的 NV 色心

NV(Nitrogen-Vacancy) 色心是金刚石中的一种点缺陷。金刚石晶格中一个碳原子缺失形成空位，近邻的位置有一个氮原子，这样就形成以了一个 NV 色心。我们这里所说的 NV 色心，指的是带负电荷 NV^- 顺磁中心。NV 色心的有六个电子，两个来自氮原子，三个来自与空位相邻的碳原子，另外一个是一个俘获的（来自施主杂质的）电子。

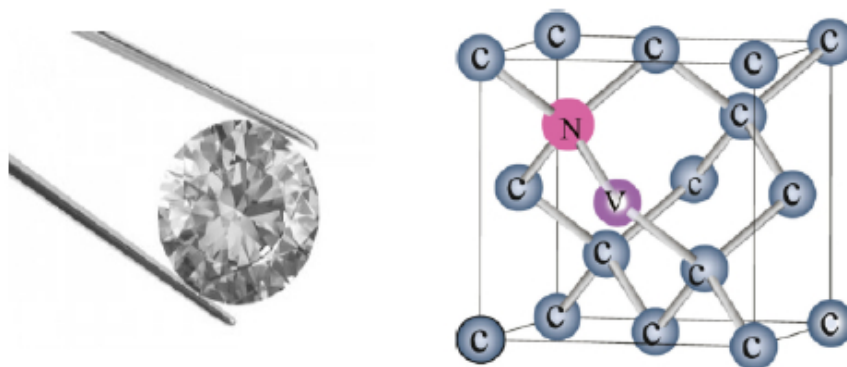


图 5: 金刚石和金刚石中的 NV 色心原子结构

2.2.3 自旋态初始化和读出

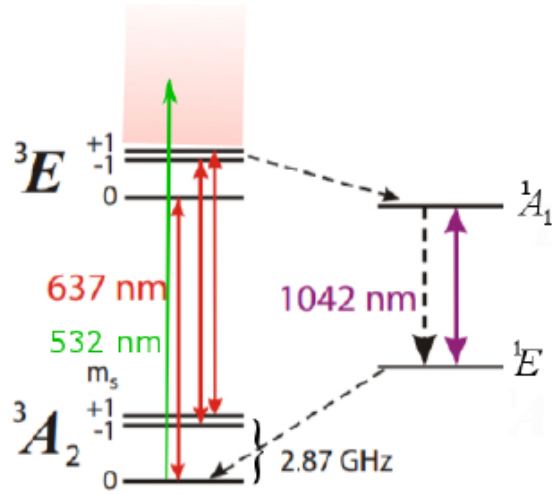


图 6: 室温下金刚石 NV 色心的能级结构示意图。会辐射出光子的跃迁用实线箭头表示，非辐射跃迁用虚线箭头表示。

图 (6) 是室温下金刚石 NV 色心的能级结构。NV 色心的基态为自旋三重态，三重态基态与激发态间跃迁相应的零声子线为 637 nm, 红色区域为声子边带。基态的自旋三重态 ($|m_s = 0\rangle$, $|m_s = 1\rangle$, $|m_s = -1\rangle$) 中, $|m_s = \pm 1\rangle$ 在无磁场时是简并的, 它们与 $|m_s = 0\rangle$ 态之间的能隙 (零场劈裂) 对应微波频率为 2.87 GHz。激发态的能级自旋分裂对应的微波频率为 1.4 GHz。

首先 532 nm 的激光激发基态电子, 由于电子跃迁是电偶极跃迁与电子自旋无关, 所以跃迁前后的自旋是守恒的。 $|m_s = 0\rangle$ 的基态电子到 $|m_s = 0\rangle$ 的声子边带, 而 $|m_s = \pm 1\rangle$ 的基态电子到 $|m_s = \pm 1\rangle$ 的声子边带。之后 $|m_s = 0\rangle$ 的电子绝大多数都直接跃迁到基态辐射荧光, 而 $|m_s = \pm 1\rangle$ 的电子则一部分直接跃迁到基态辐射荧光, 另一部分通过无辐射跃迁到单重态再到三重态的 $|m_s = 0\rangle$ 态。经过多个周期之后, 基态 $|m_s = \pm 1\rangle$ 上的布居度会越来越少, 而 $|m_s = 0\rangle$ 上的布居度会越来越多。这相当于, 在激光的照射下, 布居度从 $|m_s = \pm 1\rangle$ 转移到了 $|m_s = 0\rangle$, 从而实现了自旋极化。常温下 NV 色心电子自旋的极化率可达 95% 以上。

