第四章 随机变量的数字特征

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量X的概率分布，那么X的全部概率特性也就知道了.

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的. 而且在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了.

例如

考察一射手的水平: 既要看他的平均环数是否高, 还要看他弹着点的范围是否小, 即数据的波动是否小.

考察某型号电视机的质量:
平均寿命18000小时±200小时.

由上面例子看到，与随机变量有关的某些数值，虽不能完整地描述随机变量但能清晰地描述随机变量在某些方面的重要特征, 这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

随机变量某一方面的概率特性都可用数字来描写

本章内容

- r.v.的平均取值 —— 数学期望(mathematical expectation)
- r.v.取值平均偏离均值的情况 —— 方差(variance)
- 描述两 r.v.间的某种关系的数 —— 协方差(covariance)与相关系数(Correlation)

§ 4.1 随机变量的数学期望

例 甲、乙两人各射击100次，他们的射击结果如下：

X：甲击中的环数，Y：乙击中的环数

X	8	9	10
次数	10	30	60

Y	8	9	10
次数	20	50	30

试问哪一个人的射击水 平较高？

甲、乙的平均环数可写 为

$$\frac{8\times10+9\times30+10\times60}{100}=8\times0.1+9\times0.3+10\times0.6=9.5$$

$$\frac{8\times20+9\times50+10\times30}{100}=8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3=9.1$$

因此，从平均环数上看 ，甲的射击水平要比乙 的好.

用分布列表示

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

$$EX = 8\times0.1+9\times0.3+10\times0.6 = 9.5$$

$$EY = 8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3 = 9.1$$

重要

1. 数学期望的定义

定义1 设 X 为离散 r.v. 其分布列为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,则称其和为 X的数学期望mean/expectation，记作 $E(X)$, 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

重要

定义2 设连续 r.v. X 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

绝对收敛, 则称此积分为 X 的数学期望

记作 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Definition

$$E(X) = EX = \int x\,dF(x) = \begin{cases} \sum_{x} xf(x) & \text{if } X \text{ is discrete} \\ \int xf(x)dx & \text{if } X \text{ is continuous} \end{cases}$$

前例

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

$$EX = 8\times 0.1 + 9\times 0.3 + 10\times 0.6 = 9.5$$

$$EY = 8\times 0.2 + 9\times 0.5 + 10\times 0.3 = 9.1$$

方法1：根据定义

例 $X \sim B(n, p)$，求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\overset{i=k-1}{=} np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} p^{i}(1-p)^{(n-1)-i} = np$$

特例 若$X \sim B(1, p)$，则 $E(X)=p$

方法2：根据性质

例 求二项分布的数学期望

若 X表示n重贝努里试验中的“成功” 次数 $X\sim B(n, p)$，

设 $X_i=\begin{cases}1 & 如第i次试验成功\\ 0 & 如第i次试验失败\end{cases}$ $i=1,2，\ldots，n$

则 $X= X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

可见服从参数为n和p的二项分布的随机变量X的数学期望是np.

例 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0,$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例 $X \sim E(\lambda)$，求 $E(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{0}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty}\lambda x e^{-\lambda x}d\lambda x$$

令 $u=\lambda x$，则:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty}ue^{-u}du=\frac{1}{\lambda}[(-e^{-u}-ue^{-u})|(\infty,0)]=\frac{1}{\lambda}$$

例 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

加号拆分后第一项为奇函数f(x)=-f(-x)，对称区域上积分为0；第二项为标准正态分布，积分为1

$$= \mu$$

常见分布的数学期望

重要

分布	概率分布	期望
0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

重要

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

注意 不是所有的 r.v.都有数学期望

例如：柯西(Cauchy)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

但$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在!

应用　　验血方案的选择

为普查某种疾病, n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

(1) 分别化验每个人的血, 共需化验 n 次;

(2) 分组化验, k 个人的血混在一起化验, 若结果为阴性, 则只需化验一次; 若为阳性, 则对 k 个人的血逐个化验, 找出有病者, 此时 k 个人的血需化验 $k+1$ 次.

