集合论

❖关系
- ➢概念、性质、运算、闭包
- ➢等价关系与集合划分
- ➢偏序关系与偏序集
- ➢函数、函数运算

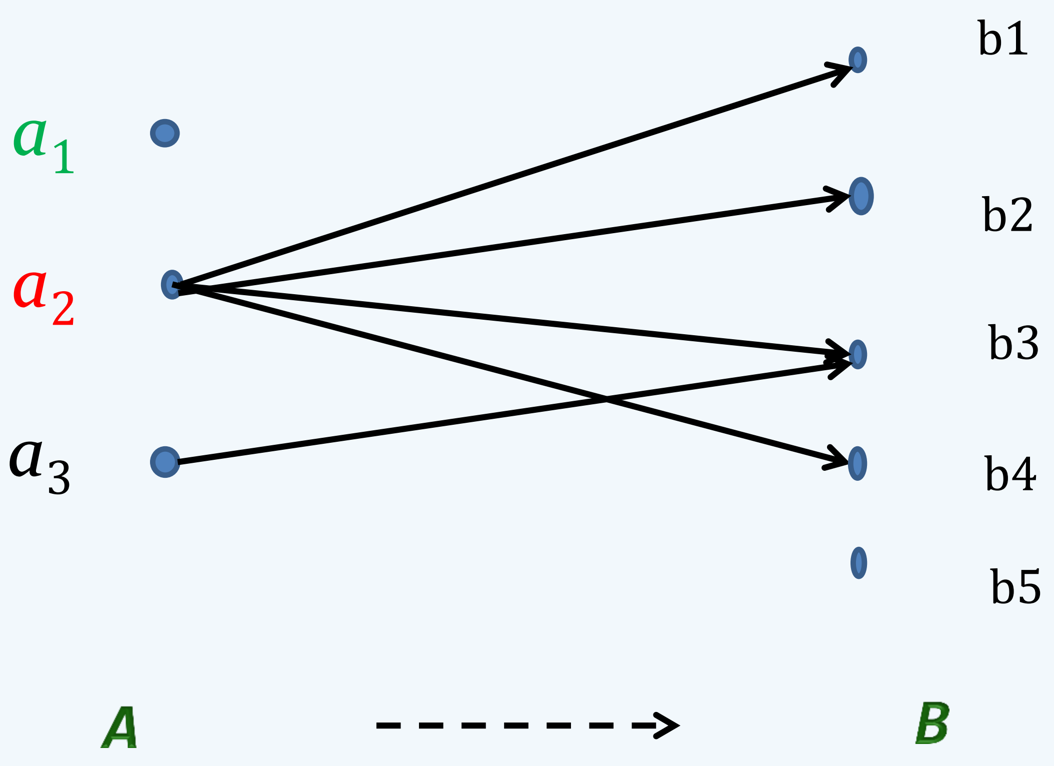
❖无限集
- ➢势、可数集

函数

❖关系概念的回顾：当 $R \subseteq A\times B$ 时，称R为A到B的关系，当 $R \subseteq A\times A$时，称R为A上的关系.

元素a_1没有出现在序偶中

元素a_2多次出现在序偶中



函数

❖定义1　设f是集合A到B的关系，如果对于任意$x\in A$，

都存在唯一的$y\in B$ 使〈x，y〉$\in f$，

则称f为A到B的函数，记为 f：$A\to B$，或 f：$x\mapsto y$，或 $f(x)=y$

y 称为 f 在 x 点的值，也称y为x在f下的象 image.

