# 近代物理实验报告：单电子固态量子计算

学号　匡亚明学院

2019 年 2 月 29 日

## 目录

# 1 引言

## 1.1 量子计算背景

过去的几十年中，经典计算机经历了快速的发展时期。第一台通用电子计算机 ENIAC 占地约 170 平方米，如今的掌上电脑已经可以放进口袋。体积的巨大变化，主要归功于集成电路工业的飞速发展。英特尔公司创始人之一戈登・摩尔曾提出著名的摩尔定律，用以总结和预期集成电路的发展，即集成电路上可容纳的晶体管数目，约每隔 18 个月便会翻一倍，其性能也会翻倍。然而随着电路集成度越来越高，摩尔定律也遇到了新的挑战。因为按照摩尔定律描述的发展趋势，集成电路的工艺已进入纳米尺度。在芯片上如此高密度的集成元器件，热耗散问题是一个巨大的挑战。更严重的是，随着集成电路的工艺进入纳米尺度，量子效应会逐渐显现并占据支配地位。当描述元器件工作的物理规律由经典物理转变为量子力学，试图按照原来的方式保持集成电路的发展趋势就非常困难了。

既然在微观尺度下，量子力学效应占主导，那有没有可能利用量子力学效应来构造计算机呢？费曼最先在 1982 年指出，采用经典计算机不可能以有效方式来模拟量子系统的演化。我们知道，经典计算机与量子系统遵从不同的物理规律，用于描述量子态演化所需要的经典信息量，远远大于用来以同样精度描述相应的经典系统所需的经典信息量。费曼提出用量子计算则可以精确而方便地实现这种模拟。1985 年，David Deutsch 深入研究了量子计算机是否比经典计算机更有效率的问题。他首次在理论上描述出了量子计算机的简单模型——量子图灵机模型，研究了它的一般性质，预言了它的潜在能力。但当时的人们还不知道有什么具体的可求解问题，量子计算能比经典计算更有优越性。1994 年，美国数学家 Peter Shor 从原理上指出，量子计算机可以用比经典计算机快得多的速度来求解大数的质因子分解问题。由于大数质因子分解问题是现代通信与信息安全的基石，Shor 的开创性工作引起了巨大的关注，其可期待的辉煌应用潜力有力地刺激了量子计算机和量子密码等领域的研究发展，成为量子信息科学发展的重要里程碑之一。1996 年 Grover 发现了另一种很有用的量子算法，即所谓的量子搜索算法，它适用于解决如下问题: 从 $N$ 个未分类的客体中寻找出某个特定的客体。经典算法只能是一个接一个地搜寻，直到找到所要的客体为止，这种算法平均地讲要寻找 $N/2$ 次，成功几率为 1/2，而采用 Grover 的量子算法则只需要 $\sqrt{N}$ 次。

随着一系列量子算法的提出，量子计算对某些重要问题相对于已知的经典计算方式的计算能力的展现出巨大的优势。量子计算不仅吸引着众多的科研人员，其应用前景也吸引了谷歌、微软、IBM 等国际知名公司参与这一领域的竞争。近年来，各研究团队更是试图实现“量子霸权”(Quantum supremacy)，即通过量子计算实现对经典计算能力的极限的突破

# 2 实验原理

## 2.1 量子计算基本概念

经典计算机需要信息的载体，逻辑操作，状态读出等一系列基本元素。量子计算机也类似，首先我们需要量子信息的载体，即量子比特。然后需要具备对量子比特进行初始化，操控和读出的能力。我们利用一系列的逻辑操作，构成量子算法，来实现特定的计算目的。

### 2.1.1 量子比特

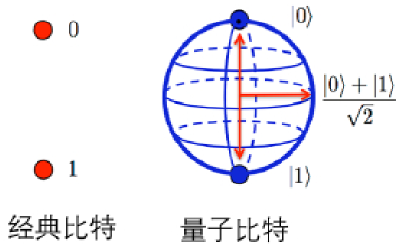



图 1: 经典比特与量子比特对比示意图

如果我们把数据送入计算机处理，就必须把数据表示成为计算机能识别的形式。在经典计算机中，信息单元用 1 个二进制位表示，它处于“0”态或“1”态。而在量子计算机中，信息单元称为“量子比特”，它除了可以处于“0”态或“1”态外，还可处于一种叠加态。我们用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示量子比特可取的状态基失，单个量子比特可取的为

$$|Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle \tag{1}$$

由于 $\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$，们也可以这样表示量子比特：

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle \tag{2}$$

其中 $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. 显然 $\theta$ 和 $\phi$ 在单位三维球体上定义了一个点，这个球体通常被称为布洛赫球。单个量子比特的纯态可以与布洛赫球面上的点一一对应.

