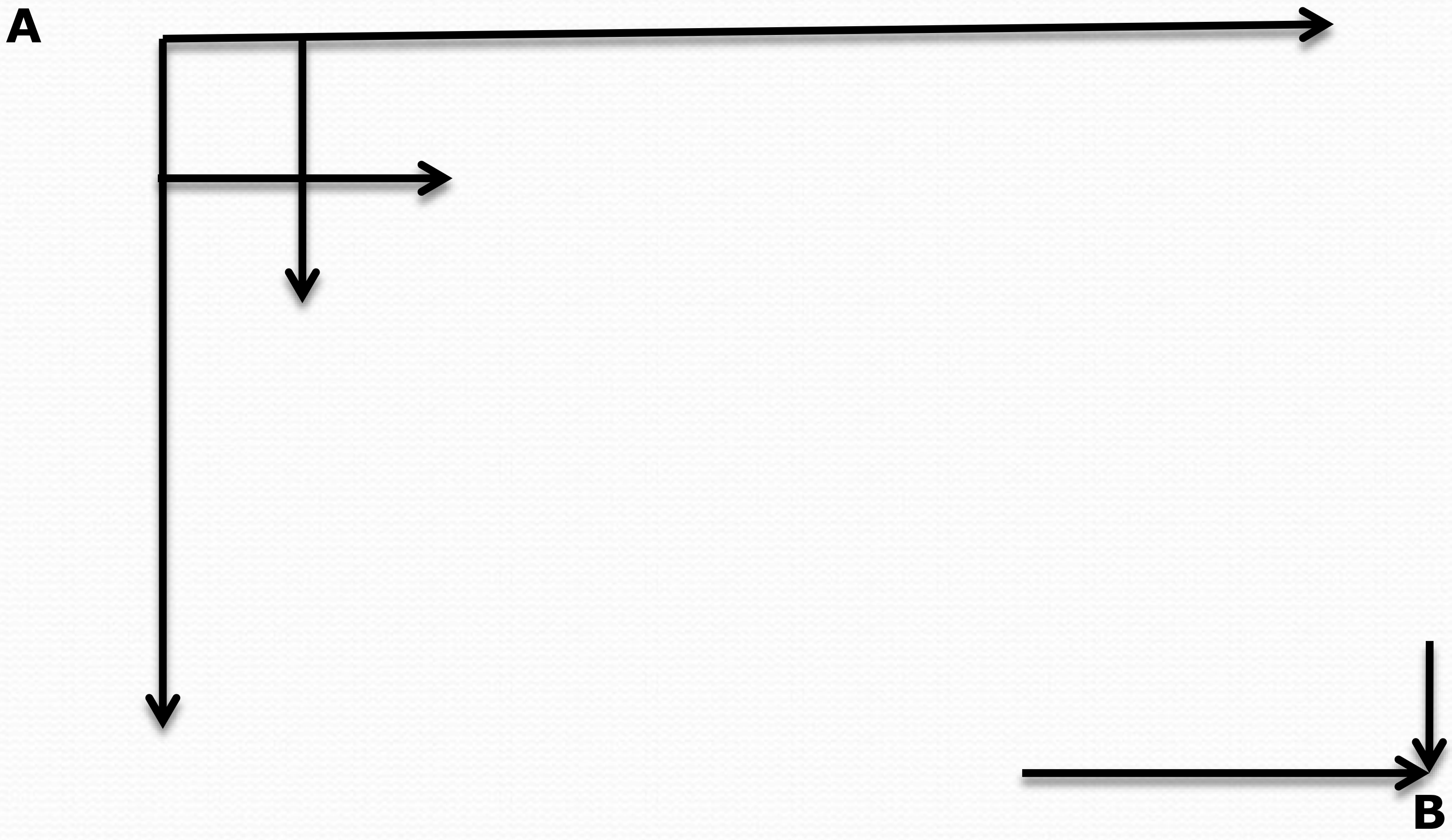
组合数学

Discrete Mathematics

zhaoheji
Computer Science Department
Shandong University

计数问题?