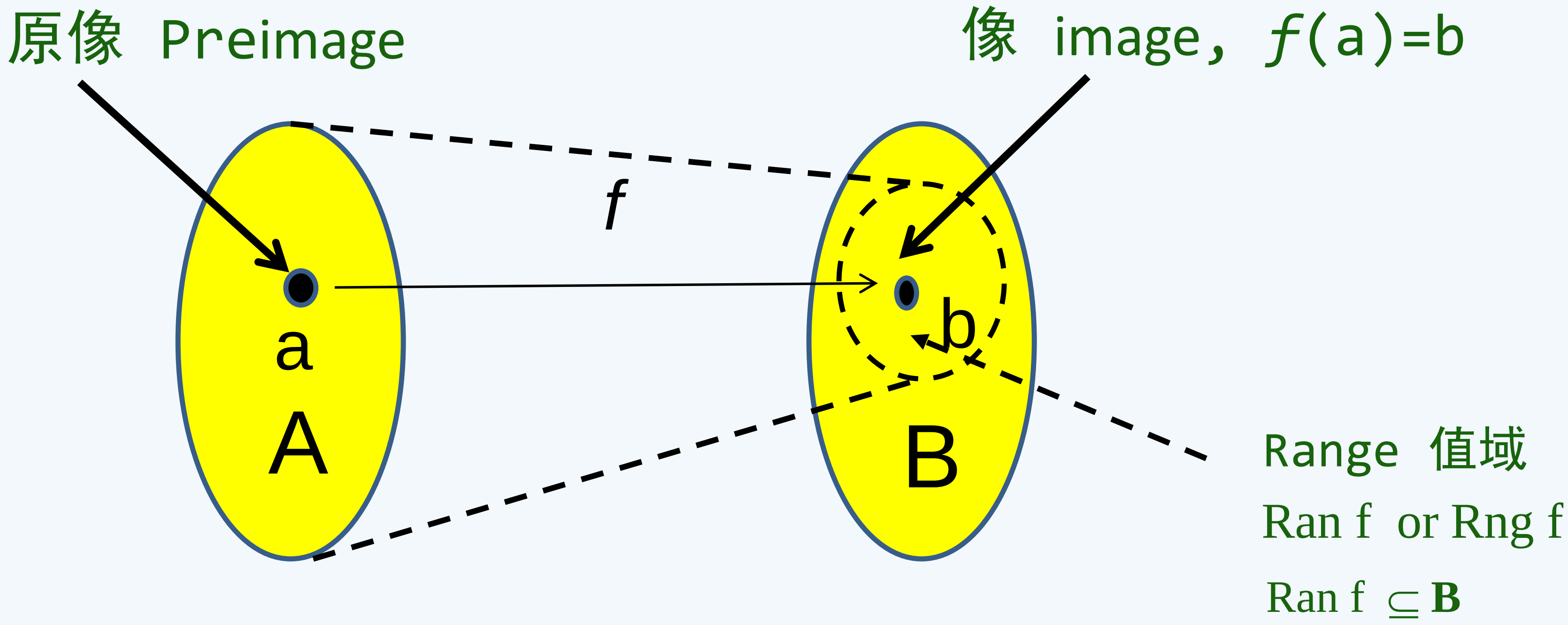
称 x 为 y 在 f 下的原象 Preimage.

❖　集合A称为函数f的定义域 Domain；集合B称为函数f的陪域Co-Domain

所有的象组成的集合是集合B的子集，称为函数f的值域 Range ；

特殊情况：A到A的函数，也称为 A上的函数.

