

浅谈向量积在高中(考)数学中的应用

方若愚,邢之熠,冯易,文子龙

2018

摘要

向量,又称矢量,是既有大小又有方向的量.向量在学术,特别是在数学和物理中有着十分广泛的应用.高中阶段,我们学习了向量的数乘和数量积,并借助向量工具解决立体几何问题.向量积,又称外积.向量积的概念在高中阶段很少提及.但利用向量积可以快速而准确地解决某些问题,并具有推广的潜质.本课题从一道简单而基础的数学题出发,展开一系列思考和讨论,探究向量积在高中数学中的应用.本课题探究不全是教材中的向量,一些常规的向量方法将不再提及.

1 从一道简单而基础的数学题出发

1.1 平面中求面积

1.1.1 引题

例1 如图1,在平面直角坐标系中,已知 $A(2, 3), B(1, 5)$,求 $S_{\triangle ABO}$.

解 由 $O(0, 0), B(1, 5)$ 可知

$$OB: 5x - y = 0,$$

$$|OB| = \sqrt{(1-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{26},$$

又 $A(2, 3)$,则 OB 边上高

$$h = \frac{|10 - 3|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{26}},$$

故

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}|OB| \times h = \frac{7}{2}.$$

□

解 如图2,用矩形(粗线部分)减去三个小三角形

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= S_{OCDB} - S_{\triangle OCB} - S_{\triangle OEA} - S_{\triangle ABD} \\ &= 10 - \frac{5}{2} - 3 - 1 \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

□

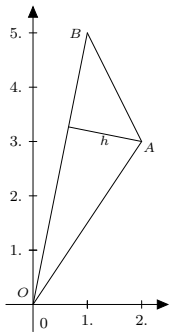


图 1: 一道简单而基础的数学题

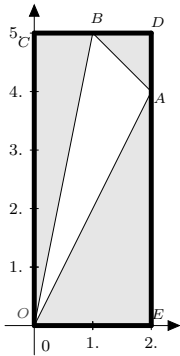


图 2: 方若愚的解法

1.1.2 引题的一般情况

考虑引题的一般情况:

例2 已知两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,求 $S_{\triangle OAB}$.

解 用上面提到的两种方法均可解答,易知

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\|$$

□

例3 已知三点 A, B, C ,坐标分别为 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3)$,求 $S_{\triangle ABC}$.

解 由 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 可知

$$AB: (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

又 $C(x_3, y_3)$,则 AB 边上高

$$h = \frac{|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}},$$

故

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot h |AB| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} |(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_3 y_2| \end{aligned}$$

□

解 将三角形做平移变换,将

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$$

平移为

$$A(0, 0), B(x_2 - x_1, y_2 - y_1), C(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

利用上一问的结论,有

$$S_{\triangle ABC} = \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\|$$

□

本着对称轮换、简单优美的原则,我们有

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right\|$$

1.2 空间中求面积

例4 在空间直角坐标系中,已知三点 A, B, C ,坐标为 $(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$, 求 $S_{\triangle ABC}$ (以下简写为 S).

我们先来看下面一种解法¹.

解 令

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}, \\ b &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}, \\ c &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \\ q &= \frac{1}{2}(a + b + c) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}), \end{aligned}$$

则

$$S = \sqrt{T},$$

其中

$$\begin{aligned} T &= q(q - a)(q - b)(q - c) \\ &= \cdots (\text{代入 } q, a, b, c) \\ &= \cdots (\text{化简}) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

□

上面的方法计算量巨大,不推荐采纳.

解 注意到向量积的定义式

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle a, b >$$

本身就表示以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积. 建立标准单位向量² $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 将向量用坐标表示

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \overrightarrow{AC} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)| \end{aligned}$$

¹ 文子龙在研究这道题目时曾说: “简单嘛,直接用三角形面积公式爆算”

² 未作特别说明,分别以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 记 x 轴, y 轴, z 轴上与该轴正向同方向的单位向量

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}
\end{aligned}$$

其中

$$T_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, T_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, T_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

注意,在上面的解答中出现的

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

表示平面 ABC 的法向量,.

例5 在空间直角坐标系中,已知两点 A, B 坐标为 $(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2)$, 求 $S_{\triangle OAB}$ (以下简写为 S).

解 与上一道例题类似.这里直接给出结果

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}$$

其中

$$T_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, T_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, T_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

□

1.3 空间中求体积

例6 在空间直角坐标系中,已知三点 A, B, C , 坐标为 $(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$, 求 $V_{\text{三棱锥}OABC}$ (以下简写为 V).

解 首先我们有

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

而

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|, \\
h &= |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos \langle \text{面} OAB, \text{直线} OC \rangle,
\end{aligned}$$

注意到

$$\cos \langle \text{面OAB}, \text{直线OC} \rangle = \left| \cos \langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle \right|,$$

故

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| \left| \overrightarrow{OC} \right| \cos \langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle \\ &= \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \right|. \end{aligned} \quad (1)$$

在式(1)中同时用到了向量的数量积和向量积, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 称为(向量) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的混合积,是一个数.又已知

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right|.$$

□

例7 在空间直角坐标系中,已知四点 A, B, C, D 坐标为 $(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $V_{\text{三棱锥}ABCD}$ (以下简称为 V).

