Chapter 4

代数系统

Algebra System

§4.1 代数系统的引入

一个代数系统需要满足下面三个条件：

（1）有一个非空集合S；

（2）有一些建立在S上的运算；

（3）这些运算在集合S上是封闭的。

§4.2 运算

4. 2. 1 运算的概念

定义

假设A是一个集合，A×A 到A的映射称为A上的二元运算。

一般地，A^n 到 A 的映射称为A上的n元运算。

§4.2 运算

4.2.2 运算的性质

假设 $*,+$ 都是集合 A 上的运算

（1）封闭性

如果 $S \subseteq A$，对任意的 $a,b \in S$，有 $a*b \in S$，则称 S 对运算 $*$ 是封闭的。

§4.2 运算

4.2.2 运算的性质

（2）交换律

如果对任意的 $a,b \in A$，都有 $a*b=b*a$，则称运算 $*$ 是可交换的。

（3）结合律

如果对任意的 $a,b,c \in A$，都有 $(a*b)*c=a*(b*c)$，则称运算 $*$ 是可结合的。

§4.2 运算

（4）分配律

如果对任意的 $a,b,c \in A$，都有$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$

则称 $*$ 对 $+$ 运算满足左分配；

如果对任意的$a,b,c \in A$，都有$(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$

则称 $*$ 对 $+$ 运算满足右分配。

如果运算 $*$ 对 $+$ 既满足左分配又满足右分配，

则称运算 $*$ 对 $+$ 满足分配律。

§4.2 运算

（5）消去律

如果对任意的 a,b,c∈A，当 a*b=a*c，必有 b=c，则称运算 * 满足左消去律；

如果对任意的 a,b,c∈A，当 b*a=c*a，必有 b=c，则称运算 * 满足右消去律；

如果运算 * 既满足左消去律又满足右消去律，则称运算 * 满足消去律。

§4.2 运算

（6）吸收律

如果对任意的 $a,b \in A$，都有$a*(a+b)=a$，则称运算 * 关于运算 + 满足吸收律。

（7）等幂律

如果对任意的 $a \in A$，都有 $a*a=a$，则称运算 * 满足等幂律。

§4.2 运算

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

（1）封闭性 √

（2）交换律 √

（3）结合律 √

（4）分配律 √

（5）消去律 ×

（6）吸收律 ×

（7）等幂律 ×

§4.3 代数系统

4.3.1 代数系统的概念

定义

假设 A 是一个非空集合，$f_1,f_2,\ldots,f_n$ 是 A 上的运算（运算的元素可以是不相同的），则称 A 在运算 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 下构成一个代数系统，记为：$\langle A, f_1,f_2,\ldots,f_n \rangle$

§4.3 代数系统

4. 3. 1 代数系统的概念

定义

假设 $<A,*>$ 是一个代数系统，$S \subseteq A$，如果 S 对* 是封闭的，则称 $<S,*>$ 为 $<A,*>$的子代数系统。

§4.3 代数系统

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（1）单位元（幺元）

假设 <A,*> 是一个代数系统，如果 $\exists e_L \in A$,对于任意元素 $x \in A$，都有 $e_L * x = x$,则称 e_L为 A 中关于运算 * 的左单位元;

如果 $\exists e_r \in A$,对于任意元素 $x \in A$，都有 $x * e_r = x$,则称 e_r 为 A 中关于运算 * 的右单位元;

如果 A 中一个元素 e 既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 A 中关于运算 * 的单位元。

§4.3 代数系统

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

$\Diamond$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$e_L=a,b,c$ $e_r=a,b,c$ $e_L=a$ $e_r=a$

§4.3 代数系统

4. 3. 2 代数系统中的特殊元素

（1）单位元（幺元）

定理

假设 <A,*> 是代数系统，并且 A 关于运算 * 有左单位元 e_L 和右单位元 e_r，则 $e_L=e_r=e$ 并且单位元唯一。

§4.3 代数系统

4. 3. 2 代数系统中的特殊元素

（2）零元

假设 <A,*> 是一个代数系统，如果 $\exists\theta_L\in A$,对于任意元素 $x\in A$，都有 $\theta_L * x=\theta_L$,则称 θ_L为 A 中关于运算 * 的左零元;

如果 $\exists\theta_r\in A$,对于任意元素 $x\in A$，都有 $x*\theta_r=\theta_r$,则称 θ_r为 A 中关于运算 * 的右零元;

如果 A 中一个元素 θ 既是左零元又是右零元，则称 θ 为 A 中关于运算 * 的零元。

§ 4.3 代数系统

找出下列代数系统的左零元，右零元，零元。

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

θ_r=a,b,c

◊	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

θ_L=a,b,c

•	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

θ_r=b　θ_L=b

§4.3 代数系统

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（2）零元

定理

假设 <A,*> 是代数系统，并且 A 关于运算 * 有左零元 θ_L 和右零元 θ_r，则 $\theta_L=\theta_r=\theta$ 并且零元唯一。

§4.3 代数系统

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（3）逆元

假设 <A,*> 是一个代数系统，e 是 <A,*>的单位元。对于元素 $a \in A$，如果存在 $b \in A$，使得 $b*a=e$，则称 a 为左可逆的，b 为 a 的左逆元；如果存在 $c \in A$，使得 $a*c=e$，则称元素 a 是右可逆的，c 为 a 的右逆元。如果存在 $a' \in A$，使得 $a'*a=a*a'=e$，则称 a 是可逆的，a′ 为 a 的逆元。a 的逆元记为：a^{-1}。

§4.3 代数系统

分析下列代数系统中各元素的逆元情况。

•	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$a'*a=a*a'=e$

系统的单位元 $e=a$

$a*a=e$

$a^{-1}=a$　单位元自身为逆元

$b*c=c*b=e$

$b^{-1}=c$　$c^{-1}=b$

§4.3 代数系统

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（3）逆元

定理

设 <A,*> 是一个代数系统，且 A 中存在单位元 e，每个元素都存在左逆元。如果运算 * 是可结合的，那么，任何一个元素的左逆元也一定是该元素的右逆元，且每个元素的逆元唯一。

§4.3 代数系统

4.3.2 代数系统中的特殊元素

（4）幂等元

定义：

在代数系统<A,*>中，如果元素 a 满足a*a=a，那么称 a 是 A 中的幂等元。

§4.3 代数系统

分析下列代数系统中幂等元的情况。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

运算 1

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

运算 2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

运算 3

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

运算 4

运算1 幂等元 a

运算2 幂等元 a，c

运算3 幂等元 a，b，c

运算4 幂等元 a，b

小结

1、运算及运算的性质：封闭性，交换律，结合律，分配律，消去律，吸收律，等幂律

2、 $<A, f_1,f_2,\ldots,f_n>$，代数系统

3、 $<A, f_1,f_2,\ldots,f_n>$，单位元（幺元），零元，逆元，幂等元