函数



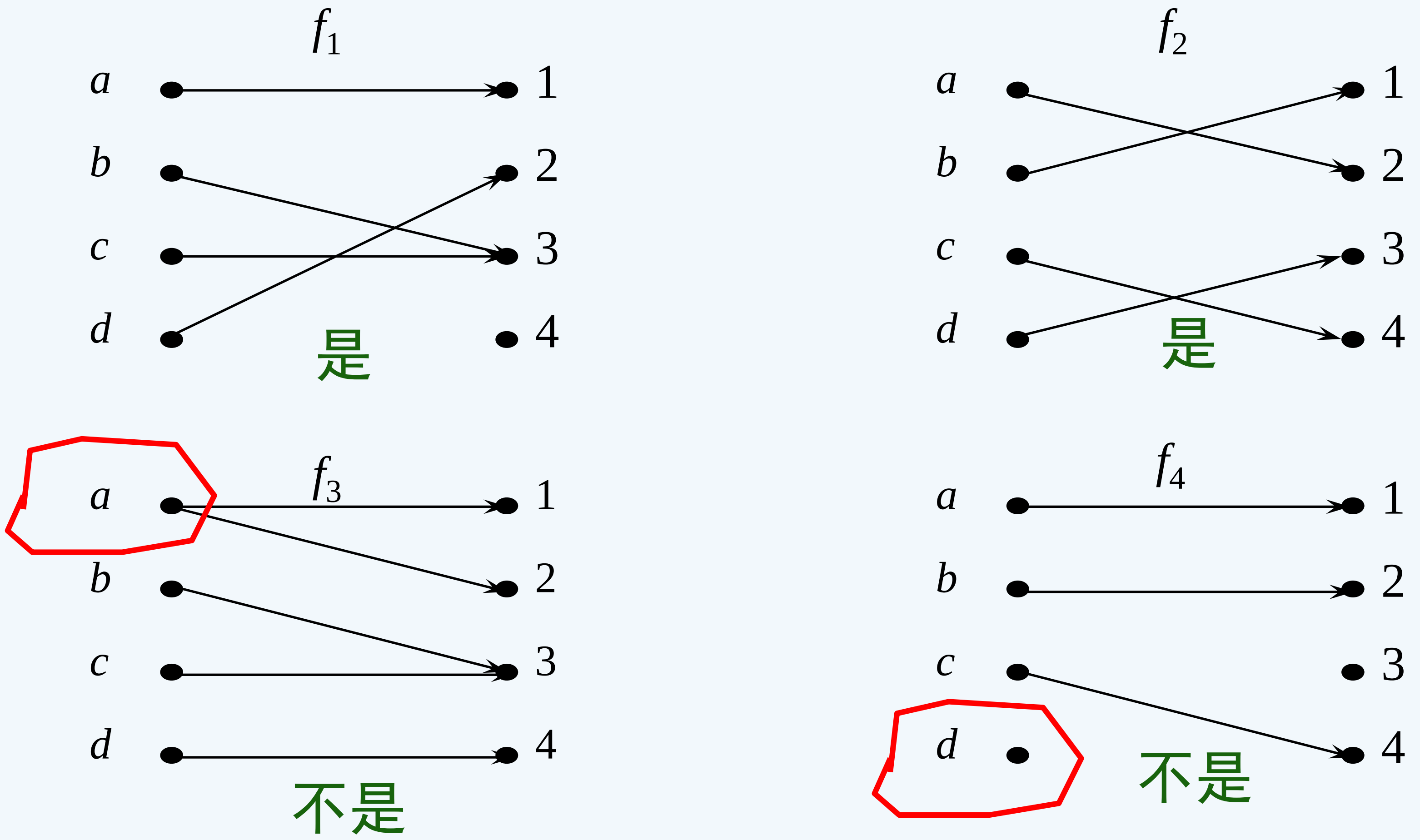
Domain
定义域 A

Co-Domain
陪域 B

$$f: A \to B$$

函数

如下f1，f2，f3，f4关系，哪些满足函数的定义？



函数

依据函数f的定义回答下列问题。

$f(a) = ?$　　z

d的像是?　　z

f 定义域？　　$\{a,b,c,d\}=A$

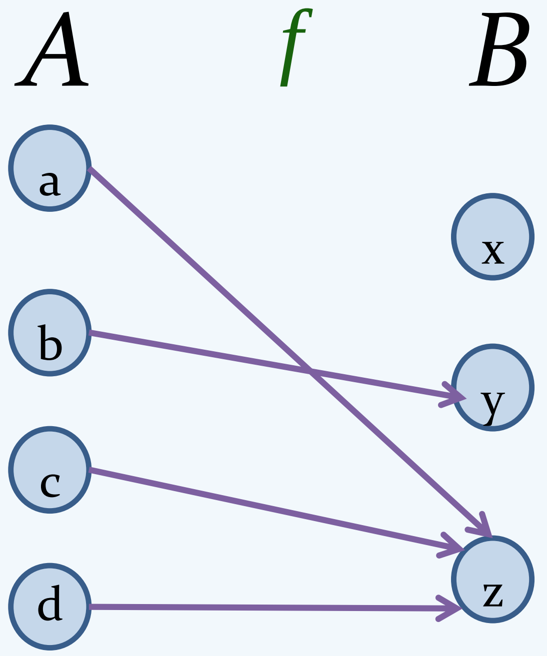
f 的陪域？　　$B=\{x,y,z\}$

y 的原像？　　b

$f(A) = ?$　　$\{y,z\}\subseteq B$; f的值域 Ran f= $\{y,z\}$

z 的原像是?　　$\{a,c,d\}$

x 的原像？　　无



例1: 集合A = {a, b, c}, B = {0, 1},
求解下列问题：

1. $A \times B$=?

2. p($A \times B$)**=?**

3. 集合A到B有多少种不同的函数?

解： 1. $A \times B$ = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>};

函数

A × B = {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>};

p(A × B)={ ∅, C(6,0)=1

{<a, 0)}, {<b, 0>}, {<c, 0>}, {<a, 1>}, {<b, 1>}, {<c, 1>}, c<6,1>=6

{<a, 0>, <b, 0>}, {<a, 0>, <c, 0>}, {<a, 0>, <a, 1>}, {<a, 0>, <b, 1>}, {<a, 0>, <c, 1>},… c<6,2>=15

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>}, {<a, 0>, <b, 0>, <a, 1>}, {<a, 0>, <b, 0>, <b, 1>},… c<6,3>=20

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>}, {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<b, 1>} … c<6,4>=15

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>, <b, 1> }, {<a, 0>, <b, 0>, <c, 0> ,<a, 1>, <c, 1> }, … c<6,5>=6

{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>} ,… } c<6,6>=1

函数

$f_1 = \{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>\}$;
