浅谈向量在高中数学中的应用

冯易,邢之熠

2018

摘要

向量,又称矢量,是既有方向又有大小的量.向量在学术中,特别是在数学和物理中有着十分广泛的应用.高中阶段,我们学习了向量的数乘和向量积并借助向量工具解决立体几何问题. 向量积,又称外积(与之对应的是内积,即数量积).向量积的概念在高中阶段很少提及.但,利用向量积可以快速而准确地解决某些(子)问题,并具有推广的潜质. 本课题从一道简单而基础的数学题出发,引出一系列思考和讨论,探究向量在高中数学中的应用.本课题探究不全是教材中的向量,一些常规的向量方法将不再提及.

第一部分　从一道简单而基础的数学题出发

1　平面中求面积

我们先来看这样一道题目:

【例1】 如图1,在平面直角坐标系中,已知$A(2,3)$,$B(1,5)$,求$S_{\triangle ABO}$

(解答来自冯易) $\because O(0,0), B(1,5)$

$\therefore OB: 5x-y=0$;又$A(2,3)$

$\therefore OB$边上的高$h=\frac{|10-3|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{26}}$,底边$OB=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$

$\therefore S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}OB\times h=\frac{7}{2}$

考虑它的一般情况:

【例2】 已知三点A,B,c,坐标分别为$(x_i,y_i), i=1,2,3$,求$S_{\triangle ABC}$

(解答来自冯易) $\because A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

$\therefore AB: (y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$; 又$C(x_3,y_3)$

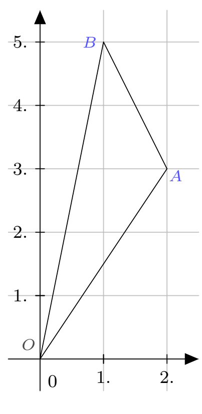

图 1: 一道简单而基础的数学题

$\therefore AB$边上的高$h=\frac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}$,底边$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
$\therefore S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\frac{|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}\times\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
$=\frac{1}{2}|(y_1-y_2)x_3-(x_1-x_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)|$
$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2|$

结合行列式的知识，我们有$S_{\triangle ABC}=$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\right\|$$

2 空间中求体积

【例3】在空间直角坐标系中,已知四点A,B,C,D,坐标为$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$,求$V_{三棱锥A_1A_2A_3A_4}$(以下简写为V)

(解答来自冯易)首先我们有

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h$$

而

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \\ h &= \left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos<\text{面ABC,直线AD}> \end{aligned}$$

注意到

$$\cos<\text{面ABC,直线AD}>=\left|\cos<\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}>\right|$$

故

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| \tag{1}$$

在式(1)中用到了向量的数量积和向量积，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为(向量)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的混合积[1]

建立单位基底向量[2]$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 将向量用坐标表示

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \\ \overrightarrow{AC} &= (x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1) \\ \overrightarrow{AD} &= (x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= (x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\times(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1) \\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

[1]不严谨的定义
[2]未作特别说明,文中所提到的$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为分别平行x,y,z的单位向量

第二部分　分析与总结

向量的向量积有着广泛的用处

- 面积
- 体积
- 法向量

下面将以3几道例题来说明

【例4】已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上有两动点$A$、$B$，求$S_{\triangle OAB}$最大值
(解答来自方若愚)设$A(a\cos\alpha, b\sin\alpha), B(a\cos\beta, b\sin\beta)$
$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|ab\sin\beta\cos\alpha-ab\sin\alpha\cos\beta\right|$
$=\frac{1}{2}ab\left|\sin(\alpha-\beta)\right|\leq\frac{1}{2}ab$

第三部分　补充知识

【定义1】$m\times n$个数排成每行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个$m\times n$ **矩阵**,简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$a_{ij}$称为矩阵的元素.

【定义2】一个$m\times m$的矩阵称为$\boldsymbol{m}$**阶方阵**

【定义3】n个数$1,2,\cdots,n$排成一个有序n元数组称为一个$\boldsymbol{n}$ **元排列**.

【定义4】$S_n=$\{所有n元排列\}

【定义5】对于给定的n元排列$p_1,p_2,\cdots,p_n$, 如果一对数前后位置与它们的大小顺序相反(即左边的数大于右边的数)，则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记作

$$\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

.

【定义6】设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,所谓$\boldsymbol{A}$**的行列式**或$\boldsymbol{n}$**阶行列式**，是指由A确定的一个数，记为$|\boldsymbol{A}|$(或$\det\boldsymbol{A}$),这个数由下式来确定

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

【定义7】在方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中划去a_{ij}所在的第i行和第j列，剩下的$(n-1)^2$

参考文献

[1] 高等代数与解析几何(第二版),同济大学数学系,高等教育出版社,2016

[2] 高等几何(第三版)，梅向明等，高等教育出版社，2008