计数问题？

十进制数串中有偶数个**0**的数串个数。

。。。

Chapter 13

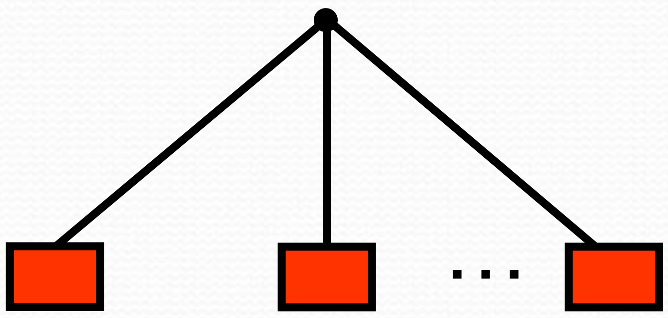
计数

§13.1 计数基础

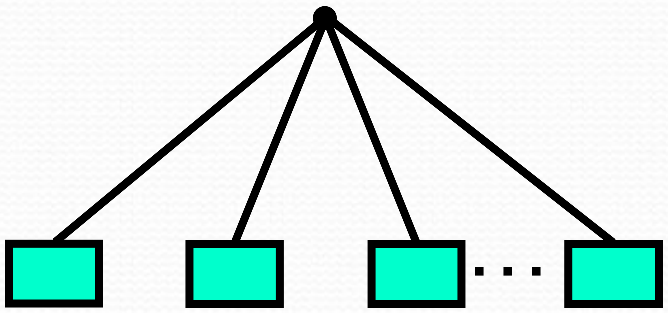
（1）The product rule 乘法规则

定义：

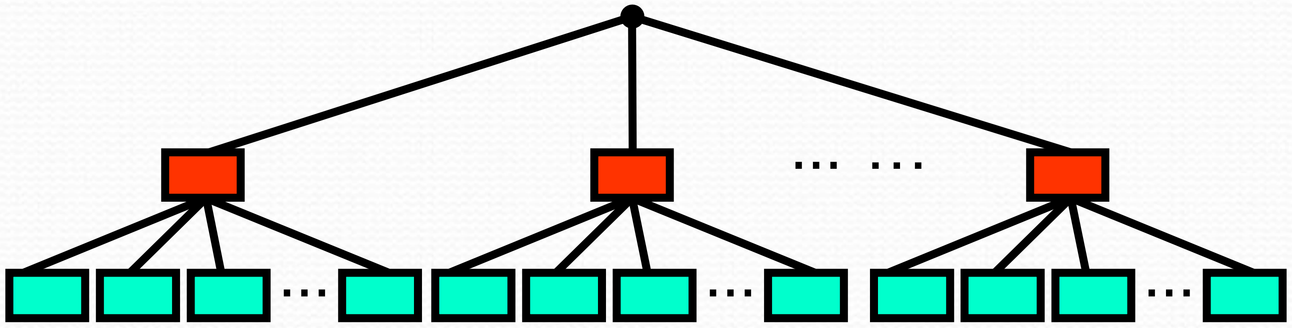
假设一个任务的完成需要进行两步，第一步有n_1种方法完成，第二步有n_2种方法完成，则整个任务的完成有$n_1 \times n_2$种方法。



n1种方法完成T_1



n2种方法完成T2

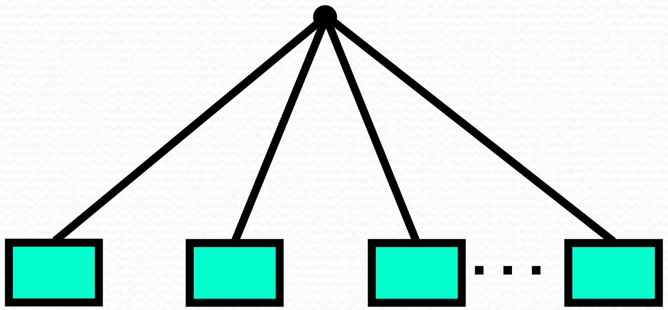


n1×n2:种方法完成任务

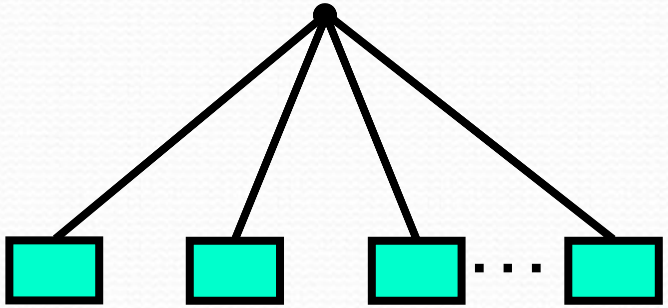
（2）The sum rule 加法规则

定义：

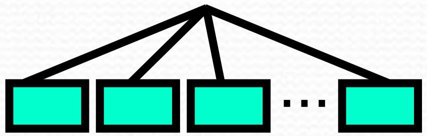
如果有n_1种方法完成任务，同时也有n_2种方法完成任务，而两种方法可以分别独立进行，则完成任务的方法是n_1+n_2种。