$f_2 = \{<a, 0>, <b, 0>, <c, 1>\}$;
$f_3 = \{<a, 0>, <b, 1>, <c, 0>\}$;
$f_4 = \{<a, 0>, <b, 1>, <c, 1>\}$;
$f_5 = \{<a, 1>, <b, 0>, <c, 0>\}$;
$f_6 = \{<a, 1>, <b, 0>, <c, 1>\}$;
$f_7 = \{<a, 1>, <b, 1>, <c, 0>\}$;
$f_8 = \{<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>\}$

$|p(A\times B)|=2^6(64)$

函数有:$2^3=8$种

即 $B^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4, f_5,f_6,f_7,f_8\} \subseteq p(A\times B)$

为什么表示为B^A？ 不是A^B

$|B|*|B|*|B|\ldots|B|=|B|^{|A|}$

对函数的理解，下列两种表示哪种正确？

$\forall f_i \subseteq p(A \times B)$ ×

$\forall f_i \in p(A \times B)$ √

定义 设A为一集合，令 $I_A: A \to A$

$$I_A: a \mapsto a \quad , \forall a \in A$$

I_A称为A上的**恒等函数**，它就是A上的恒等关系

定义：设A，B是两个集合．令

$$P_1: \langle a, b\rangle \mapsto a, \forall <a, b> \in A \times B$$

$$P_2: \langle a, b\rangle \mapsto b, \forall <a, b> \in A \times B$$

P_1，P_2分别称为从$A \times B$到A，B的投影函数

定义：设R是集合A上的等价关系，令

$$\varphi: a \mapsto [a]_R,\ a \in A$$

则 φ是A到A/R的函数，称为A到A/R的自然映射

函数

❖如果$A_1 \subseteq A$，A_1中所有点的象构成的集合称为A_1在f下的象，记为$f(A_1)$，

即 $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$

❖如果$B_1 \subseteq B$，B_1中元素的所有原象构成的集合称为B_1的完全原象，简称原象Preimage，

记为$f^{-1}(B_1)$，即 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A, f(x) \in B_1\}$

$f^{-1}(\{b\})$可简记为$f^{-1}(b)$.

