埃氏筛

判断 $1\sim n$ 中每个数是不是质

$$\begin{cases} i = 1 \sim n \\ j = 1 \sim \sqrt{i} \end{cases} \quad O(n\sqrt{n}) \quad (\times)$$

(bool) prime[i] : true : 质

false : 合 $\qquad O(n\log n)$

```
memset(prime, true)
for i = 2 to n
    // 2i, 3i, 4i, ...... 全是合数.
    for j = 2 to ⌊n/i⌋
        prime[i*j] = false
```

$i*j \le n$

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{n} = O(n\ln n)$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$e \approx 2.71828$

$\gamma \approx 0.51$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$$

$O(n)$. 求出 prime[2] ~ prime[n].

欧拉筛（线性筛）

kth_prime[k]：第 k 个质数.

kth_prime[1] = 2　　　　cnt.
[2] = 3
[3] = 5
⋮

$m = s * P_j$

memset(prime, true)

```
for i=2 to n {
    if (prime[i])
        kth_prime[++cnt] = i ;
    for j=1 to cnt {
        prime[ i * kth_prime[j] ] = false ;
        if ( i % prime[j] == 0) break ;
    }
}
```

$12 = 2^2 \times 3^1$

① 真的可以排除全部合数？ ✓

② 复杂度 $O(n)$？ ✓

重要！

断言：对于一个合数 m，写成 $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$
$(p_1 < p_2 < \cdots < p_k, \; p_i$ 都是质，$e_i \geq 1)$
(proved)
只要 m 能被标记
那 m 是在 $i = \frac{m}{p_1}$ 时被标记的

断言：任何合数 m 都能被标记.
(proved)
当 $i = \frac{m}{p_1}$ 时，

kth_prime：{ _ _ _ _ _ p_1 _ _ _ _ _ ...

j 在枚举时　都不会 break

kth_prime[j] = p_1 时，标记 m，然后 break.

证：若不然，假设 m 是在 $i = s$ 时被标记的

显然 $s < \frac{m}{p_1}$

$s = p_1^{e_1'} p_2^{e_2'} \cdots p_k^{e_k'}$

$e_i' \leq e_i$　在 $e_1' \cdots e_k'$ 中
只有一个 $e_j' = e_j - 1$
其余 $e_j' = e_j$

两种可能：1) $e_1' > 0$
2) $e_1' = 0$

如果是 1)，肯定不能通过 $s * P_j$ 标记 m

如果是 2)，$e_1 > 0$　$e_1' = 0$
$e_2' \cdots e_k'$
$\parallel$　　$\parallel$
$e_2 \cdots e_k$

phi[1] ~ phi[n]　$O(n)$

$\Rightarrow \quad s = \frac{m}{p}$, 矛盾.