§3.4 随机变量的独立性

重要

两随机变量独立的定义：

设 X,Y是两个$r.v$, 若对任意的x,y, 有

$$P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)P(Y\le y)$$

则称X,Y相互独立 .

两事件A, B独立的定义是：

若 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A, B独立 .

重要

用分布函数表示,即

设 X,Y 是两个 $r.v$, 若对任意的 x, y, 有

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X, Y 相互独立 .

它表明, 两个 $r.v$ 相互独立时, 联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 .

$\boxed{\text{离散型}}$

X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切 i, j 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

即 $\boxed{p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}}$

重要

连续型

X与Y独立 ⟷ 对任何 x, y 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

二维随机变量（X, Y）相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

重要

二维连续 r.v. (X,Y) 相互独立

$$f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y) > 0)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x) > 0)$$

证明：$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{f_X(x)\cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立

$\Longleftrightarrow \quad \rho = 0$

证 $\xrightarrow{f(x,y)=f_X(x)*f_Y(y)}$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取特殊值 $x=\mu_1, y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho = 0$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

例 已知 (X, Y) 的联合 d.f.为

(1) $$f_1(x,y) \square \begin{cases} 4xy, & 0 \square x \square 1, 0 \square y \square 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) $$f_2(x,y) \square \begin{cases} 8xy, & 0 \square x \square y, 0 \square y \square 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

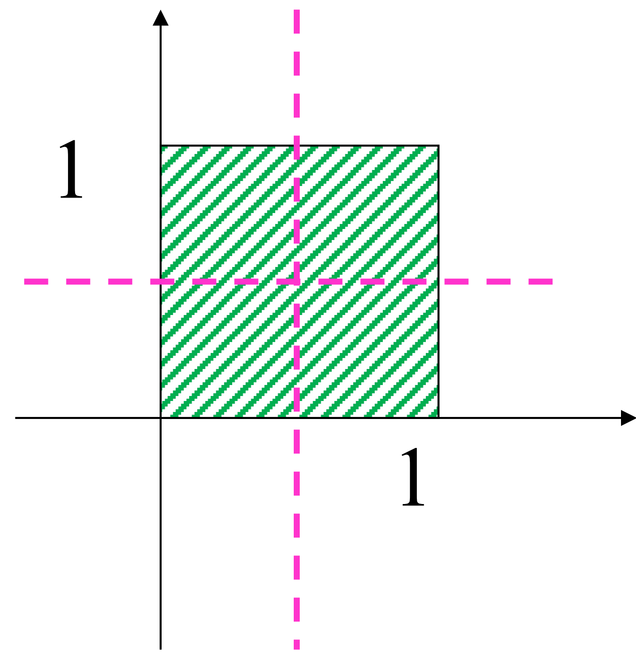
讨论 X, Y 是否独立？

(1) $f_1(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

解 由图知边缘 d.f. 为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

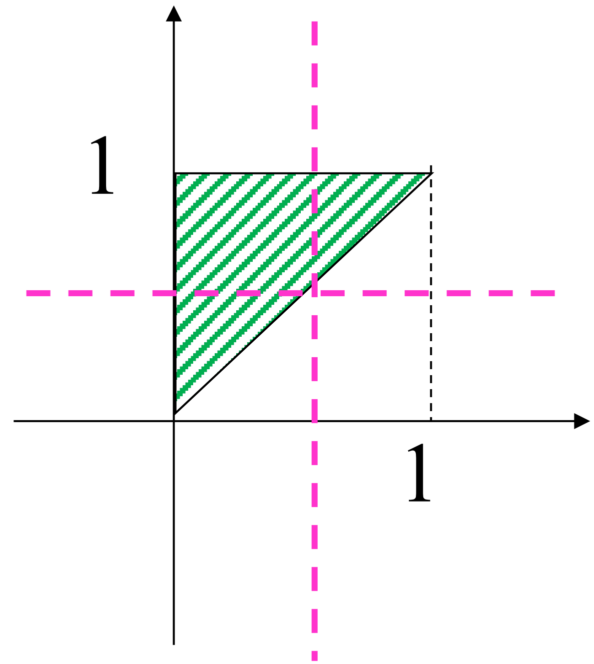


显然， $f_1(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

故 X, Y 相互独立

$$(2)\ f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由图知边缘 d.f. 为



$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然 $,f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

故 X,Y 不独立

例 设随机变量 X 在 1,2,3三个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在1~X 中等可能地取一整数值，试问 X, Y 的独立性。

不独立

□X, Y□的联合与边缘分布律

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	1

例 箱子里装有4只白球和2只黑球，在其中随机地取两次，每次取一只．问 X，Y 的独立性.

$$X = \begin{cases} 0, \text{若第一次取出的是黑球}, \\ 1, \text{若第一次取出的是白球}. \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, \text{若第二次取出的是黑球}, \\ 1, \text{若第二次取出的是白球}. \end{cases}$$

（1）有放回抽样

独立

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

（2）不放回抽样

不独立

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1