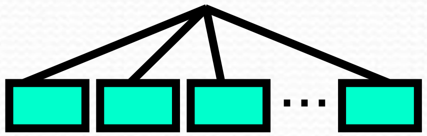
n1种方法完成任务T



n2方法完成任务T

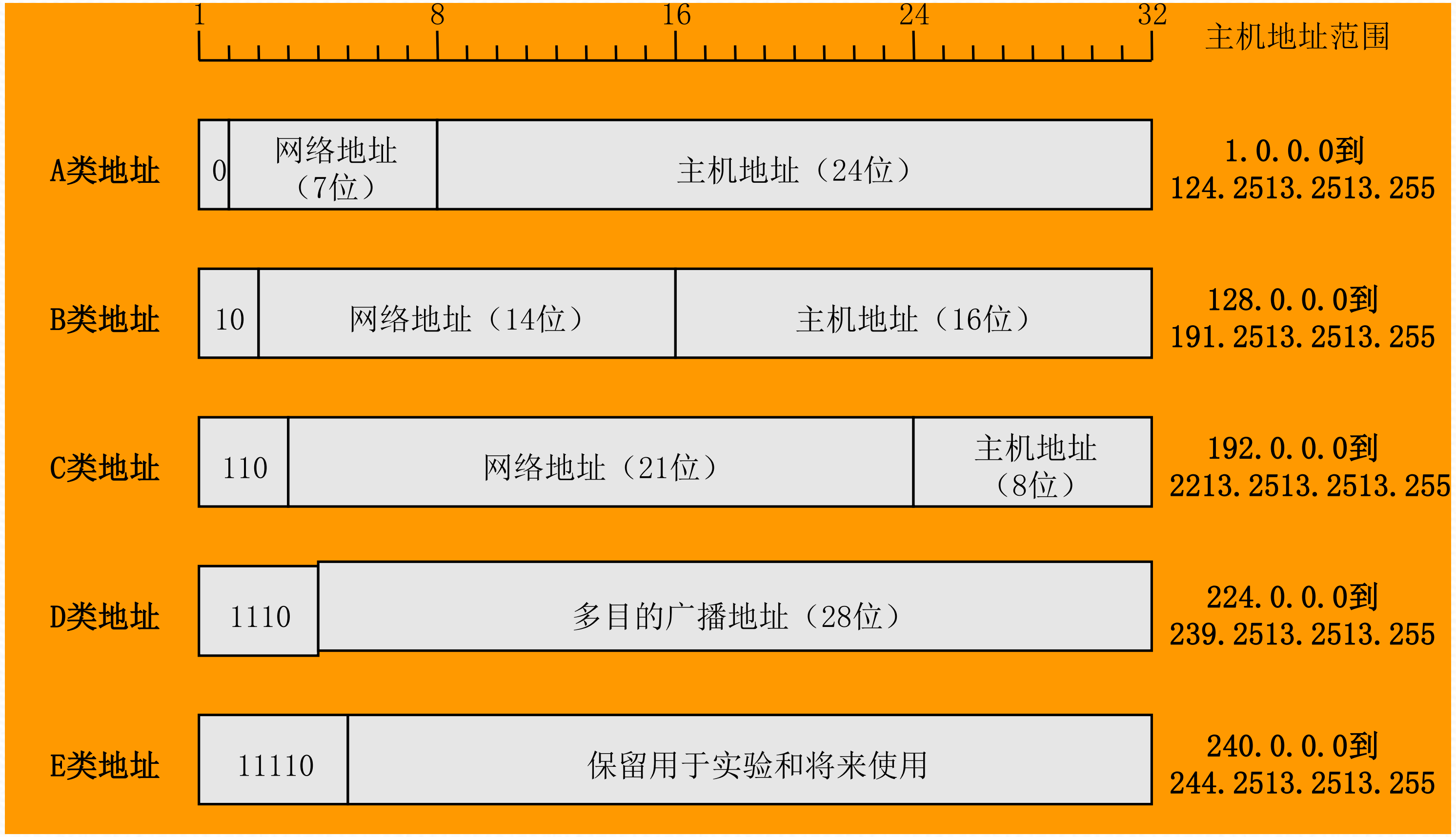


+



n1+n2种方法完成任务

例 IPv4地址的计算。


1
8
16
24
32
主机地址范围
A类地址
0
网络地址（7位）
主机地址（24位）
1.0.0.0到 124.2513.2513.255
B类地址
10
网络地址（14位）
主机地址（16位）
128.0.0.0到 191.2513.2513.255
C类地址
110
网络地址（21位）
主机地址（8位）
192.0.0.0到 2213.2513.2513.255
D类地址
1110
多目的广播地址（28位）
224.0.0.0到 239.2513.2513.255
E类地址
11110
保留用于实验和将来使用
240.0.0.0到 244.2513.2513.255

解：设用x_A, x_B, 和 x_C 分别代表每类地址总数，则

- x_A: $2^7 - 1 = 127$ 网络地址。 $2^{24} - 2 = 16{,}777{,}214$主机地址。

