概率统计一
习题课

设A，B，C是三个相互独立的事件，且0<P(C)<1，则下列给定的事件中不相互独立的是().

(A) $A\cup B$与C (B) $\overline{AC}$与$\overline{C}$ (C) $\overline{A-B}$与$\overline{C}$ (D) $\overline{AB}$与$\overline{C}$

(A) $P((A+B)C) = P(AC+BC)$ 分配率

$=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$ 广义加法公式

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$ 独立性

$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)$

$=P(A+B)P(C)$ 广义加法公式

$$(B)\ \ P(\overline{AC}\,\overline{C}) = P((\overline{A}+\overline{C})\overline{C}) = P(\overline{A}\,\overline{C}+\overline{C})$$ 反演+分配

$$=P(\overline{A}\,\overline{C})+p(\overline{C})-P(\overline{A}\,\overline{C})=P(\overline{C})$$ 广义加法

$$\neq P(\overline{AC})P(\overline{C})$$

$$(C)\ P(\overline{A-B}\,\overline{C}) = P((1-(A-B))\overline{C})$$ 逆事件

$$=P(\overline{C}-(A-B)\overline{C})=P(\overline{C})-P((A-B)\overline{C})$$

广义减法

$$=P(\overline{C})-P(A\overline{C}-B\overline{C})=P(\overline{C})-[P(A\overline{C})-P(AB\overline{C})]$$ 分配+广义减法

$$=P(\overline{C})[1-(P(A)-P(AB))]=P(\overline{C})(1-P(A-B))$$

$$=P(\overline{C})P(\overline{A-B})$$ 独立性+乘法公式

$$\text{(D)}\ \ P(\overline{AB}\,\overline{C}) = P((\overline{A}+\overline{B})\overline{C}) = P(\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C})$$ 反演+交换

$$=P(\overline{A}\,\overline{C})+P(\overline{B}\,\overline{C})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$ 广义加法

$$= P(\overline{C})(P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}))$$ 独立性+乘法公式

$$=P(\overline{C})P(\overline{A}+\overline{B})$$ 广义加法公式

$$=P(\overline{C})P(\overline{AB})$$

4. 从一副扑克牌的13张黑桃中，有放回抽三次，求取出的三张牌中:

(1)没有同号的概率；

$$P(A)=\frac{P_{13}^{3}}{13^{3}}$$

(2)有同号的概率.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{13\cdot 12\cdot 11}{13^{3}}$$

5. 某城市有A,B,C三种报纸.在居民中,订A报的占45%,订B报的占35%,订C报的占30%,同时订A与B报的占10%,同时订A与C报的占8%,同时订B与C报的占5%,同时订A,B与C报的占3%,求下列概率： 题目中没有逆，所以逆都要转化

(1)只订A报的； $P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=0.3$

(2)只订A与B报的； $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.07$

(3)只订一种报的； $P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.73$

(4)恰好订两种报的； $P(AB\overline{C})+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)=0.14$

(5)至少订一种报的； $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$

(6)不定任何报的。 $-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.9$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=0.1$$

$P(A\overline{BC})=P(A\overline{B}(S-C))=P(A\overline{B})-P(A\overline{B}C)=P(A(S-B))-P(AC(S-B))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

6. 袋子里有1～10号球，任取3个，求：

(1)最小号码为5的概率；

$$\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

(2)最大号码为5的概率；

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$$

(3)中间号码为5的概率。

$$\frac{C_4^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

9.某种植物有三种基因型：AA， Aa， aa.
每一基因的数量分别为200，600，50.
随机抽取一个体，问
(1)其基因型为AA的概率是多少？

$$P(A)=\frac{200}{850}=\frac{4}{17}$$

(2)其基因型为AA或aa的概率是多少？

$$P(A+B)=\frac{200}{850}+\frac{50}{850}=\frac{5}{17}$$

11.100件产品中有10件次品，用不放回的方式取产品，每次1件，连取三次，求第三次才取得次品的概率。

解 令 A_i 为第 i 次取到正品

$$P(A_1 A_2 \overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(\overline{A_3} | A_1 A_2)$$

$$= \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} \approx 0.0826$$

13.灌装注射液需要四道工序，各道工序的废品率分别为0.5%，0.2%，0.1%，0.8%，假设各道工序是否合格是独立的，求经四道工序全部合格的概率。

利用独立性

记 A_i={第 i 道工序合格}　i=1，2，3，4

$$P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=[1-P(\overline{A_1})][1-P(\overline{A_2})][1-P(\overline{A_3})][1-P(\overline{A_4})]$$

$$=0.984$$

14.为了提高抗菌素的产量和质量，需要对菌种进行培养，如果某菌种的优良变异率p为0.03，试问从一大批菌株中，采取多少只来培养，才能以95%的把握从中至少可以选到一只优良菌株?