如果我们选取基态的 $|m_s = 0\rangle$ 和 $|m_s = 1\rangle$ 作为量子比特, NV 色心的自旋极化就对应于将量子比特的初态极化到 $|0\rangle$ 态。

由于 $|m_s = \pm 1\rangle$ 态有更大的概率通过无辐射跃迁, 回到基态。所以 $|m_s = 0\rangle$ 态的荧光比 $|m_s = \pm 1\rangle$ 态的荧光强度大, 实验上得出大约大 20 – 40%。根据 $|m_s = 0\rangle$ 态和 $|m_s = \pm 1\rangle$ 对应荧光强度的差别, 就可以区分 NV 色心的自旋态, 即实现对自旋量子比特状态的读出。由于由于单次实验得到的 $|m_s = 0\rangle$ 态和 $|m_s = \pm 1\rangle$ 的荧光强度并不明显, 室温下对 NV 色心电子自旋量子比特的测量一般为多次实验重复测量, 测得的结果为某个观测量 (如 $|m_s = 0\rangle \langle m_s = 0|$) 的平均值。

2.2.4 自旋态操控

为了实现量子逻辑门, 需要对 NV 色心的自旋状态进行操控。调控 NV 色心自旋态使用的是自旋磁共振技术, 即利用微波场与自旋的相互作用, 来调控自旋态的演化。

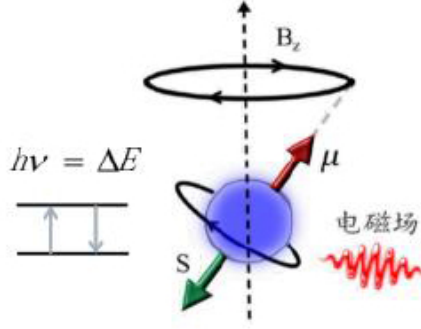


图 7: 自旋磁共振原理示意图

磁场中自旋的薛定谔方程描述

量子力学中，描述量子态随时间演化的方程是薛定谔方程：

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13)$$

为了得到薛定谔方程的解，我们需要知道哈密顿量和初态波函数。考虑一个自旋 1/2 的电子，处在均匀外磁场中，系统哈密顿量可以表示为：

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (14)$$

其中， $\boldsymbol{\mu}$ 是电子磁矩， \mathbf{B}_0 是平行于 z 轴的静磁场。电子磁矩与自旋之间的关系是：

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S} \quad (15)$$

比例常数 γ 被称作旋磁比。自旋算符 $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ ，其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 是泡利算符，其矩阵形式如下：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

代入 (14) 可得

$$H = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \gamma B_0 & 0 \\ 0 & -\gamma B_0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

该哈密顿量的本征能级是 $-\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ 和 $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ ，分别对应自旋向上和向下的本征态。能级差为 $\hbar\omega_0$ ，恰好是频率为 ω_0 的光子的能量。

自旋进动 为了得到电子自旋在静磁场中的演化方程，我们记其自旋初态为

$$\Psi_0(t) = a_0 |0\rangle + b_0 |1\rangle \quad (18)$$

随时间演化的状态

$$\Psi(t) = a |0\rangle + b |1\rangle \quad (19)$$

其中

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

将 (17) 的哈密顿量带入薛定谔方程 (13) 可以得到:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (21)$$

该方程的解是:

$$a = a_0 e^{i\omega_0 t/2} \quad b = b_0 e^{i\omega_0 t/2} \quad (22)$$

如果记 $|a_0| = \cos(\alpha/2)$, $|b_0| = \sin(\alpha/2)$, 那么可以得到:

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \quad (23)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (24)$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (25)$$

$$(26)$$

对于上述结果, 可以有一个直观的几何解释。如图 (8) 所示, 磁矩的 XY 分量大小是 $\frac{1}{2} \sin \alpha$, 并且绕着外磁场方向 Z 轴转动, 转动频率为 ω_0 。这个过程也叫作拉莫进动, ω_0 被称作拉莫频率。

