§ 6.3 假设检验的基本概念

我们将讨论不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题. 这就是**根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确.**

这类问题称作假设检验Hypothesis Testing问题 .

何为假设检验?

假设检验是指施加于一个或多个总体的概率分布或参数的假设.所作假设可以是正确的,也可以是错误的.

为判断所作的假设是否正确,**从总体中抽取样本,根据样本的取值,按一定原则进行检验，然后作出接受或拒绝所作假设的决定.**

若对参数一无所知 → 用参数估计的方法处理

若对参数有所了解 → 但有怀疑,猜测需要证实之时 → 用假设检验的方法来处理

假设检验的内容

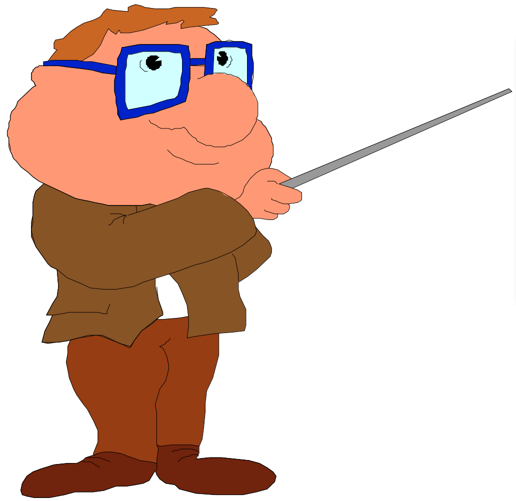
假设检验

- **参数检验**
  - 总体分布已知时检验关于未知参数的某个假设
- **非参数检验**
  - 总体分布未知时对分布类型的假设检验问题

假设检验的理论依据

假设检验所以可行,其理论背景为实际推断原理,即“**小概率原理**”

人们在实践中普遍采用的一个原则:

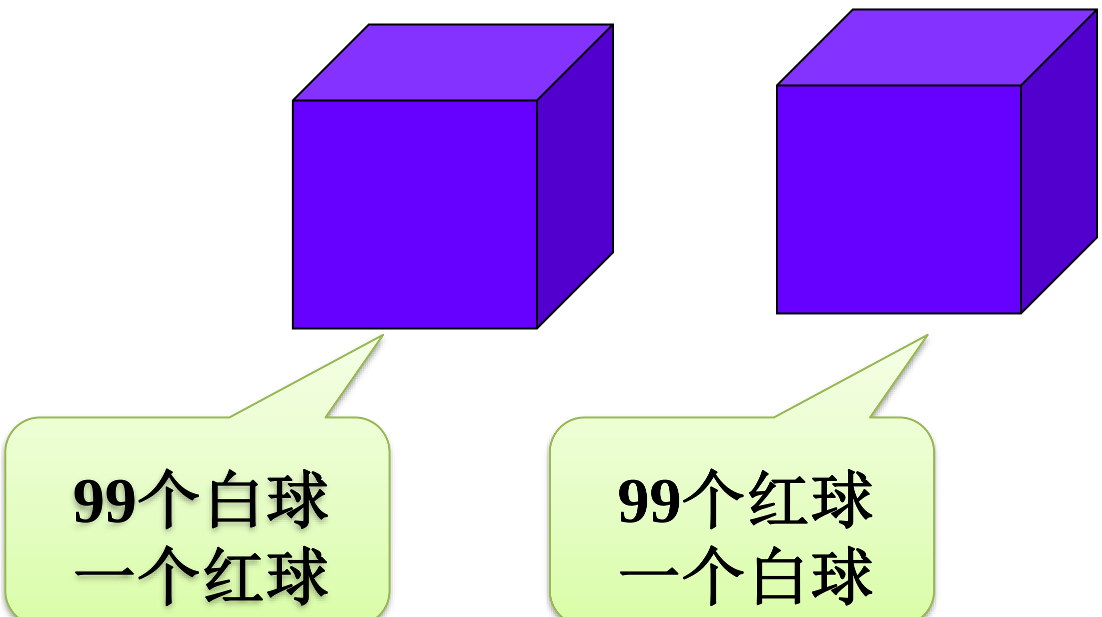


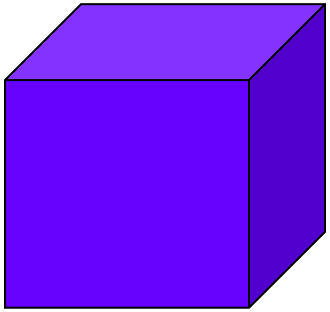
小概率事件在一次试验中基本上不会发生.

