信安数基作业 20210222

519021910025 钟睿哲.

1. 若 $c\neq0$， $c\mid a_i$ ，$i=1,2,\dots,n$. $a_i$ 与 $c$ 都是整数. $\forall s_1,\dots,s_n\in\mathbb{N}$,
证: $c\mid(s_1a_1+\dots+s_na_n)$

证：设 $a_i=q_i\cdot c$ $\Rightarrow$ $s_ia_i=s_iq_i\cdot c$ ，$s_iq_i\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\cancel{a_i}\, s_ia_i = \left(\sum_{i=1}^{n}s_iq_i\right)\cdot c$ $\sum_{i=1}^{n}s_iq_i\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $s_1a_1+\dots+s_na_n$ 是 $c$ 的倍数.

2. 证：~~设~~ $4k+3$ 形素数有无穷多个.

反证：不妨设有 $n$ 个，记为 $p_1,p_2,\dots,p_n$. 则 $p_1=3$, ~~$p_2=$~~

设 $p=4(p_2p_3\dots p_n)+3$，则 $p$ 是 $4k+3$ 形式的数字 $\Rightarrow$ $p$ 是合数.

易知 $p_1,\dots,p_n$ 都不能整除 $p$，故 $p$ 的质因子的形式为 $4k+1$（$k\geqslant1$）.

~~$p\equiv4($~~ $p\equiv3\pmod 4$， $4k+1\equiv1\pmod 4$ $\Rightarrow$ $4k+1$ 形式的数不是 $p$ 的质因子. $\Rightarrow$ $p$ 不是合数，矛盾.

综上，$4k+3$ 形式的素数有无穷多个.

3. 证：当 $n=0,1,2,\dots,39$ 时，$n^2+n+41$ 为素数.

```python
def is_prime (n):
    n = int(n)
    upper = int(n ** 0.5)
    # print(type(upper))
    upper += 1
    for i in range(2,upper):
        if n % i == 0 :
            return False
    return True
```

```python
    for i in range(40):
        n = i**2 + i + 41
        print(i,n,is_prime(n))
```

```
0 41 True
1 43 True
2 47 True
3 53 True
4 61 True
5 71 True
6 83 True
7 97 True
8 113 True
9 131 True
10 151 True
11 173 True
12 197 True
13 223 True
14 251 True
15 281 True
16 313 True
```

```
for i in range(40):
    n = i**2 + i + 41
    print(i,n,is_prime(n))
```

```
17 347 True
18 383 True
19 421 True
20 461 True
21 503 True
22 547 True
23 593 True
24 641 True
25 691 True
26 743 True
27 797 True
28 853 True
29 911 True
30 971 True
31 1033 True
32 1097 True
33 1163 True
```

```python
for i in range(40):
    n = i**2 + i + 41
    print(i,n,is_prime(n))
```

```
23 593 True
24 641 True
25 691 True
26 743 True
27 797 True
28 853 True
29 911 True
30 971 True
31 1033 True
32 1097 True
33 1163 True
34 1231 True
35 1301 True
36 1373 True
37 1447 True
38 1523 True
39 1601 True
```

4. 证：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数.

反证：设 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=S$ 是整数，设 $2,3,\ldots,n$ 的最小公倍数为 $M$，$M$为偶数

$\Rightarrow$ $MS$为偶数.

$\forall k\in N$，$k$可表示为 $k=2^{i}\cdot m$，其中 $i\geq 0$ 且 $i\in N$，$m$为奇数.

则$M$可表示为 $2^{x}\cdot m_M$，$x$是分母中，2的次数最高的那个分母，设这个分母为$a$，$m_M$为奇

证明$a$的唯一性. 设 $a=2^{x}\cdot a_1$，$b=2^{x}\cdot b_1$，$a_1$与$b_1$为奇数.

不妨设 $a<b$，则 $a_1<b_1$，则 $b-a=(b_1-a_1)\cdot 2^{x}$

其中 $b_1-a_1$为偶，故 $\cancel{b-a}$ $(b_1-a_1)$可以表示为 $(b_2-a_2)\cdot 2^{k}$，$k\geq 1$.

则 $b-a=(b_2-a_2)2^{x+k}$，则 $x+k>x$，与$x$为次数最大矛盾.

故$a$唯一.

$S=1+\cdots+\frac{1}{n}$，两边乘$M$，则 $MS=\frac{M}{1}+\frac{M}{2}+\cdots+\frac{M}{a}+\cdots+\frac{M}{n}$

左边为偶数，右边除了$\frac{M}{a}$外都为偶，只有$\frac{M}{a}$为奇，故右式为奇，矛盾.

$\Rightarrow$ $S$不是整数.

5. 找200以内素数：

$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$，$\lfloor\sqrt{200}\rfloor=14$. $\leq 14$的素数有：

其中 $b_1-a_1$ 为偶，故 ~~$b-a=(b_1-a_1)\cdots$~~

则 $b-a=(b_2-a_2)2^{x+k}$，则 $x+k>x$，与 $x$ 为次数最大矛盾.

故 $a$ 唯一.

$S=1+\cdots+\frac{1}{n}$，两边乘 $M$，则 $MS=\frac{M}{1}+\frac{M}{2}+\cdots+\frac{M}{a}+\cdots+\frac{M}{n}$

左边为偶数，右边除了 $\frac{M}{a}$ 外看为偶，只有 $\frac{M}{a}$ 为奇，故右式为奇，矛盾.

$\Rightarrow$ S 不是整数.

5. 找 200 以内素数：

$\sqrt{200}=10\sqrt{2}$，$\lfloor\sqrt{200}\rfloor=14$. $\le 14$ 的素数有：

2, 3, 5, 7, 11, 13. 在 1~200 中去掉 1 及它们的倍数，得 $\le 200$ 的素数有：

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43

47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103,

107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163

167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199