浅谈向量积在高中数学中的应用

冯易,邢之熠

2018

摘要

向量,又称矢量,是既有方向又有大小的量.向量在学术中,特别是在数学和物理中有着十分广泛的应用.高中阶段,我们学习了向量的数乘和向量积并借助向量工具解决立体几何问题. 向量积,又称外积(与之对应的是内积,即数量积).向量积的概念在高中阶段很少提及.但,利用向量积可以快速而准确地解决某些(子)问题,并具有推广的潜质. 本课题从一道简单而基础的数学题出发,引出一系列思考和讨论,探究向量在高中数学中的应用.本课题探究不全是教材中的向量,一些常规的向量方法将不再提及.

1 从一道简单而基础的数学题出发

1.1 平面中求面积

1.1.1 引题

例1 如图1,在平面直角坐标系中,已知$A(2,3)$,$B(1,5)$,求$S_{\triangle ABO}$.

解 由$O(0,0)$, $B(1,5)$可知

$$OB: 5x-y=0,$$

$$|OB|=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26},$$

又$A(2,3)$,则OB边上高

$$h=\frac{|10-3|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}},$$

故

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|OB|\times h=\frac{7}{2}.$$

□

解 如图2,用矩形(粗线部分)减去三个小三角形

$$\begin{aligned}S_{\triangle OAB} &= S_{OCDB}-S_{\triangle OCB}-S_{\triangle OEA}-S_{\triangle ABD}\\ &= 10-\frac{5}{2}-3-1\\ &= \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

□

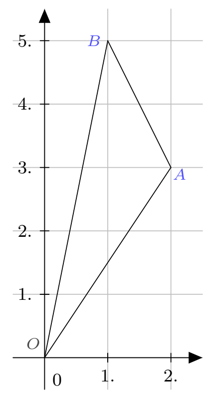

图 1: 一道简单而基础的数学题

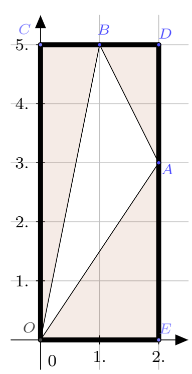

图 2: 方若愚的解法

1.2 引题的一般情况

考虑引题的一般情况：

例2 已知两点$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,求$S_{\triangle OAB}$.

解 用上面提到的两种方法均可解答,易知

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right| = \left\| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right\|$$

□

例3 已知三点A, B, C,坐标分别为$(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$,求$S_{\triangle ABC}$

解 冯易由$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$可知

$$AB : (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

又$C(x_3, y_3)$,则AB边上高

$$h = \frac{|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}},$$

故

$$\begin{array}{rcl} S_{\triangle ABC} & = & \frac{1}{2} \cdot h\,|AB| \\ & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ & = & \frac{1}{2}\left|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)\right| \\ & = & \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\right| \end{array}$$

□

解 将三角形做平移变换,将

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, z_3)$$

平移为

$$A(0, 0), B(x_2 - x_1, y_2 - y_1), C(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

利用例1的结论,有

$$S_{\triangle ABC} = \left\| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right\|$$

□

本着对称轮换、简单优美的原则，我们有

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right\|$$

1.3 空间中求面积

例4 在空间直角坐标系中,已知三点A,B,C,坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$, 求$S_{\triangle A_1A_2A_3}$(以下简写为S).

文子龙说:"简单嘛,直接用三角形面积公式爆算"

解 令

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}\\
b &= \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}\\
c &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\
q &= \frac{1}{2}(a+b+c)\\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}\\
&\quad +\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}\\
&\quad +\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2})
\end{aligned}
$$

则

$$S=\sqrt{T}$$

其中

$$
\begin{aligned}
T &= q(q-a)(q-b)(q-c)\\
&= \cdots(\text{代入}q,a,b,c)\\
&= \cdots(\text{化简})\\
&= \cdots(\text{文子龙卒})
\end{aligned}
$$

□

上面的方法计算量巨大,不推荐采纳.