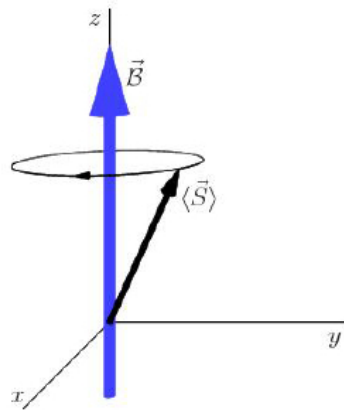


图 8: 磁矩绕着外磁场方向做拉莫进动

共振微波驱动 考虑加一个 XY 平面内圆偏振的微波场:

$$\begin{cases} B_x = B_1 \cos \omega t \\ B_y = B_1 \sin \omega t \end{cases} \quad (27)$$

记 $\omega_1 = \gamma B_1$, 代入方程 (13) 可以得到:

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (28)$$

假设 $t = 0$ 的时候, 电子占据的是自旋向下的态。我们希望得到, $t > 0$ 时, 在微波场的驱动下, 电子占据自旋向上态的概率。

通过求解薛定谔方程, 可以得到:

$$P_{\uparrow} = |a(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \delta t \quad (29)$$

其中,

$$\delta = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (30)$$

该过程也可以几何的理解。前面提到, 当有静磁场的时候, 自旋绕着静磁场方向做进动。当施加一个额外交变磁场, 自旋会感受一个力矩, 使其从 z 轴向 $-z$ 轴方向翻转, 如图 (9)。这个过程也叫作自旋的拉比振荡, 翻转频率也称作拉比频率。

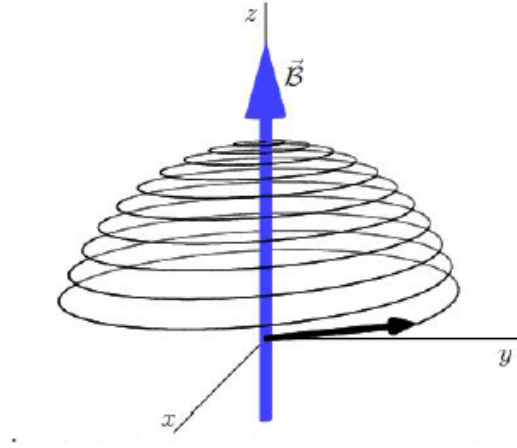


图 9: 微波频率与拉莫进动频率一致时, 磁矩绕着外磁场方向 z 轴做章动

实现了拉比振荡, 即说明实现了对 NV 色心自旋的相干操控, 量子比特在 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态之间振荡。共振驱动的情况下, 当 $\omega_1 t = \pi$ 时, 量子比特从 $|0\rangle$ 态完全转到了 $|1\rangle$ 态, 即实现了一个非门操作, 这个脉冲也叫作 π 脉冲。当 $\omega_1 t = \pi/2$ 时, 我们得到 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 的叠加态, 即

$$|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (31)$$

。这是量子计算中非常重要的逻辑门, 这个脉冲也叫作 $\pi/2$ 脉冲。

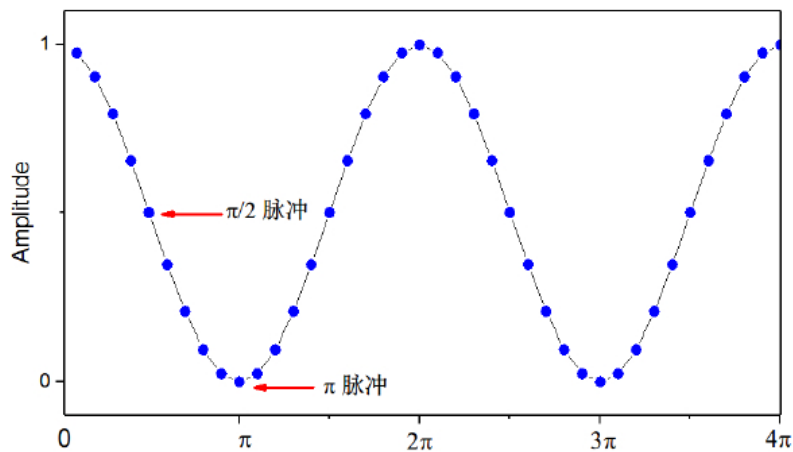


图 10: 拉比振荡曲线示意图

3 实验装置

实验所用仪器“金刚石量子计算教学机”，是以光探测磁共振为基本原理，以金刚石 NV 色心为量子比特的量子计算教学设备。实验装置如图 (11) 所示。实验装置分为光学模块、微波模块和控制脉冲发生模块，整机由运行在电脑上的软件控制。