  $$x_A = 127 \cdot 16{,}777{,}214 = 2{,}130{,}706{,}178.$$

- x_B: $2^{14} = 16{,}384$网络地址。 $2^{16} - 2 = 16{,}534$主机地址。

  $$x_B = 16{,}384 \cdot 16{,}534 = 1{,}073{,}709{,}0513.$$

- x_C: $2^{21} = 2{,}097{,}152$网络地址。 $2^8 - 2 = 254$主机地址。

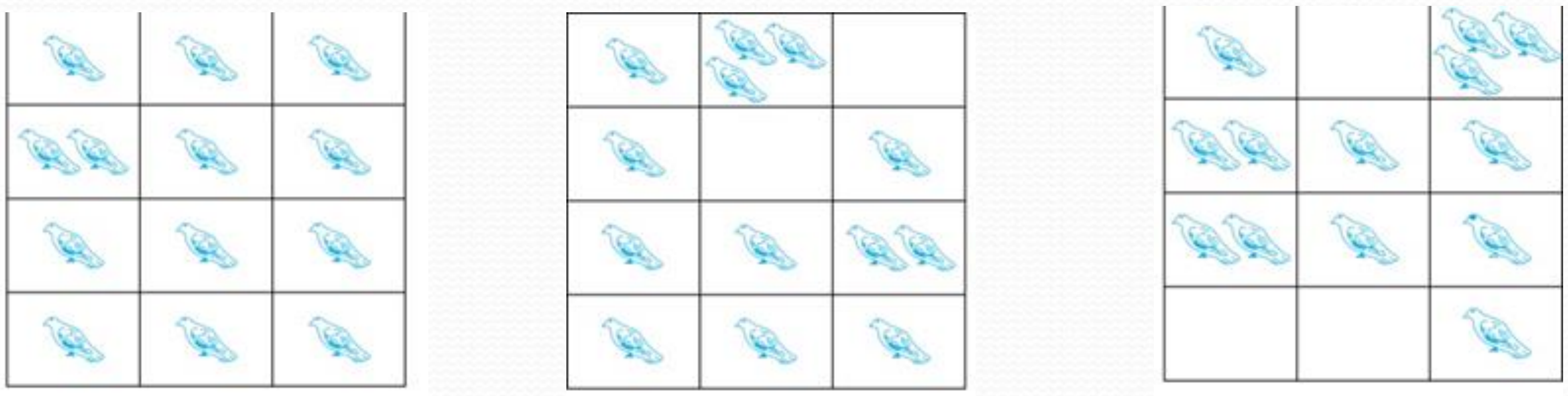
  $$x_C = 2{,}097{,}152 \cdot 254 = 532{,}676{,}608.$$

- 因此IPv4地址总数是：

$$x = x_A + x_B + x_C$$
$$= 2{,}130{,}706{,}178 + 1{,}073{,}709{,}056 + 532{,}676{,}608$$
$$= 3{,}737{,}091{,}842.$$

§13.2 鸽巢原理

- 举例，如果有13只鸽子要入住12个鸽巢，每个鸽子要有一个鸽巢，则会发生什么情况那。



鸽巢原理： 把K+1个物体放入K个箱子中，至少有一个箱子中至少有两个物体.

