浅谈向量积在高中数学中的应用

冯易,邢之熠,方若愚,文子龙

2018

摘要

向量, 又称矢量, 是既有大小又有方向的量.向量在学术, 特别是在数学和物理中有着十分广泛的应用.高中阶段, 我们学习了向量的数乘和数量积,并借助向量工具解决立体几何问题.向量积,又称外积.向量积的概念在高中阶段很少提及.但利用向量积可以快速而准确地解决某些问题,并具有推广的潜质.本课题从一道简单而基础的数学题出发, 展开一系列思考和讨论,探究向量积在高中数学中的应用. 本课题探究不全是教材中的向量, 一些常规的向量方法将不再提及.

1 从一道简单而基础的数学题出发

1.1 平面中求面积

1.1.1 引题

例1 如图1,在平面直角坐标系中,已知$A(2,3)$,$B(1,5)$,求$S_{\triangle ABO}$.

解 由$O(0,0)$, $B(1,5)$可知

$$OB: 5x-y=0,$$

$$|OB|=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26},$$

又$A(2,3)$,则OB边上高

$$h=\frac{|10-3|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}},$$

故

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|OB|\times h=\frac{7}{2}.$$

□

解 如图2,用矩形(粗线部分)减去三个小三角形

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= S_{OCDB}-S_{\triangle OCB}-S_{\triangle OEA}-S_{\triangle ABD} \\ &= 10-\frac{5}{2}-3-1 \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

□

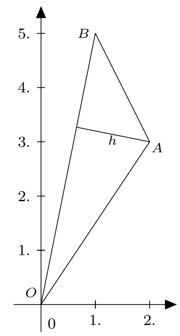

图 1: 一道简单而基础的数学题

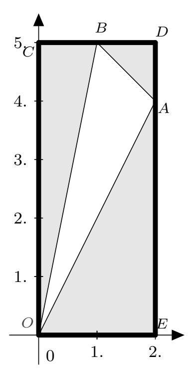

图 2: 方若愚的解法

1.1.2 引题的一般情况

考虑引题的一般情况：

例2 已知两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,求$S_{\triangle OAB}$.

解 用上面提到的两种方法均可解答,易知

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|=\left\|\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}\right\|$$

□

例3 已知三点A,B,C,坐标分别为$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$,求$S_{\triangle ABC}$.

解 由$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$可知

$$AB:(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0,$$
$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

又$C(x_3,y_3)$,则AB边上高

$$h=\frac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}},$$

故

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\cdot h\left|AB\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2\right|
\end{aligned}$$

□

解 将三角形做平移变换,将

$$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,z_3)$$

平移为

$$A(0,0),B(x_2-x_1,y_2-y_1),C(x_3-x_1,y_3-y_1)$$

利用上一问的结论,有

$$S_{\triangle ABC}=\left\|\begin{array}{cc} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{array}\right\|$$

□

本着对称轮换、简单优美的原则，我们有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right\|$$

1.2 空间中求面积

例4 在空间直角坐标系中,已知三点A,B,C,坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$, 求$S_{\triangle ABC}$(以下简写为S).

我们先来看下面一种解法[1].

解 令

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2},\\
b &= \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2},\\
c &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},\\
q &= \frac{1}{2}(a+b+c)\\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}\\
&\quad +\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}\\
&\quad +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}),
\end{aligned}$$

则

$$S=\sqrt{T},$$

其中

$$\begin{aligned}
T &= q(q-a)(q-b)(q-c)\\
&= \cdots(\text{代入}q,a,b,c)\\
&= \cdots(\text{化简})\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

□

上面的方法计算量巨大,不推荐采纳.

解 注意到向量积的定义式

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin<a,b>$$

本身就表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积. 建立标准单位向量[2] $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 将向量用坐标表示

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\\
\overrightarrow{AC} &= (x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\right|
\end{aligned}$$

[1] 文子龙在研究这道题目时曾说:“简单嘛,直接用三角形面积公式爆算”

[2] 未作特别说明,分别以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$记$x$轴,$y$轴,$z$ 轴上与该轴正向同方向的单位向量

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{array}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{array}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{{T_1}^2+{T_2}^2+{T_3}^2}
\end{aligned}
$$

其中

$$T_1=\left|\begin{array}{ccc} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{array}\right|, T_2=\left|\begin{array}{ccc} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{array}\right|, T_3=\left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array}\right|.$$

□

注意,在上面的解答中出现的

$$\left|\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{array}\right|$$

表示平面ABC的法向量,.

例5 在空间直角坐标系中,已知两点A,B坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$, 求$S_{\triangle OAB}$(以下简写为S).

解 与上一道例题类似.这里直接给出结果

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{T_1^2+T_2^2+T_3^2}$$

其中

$$T_1=\left|\begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array}\right|, T_2=\left|\begin{array}{cc} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{array}\right|, T_3=\left|\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}\right|.$$

□

1.3 空间中求体积

例6 在空间直角坐标系中,已知三点A,B,C,坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$, 求$V_{\text{三棱锥}OABC}$(以下简写为V).

