§1.2 随机事件的概率

历史上概率的三次定义

- ① 古典定义 —— 概率的最初定义
- ② 统计定义 —— 基于频率的定义
- ③ 公理化定义 —— 于1933年由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出

1. 频率与概率

设在 n 次试验中，事件 A 发生了m 次，

则称 $f_n = \dfrac{m}{n}$ 为事件 A 发生的 **频率**

频率的性质

- $0 \le f_n(A) \le 1$ —————— **非负性**
- $f_n(\Omega) = 1$ —————— **规范性**
- 事件 A, B 互斥，则

  $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ —————— **可加性**

  可推广到有限个两两互斥事件的和事件
- $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(A) = P(A)$ —————— **稳定性**

  $P(A)$ → 某一定数

频率稳定性的实例

投一枚硬币观察正面向上的次数

蒲丰投币

$$n = 4040, \quad n_H = 2048, \quad f_n(H) = 0.5069$$

皮尔逊投币

$$n = 12000, \quad n_H = 6019, \quad f_n(H) = 0.5016$$

$$n = 24000, \quad n_H = 12012, \quad f_n(H) = 0.5005$$

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的 n 次试验中, 事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动, 且随 n 越大摆动幅度越小, 则称 p 为事件 A 的概率, 记作 $P(A)$.

对本定义的评价

优点：	直观易懂	缺点：	粗糙模糊	不便使用

2. 古典概型(classical probability)

设 随机试验E 具有下列特点：

- 基本事件的个数有限
- 每个基本事件等可能性发生

则称 E 为 古典(等可能) 概型

古典概型中概率的计算：

记 $n=\Omega$中所包含的基本事件的个数

$m=$组成 A的基本事件的个数

则 $P(A)=\dfrac{m}{n}$

概率的古典定义

例 一颗骰子掷两次，求出现点数之和是8的概率

掷一颗骰子，有6个等可能的结果，掷两次有6·6=36个等可能结果，设A 为点数之和是8，有（2，6），（3，5），（4，4），（5，3），（6，2）共5种情形。

答案：$P(A)=5/36$

例　把C、C、E、E、I、N、S七个字母分别写在七张同样的卡片上，并且将卡片放入同一盒中，现从盒中任意一张一张地将卡片取出，并将其按取到的顺序排成一列，有多大可能排列结果恰好拼成一个英文单词：

S C I E N C E

解：七个字母的排列总数为7！

拼成英文单词*SCIENCE* 的情况数为

$$2 \times 2 = 4$$

故该结果出现的概率为：$$\boxed{p = \frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} \approx 0.00079}$$

例 设有N件产品,其中有M件次品,现从这N件中任取n件,求其中恰有k件次品的概率（$k \le M$）.

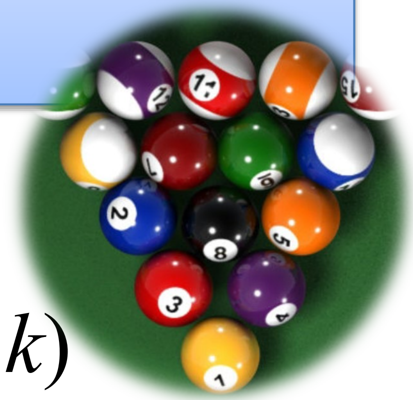
解：令A={恰有k件次品}

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

超几何公式

$$P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{P_k^n}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

例 (分房模型) 设有 k 个不同的球, 每个球等可能地落入 N 个盒子中($k \le N$), 设每个盒子容球数无限, 求下列事件的概率:



(1)某指定的 k 个盒子中各有一球;

(2)某指定的一个盒子恰有 m 个球($m \le k$)

(3)恰有 k 个盒子中各有一球.

提示：用球选盒子

解

$$n = N^k \qquad P(A_1) = \frac{k!}{N^k}$$

$$P(A_2) = \frac{C_k^m \boxed{(N-1)^{k-m}}}{N^k} \qquad P(A_3) = \frac{\boxed{C_N^k} k!}{N^k}$$

注意不是N，要考虑所有盒子情况

没有指定盒子，所以先选盒子

例 “分房模型”的应用

某班级有 n ($n \le 365$)个人，求n 个人的生日均不相同（设为事件A) 的概率.