例: 有367 人，如果一年有366天，则至少有两人出生在同一天

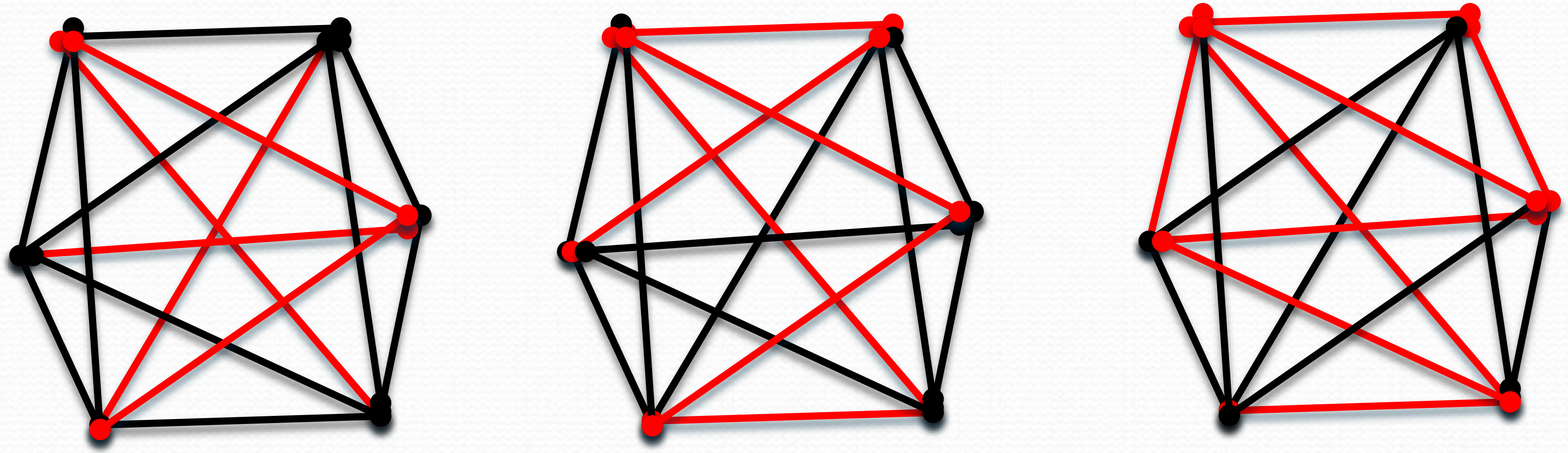
定义：假设p,q为正整数，p,q≧2 ,则存在最小正整数R(p,q),使得n≧R(p,q)时,或者有p人是彼此相识,或者有q人彼此不相识， 称R(p,q)为Ramsey数(拉姆齐数)。

Ramsey Numbers 拉姆齐数

q / p	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	69 115	80 149	96 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	95 216	121 316	141 442	153	181	193	221	242
6				102 165	111 298	127 495	153 780	177 1171	253	262	278	292	374
7					205 540	216 1031	7 1713	7 2826	322	416	511		
8						282 1870	8 3583	316 6090			635		703
9							565 6588	580 12677					
10								798 23556					

$$R(p, q) = R(q, p)$$

拉姆齐数的应用图中边着色



k6完全图,对他的边用红，黑两种颜色任意涂色，则必存在同色边的三角形。

§ 13.3 排列与组合

（1）r-排列

从n个有区别物体中选取r个进行排列，计为：P(n,r).

$$P(n,r)=\begin{cases}1 & n\geq r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

定理：

P(n,r) = n(n-1)(n-2)….(n-r+1).

特别：$P(n,0)=1$

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n,n)=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1=n!$$