解 这里直接给出答案

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

□

2 分析与总结

向量的向量积有着广泛的用处

- 面积
- 体积
- 法向量

2.1 向量积在解析几何中的用处

在解析几何中利用向量积可以快速而简洁地表示出面积,有时会有意想不到的妙处.

在下一道例题中,标准解答(原题中椭圆已知)复杂而冗余,但如果利用参数方程和向量积,则几乎没有计算量.

例8 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上有两动点 A, B , 求 $S_{\triangle OAB}$ 最大值.

解 设

$$A(a \cos \alpha, b \sin \alpha), B(a \cos \beta, b \sin \beta),$$

则

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| \\ &= \frac{1}{2} |ab \sin \beta \cos \alpha - ab \sin \alpha \cos \beta| \\ &= \frac{1}{2} ab |\sin(\alpha - \beta)| \\ &\leq \frac{1}{2} ab. \end{aligned}$$

□

2.2 向量积在立体几何中的用处

例9 在空间直角坐标系中,已知 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$, 求面 ABC 的法向量 \mathbf{n} .

解

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} \\ &= (bc, ca, ab). \end{aligned}$$

□

式(1)实际上给出了空间中四面体的体积公式,利用它可以很快的表示出空间中的体积,由于高中阶段此类题目较少,这里不再做说明.

在立体几何中,利用向量积可以快速地算出体积、法向量和空间面积,进而还可以算出点到直线距离,点到面距离,减少多余的计算,节省时间,本文不再赘述.

2.3 规律

一维 已知一维空间中一点 $A(x_1)$, 则线段 $|OA|$ 的长度为一阶行列式

$$|x_1|.$$

二维 已知二维空间中两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则三角形 OAB 的面积为二阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

三维 已知三维空间中三点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$, 则四面体 $OABC$ 的体积为三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

n 维 已知 n 维空间中 n 点 $A(x_1, y_1, \dots), B(x_2, y_2, \dots), \dots$, 则体 $OA\dots$ 的“体积”为?

2.4 其他

由于向量积并未在高中阶段学习, 超出考纲范围, 所以尽管有些时候使用向量积非常方便, 但是不推荐在解答题³的过程呈现中使用向量积. 但同时, 在一些选择题和填空题中使用向量积也无妨.

3 补充知识

虽然这一部分叫**补充知识**, 但是我们并没有准备在这里做知识的新课式讲解. 这里只会列出一些基本概念和公式, 供已经学习过但忘记的人复习用, 如果您真的不知道什么叫行列式, 请自行购买线性代数学习.

定义/理1 $m \times n$ 个数排成每行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ **矩阵**, 简记为 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 或 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, a_{ij} 称为矩阵的元素.

定义/理2 一个 $m \times m$ 的矩阵称为 **m 阶方阵**

定义/理3 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 排成一个有序 n 元数组称为一个 **n 元排列**.

定义/理4 $S_n = \{\text{所有 } n \text{元排列}\}$

定义/理5 对于给定的 n 元排列 p_1, p_2, \dots, p_n , 如果一对数前后位置与它们的大小顺序相反(即左边的数大于右边的数), 则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**, 记作

$$\tau(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

定义/理6 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 所谓 \mathbf{A} 的**行列式**或 **n 阶行列式**, 是指由 \mathbf{A} 确定的一个数, 记为 $|\mathbf{A}|$ (或 $\det \mathbf{A}$), 这个数由下式来确定

$$|\mathbf{A}| = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} (-1)^{\tau(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

³文子龙说“可以扯把子...”

定义/理7 在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,留下的 $(n-1)$ 阶行列式叫 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ,记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

定义/理8 不加证明地给出以下定理

$$D = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} A_{i_0 j}$$

定义/理9 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是两个向量,规定 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的向量积是一个向量,记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,它的模与方向分别为

(i) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$

(ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同时垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ,并且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 符合右手法则

由定义得:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

按照定义求向量的向量积不方便,现在我们考虑以下方法

例10 已知 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$,求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

解 由定义知

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \times (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) \\ &= x_1 x_2 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + y_1 y_2 \mathbf{j} \times \mathbf{j} + z_1 z_2 \mathbf{k} \times \mathbf{k} + \\ &\quad x_1 y_2 \mathbf{i} \times \mathbf{j} + y_1 z_2 \mathbf{j} \times \mathbf{k} + z_2 x_1 \mathbf{k} \times \mathbf{i} + \\ &\quad x_2 y_1 \mathbf{j} \times \mathbf{i} + y_2 z_1 \mathbf{k} \times \mathbf{j} + z_2 x_1 \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &= \cdots, \end{aligned}$$

最后我们有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

或

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

更多有关行列式的知识可以阅读参考文献或知乎

参考文献

- [1] 高等代数与解析几何(第二版), 同济大学数学系, 高等教育出版社, 2016.
- [2] 微积分(第三版), 同济大学数学系, 高等教育出版社, 2010.
- [3] 高等几何(第三版), 梅向明等, 高等教育出版社, 2008.
- [4] 线性代数(第四版), 同济大学应用数学系, 高等教育出版社, 2003.
- [5] 高考必刷题数学5解析几何, 杨文彬, 外语教学与研究出版社, 2017.