设每人血液化验呈阳性的概率为 p, 且每人化验结果是相互独立的。试说明选择哪一方案较经济。

解 只须计算方案(2)所需化验次数的期望.

设**每人（平均）需化验的次数为**X，则

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X)=\frac{1}{k}(1-p)^k+\frac{k+1}{k}[1-(1-p)^k]=1-q^k+\frac{1}{k}$$

当p很小时，$E(X)<1$.

例如: $n=1000$, $p=0.1$, $k=4$,

$$1000E(X)=1000\left[1-0.9^4+\frac{1}{4}\right]\approx 594 << 1000.$$

$$\because E(X)=1-(1-p)^k+\frac{1}{k}$$

$\therefore$当$(1-p)^k>1/k$时，$E(x)<1$，此时选择方案(2)较经济.

2.随机变量函数的数学期望

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

如何计算随机变量函数的数学期望?

一种方法是：因为$g(X)$也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由X的分布求出来. 一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把$E[g(X)]$计算出来.

使用这种方法必须先求出随机变量函数$g(X)$的分布，一般是比较复杂的 .

是否可以不求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的基本公式指出，答案是肯定的.

公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了．这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

(1) $Y = g(X)$ 的数学期望

重要

- 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

Think of playing a game: where you draw X at random and then I pay you $Y = g(X)$. Your average income is $g(x)$ times the chance that $X = x$, summed (or integrated) over all values of x.

重要

- 设连续 r.v. X 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

(2) $Z=g(X,Y)$的数学期望

重要

❑ 设离散 r.v. (X,Y) 的概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$E(Z)=\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

重要

- 设连续 r.v. (X, Y)的联合 d.f. 为

$$f(x, y)$$

若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

绝对收敛，则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

Relation of Expectation and Probability

A special case of Expectation: Let A be an event and let

$$g(x) = I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Then $$E(I_A(X)) = \int I_A(x) f_X(x)dx = \int_A f_X(x)dx = P(X \in A)$$

In other words, probability is a special case of expectation.

例 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求 $E(3X^2+5)$

$$E(3X^2+5)$$

$$=[3\cdot(-2)^2+5]\cdot 0.4+[3\cdot 0^2+5]\cdot 0.3+[3\cdot 2^2+5]\cdot 0.3$$

$$=13.4$$

例 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求$Y=e^{-2X}$的数学期望.

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{3}$$

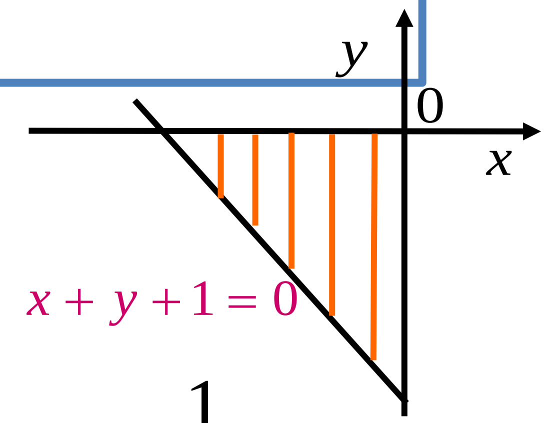
例 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2
1	0.25	0.32
2	0.08	0.35

求 $E(X^2+Y)$

$$E(X^2+Y) = (1^2+1)\cdot 0.25 + (1^2+2)\cdot 0.32$$
$$+(2^2+1)\cdot 0.08 + (2^2+2)\cdot 0.35$$
$$= 3.96$$

例 设(*X*, *Y*)在区域 *A*上服从均匀分布，其中*A*为*x*轴，*y*轴和直线 *x*+*y*+1=0所围成的区域.求*EX*，*E*(−3*X*+2*Y*)，*EXY*.