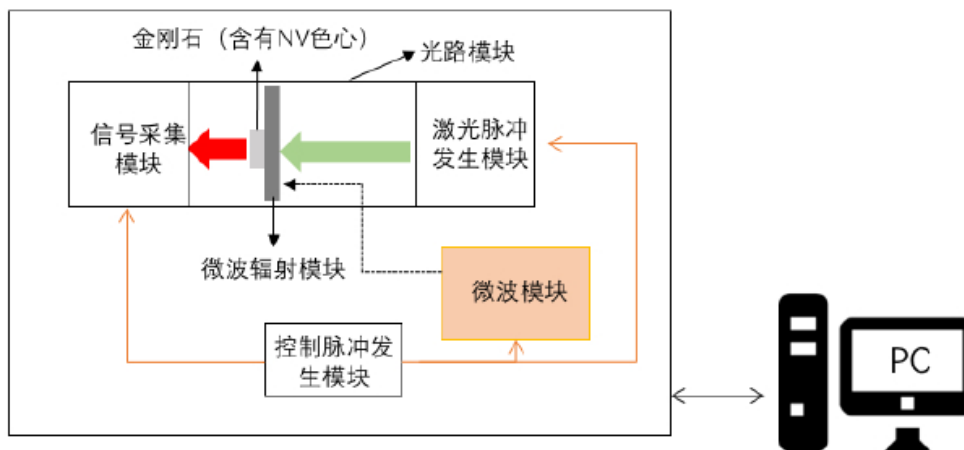


图 11: 实验装置图

4 实验内容及结果

4.1 启动

1. 打开“金刚石量子计算教学机”背部的电源总开关，和前面板的银色金属开关，电源指示灯亮起，表示仪器正常上电；
2. 打开电脑上控制软件 Diamond I Studio，进入软件主界面。
3. 点击“连接设备”按钮后，若显示“仪器已连接，请开始实验”，表示仪器已经可以进行实验。如果显示“仪器连接失败，请重新连接”。请再次点击“连接设备”按钮，直至仪器连接成功；

4.2 连续波实验

测量 NV 色心连续波谱的时候，收集的是其发出的荧光信号，这其中的物理基础是，NV 色心的自旋态能够被激光初始化，并且发出荧光的亮度是依赖于自旋状态的。施加微波到色心上，可以改变自旋在 $|m_s = 0\rangle$ 态和 $|m_s = \pm 1\rangle$ 态的布居，从而改变荧光强度。因为 NV 色心的荧光亮度是依赖于自旋态的。改变施加的微波频率，当共振的微波改变了自旋状态，荧光亮度会相应的发生改变。因此，但微波频率与能级间隔共振时，谱线上会出现低谷。如下图所示，是不同磁场大小下的连续波谱示意图。左侧的低谷对应于 $|m_s = 0\rangle \rightarrow |m_s = -1\rangle$ 的跃迁，右侧的低谷对应于 $|m_s = 0\rangle \rightarrow |m_s = 1\rangle$ 的跃迁。根据塞曼效应，两个低谷对应的频率之差，正比于外磁场的大小。

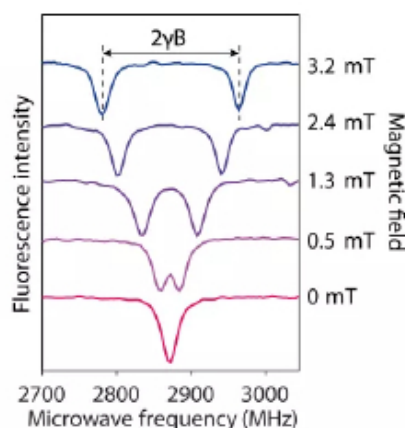


图 12: NV 色心的连续波谱示意图

实验流程如下：

1. 输入微波频率起始值和结束值，或者输入中心值和频率宽度，确定频率扫描的范围；
2. 输入步进次数，作为实验曲线的点数。实验点数越多，意味着相邻点之间的频率差越小；
3. 输入循环次数，作为实验平均的次数，一般取值 100-300 次；
4. 输入微波功率，一般取-10 dBm；
5. 选择实验数据保存路径；
6. 点击开始实验按钮，实验开始执行；
7. 等待执行完所设定循环次数，则实验终止；
8. 通过拟合得到共振频率。