解 本问题中的人可被视为“球”，

365天为365只“盒子”

n 个人的生日均不相同，相当于：每个盒子至多有一个球或恰有n个盒子中各有一球.

$$P(A) = \frac{C_{365}^{n} \cdot n!}{365^{n}}$$

3.几何概型 Geometric Probability (古典概型的推广)

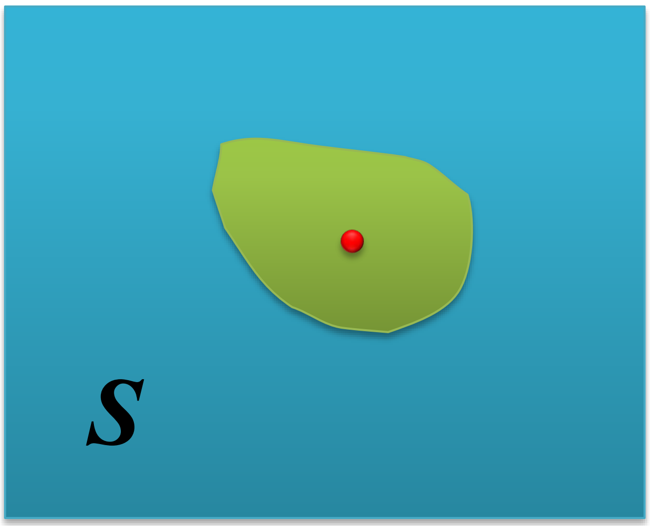
早在概率论发展初期，人们就认识到，只考虑有限个等可能样本点的古典方法是不够的.

把等可能推广到无限个样本点场合，人们引入了几何概型. 由此形成了确定概率的另一方法——几何概率.

几何方法的思路

1、设样本空间S是平面上某个区域，它的面积记为$\mu(S)$;

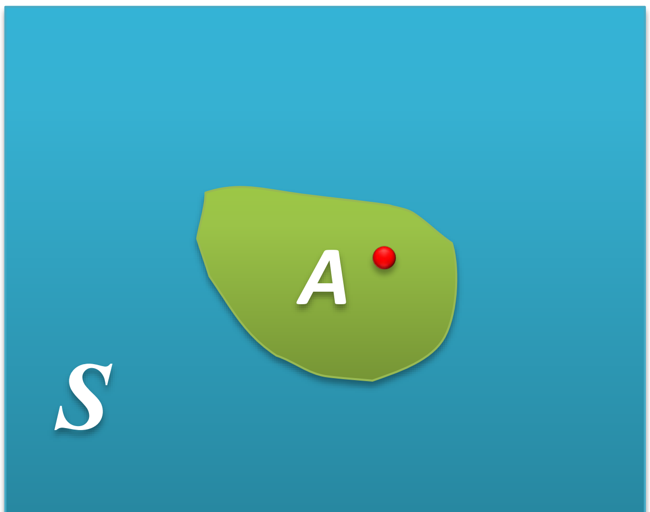
2、向区域S上随机投掷一点



“随机投掷一点”的含义是:

该点落入S内任何部分区域内的可能性只与这部分区域的面积成比例，而与这部分区域的位置和形状无关.

3、设事件A是S的某个区域，它的面积为$\mu(A)$，则向区域S上随机投掷一点，该点落在区域A的概率为



$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

4、假如样本空间S可用一线段，或空间中某个区域表示，并且向S上随机投掷一点的含义如前述，则事件A的概率仍可用

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

只不过把$\mu(\cdot)$理解为长度或体积即可.

