王宇涵 2022004000533 作业 Date. A

习题七 (4, 9, 11 见背面)

2. 一共可能函数有8种 分别为

$(a,b,c) \to (0,0,0)$ / $(0,0,1)$ / $(0,1,0)$ / $(0,1,1)$ /

$(1,0,0)$ / $(1,0,1)$ / $(1,1,0)$ / $(1,1,1)$ 格式

满射有 $(0,0,1)$ $(0,1,0)$ $(0,1,1)$ $(1,0,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,0)$

单射有：无

双射：无

习题八

2. 证明

(1) 若 $g\circ f$ 是满射 则 $g\circ f$ 为 $(A\to C)$ 的函数

$\forall c\in C$, 且有 $g\circ f(a)=c$ 即 $g(f(a))=c$ 令 $b=f(a)$

则 $\forall c\in C$ 有 $g(b)=c$ 则 $g$ 为满射的

(2) 若 $g\circ f$ 是单射 且 $g\circ f$ 为 $A\to C$ 函数

则 $\forall x\in A, y\in A$ 且 $x\neq y$ 有 $g\circ f(x)\neq g\circ f(y)$

即 $g(f(x))\neq g(f(y))$ 假设 $f$ 不为单射 则有 $f(x)=f(y)$

则有 $g(f(x))=g(f(y))$ 与条件矛盾，因此 $f$ 为单射

(3) 由 (1)(2) 得，由 $g\circ f$ 为双射，则 $g\circ f$ 为满射 且 $g\circ f$ 为单射，

则 $g$ 为满射，$f$ 为单射

4. 证明：

对于 $A$ 的任意子集 $X$，有 $f$：$\begin{cases} f(a)=0, & a\in X \\ f(a)=1, & a\in(A-X) \end{cases}$

则当子集 $X=Y$ 时，所对应的 $f$ 和 $g$ 也是相等的

则令 $F$：$A\to f$ 是双射的，由于 $B$ 是 $A\to\{0,1\}$ 函数的集合

则 $P(A)\to B$ 也是双射的

Date.

习题七

4. (1) 是单射，不是满射
(2) 不是单射 也不是满射
(3) 不是单射 也不是满射
(4) 不是单射，是满射

9. 证明

(1) A, B之间存在单射 $\Leftrightarrow$ 对于A中任意元素a，有唯一确定的f(a)在B中且互不相同 $\Leftrightarrow$ 可将A中元素映射到B中不同元素上 $\Leftrightarrow |A| \le |B|$

(2) A, B之间存在满射 $\Leftrightarrow$ 对于B中任意元素b，有确定的a在A中使 $f(a)=b$，又由a只能对应B中一个元素f(a) $\Leftrightarrow$ 可将A中元素映射到B中所有元素上 $\Leftrightarrow |A| \ge |B|$

(3) A, B之间存在双射 $\Leftrightarrow$ A和B之间元素一一对应 $\Leftrightarrow |A| = |B|$

11. 证明

(1) ~~若A=B，则A和B上等价关系相同，则$\varphi_A = \varphi_B$，均为将元素映射到等价类~~.

若 $A=B$，则 $\varphi_A: U \to \{0,1\} = \varphi_B: U \to \{0,1\}$

若 $\varphi_A = \varphi_B$ 则 $\forall x \in U$ 有 $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ 设 $A \ne B$，则若 $\varphi_A(x) = 1 = \varphi_B(x)$ 则必有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 即 $x \in A \cap B$ 但若 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 则矛盾

因此 $A = B$.

(2) 1° 若 $A \subseteq B$，则若 $\forall x \in U$ 且 $x \in A$ 则 $\varphi_A(x) = 1$ 有 $x \in B$，则 $\varphi_B(x) = 1$ 若 $x \notin A$ 则 $x \notin B$ 则 $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 0$ 若 $x \in B$ 且 $x \notin A$ 则 $\varphi_A(x) = 0$ $\varphi_B(x) = 1$ 则 $\varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$.

2° 若 $\varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$，设 $x \in U$ 且 $x \in A$ 则 $\varphi_A(x) = 1$. 若设 $A \not\subseteq B$，则 x 未必 $\in B$ 则 $\varphi_B(x)$ 可能为0，与条件矛盾，因此 $A \subseteq B$.

Date.