解 注意到向量积的定义式

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin<a,b>$$

本身就表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积. 建立标准单位向量[1] $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 将向量用坐标表示

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\\
\overrightarrow{AC} &= (x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\\
&= \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\right|
\end{aligned}
$$

[1] 未作特别说明,分别以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$记$x$轴,$y$轴,$z$ 轴上与该轴正向同方向的单位向量

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{array}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{array}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{{T_1}^2+{T_2}^2+{T_3}^2}
\end{aligned}
$$

其中

$$
T_1=\left|\begin{array}{ccc} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{array}\right|, T_2=\left|\begin{array}{ccc} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{array}\right|, T_3=\left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array}\right|
$$

□

例5 在空间直角坐标系中,已知两点A,B坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2)$, 求$S_{\triangle OAB}$(以下简写为S).

解 与上一道例题类似,这里不再作答

□

1.4 空间中求体积

例6 在空间直角坐标系中,已知四点A,B,C,D,坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$, 求$V_{\text{三棱锥}A_1A_2A_3A_4}$(以下简写为$V$)

解[2] 首先我们有

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h$$

而

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \\
h &= \left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos<\text{面ABC,直线AD}>
\end{aligned}
$$

注意到

$$\cos<\text{面ABC,直线AD}>=\left|\cos<\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}>\right|$$

故

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| \tag{1}$$

在式(1)中用到了向量的数量积和向量积，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为(向量)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的混合积[3].

[2]来自冯易
[3]不严谨的定义

又已知

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

2 分析与总结

向量的向量积有着广泛的用处

- 面积
- 体积
- 法向量

2.1 向量积在解析几何中的用处

在解析几何中利用向量积可以快速而简洁地表示出面积, 有时会有意想不到的妙处.

在下一道例题中,标准解答(原题中椭圆已知)复杂而冗余, 但如果利用参数方程和向量积,则几乎没有什么计算量.

例7 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有两动点A、B，求$S_{\triangle OAB}$最大值

解[4] 设$A(a\cos\alpha, b\sin\alpha), B(a\cos\beta, b\sin\beta)$

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|ab\sin\beta\cos\alpha-ab\sin\alpha\cos\beta\right|$

$=\frac{1}{2}ab\left|\sin(\alpha-\beta)\right|\le\frac{1}{2}ab$

2.2 向量积在立体几何中的用处

式1实际上给出了空间中四面体的体积公式, 利用它可以很快的表示出空间中的体积

例8

在立体几何中,利用向量积可以快速地算出体积、法向量和空间面积, 进而还可以算出点到直线距离,点到面距离, 减少多余的计算,节省时间.

3 补充知识

虽然这一部分叫**补充知识**,但是我们并没有准备在这里做知识的新课式讲解.这里只会列出一些基本概念和公式,供已经学习过但忘记的人复习用,如果您真的不知道什么叫行列式,请自行购买线性代数学习.

[4]来自方若愚

【定义1】$m\times n$个数排成每行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个$m\times n$ **矩阵**,简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$a_{ij}$称为矩阵的元素.

【定义2】一个$m\times m$的矩阵称为$\boldsymbol{m}$**阶方阵**

【定义3】n个数$1,2,\cdots,n$排成一个有序n元数组称为一个$\boldsymbol{n}$ **元排列**.

【定义4】$S_n=$\{所有n元排列\}

【定义5】对于给定的n元排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$, 如果一对数前后位置与它们的大小顺序相反(即左边的数大于右边的数)，则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

.

【定义6】设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,所谓$\boldsymbol{A}$**的行列式或**$\boldsymbol{n}$**阶行列式**，是指由A确定的一个数，记为$|\boldsymbol{A}|$(或$\det\boldsymbol{A}$),这个数由下式来确定

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

【定义7】在方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中划去a_{ij}所在的第i行和第j列，剩下的$(n-1)^2$

【定义8】设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个向量,规定$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积是一个向量,记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模与方向分别为

(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin<a,b>$

$(ii)$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$**同时垂直于**$\boldsymbol{a}$**和**$\boldsymbol{b}$**, 并且**$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$**符合右手法则**

由定义得:

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

按照定义求向量的向量积不方便,现在我们考虑以下方法

例9 已知$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

解[5] $\because\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$

$\therefore\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$

$=x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}+x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+z_2x_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+x_2y_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+y_2z_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z_2x_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}$

[5]来自冯易

$= \cdots$

最后我们有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

参考文献

[1] 高等代数与解析几何(第二版),同济大学数学系,高等教育出版社,2016

[2] 微积分(第三版),同济大学数学系,高等教育出版社,2010

[3] 高等几何(第三版),梅向明等，高等教育出版社,2008

[4] 线性代数(第四版),同济大学应用数学系,高等教育出版社,2003