第二章　信号描述及其分析

§2.1 信号及分类

一、确定性信号

1、定义：能用确定的数学关系式描述的信号称为确定性信号。

2、分类：周期信号与非周期信号

1）周期信号

定义：按一定时间间隔周期出现、无始无终的信号。

表达式：

$$x(t)=x(t+nT)$$

式中：n＝1、2、3……

2）非周期信号

定义：确定性信号中那些不具有周期重复性的信号称为非周期信号。

非周期信号中包含准周期信号和瞬变非周期信号。

★准周期信号：由两种以上的周期信号合成，但各周期分量无公共周期

如：$x(t)=\sin 2t+\sin\sqrt{3}t$

★除此之外的非周期信号均为瞬变非周期信号，其特点是在一定时间区间内存在，或随着时间的增长而衰减至零。

如：单边指数衰减信号

$$x(t)=\begin{cases}Ae^{-at} a>0,t\geq 0\\ 0\end{cases}$$

二、随机信号

随机信号是一种不能准确预测未来瞬时值，也无法用数学关系式来描述的信号。

三、连续信号和离散信号——确定性信号

若独立变量（时间自变量t）的取值是连续的，则称为连续信号；

若独立变量的取值是离散的，则称为离散信号。

连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。

若独立变量和幅值均取连续值，则称为模拟信号；

若离散信号的幅值是连续的，称为采样信号；

若离散信号的幅值也是离散的，则称为数字信号。

四、能量信号和功率信号

不考虑信号的实际量纲，把信号x(t)的平方及其对时间的积分分别称为信号的功率和能量。当x(t)满足 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt<\infty$

则认为该信号的能量是有限的，并称为能量信号。

若上述积分是无限的，但在有限区间(t_1, t_2)上的积分是有限的，这种信号称为功率信号。

五、信号的分类

简单周期信号

周期信号复杂周期信号

确定性信号

非周期信号 瞬变信号

信号 准周期信号

随机信号 非平稳随机信号

平稳随机信号

§2.2 周期信号与离散频谱

信号的时域描述：以时间为自变量表达的函数，称为信号的时域描述。

信号的时域分析：求取信号幅值的特征参数以及信号波形在不同时刻的相似性和关联性，称为信号的时域分析。

信号的频域描述：描述信号的独立变量是频率，则称信号的频域描述。

信号的频域分析或频谱分析：以频率作为独立变量建立信号与频率的函数关系。

一、傅立叶级数与周期信号的频谱

1、傅立叶级数的三角函数展开式

傅立叶级数的三角函数展开式为：

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nw_0t+b_n\sin nw_0t)$$

其中 常值分量 $a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)dt$

余弦分量的幅值 $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\sin nw_0tdt$

正弦分量的幅值 $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\cos nw_0tdt$

T——周期； n=l,2,3,……。

ω_0——角频率，$\omega_0=2\pi/T$

将上式中相同的频率合并，可以写成：

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_0t+\varphi_n)$$

$$A_n=\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}$$

$$tg\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}$$

n=1的正弦分量称为基波，相应的频率w_0为基频；当n=2，3，……时，依次称为二次、三次……n次谐波，相应的频率称为二次、三次……n次谐波频率。

2、周期信号的频谱

幅值频谱图（幅频谱）：以幅值A_n为纵坐标，以频率ω（$\omega=n\omega_0$, n=1，2，3……）为横坐标

画出的$A_n-\omega$图。
相位频谱图（相频谱）：以相位为纵坐标，以频率ω为横坐标画出的图。
●获得频谱的过程也就是对信号进行频谱分析的过程。
3、例题
1）求如图所示的周期方波x（t）的频谱，该方波在一个周期内的表达式为

$$x(t)=\begin{cases}A & 0<t<T/2 \\ -A & -T/2<t\leq 0\end{cases}$$

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nw_0 t$$

解：由图可知，该周期信号为奇函数，因此$a_n=0$，$a_0=0$，即
其中

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

$$=\frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\sin n\omega_0 t dt$$

$$=\frac{2A}{n\pi}[-\cos n\omega_0 t]_0^{\frac{T}{2}}=\begin{cases}\frac{4A}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

该周期方波可写成

$$x(t)=\frac{4A}{\pi}(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\cdots)$$

$$=\frac{4A}{\pi}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t)$$

$$n=1,3,5,\cdots$$

4、周期信号的频谱的特点
1）离散性　频谱是离散的。
2）谐波性　频谱中的谱线只出现在基频的整数倍频率处，即各次谐波频率都是基频w_0的整数倍。
3）收敛性　　各次谐波分量随频率增加，其总趋势是衰减的。