### 2.1.2 量子逻辑门

经典计算中用到很多基本逻辑门，包括与门、或门、非门、异或门、与非门和或非门等，这些元件组合在一起能构成用来计算任何函数的硬件电路。量子计算机与此类似，也由一系列的量子门组合而成，以此来完成复杂计算任务。图 2列出了常用的量子逻辑门，其代表符号和矩阵表示。描述单个量子门的矩阵 $U$ 要求必须是幺正的，即 $UU^{\dagger} = I$. C-NOT 门是一个两比特门，当控制比特是 $|0\rangle$ 时，目标比特不变。当控制比特是 $|1\rangle$ 时，目标比特发生翻转。

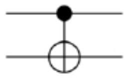
| 名称 | 符号 | 矩阵表示 |
|---|---|---|
| Hadamard | $\boxed{\mathrm{H}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ |
| Pauli-X | $\boxed{\mathrm{X}}$ | $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ |
| Pauli-Y | $\boxed{\mathrm{Y}}$ | $\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}$ |
| Pauli-Z | $\boxed{\mathrm{Z}}$ | $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ |
| C-Not |  | $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ |

图 2: 常用量子逻辑门的符号和矩阵表示

要实现实用的量子计算，需要的量子比特的数目远不止两个，因此需要能够实现多比特的量子逻辑门。而且，量子计算中需要施加的量子逻辑门与要解决的问题有关，也就是说，为了解决不同的问题，需要使用不同的量子逻辑门。那么，能不能只用一些基本的量子逻辑门，来实现任意的量子逻辑门的效果呢？理论上可以证明，对于任意的多比特量子逻辑门，都可以通过两比特受控非门结合单比特量子逻辑门的方式实现。我们称单比特量子逻辑门和受控非门形成一组普适的量子逻辑门。

#### 2.1.3 量子测量

为了得到量子计算的结果，需要对末态进行量子测量。对于量子比特 $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，采用基矢 $|0\rangle$，$|1\rangle$ 进行测量，得到结果 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的几率分别为 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$。如果选择另外的一组正交基矢：

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{3}$$

任意量子比特的态可以写成：

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle \tag{4}$$

测量之后，坍缩到 $|+\rangle$ 或者 $|-\rangle$ 的几率分别为 $|\alpha+\beta|^2/2$，$|\alpha-\beta|^2/2$.
一般情况下，给出任意的基矢 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$，可以将任意态表示为 $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$，只要 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是正交的，就可以进行相对于 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 的测量，以 $|\alpha|^2$ 的几率得到 $|a\rangle$，以 $|\beta|^2$ 的几率得到 $|b\rangle$。

#### 2.1.4 量子算法

经典计算机在处理某些问题的时候，速度是很快的，比如计算乘法 $127 \times 229 = ?$。但如果将这个问题反过来，求解 29083 这个数能分解成哪两个质数是乘积 $? \times ? = 29083$，这时候经典计算机可能要花费很长的时间来处理。尤其是当要分解的数非常大的时候，普通计算可能要运算几年或者更长的时间才能得到结果。而此时如果采用量子算法，则大数质因子分解问题可以迎刃而解。利用量子计算机，几乎可以瞬间完成大数分解。
量子算法与经典算法相比，其差别在于，量子算法融入了量子力学的很多特征。经典算法本质上不

依赖于量子物理，只是数学上的技巧。而量子算法中用到了量子相干性、量子叠加性、量子并行性、波函数坍缩等量子力学特性，进而大大提高了来计算效率。这种崭新的计算模式，给计算科学带来重大影响。有些问题，依据经典计算复杂性理论，是不存在有效算法的，但在量子算法的框架里却找到了有效法。最为典型的量子算法有：Shor 算法（质因数分解），QEA 算法（组合优化求解），Grover 算法（量子搜索算法）等。这些量子算法可能处理的问题不同，但是都是采用了量子力学物理性质进行计算。每一种算法都有其独特性，比如 Shor 算法对质因素分解将直接威胁 RSA 加密体系，Grover 算法在搜索方面，指数级的加速。这些都有潜在的应用价值。下面我们以 Deutsch-Jozsa 算法为例，说明量子并行性的优势。

**Deutsch-Jozsa 算法**

### 2.2 量子计算的实验实现

## 3 实验内容及结果

### 3.1 连续波实验

### 3.2 拉比振荡实验

### 3.3 $T_2$ 实验

### 3.4 D-J 算法实验

### 3.5 设计实验

## 4 思考题

请利用布洛赫球表示以下量子态:

如果实验中施加的微波频率 $f$ 与共振频率 $f_0$ 有偏差，即 $f = f_0 + \delta f$，拉比振荡的频率会如何变化？

拉比振荡频率与微波功率的关系是什么？

参照 $n = 1$ 的特殊情况，即图 **1.5** 所示的量子线路图，画出一般情况的 **D-J** 算法量子线路图，并解释算法原理

## 参考文献