几何概率

设样本空间为有限区域 Ω, 若样本点落入 Ω 内任何区域 G 中的概率与区域G 的测度成正比, 则样本点落入G内的概率为

$$P(A)=\frac{G\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

例 某人的表停了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率

10分钟

9点

10点

$$P(A)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$$

例 两船欲停靠同一个码头，设两船到达码头的时间各不相干，而且到达码头的时间在一昼夜内是等可能的．如果两船到达码头后需在码头停留的时间分别是1 小时与2 小 时，试求在一昼夜内，任一船到达时，需要等待空出码头的概率．

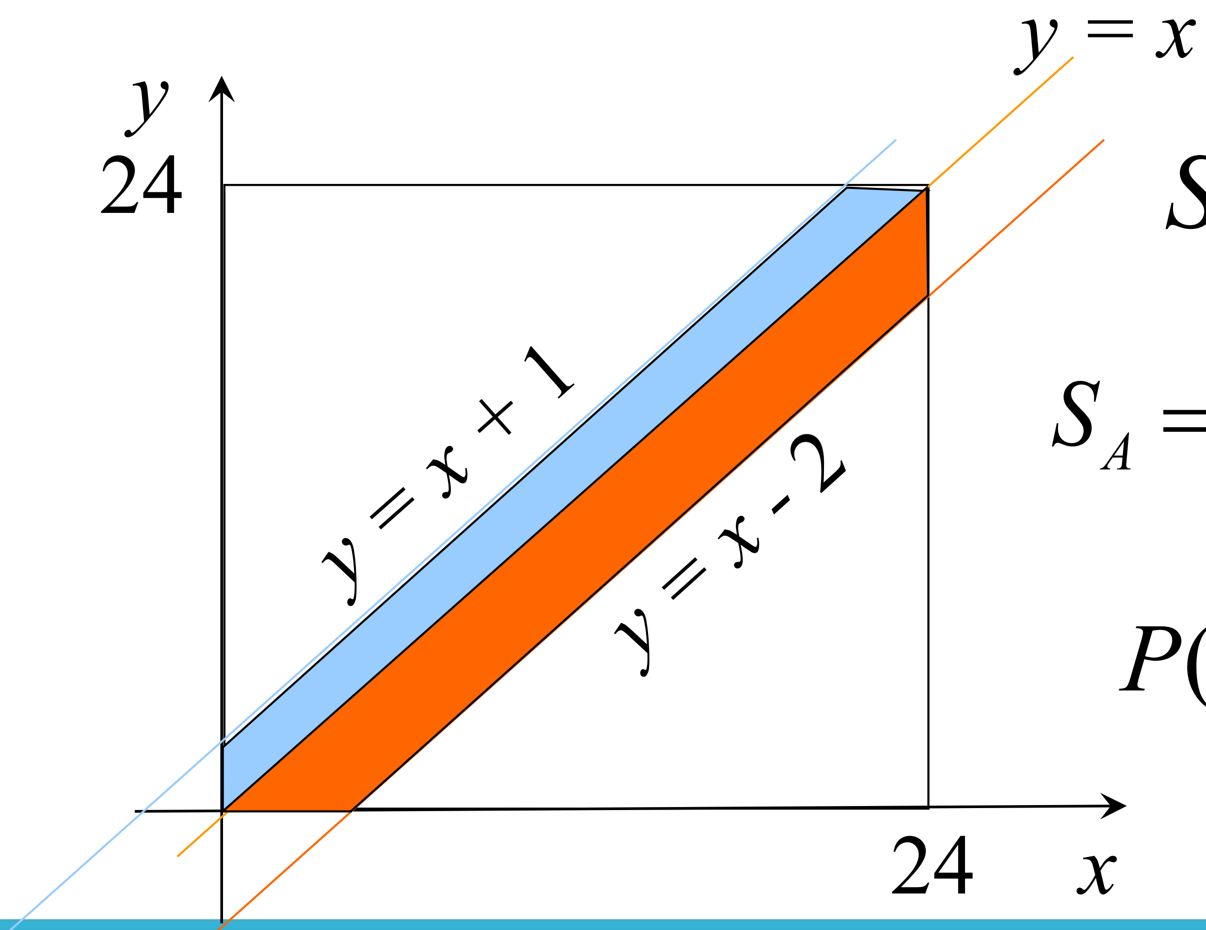
解 设船1 到达码头的时刻为 x ，$0 < x < 24$

船2 到达码头的时刻为 y ，$0 < y < 24$

设事件 A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$$

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega,$$
$$0 \le y - x \le 1, 0 \le x - y \le 2\}$$



$$S_\Omega = 24^2$$

$$S_A = 24^2 - \frac{1}{2}\left(23^2 + 22^2\right)$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 0.1207$$

4. 概率的公理化定义

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫1933年建立.

