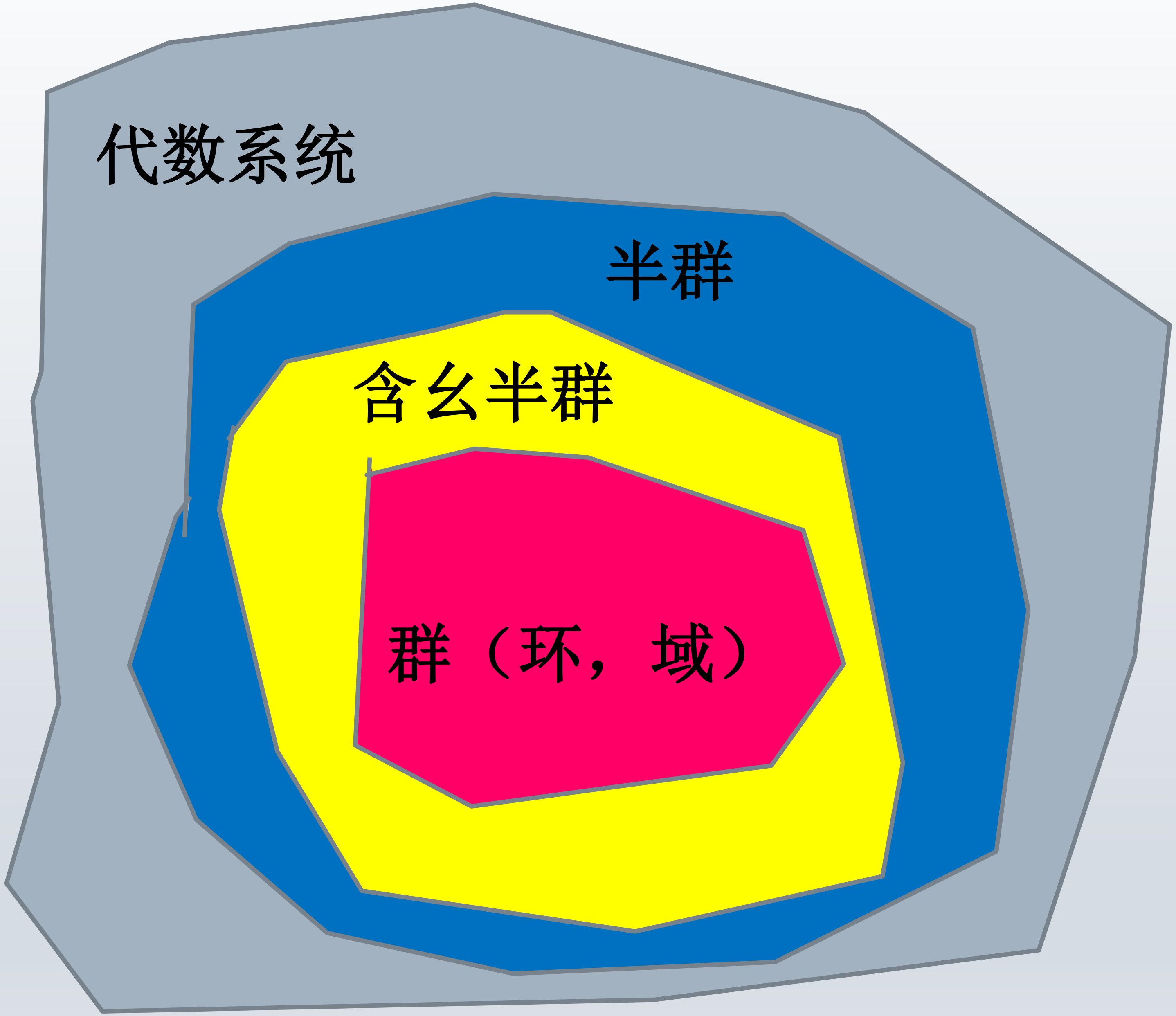
<A,*>

群,环,域

格与布尔代数



§ 5.2 群的概念及其性质

5.2.1 群的基本概念

定义：

设 $<G,*>$ 是一代数系统，如果满足以下几点：

(1) 运算是可结合的；

(2) 存在单位元 e；

(3) 对任意元素 a 都存在逆元 a^{-1}；

则称 $<G,*>$ 是一个群。**|G|**表示群的阶，可以是有限也可以是无限

5.2.1 群的基本概念

例：**<R,+>，<R-{0}, × >,构成群**

(1)运算是封闭的

（2）运算是可结合的；

(3) 存在单位元 e；

(4) 对任意元素 a 都存在逆元 a^{-1}；

5.2.1 群的基本概念

例：下列系统能否构成群？

举例：$< M_n(R),+ >$，**n是大于等于1的正整数**。 √ 是

举例：$< M_n(R),\bullet >$，**n是大于等于1的正整数**。 × 否

举例：**$<P(S),\oplus>$，S非空集合，$\oplus$是集合的对称差**。 √ 是

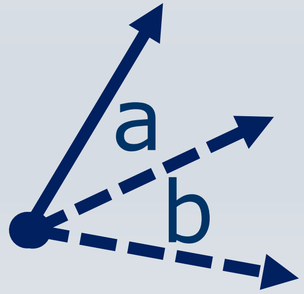
举例：**$<P(S),\cap>$，$<P(S),\cup>$** × 否

5.2.1 群的基本概念

例：假设R={0,60,120,180,240,300}表示平面几何上图形绕形心顺时针旋转的角度集合。

$*$是定义在R上的运算。定义如下：对任意的a, b∈R，$a*b$表示图形顺时针旋转a角度，再顺时针旋转b角度得到的总旋转度数。并规定旋转360度等于原来的状态，即该运算是模360的。

整个运算可以用运算表表示。



5.2.1 群的基本概念

*	0	60	120	180	240	300
0	0	60	120	180	240	300
60	60	120	180	240	300	0
120	120	180	240	300	0	60
180	180	240	300	0	60	120
240	240	300	0	60	120	180
300	300	0	60	120	180	240

5.2.1 群的基本概念

设 <R,*> 是一代数系统，满足以下几点：

(1)运算*"顺时针旋转的角度"是封闭的

(2) 运算*"顺时针旋转的角度"是可结合的

(3) 存在单位元 e=0；

(4) 对任意元素 a 都存在逆元 a^{-1}；

*	0	60	120	180	240	300
0	0	60	120	180	240	300
60	60	120	180	240	300	0
120	120	180	240	300	0	60
180	180	240	300	0	60	120
240	240	300	0	60	120	180
300	300	0	60	120	180	240

0*0=0；60*300=0；

120*240=0；180*180=0

$0^{-1}=0$; $60^{-1}=300$; $120^{-1}=240$; $180^{-1}=180$

<G,*> 是一个群。**|G|=6**，六阶群

5.2.1 群的基本概念

例：A是非空集合，$F=\{f|f:A\to A\}$，双射集

运算“$\circ$”是函数的复合运算，

则<F，$\circ$>是群

5.2.1 群的基本概念

例1：A={1,2,3}

