浅谈向量积在高中数学中的应用

冯易,邢之熠

2018

摘要

向量,又称矢量,是既有方向又有大小的量.向量在学术中,特别是在数学和物理中有着十分广泛的应用.高中阶段,我们学习了向量的数乘和向量积并借助向量工具解决立体几何问题. 向量积,又称外积(与之对应的是内积,即数量积).向量积的概念在高中阶段很少提及.但,利用向量积可以快速而准确地解决某些(子)问题,并具有推广的潜质. 本课题从一道简单而基础的数学题出发,引出一系列思考和讨论,探究向量在高中数学中的应用.本课题探究不全是教材中的向量,一些常规的向量方法将不再提及.

第一部分 从一道简单而基础的数学题出发

1 平面中求面积

我们先来看这样一道题目:

【例1】如图1,在平面直角坐标系中,已知$A(2,3)$,$B(1,5)$,求$S_{\triangle ABO}$

(解答来自冯易) $\because O(0,0), B(1,5)$

$\therefore OB: 5x-y=0$; 又$A(2,3)$

$\therefore OB$边上的高$h=\dfrac{|10-3|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{26}}$,底边$OB=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$

$\therefore S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}OB\times h=\dfrac{7}{2}$

考虑它的一般情况:

【例2】已知三点A,B,C,坐标分别为$(x_i,y_i), i=1,2,3$,求$S_{\triangle ABC}$

(解答来自冯易) $\because A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

$\therefore AB: (y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$; 又$C(x_3,y_3)$

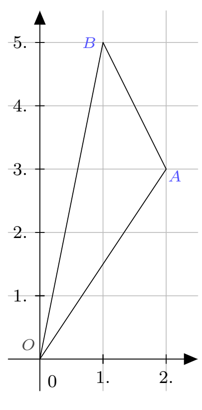

图 1: 一道简单而基础的数学题

$\therefore AB$边上的高$h=\dfrac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}$,底边$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\therefore S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}\dfrac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}\times\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)|$

$=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2|$

本着对称轮换、简单优美的原则，我们有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc}x_2-x_1&y_2-y_1\\x_3-x_1&x_3-y_1\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

2 空间中求体积

【例3】在空间直角坐标系中,已知四点$A,B,C,D,$坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$,求$V_{三棱锥A_1A_2A_3A_4}$(以下简写为V)

(解答来自冯易)首先我们有

$$V=\frac{1}{3}S\cdot h$$

而

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\\h&=\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos<\text{面ABC,直线AD}>\end{aligned}$$

注意到

$$\cos<\text{面ABC,直线AD}>=\left|\cos<\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}>\right|$$

故

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| \tag{1}$$

在式(1)中用到了向量的数量积和向量积，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为(向量)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的混合积[1]

建立标准单位向量[2] $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 将向量用坐标表示

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\\\overrightarrow{AC}&=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\\\overrightarrow{AD}&=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1)\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)\\&=\left|\begin{array}{ccc}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{array}\right|\end{aligned} \tag{2}$$

[1]不严谨的定义

[2]未作特别说明,分别以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$记$x$轴,$y$轴,$z$轴上与该轴正向同方向的单位向量

第二部分　分析与总结

向量的向量积有着广泛的用处

- 面积
- 体积
- 法向量

在解析几何中利用向量积可以快速而简洁地表示出面积, 有时会有意想不到的妙处,如下一道例题,标准解答(原题中椭圆已知)复杂而冗余, 但如果利用参数方程和向量积,则几乎没有什么计算量.

【例4】 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上有两动点$A$、$B$，求$S_{\triangle OAB}$最大值
(解答来自*方若愚*)设$A(a\cos\alpha,b\sin\alpha),B(a\cos\beta,b\sin\beta)$
$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|ab\sin\beta\cos\alpha-ab\sin\alpha\cos\beta\right|$
$=\frac{1}{2}ab\left|\sin(\alpha-\beta)\right|\leq\frac{1}{2}ab$

在立体几何中,利用向量积可以快速地算出体积、法向量和空间面积, 进而还可以算出点到直线距离,点到面距离, 减少多余的计算,节省时间.

第三部分　补充知识

虽然这一部分叫**补充知识**,但是我们并没有准备在这里做知识的新课式讲解.这里只会列出一些基本概念和公式,供已经学习过但忘记的人复习用,如果您真的不知道什么叫行列式,请自行购买线性代数学习.

【定义1】 $m\times n$个数排成每行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个$m\times n$ **矩阵**,简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$a_{ij}$称为矩阵的元素.

【定义2】 一个$m\times m$的矩阵称为$\boldsymbol{m}$**阶方阵**

【定义3】 n个数$1,2,\cdots,n$排成一个有序n元数组称为一个$\boldsymbol{n}$ **元排列**.

【定义4】 $S_n=$\{所有n元排列\}

【定义5】 对于给定的n元排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$, 如果一对数前后位置与它们的大小顺序相反(即左边的数大于右边的数)，则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

.

【定义6】 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,所谓$\boldsymbol{A}$**的行列式**或$\boldsymbol{n}$**阶行列式**，是指由A确定的一个数，记为$|\boldsymbol{A}|$(或$\det\boldsymbol{A}$),这个数由下式来确定

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

【定义7】在方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中划去a_{ij}所在的第i行和第j列，剩下的$(n-1)^2$

【定义8】设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$是两个向量,规定$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积是一个向量,记作$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$,它的模与方向分别为

(i) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin < a, b >$

$(ii)$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$,并且$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$符合右手法则

由定义得:

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

按照定义求向量的向量积不方便,现在我们考虑以下方法

【例5】已知$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$,求$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(解答来自冯易) $\because \boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$

$\therefore \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k})$

$= x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} + x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} + z_2x_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + x_2y_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + y_2z_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + z_2x_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}$

$= \cdots$

最后我们有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

参考文献

[1] 高等代数与解析几何(第二版),同济大学数学系,高等教育出版社,2016

[2] 微积分(第三版),同济大学数学系,高等教育出版社,2010

[3] 高等几何(第三版),梅向明等，高等教育出版社,2008

[4] 线性代数(第四版),同济大学应用数学系,高等教育出版社,2003