设需采取n只来培养，$\boldsymbol{A}_i$表示出现 i只优良菌株

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\left[1-P(A_i)\right]^n=1-0.97^n\geq 0.95$$

$$n\geq 99$$

15. 甲袋中有7只红球、3只白球、15只黑球，乙袋中有6只红球、10只白球、9只黑球。从两袋中各取一个球，求两个球颜色相同的概率。

独立性

A_i $-$甲中第i种颜色球，B_i $-$乙中第i种颜色球.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P(C)} &= \mathrm{P}(A_1B_1)+\mathrm{P}(A_2B_2)+\mathrm{P}(A_3B_3) \\
&= \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B_1)+\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B_2)+\mathrm{P}(A_3)\cdot\mathrm{P}(B_3)
\end{aligned}
$$

16. 设一个仓库里有10箱同样规格的产品，已知其中的5箱,3箱,2箱依次是甲、乙、丙厂生产的，且已知甲、乙、丙厂生产的该产品的次品率依次为$\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$.从这十箱中任取一箱，再从中任取一件产品，求取得正品的概率；假如取到的是正品，问所取的那箱是甲厂生产的概率是多少？

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)}$$

17. 盒中有12个乒乓球，其中9个是新的，第一次比赛时从盒中任取3个，用后放回盒中（变成旧球了），第二次比赛时再从盒中任取3个，求第二次取出的都是新球的概率. 若已知第二次取出的都是新球，求第一次取出的都是新球的概率.

设B表示第二次比赛取到3只新球

A_i 表示第1次比赛取到i只新球

$$P(A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3},\ P(B\mid A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.146$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}$$

18.甲、乙两射手击中目标的概率分别为0.8与0.9，如果同时独立地射击一次，求下列概率：

独立性

(1) 两人都命中；

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

(2) 恰有一人命中；

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B)$$

(3) 至少一人命中；

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

(4) 两人都不中。

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

19.某集成电路能用2000小时的概率为0.92， 能用3000小时的概率为0.85, 求已用了2000小时的集成电路能用到3000小时的概率。

解 令 A—集成电路能用到2000小时

B—集成电路能用到3000小时

所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\underset{\uparrow}{=}\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.85}{0.92}=0.9239$$

$$B\subset A$$

20.日光灯使用寿命在3000小时以上的概率为0.8,求3只日光灯在使用3000小时后,

3重伯努利试验

(1)都没有坏的概率;

$$P_3(3)=(0.8)^3$$

(2)坏了一个的概率;

$$P_3(2)=C_3^2(0.8)^2(0.2)$$

(3)最多只有一只损坏的概率.

$$P_3(3)+P_3(2)=(0.8)^3+C_3^2(0.8)^2(0.2)$$

21.某单位有12台电脑，各台电脑是否被使用是独立的，每台电脑被使用的概率为0.7，问在同一时刻有9台或更多电脑被使用的概率是多少?

在同一时刻观察12台电脑，它们工作与否是相互独立的，故可视为12重伯努里试验

$$P_{12}(9)+P_{12}(10)+P_{12}(11)+P_{12}(12)$$

$$=\sum_{k=9}^{12} C_{12}^{k} 0.7^{k} 0.3^{12-k} \approx 0.492$$

22.一个人的血型为O，A，B，AB型的概率分别为0.46, 0.40，0.11和0.03。现任选五人，求下列事件的概率：

(1) 恰有两人为O型；

$$P_5(2)=C_5^2(0.46)^2(0.54)^3$$

(2) 三人为O型，两人为A型；

$$C_5^3(0.46)^3(0.4)^2$$

(3) 没有一人为AB型.

$$(0.97)^5$$

24. 某人忘记了自己牡丹卡密码的最后一位数字,因而他随机按号,求他按号不超过三次而选正确的概率.若已知最后一个数是偶数,那么此概率是多少?

解　设 A_i 表示"按i次才对"　$i=1,2,3$

乘法公式

则 $P(A_i)=\dfrac{1}{10}$

抽签理论

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

当最后一个偶数时,同理可得概率为 $\dfrac{3}{5}$.

25.设有甲乙两袋，甲袋中装有N个白球，M个黑球；乙袋中装有n个白球，m个黑球。今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到白球的概率是多少?

$A-$甲中取白.　　　　$B-$乙中取白.

全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A}).$$

$$=\frac{N}{M+N}\cdot\frac{n+1}{n+m+1}+\frac{M}{M+N}\cdot\frac{n}{n+m+1}$$

$$=\frac{Mn+Nn+N}{(M+N)\cdot(n+m+1)}$$

27.甲乙两人轮流射击，先命中目标者为胜。已知他们的命中率分别为p_1和p_2，甲先射，求每个人获胜的概率。

A—甲胜，A_i—甲第i次击中，B_i—乙第i次击中.

$$\therefore P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1\overline{B}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{B}_1\overline{B}_2A_3)+\cdots\cdots$$

$$=p_1+(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot p_1+(1-p_1)^2\cdot(1-p_2)^2\cdot p_1+\cdots\cdots$$

$$=\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n)=\frac{a_1}{1-q}[q\in(-1,0)\cup(0,1)]$$

等比数列，首项a1=p1, 公比q=(1-p1)(1-p2)

B—乙胜

$$\therefore P(B)=1-P(A)=\frac{p_2(1-p_1)}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

28. 甲，乙两个篮球运动员，三分远投的命中率分别为0.7和0.6. 现每人远投3次，求两人进球数相等的概率.

独立性

解：　A_i – 甲命中i球 .　　　B_i – 乙命中i球 .

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(A_0B_0) + \mathrm{P}(A_1B_1) + \mathrm{P}(A_2B_2) + \mathrm{P}(A_3B_3)$$

$$= \mathrm{P}(A_0)\cdot \mathrm{P}(B_0) + \mathrm{P}(A_1)\cdot \mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot \mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(A_3)\cdot \mathrm{P}(B_3)$$

$$= 0.321 .$$

$$P_3(k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}$$

3重伯努利试验