小概率事件在一次试验中基本上不会发生

下面我们用一例说明这个原则.

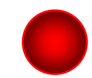
这里有两个盒子，各装有100个球.



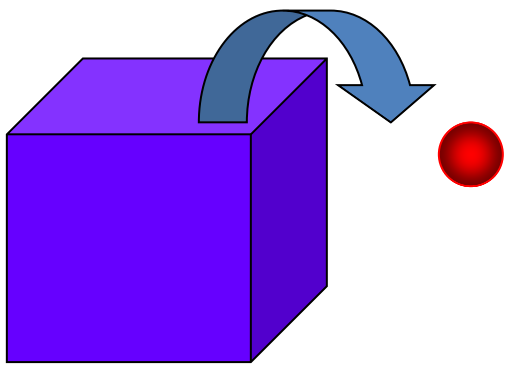


现从两盒中随机取出一个盒子，问这个盒子里是白球99个还是红球99个？

我们不妨先假设：这个盒子里有99个白球.

现在我们从中随机摸出一个球，发现是 

此时你如何判断这个假设是否成立呢？



假设其中真有99个白球，
摸出红球的概率只有1/100，
这是小概率事件.

小概率事件在一次试验中竟然发生了，不能不使人怀疑所作的假设.

例子中所使用的推理方法，可以称为

带概率性质的反证法

不妨称为**概率反证法**.

它不同于一般的反证法

一般的反证法要求在原假设成立的条件下导出的结论是**绝对**成立的，如果事实与之矛盾，则完全**绝对**地否定原假设.

概率反证法的**逻辑**是：

如果小概率事件在一次试验中居然发生，我们就以很大的把握否定原假设 null hypothesis.

在假设检验中，我们称这个小概率**为显著性水平，用 α 表示.**

α 的选择要根据实际情况而定.

常取 $\alpha = 0.1, \alpha = 0.01, \alpha = 0.05.$

假设检验步骤

例　某工厂生产的一种螺钉，标准要求长度是32.5毫米.　实际生产的产品，其长度X假定服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，现从该厂生产的一批产品中抽取6件, 得尺寸数据如下:

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问这批产品是否合格?

分析：这批产品(螺钉长度)的全体组成问题的总体*X*. 现在要检验*E*(*X*)是否为32.5.

已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 未知.

第一步：提出原假设null hypothesis和备择假设Alternative hypothesis

$$H_0 : \mu = 32.5 \Leftrightarrow H_1 : \mu \neq 32.5$$

第二步：取一检验统计量，在H_0成立下求出它的分布

$$t = \frac{\bar{X} - 32.5}{S/\sqrt{6}} \sim t(5)$$

能衡量差异大小且分布已知

第三步：

对给定的显著性水平α =0.01，查表确定临界值 $t_{\alpha/2}(5)=t_{0.005}(5)=4.0322$, 使

$$P\{|t|>t_{\alpha/2}(5)\}=\alpha$$

即“$|t|>t_{\alpha/2}(5)$”是一个小概率事件.

小概率事件在一次试验中基本上不会发生.

得否定域 W: $|t|>4.0322$

$$\text{拒绝域}\quad W:\ |t|>4.0322$$

第四步:

将样本值代入算出统计量 t 的实测值,

$$|t|=2.997<4.0322$$

没有落入拒绝域

故接受H_0.

这并不意味着H_0一定对，只是差异还不够显著,不足以否定H_0.