4.3 拉比振荡实验

对于 NV 色心而言，实现拉比振荡的脉冲序列如下：首先打开激光，将 NV 色心自旋态初始化到 $|m_s = 0\rangle$ ，然后关闭激光，打开微波。微波脉冲的频率等于共振频率，最后再施加激光，将 NV 色心自旋态读出。如图 (13) 所示。

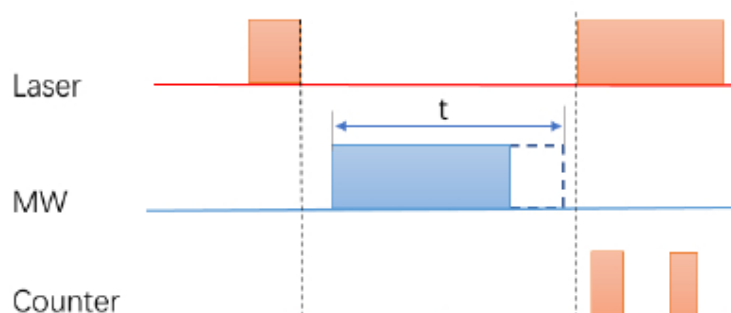


图 13: 拉比振荡实验脉冲序列

其中 t 是微波脉冲宽度, $t = t_0 + (N - 1)\Delta t$, N 是实验的点数, t_0 是第一个实验点的脉冲宽度, Δt 是脉冲宽度的增量。

施加的微波脉冲宽度不同, 自旋演化的状态就不同。将微波脉冲宽度与荧光计数对应起来, 就可以得到拉比振荡的曲线。本实验中需要用到 $|m_s = 0\rangle \rightarrow |m_s = 1\rangle$ 和 $|m_s = 0\rangle \rightarrow |m_s = -1\rangle$ 两个跃迁频率, 所以微波模块中有两个微波源, 在进行拉比振荡实验的时候, 用两个波源 (记为“波源 1”和“波源 2”) 分别测定两个频率的拉比振荡。

实验流程如下:

1. 通过波源选择下拉框, 选择“波源 1”或者“波源 2”;
2. 输入开始时间和结束时间, 作为微波脉冲宽度的起始值和终止值;
3. 输入步进次数, 作为实验曲线的点数。实验点数越多, 意味着相邻点之间的脉冲宽度之差越小;
4. 输入微波频率, 即通过连续波实验得到的共振频率;
5. 输入微波功率, 一般取 0-6 dBm;
6. 输入循环次数, 作为实验平均的次数, 一般取值 100-300 次;
7. 选择实验数据保存路径;
8. 点击开始实验按钮, 实验开始执行;
9. 通过拟合得到 $\pi/2$ 脉冲, π 脉冲和 2π 脉冲的宽度;
10. 切换波源, 重复上述实验步骤。

4.4 T_2 实验

T_2 实验, 也叫作自旋回波实验, 其目的是测量 NV 色心自旋的退相干时间。因为量子系统不是一个孤立系统, 其与环境的相互作用, 会引起退相干效应。图 (14) 所示是 T_2 实验的脉冲序列。首先用激光将 NV 色心自旋态初始化到 $|m_s = 0\rangle$ 态, 然后施加 $\pi/2$ 脉冲, 将自旋制备到 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的叠加态, 自由演化时间 $\tau = t/2$ 后, 施加 π 脉冲, 然后再等待自由演化时间 $\tau = t/2$, 施加第二个 $\pi/2$ 脉冲, 将相干信息转化成布居度读出。

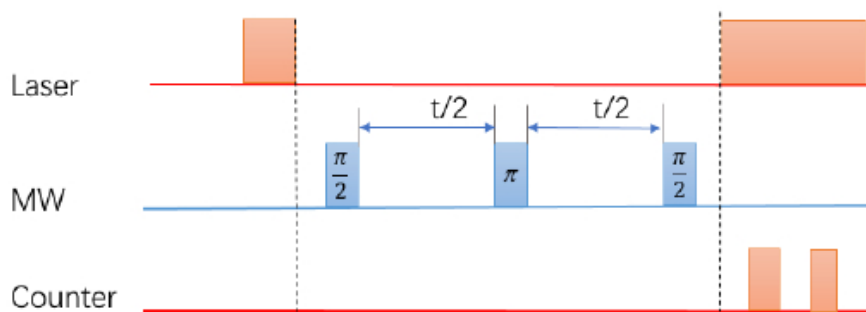


图 14: T_2 振荡实验脉冲序列

其中 t 是两个 $\pi/2$ 脉冲之间, 自由演化的时间间隔, $t = t_0 + (N - 1)\Delta t$, N 是实验的点数, t_0 是第一个实验点的自由演化时间长度, Δt 是时间间隔的增量。