§2.3　傅立叶变换及非周期信号的频谱

一、傅立叶积分
周期为T的信号x(t)，其频谱是离散的。当x(t)的周期T趋于无穷大时，则信号就成为非周期信号。非周期信号的频谱是连续的，称为连续频谱，此时必须用傅里叶积分来描述。
设有一个周期信号x(t)，在[-T/2，T/2]区间的傅里叶级数可表示为

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

式中

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau)e^{-j\pi\omega_0\tau}d\tau$$

将Cn代入上式，则得

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(\tau)e^{-j\pi\omega_0\tau}d\tau]e^{j\pi\omega_0 t}$$

当T趋于无穷大时，频率间隔Δω=2π/T趋于dω，离散频谱中相邻的谱线会紧靠在一起，nω_0变成为连续变量ω，符号“Σ”变成为积分符号“∫”。于是有

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]e^{j\omega t}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]e^{j\omega t}d\omega$$

2．傅里叶变换

数学上将一个函数与另一个函数的一一对应关系称为变换。

若函数x(t)满足傅里叶积分定理中的条件，则在x(t)的连续点处，便有傅氏积分式成立，若在此式中

设
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

则
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

以上两式可以写成

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

在数学上，称X(ω)为x(t)的傅立叶变换，称x(t)为X(ω)的傅立叶逆变换，两者互称傅立叶变换对。简单表示为：

$$x(t)\Leftrightarrow X(\omega)$$

$$F\left[x(t)\right]\Leftrightarrow X(\omega),\ F^{-1}\left[X(\omega)\right]\Leftrightarrow x(t)$$

若把ω=2πf代入式中，可以得到以f为变量的傅立叶变换对，表达式如下：

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$

一般X（f）是实变量f的复函数，可以写成

$$X(f)=\left|X(f)\right|e^{j\varphi(f)}$$

式中　|X(f)|为信号x(t)的连续幅谱

　　　　为信号x(t)的连续相位谱

二、傅立叶变换的性质及应用

1、线性叠加性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f), \quad y(t) \Leftrightarrow Y(f)$$

则

$$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(f) + bY(f)$$

式中a、b是常数。

2、对称性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

则

$$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

3、时间长度改变特性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

则

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X(\frac{f}{a}) \qquad a > 0$$

4、时延特性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

则

$$x(t \pm t_0) \Leftrightarrow X(f) e^{\pm j2\pi f t_0}$$

5、频移特性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

则

$$x(t) e^{\pm j2\pi f t_0} \Leftrightarrow X(f \mp f_0)$$

6、微分和积分特性

若

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$$

则

§2.4 数字信号处理

一、模拟信号离散化

1、采样与采样定理

1）采样

是指将连续的时域信号转变为离散的时间序列的过程。

采样在理论上是将模拟信号x(t)与

时间间隔T_s的周期单位脉冲序列函数相乘，实际上是将模拟信号x(t)按一定的时间间隔T_s逐点取其瞬时值，使之成为离散信号。

T_s——采样间隔，$f_s=1/T_s$

2）采样定理（香农定理）

带限信号不丢失信息的最低采样频

率f_s大于等于原信号中的最高频率f_c的2倍。

3）频率混叠

频率混叠是由于采样频率选取不当而出现高、低频率成分发生混叠的一种现象。

解决频率混叠的方法：

1）提高采样频率以满足采样定理，一般工程中取f_s≥（3～4）f_c。

2）用低通滤波器滤掉不必要的高频成分，该低通滤波器称为抗混叠滤波器。

2、采样长度与频率分辨率

频率分辨率△f与采样长度T成反比，即：

N为数据点数。

一般工程信号分析中，采样点数N选取2的整数幂，使用较多的有512、1024、2048等。

3、量化及量化误差

将采样信号的幅值经过四舍五入的方法离散化的过程称为量化。

若采样信号可能出现的最大值为A，令其分为B个间隔，则每一个间隔

△x＝A/B，△x称为量化电平，每一个量化电平对应一个二进制编码。

当采样信号落在某一个区间内，经过四舍五入变为离散值时，就　产生量化误差。

4、泄漏及窗函数

1）泄漏现象

 截断：在时域内将该信号函数与一个窗函数相乘。

泄漏现象：由于截断而造成的谱值下降、频谱扩张的现象。

2）窗函数及其应用

工程测试中比较常用的窗函数有矩形窗、三角窗、汉宁窗、海明窗和指数窗五种。

关于 窗函数的选取，应考虑被分析信号的性质与处理要求。