习题七

4. (1) 是单射，不是满射

(2) 不是单射也不是满射

(3) 不是单射也不是满射

(4) 不是单射，是满射

9. 证明

(1) $A, B$ 之间存在单射 $\Leftrightarrow$ 对于 $A$ 中任意元素 $a$，有唯一确定的 $f(a)$ 在 $B$ 中且互不相同 $\Leftrightarrow$ 可将 $A$ 中元素映射到 $B$ 中不同元素上 $\Leftrightarrow |A| \le |B|$

(2) $A, B$ 之间存在满射 $\Leftrightarrow$ 对于 $B$ 中任意元素 $b$，有确定的 $a$ 在 $A$ 中使 $f(a)=b$。又由 $a$ 只能对应 $B$ 中一个元素 $f(a)$。$\Leftrightarrow$ 可将 $A$ 中元素映射到 $B$ 中所有元素上 $\Leftrightarrow |A| \ge |B|$

(3) $A, B$ 之间存在双射 $\Leftrightarrow$ $A$ 和 $B$ 之间元素一一对应 $\Leftrightarrow |A| = |B|$

11. 证明

(1) ~~若A=B，则A和B上等价关系相同，则φA=φB，均为将元素映射到等价类~~。

若 $A=B$，则 $\varphi_A: U \to \{0,1\} = \varphi_B: U \to \{0,1\}$

若 $\varphi_A = \varphi_B$ 则 $\forall x \in U$ 有 $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$ 设 $A \ne B$。则若 $\varphi_A(x) = 1 = \varphi_B(x)$ 则必有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 即 $x \in A \cap B$ 但若 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 则矛盾

因此 $A = B$。

(2) 1° 若 $A \subseteq B$。则若 $\forall x \in U$ 且 $x \in A$ 则 $\varphi_A(x) = 1$ 有 $x \in B$。则 $\varphi_B(x) = 1$ 若 $x \notin A$ 则 $x \notin B$ 则 $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 0$ 若 $x \in B$ 且 $x \notin A$ 则 $\varphi_A(x) = 0$ $\varphi_B(x) = 1$ 则 $\varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$。

2° 若 $\varphi_A(x) \le \varphi_B(x)$，设 $x \in U$ 且 $x \in A$ 则 $\varphi_A(x) = 1$。若设 $A \nsubseteq B$，则 $x$ 未必 $\in B$ 则 $\varphi_B(x)$ 可能为 0，与条件矛盾，因此 $A \subseteq B$。

习题七　　王宇涵 2022004000533

11.(3) $\forall x\in U$ $\varphi_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & x\in A\wedge x\in B\\ 0 & x\notin(A\cap B)\end{cases}$ $\varphi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ $\varphi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$

则 $x\in(A\cap B)$ 时 $\varphi_{A\cap B}(x)=\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=1$

$x\in A$, $x\notin B$ 时 或 $x\in B$, $x\notin A$ 时　$\varphi_{A\cap B}(x)=\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)=0$

或 $x\notin A$, $x\notin B$ 时

则 $\varphi_{A\cap B}(x)=\varphi_A(x)\varphi_B(x)$

(4) $\forall x\in U$ $\varphi_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1 & x\in A\vee x\in B\\ 0 & x\notin(A\cup B)\end{cases}$

$x\notin A$ 且 $x\notin B$ 时 $\varphi_{A\cup B}(x)=0$ $\varphi_A(x)=0$ $\varphi_B(x)=0$ 则等式成立

$x\in A$ 或 $x\in B$ $x\notin A$ 时 ($x\notin B$) $\varphi_{A\cup B}(x)=1=\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-\varphi_A(x)\varphi_B(x)$ 等式成立

$x\in A$ 且 $x\in B$ 时 $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=1$ 则 $1=1+1-1$ 等式成立

则等式恒成立 $\varphi_{A\cup B}(x)=\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-\varphi_A(x)\varphi_B(x)$

第四章

习题一:

1. + 满足交换律，结合律，分配律

　* 满足结合律，左分配律，不满足交换律，右分配律

3 乘法表

| * | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|---|---|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [2] | [0] | [2] | [4] | [1] | [3] |
| [3] | [0] | [3] | [1] | [4] | [2] |
| [4] | [0] | [4] | [3] | [2] | [1] |

加法表

| + | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|---|---|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] |

# 习题二

1. $*$：$a * b = a \cdot b$。则 $\langle A, * \rangle$ 有单位元 1.

3. ① $\langle E(A), \circ \rangle$ 中有单位元：恒等函数 $f(x) = x$

② 1° $\langle E(A), \circ \rangle$ 独异

2° $\langle f, \circ \rangle$，$f$ 为恒等函数

3° $\langle g, \circ \rangle$ 定义 $g$ 为：$g(x) = a$．$\forall x \in A$

4. 证明：设 $\langle A, * \rangle$ 中有右单位元 $e_3$

则由两左单位元得 $e_1 \neq e_2$ 则 $e_1 x = x = e_2 x = x e_3$

则由定理得 $e_1 = e_3$ $e_2 = e_3$ 则 $e_1 = e_2$ 与条件矛盾

则 $\langle A, * \rangle$ 无右单位元.