我们可以用图 (15) 中矢量模型，来直观的理解 T_2 实验。图 (a) 中 $t = 0$ 时刻对应自旋极化，图 (b) 中 $t = t_1$ 对应施加 $\pi/2$ 脉冲之后的状态。矢量 \vec{M} 到达 $x' - y'$ 平面后，开始绕 z' 轴进动。由于磁场的不均匀性，处于不同磁场处的 \vec{M} 进动速度不尽相同。经历时间 $t = \tau$ 后， \vec{M} 在 $x' - y'$ 平面上分散开来，如图 (c) 所示。此时我们施加一个 π 脉冲，所有矢量进动的方向反转 (图 (d))，经历与前一段相同的自由演化时间后，原先分散的矢量会重新汇聚起来。最后一个 $\pi/2$ 脉冲是将 $x' - y'$ 平面上的矢量转到 z' 轴上读出。

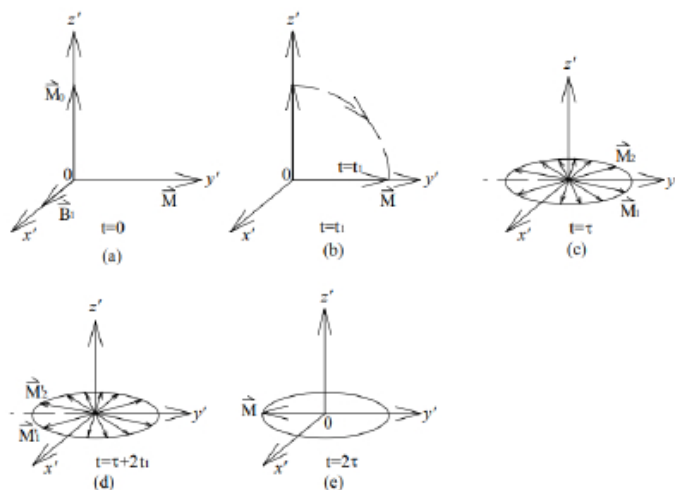


图 15: T_2 实验的矢量图解

T_2 实验流程如下：

1. 输入开始时间和结束时间，作为自由演化时间的起始值和终止值；
2. 输入步进次数，作为实验曲线的点数。实验点数越多，意味着相邻点之间的自由演化时间差别越小；
3. 该实验所需微波频率和功率，与上一次拉比振荡实验保持一致；
4. 根据拉比振荡实验的结果，输入 π 脉冲和 $\pi/2$ 脉冲的宽度；
5. 输入循环次数，作为实验平均的次数，一般取值 100-300 次；
6. 选择实验数据保存路径；
7. 点击开始实验按钮，实验开始执行；
8. 通过拟合得到 T_2 时间长度。