解

$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\ 0,\text{其它};\end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

应用 市场上对某种产品每年需求量为X 台，$X \sim U[200,400]$，每出售一台可赚3万元，售不出去，则每台需保管费1万元，问应该组织多少货源，才能使平均利润最大？

解

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{200}, & 200 \le x \le 400, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

设组织n 台货源，利润为 Y

显然，$200 \le n \le 400$

$$Y = g(X) \overset{?}{=} \begin{cases} 3n, & n \le X, \\ 3X-(n-X), & n > X \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3n, & n \le x, \\ 4x-n, & n > x \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{200}[\int_{200}^{n} (4x-n)dx + \int_{n}^{400} 3n dx]$$

$$= \frac{1}{200}(-2n^2 + 1400n - 8 \times 10^4)$$

$$\frac{dE(Y)}{dn}=\frac{1}{200}(-4n+1400)$$

令

$$=0$$

$$n=350$$

故 $n=350$ 时，$E(Y)$最大

3. 数学期望的性质Properties

重要

(1) 设C是常数，则$E(C)=C$;

(2) 若C是常数，则$E(CX)=CE(X)$;

(3) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

$E(X-Y)$?

(4) 设X、Y独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

注意:由$E(XY)=E(X)E(Y)$
不一定能推出X,Y独立

(5) 若$E(X^2)$，$E(Y^2)$存在，则

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2) \cdot E(Y^2)$$

性质的证明

(1) $E(C)=C$

常数C作为随机变量X而言，是一个离散型的，它只可能取到C值，故$P(X=C)=1$，于是$E(C)=C*1=C$。

(2) $E(CX)=CE(X)$

仅以连续型随机变量为例，设X的密度函数为$f(x)$，则

$$E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=CE(X)$$

(3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$，关于X和Y的边缘密度函数分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$则

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

对离散型随机变量类似可证。

(4) X与Y相互独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$

同样仅以连续型为例，由于X与Y相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y)$$

(5) 若$E(X^2)$，$E(Y^2)$存在，则$[E(XY)]^2 \le E(X^2) \bullet E(Y^2)$

考虑实变量t的二次函数

$$g(t) = E(tX-Y)^2 = t^2E(X^2) - 2tE(XY) + E(Y^2)$$

对一切t，容易看出$g(t) \ge 0$，故二次方程$g(t)=0$的判别式$\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \le 0$ 即 $[E(XY)]^2 \le E(X^2) \bullet E(Y^2)$ 该不等式称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式

(3) 推广： $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

(4) 推广： $E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

（诸 X_i 独立时）

已知随机变量*X*服从参数为2的泊松分布，则随机变量*Z*=3*X*-2的数学期望*EX*=________。

本题要求熟悉泊松分布的有关特征，并会利用数学期望的性质求随机变量线性函数的期望

由于 X 服从参数为2的泊松分布，

则 $EX = 2$,

所以 $EZ = E(3X-2) = 3EX - 2 = 4$

例 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为, X,Y独立

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

由数学期望性质

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY)\overset{\boxed{X,Y\text{独立}}}{=}E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

例 一民航送客载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数。
求 EX（设每个旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）。

解：设 $X_i = \begin{cases} 0, \text{第}i\text{站没人下车} \\ 1, \text{第}i\text{站有人下车} \end{cases}$， $i = 1,2,\cdots,10$，

易见 $X = X_1 + \cdots + X_{10}$， $EX = \sum^{10} EX_i$，

$P\{X_i = 0\} = (9/10)^{20}$， $P\{X_i = 1\} = 1 - (9/10)^{20}$， $i = 1,\cdots,10$，

$EX_i = 1 - (9/10)^{20}$， $i = 1,\cdots,10$，

$EX = 10[1 - (9/10)^{20}] = 8.784(\text{次})$。

二项分布？

Summary

1 数学期望定义

2 常见分布的数学期望

3 函数的数学期望

4 数学期望性质

5 数学期望的计算