❖若$f: A \to B$，则 $f(A)$即为 f 的值域 Range.

函数

例2 设R是实数集，令f：$R \to R$

$$f(x) = x^2, \ x \in R$$

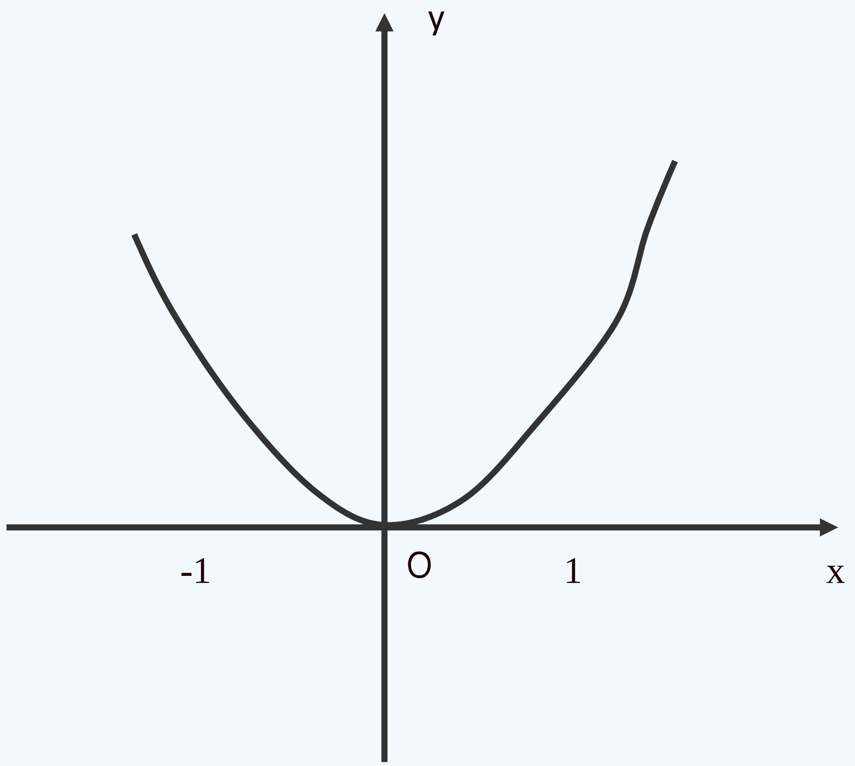
则$f([0, 2]) = [0, 4]$

原像 $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$

$f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$

$f^{-1}([-2, -1]) = \varnothing$

$f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$



例3 设f是Z到Z_m的自然映射，其中Z是整数集， Z_m是模m剩余类

即$f(i) = [i] = \{km+i \mid k\in Z\}$

如 $[1]_5 = \{1, 6, 11\ldots\}$; $[2]_5 = \{2, 7, 12\ldots\}$

…. $[5]_5 = \{0, 5, 10\ldots\}$

则 $f(\{0, 1\}) = \{[0], [1]\}$, $f(\{0, m, m+1\}) = \{[0], [1]\}$

$f^{-1}([0]) = \{km \mid k\in Z\}$

$f^{-1}(\{[0], [1]\}) = \{km+i \mid k\in Z, i\in\{0, 1\}\}$

函数

❖ 定义3　设f：$A \to B$，如果$\forall x$，$y \in A$，当 $x \neq y$ 时，必有$f(x) \neq f(y)$，则称f为A到B的**单射**（**入射** Injections，**一对一的** one-to-one）

❖ 显然，f：$A \to B$是单射的充要条件为:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

f：A→B是单射的充要条件为:

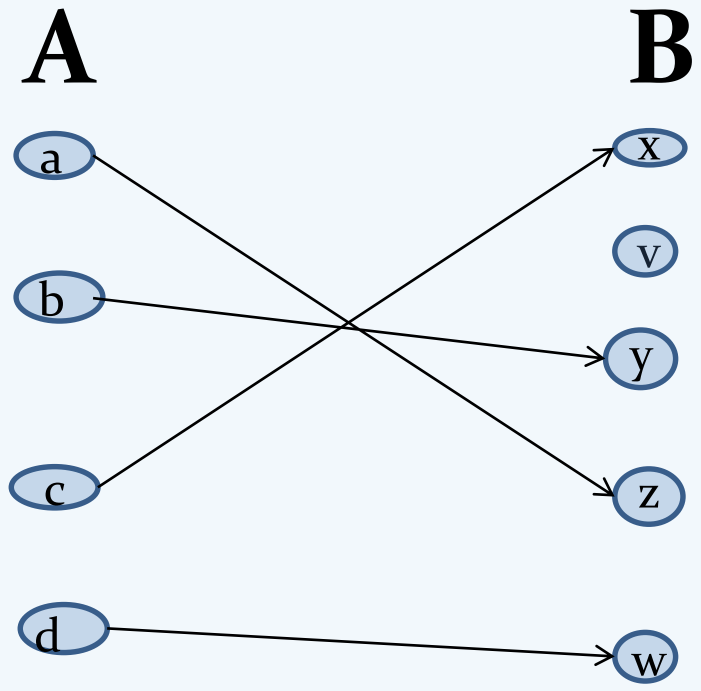
不同的原像 preimage 有不同的像 image 。

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

或者

相同的像有相同的原像。

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

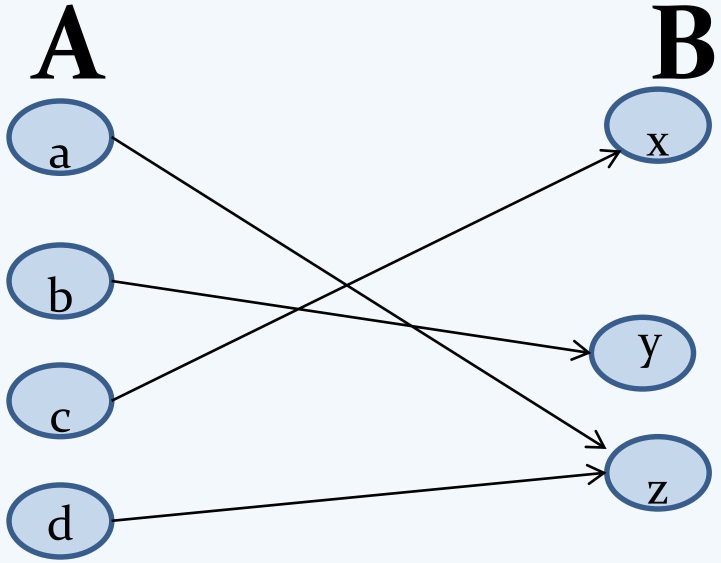


❖定义4　设f：$A \to B$，若 ran$f = B$，(ran f 值域=陪域B)

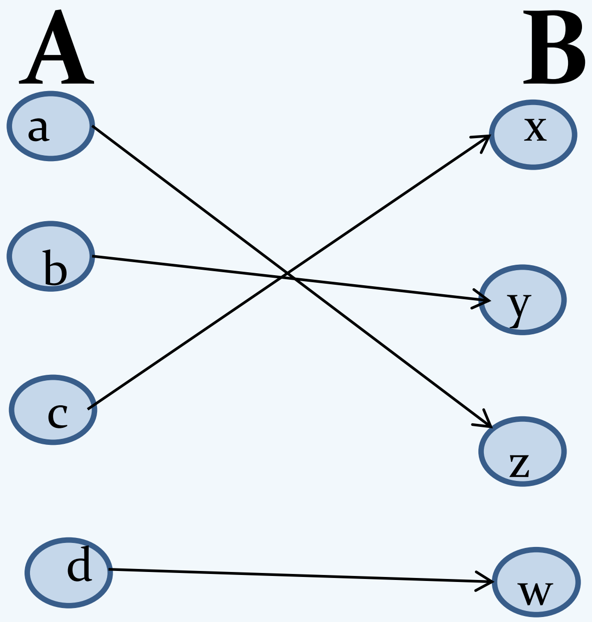
则称f为A到B的满射Surjections、或 映上的 onto.