4.5 D-J 算法实验

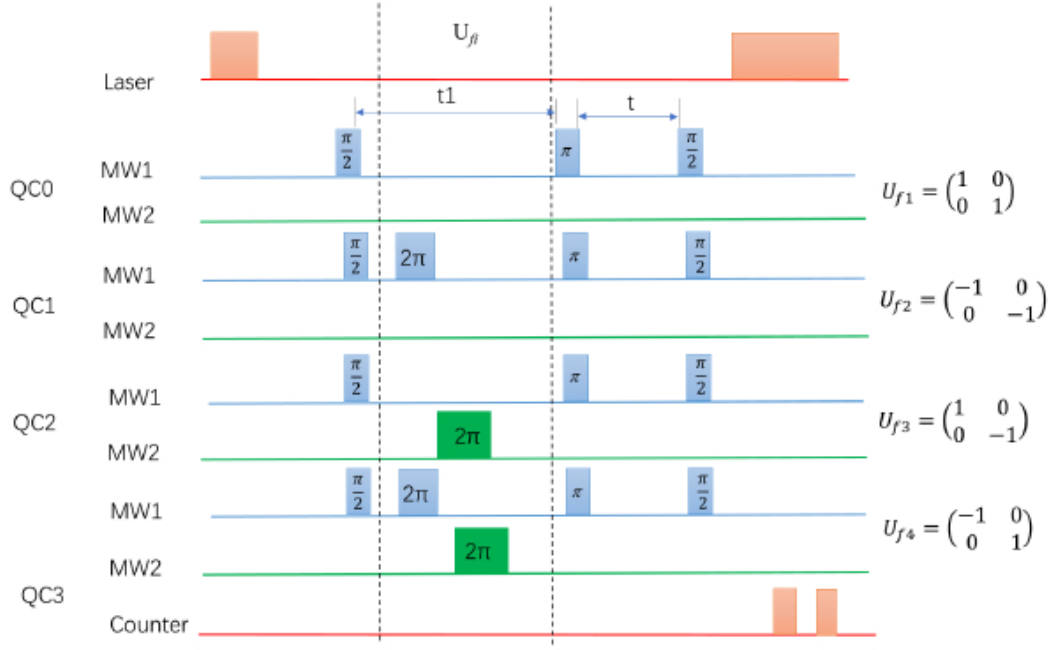


图 16: D-J 算法实验脉冲序列

D-J 算法的实验序列如图 (16) 所示。我们将量子比特和辅助比特均编码到 $S = 1$ 的电子自旋上。 $U_f(x) = (-1)^{f(x)} |x\rangle$ ，其中 $f(x)$ 表示四个不同的函数， $f_1(x) = 0$ 和 $f_2(x) = 1$ 是常函数， $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1 - x$ 是平衡函数，其输入输出情况如图 (3) 所示。对于两能级体系， U_{fi} 的矩阵表示见图 (17)。

$$\begin{aligned}
 U_{f1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = 0 & U_{f3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = x \\
 U_{f2} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = 1 & U_{f4} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x) = 1 - x
 \end{aligned}$$

图 17: 常函数和平衡函数

实现量子算法时，我们将 $|0\rangle$ 和 $|-1\rangle$ 编码成量子比特， $|1\rangle$ 为辅助能级。在系统用激光初始化到 $|0\rangle$ 后，输入态用 MW1 的 $\pi/2$ 脉冲作用在 $|0\rangle$ 上而制备得到。控制门 (U_{fi}) 通过 2π 脉冲的四种组合实现。当 MW2 的 2π 微波脉冲作用在辅助态 $|1\rangle$ 上时，会在 $|0\rangle$ 上产生 π 相位，等效于 $|0\rangle$ 和 $|-1\rangle$ 张成的子空间进行绕 z 轴的 π 旋转。常函数作用结束后，末态是 $\pm \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。平衡函数作用结束后，末态 $\pm \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ 。两种末态分别对应正向的回波，和反向的回波。因此，我们就可以通过回波测量，来判断 U_{fi} 操作对应的是常函数还是平衡函数。

实验流程如下：

1. 从实验序列下拉框，选择实验序列，有 QC0 到 QC3 四个序列可选，依次对应 U_{f1} 到 U_{f4} 的操作；
2. 输入开始时间和结束时间，这里对应脉冲序列图 (16) 中的 t ；

3. 输入回波时间，这里对应脉冲序列图中 (16) 的 t_1 ；
4. 输入步进次数，作为实验曲线的点数。实验点数越多，意味着相邻点之间的自由演化时间差别越小；
5. 分别输入两个微波源所需的微波功率，微波频率，以及相应的 π 脉冲， $\pi/2$ 和 2π 脉冲的宽度；
6. 输入循环次数，作为实验平均的次数，一般取值 100-300 次；
7. 选择实验数据保存路径；
8. 点击开始实验按钮，实验开始执行；
9. 通过图像上的回波方向，判断 $f(x)$ 是常函数，还是平衡函数。

5 实验数据

6 思考题

请利用布洛赫球表示以下量子态：

1. $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$
2. $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$
3. $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}$
4. $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$

如果实验中施加的微波频率 f 与共振频率 f_0 有偏差，即 $f = f_0 + \delta f$ ，拉比振荡的频率会如何变化？

拉比振荡频率与微波功率的关系是什么？

参照 $n = 1$ 的特殊情况，即图 1.5 所示的量子线路图，画出一般情况的 D-J 算法量子线路图，并解释算法原理

参考文献

- [1] David Deutsch and Richard Jozsa. *Rapid solution of problems by quantum computation*. 1992.
- [2] David P Divincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte Der Physik*, 48(9-11):771–783, 2000.