Andrey N. Kolmogorov
1903-1987

即通过规定概率应具备的基本性质来定义概率.

The axioms of probability

设 Ω是随机试验E 的样本空间，若对于E的每一事件A，都有一个实数$P(A)$与之对应，则称$P(A)$为事件A的概率Probability distribution，只要满足下面的三条公理(axiom)：

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中$A_1, A_2, \ldots$为两两互斥事件.

“整个概率论都是从这三个柱子推导而来”

由概率的三条公理，我们可以推导出概率的若干性质及公式. 下节课我们会详细介绍概率的一些简单性质.

思考题

6.袋子里有1～10号球，任取3个，求：

(1)最小号码为5的概率；

(2)最大号码为5的概率；

(3)中间号码为5的概率。

7.五卷文集任意摆放在书架上，求下列概率：

(1)第一卷出现在两边；

(2)第一卷及第五卷出现在两边；

(3)第一卷或第五卷出现在两边；

(4)第一卷或第五卷不出现在两边。

与第二问互为逆事件

8. 有一根长为l的木棒，任意折成三段，求恰好能构成一个三角形的概率.（两边之和大于第三边）

23.口袋中a只黑球，b只白球．随机地一只一只摸，摸后不放回．求第k次摸得黑球的概率．

思考题

6.袋子里有1～10号球，任取3个，求：

(1)最小号码为5的概率；

$$\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

(2)最大号码为5的概率；

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$$

(3)中间号码为5的概率。

$$\frac{C_4^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

7.五卷文集任意摆放在书架上，求下列概率：

(1)第一卷出现在两边； $\frac{2}{5}$ 或 $\frac{2*4!}{5!}$

(2)第一卷及第五卷出现在两边； $\frac{2}{5\cdot 4}=\frac{1}{10}$

(3)第一卷或第五卷出现在两边；

$$\frac{2\cdot 4+2\cdot 4-2}{5\cdot 4}=\frac{7}{10}$$ 或$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(4)第一卷或第五卷不出现在两边。

与第二问互为逆事件 $\frac{9}{10}$

只考虑第一卷或第五卷，也可以所有到考虑（全排）

8. 有一根长为l的木棒，任意折成三段，求恰好能构成一个三角形的概率.

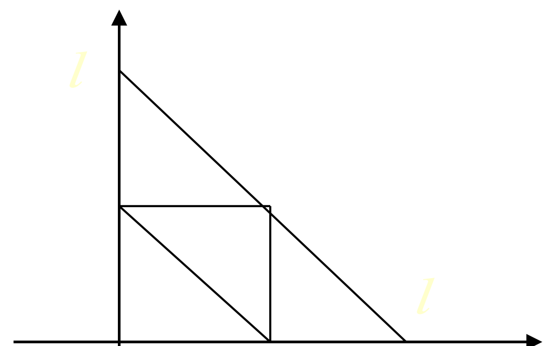
设折得的三段长度为 x, y 和 $l-x-y$,

$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le l, 0 \le y \le l, 0 \le x+y \le l,\}$,

而随机事件 A – 三段构成三角形

相应的区域 G 应满足"两边之和大于第三边"的原则,:

$$\begin{cases} l-x-y < x+y \\ x < (l-x-y)+y \\ y < (l-x-y)+x \end{cases}$$



即 $G = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{l}{2}, 0 < y < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x+y < l\}$.

相应的几何概率 : $P(A) = 1/4$

23.口袋中a只黑球，b只白球．随机地一只一只摸，摸后不放回．求第k次摸得黑球的概率．

解法1：把球编号，按摸的次序把球排成一列，样本点总数就是$a+b$个球的全排列数 $(a+b)!$.

所考察的事件相当于在第k 位放黑球，共有a种放法，每种放法又对应其它$a+b-1$个球的$(a+b-1)!$ 种放法，故该事件包含的样本点数为$a(a+b-1)!$

$$\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法2：只考虑前k个位置：

$$\frac{aP_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}$$