（2）允许重复选取的排列

定理：

n个有区别的物体允许重复的选取r个元素进行排列的总数是： n^r。

（3）r-组合

从n个物体中不允许重复选取r个的方案数是：C(n,r) 。

有时C(n,r) 表示二项式的系数，即： $\binom{n}{r}$

$$C(n,r)=\begin{cases}1 & n \geq r = 0 \\ 0 & n < r\end{cases}$$

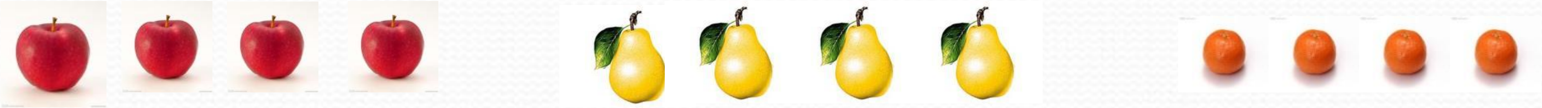
定理：

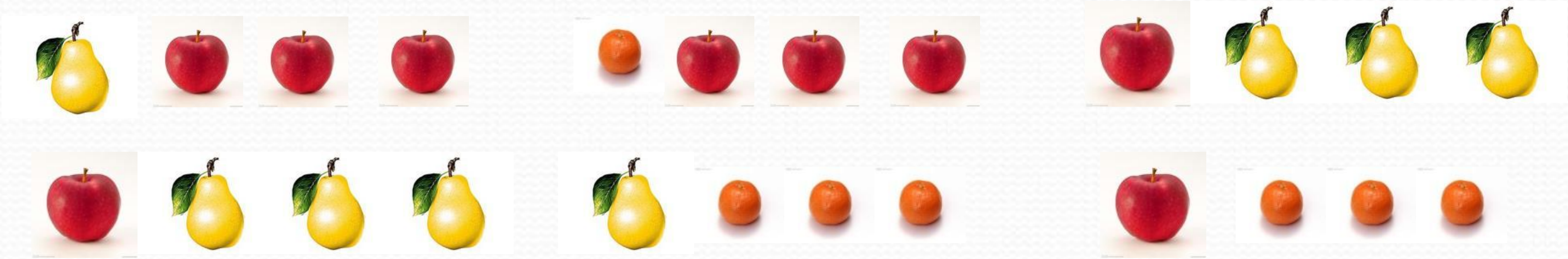
$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

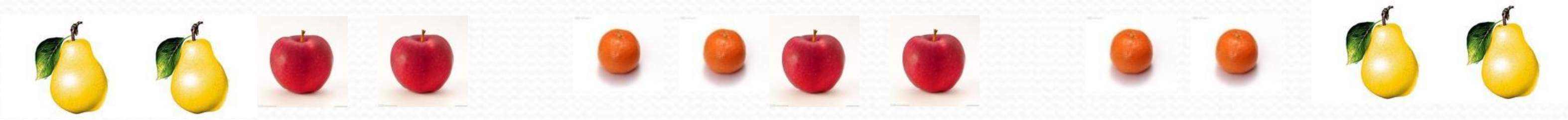
（4） 允许重复的组合

定理：n个物体允许重复的选取r个的组合数是C(n+r-1,r)。



class A


class B


class C


class D


15=3+6+3+3 solutions

定理: n个元素允许重复的r组合。

$$C(n+r-1,r)=C(n+r-1,\,n-1).$$

§13.4 一般的排列和组合

1、允许重复的组合计数模型

(1)、 n个无区别的小球放入m个有区别的箱子里的方案数？

相当于从m类物体中允许重复的选取n个物体的方案数：

选择物体：C(m+n-1,n)、 选择类别：C(m+n-1,m-1)

(2)、 $(x+y+z)^4$展开式有多少项？

C(3+4-1,4), C(3+4-1,3-1)

更一般情况下,$(x+y+z)^n$ 展开式有多少项？

C(3+n-1,n)=C(3+n-1,3-1)

(3)、$x_1+x_2+x_3=11(n)$ 其中x1≥0,x2≥0,x3≥0 正整数解的个数？

2、分配物体装入箱子的计数模型

n个球	m个盒子	是否允许空盒	计数方案	备注
有区别	有区别	允许空盒	m^n	全排列
无区别	有区别	允许空盒	C(m+n-1,n)	m个有区别的元素,取n个作允许重复的组合
无区别	有区别	不允许空盒	C(n-1,m-1)	**(1)选取m个球每盒一个 (2)n-m有区别的球放入m个有区别盒子中,允许某盒不放 C(n-m+m-1,n-m)=C(n-1,m-1)**
无区别	无区别	允许空盒		一本书的6本复印件放入4个相同的箱子中
无区别	无区别	不允许空盒		n-m个无区别物体允许为空的放入无区分m盒子

2、分配物体装入箱子的计数模型

n个球	m个盒子	是否允许空盒	计数方案	备注
有区别	**有区别**	**不允许空盒**		**映上函数的个数**
有区别	无区别	允许空盒	(集合的划分)	4人分配完全相同的3间办公室
有区别	无区别	不允许空盒		Stirling数

小结

1、乘法规则，加法法则，鸽巢原理

2、排列（允许重复）、组合（允许重复）

3、给盒子分装物体的计数模型