解：双射的个数 **3**！，F={f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6}，

$$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$
$$f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$
$$f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

5.2.1 群的基本概念

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

$$f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_6$$

$$f_3 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_5$$

$$f_4 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = f_1$$

5.2.1 群的基本概念

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

(1) 运算是可结合的；

(2) 存在单位元 e；**$f1=I_A$**

(3) 对任意元素 a 都存在逆元 a^{-1}；

f1,f2,f3,f4自身为逆元，f5,f6互为逆元

5.2.1 群的基本概念

一个群如果运算满足交换律，则称该群为交换群，或Abel群（阿贝尔）。

$\forall a,b \in G$ 有 $a*b=b*a$

尼尔斯·亨利克·阿贝尔(**N.H.Abel**)**1802**年**8**月**5**日出生在挪威一个名叫芬德的小村庄。有七个兄弟姐妹，阿贝尔在家里排行第二。他父亲是村子里的穷牧师，母亲安妮是一个非常美丽的女人，她遗传给阿贝尔惊人的漂亮容貌。

勒让德、拉普拉斯、傅立叶、泊松、柯西。

5.2.1 群的基本概念

例 $\langle \mathbf{Z}_5, +_5\rangle$ 是可交换群。 $\langle \mathbf{Z}_m, +_m\rangle$ 也是可交换群

(1) $\forall [i],[j],[k] \in \mathbf{Z}_5$

$([i]+_5[j])+_5[k]=$

$[i]+_5([j]+_5[k])=$

$[(i+j+k) \bmod 5]$

(2) $e=[0]$

(3) $\forall [i] \in \mathbf{Z}_5$

$[i]^{-1}=[-i]=[5-i]$

(4) $\forall [i],[j] \in \mathbf{Z}_5$

$[i]+_5[j]= [j]+_5[i]= [(i+j) \bmod 5]$

$+_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]


陪集，拉格朗日定理
正规子群
子群与元素周期
环，域
置换群
循环群
群
半群、独异点
代数系统

群小结（1）

1、<G,*> 是一代数系统，如果满足以下几点：

（1） 运算是可结合的；

（2） 存在单位元 e；

（3） 对任意元素 a 都存在逆元 a-1；

则称 <G,*> 是一个群。|G|表示群的阶，可以是有限也可以是无限

2、交换群，或**Abel**群（阿贝尔）一类特殊的群