❖f：$A \to B$是满射的充要条件是

$\forall y \in B$，$\exists x \in A$，使 f（x）＝y



❖**定义5** 设f：$A \to B$，若f 既为单射，又为满射，则称f为A到B的**双射**（bijection）（**一一对应** one-to-one correspondence）



函数

例题 f:$Z \to Z$，定义为：$f(x)=2x-3$

函数f的dom f, codomain, ran f(rng f)?

函数是one-to-one (injective)? 函数是onto (surjective)?

解：函数定义域 dom(f)=Z. 而函数的值域ran f是?

$\forall b \in \text{ran}(f)$　　b=2a-3, 其中 $a \in Z$

b=2(a-2)+1

b 是奇数

函数

f的值域是奇整数，所以函数不是满射函数。

但函数是单射函数

因为 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1\text{-}3 = 2x_2\text{-}3 \Rightarrow x_1 = x_2$

或 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1\text{-}3 \neq 2x_2\text{-}3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

不同的原像 preimage 有不同的像 image

相同的像有相同的原像。

函数例题

例题1 假设N是自然数集， F是N到N×N的函数：$f(n)=(n, n+1)$。证明该函数是单射的,但不是满射的。

证明：单射的, $\forall x1,x2\in A,x1\neq x2$ 有f（x1） $\neq$ f（x2）

$\forall n1,n2\in N,n1\neq n2$ 则$n1+1\neq n2+1$

所以有$(n1,n1+1)\neq(n2,n2+1)$

又因为$f(n1)=(n1,n1+1),f(n2)=(n2,n2+1)$

所以f（n1） $\neq$ f（n2）

所以 f是单设的

函数例题

证明：满射的, $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ 都有$f(x)=y$（任意像的原象都存在）

$\forall (x,y) \in N \times N$,有$n \in N$,$f(n)=(x,y)$

$(x,x) \in N \times N$,所以有$f(n)=(x,x)$

又因为$f(n)=(n,n+1)$,

所以有$(x,x) =(n,n+1)$

显然$x=n$与$x=n+1$不能同时成立

所以f不是漫射的

函数例题

例题2：设R为实数集，$f:R\times R\to R, f(x,y)=x+y$, 又 $g:R\times R\to R$, $g(x,y)=x\times y$。证明 f和g都是满射的，而不是单射的。

证明: (1)对于$\forall a\in R$，可以使$a=x+y$成立的x,y有无数对，且$(x,y)\in R\times R$，也就是说值域R中每个元素都有无数原象在$R\times R$中，所以f是满射的，而不是单射的。（例 10=1+9；10=5+5；10=0.1+9.9;...)

(2)对于$\forall a\in R$，可以使$a=x\times y$成立的x,y有无数对，且$(x,y)\in R\times R$，也就是说值域R中每个元素都有无数原象在$R\times R$中，所以g是满射的，而不是单射的。

函数例题

例3 设 $f:X \to Y$，集合$A,B \in P(X)$(幂集 power set)，

则 (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$； (2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。

证明 (1) 设任意$y \in f(A \cup B)$，则存在$x \in A \cup B$，使$f(x)=y$

即 $x \in A \vee x \in B$ 时有 $y=f(x)$

故 $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$

因此 $y \in f(A) \cup f(B)$，于是 $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

反之，设$y \in f(A) \cup f(B)$，则有$y \in f(A)$或$y \in f(B)$ 于是，在A与B两集合中，至少有一个集合里有一个x使$f(x)=y$，即 $x \in A \cup B$

从而 $y=f(x) \in f(A \cup B)$，于是 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

所以$f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$

同样可证明 (2)

函数小结

- 函数
  - 概念、定义域，陪域，值域
  - 函数的类型：单设函数，满射函数，双射函数