重要

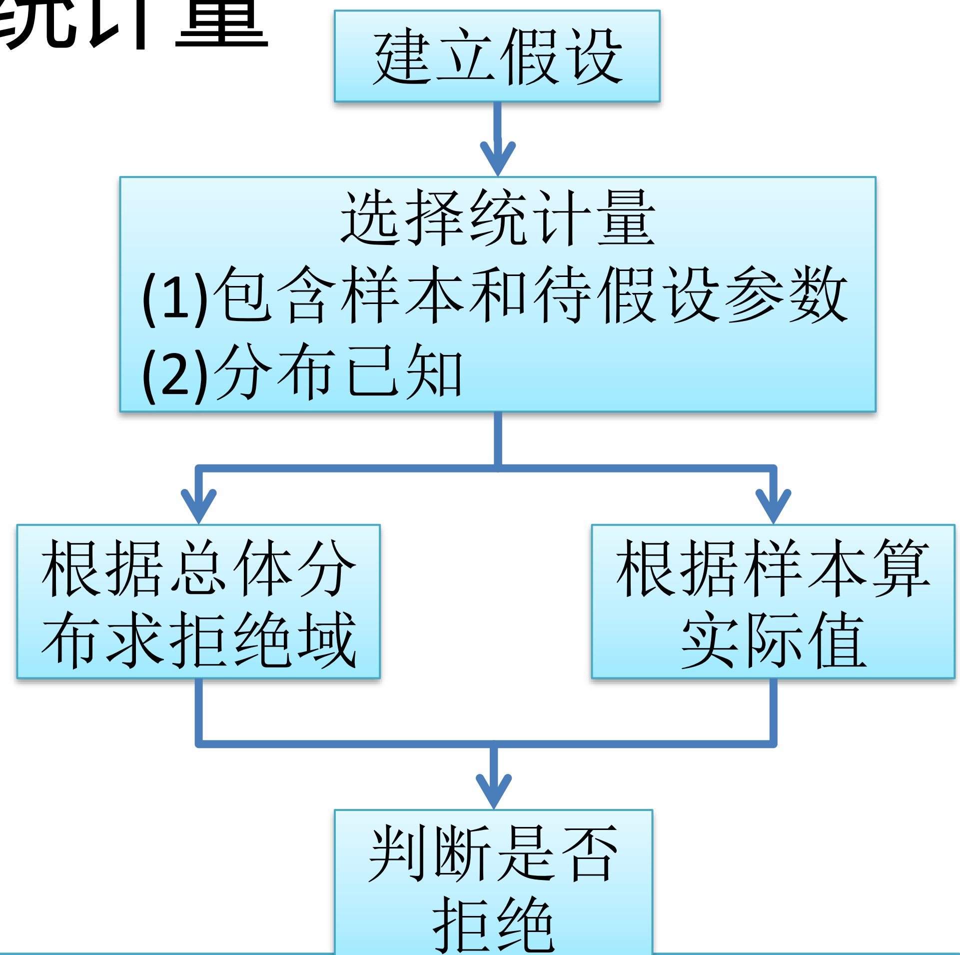
假设检验步骤

(1) 建立假设

(2) 在H_0为真时,选择统计量

(3) 确定拒绝域

(4) 作出判断



假设检验的两类错误

假设检验会不会犯错误呢？

由于作出结论的依据是 小概率原理

小概率事件在一次试验中基本上不会发生.

不是一定不发生

在给定α的前提下，接受还是拒绝原假设完全取决于样本值，因此所作检验可能导致以下两类错误的产生：

第一类错误 —— **弃真错误**

第二类错误 —— **取伪错误**

假设检验的两类错误

	实际情况	
决定	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	第一类错误	正确
接受H_0	正确	第二类错误

犯两类错误的概率:

显著性水平

P\{第一类错误\}= P\{拒绝H_0|H_0为真\}=α ,

P\{第二类错误\}=P\{接受H_0|H_0不真\}= β.

两类错误是互相关联的，当样本容量固定时，一类错误概率的减少导致另一类错误概率的增加.

要同时降低两类错误的概率α, β，或者要在α不变的条件下降低β，需要增加样本容量.