解 首先我们有

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h,$$

而

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|, \\
h &= \left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos<\text{面OAB,直线OC}>,
\end{aligned}
$$

注意到

$$\cos < \text{面OAB,直线OC} >= \left|\cos < \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} >\right|,$$

故

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos < \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} > \\ &= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC}\right|. \end{aligned} \tag{1}$$

在式(1)中同时用到了向量的数量积和向量积，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 称为(向量)$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的混合积,是一个数.又已知

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\|.$$

□

例7 在空间直角坐标系中,已知四点A, B, C, D坐标为$(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3, 4)$, 求$V_{\text{三棱锥}ABCD}$(以下简写为$V$).

解 这里直接给出答案

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

2 分析与总结

向量的向量积有着广泛的用处

- 面积
- 体积
- 法向量

2.1 向量积在解析几何中的用处

在解析几何中利用向量积可以快速而简洁地表示出面积, 有时会有意想不到的妙处.

在下一道例题中,标准解答(原题中椭圆已知)复杂而冗余, 但如果利用参数方程和向量积,则几乎没有什么计算量.

例8 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有两动点A、B，求$S_{\triangle OAB}$最大值.

解 设

$$A(a\cos\alpha,b\sin\alpha),B(a\cos\beta,b\sin\beta),$$

则

$$\begin{aligned}S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|\\ &= \frac{1}{2}\left|ab\sin\beta\cos\alpha-ab\sin\alpha\cos\beta\right|\\ &= \frac{1}{2}ab\left|\sin(\alpha-\beta)\right|\\ &\leq \frac{1}{2}ab.\end{aligned}$$

□

2.2 向量积在立体几何中的用处

例9 在空间直角坐标系中,已知$A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$,求面$ABC$的法向量$\boldsymbol{n}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & 1\\ a & 0 & 0 & 1\\ 0 & b & 0 & 1\\ 0 & 0 & c & 1\end{vmatrix}\\ &= (bc,ca,ab).\end{aligned}$$

□

式(1)实际上给出了空间中四面体的体积公式, 利用它可以很快的表示出空间中的体积,由于高中阶段此类题目较少,这里不再做说明.

在立体几何中,利用向量积可以快速地算出体积、法向量和空间面积, 进而还可以算出点到直线距离,点到面距离, 减少多余的计算,节省时间,本文不再赘述.

2.3 规律

一维 已知一维空间中一点$A(x_1)$,则线段$|OA|$的长度为一阶行列式

$$\left|x_1\right|.$$

二维 已知二维空间中两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2$, 则三角形OAB的面积为二阶行列式

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

三维 已知三维空间中三点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3)$,则四面体$OABC$的体积为三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

n维 已知n维空间中n点$A(x_1,y_1,\cdots),B(x_2,y_2,\cdots),\cdots$, 则体$OA\cdots$的“体积”为?

2.4 其他

由于向量积并未在高中阶段学习,超出考纲范围, 所以尽管有些时候使用向量积非常方便, 但是不推荐在解答题[3]的过程呈现中使用向量积.但同时,在一些选择题和填空题中使用向量积也无妨.

3 补充知识

虽然这一部分叫**补充知识**,但是我们并没有准备在这里做知识的新课式讲解.这里只会列出一些基本概念和公式,供已经学习过但忘记的人复习用,如果您真的不知道什么叫行列式,请自行购买线性代数学习.

定义/理1 $m\times n$个数排成每行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个$m\times n$ **矩阵**,简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$a_{ij}$称为矩阵的元素.

定义/理2 一个$m\times m$的矩阵称为$\boldsymbol{m}$阶方阵

定义/理3 n个数$1,2,\cdots,n$排成一个有序n元数组称为一个**$\boldsymbol{n}$ 元排列**.

定义/理4 $S_n=${所有n元排列}

定义/理5 对于给定的n元排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$, 如果一对数前后位置与它们的大小顺序相反(即左边的数大于右边的数)，则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

.

定义/理6 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,所谓**$\boldsymbol{A}$的行列式**或**$\boldsymbol{n}$阶行列式**，是指由A确定的一个数，记为$|\boldsymbol{A}|$(或$\det\boldsymbol{A}$),这个数由下式来确定

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

[3]文子龙说“可以扯把子$\cdots$”

定义/理7　在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去a_{ij}所在的第i行和第j列，留下的$(n-1)$阶行列式叫(i,j)元a_{ij}的余子式,记作M_{ij},记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫(i,j)元a_{ij}的代数余子式.

定义/理8　不加证明地给出以下定理

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{i_0j}A_{i_0j}$$

定义/理9　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个向量,规定$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积是一个向量,记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模与方向分别为

(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin<a,b>$

(ii)**$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$,并且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$符合右手法则**

由定义得:

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

按照定义求向量的向量积不方便,现在我们考虑以下方法

例10　已知$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

解　由定义知

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}) \\ &= x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}+ \\ &\quad x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+z_2x_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+ \\ &\quad x_2y_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_2z_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z_2x_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\ &= \cdots,\end{aligned}$$

最后我们有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

更多有关行列式的知识可以阅读参考文献或知乎

参考文献

[1] 高等代数与解析几何(第二版),同济大学数学系,高等教育出版社,2016

[2] 微积分(第三版),同济大学数学系,高等教育出版社,2010

[3] 高等几何(第三版),梅向明等，高等教育出版社,2008

[4] 线性代数(第四版),同济大学应用数学系,高等教育出版社,2003