§ 6.4 正态总体参数的假设检验

- 关于均值μ的检验
  - σ^2已知
  - σ^2未知
- 关于方差σ^2的检验
- 均值μ和方差σ^2检验的几个例子
- 双侧检验与单侧检验
- 两个正态总体的假设检验
- 正态总体的假设检验表

重要

1. 一个正态总体

（1）关于μ 的检验

给定显著性水平α与样本值$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，需检验：

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

构造统计量

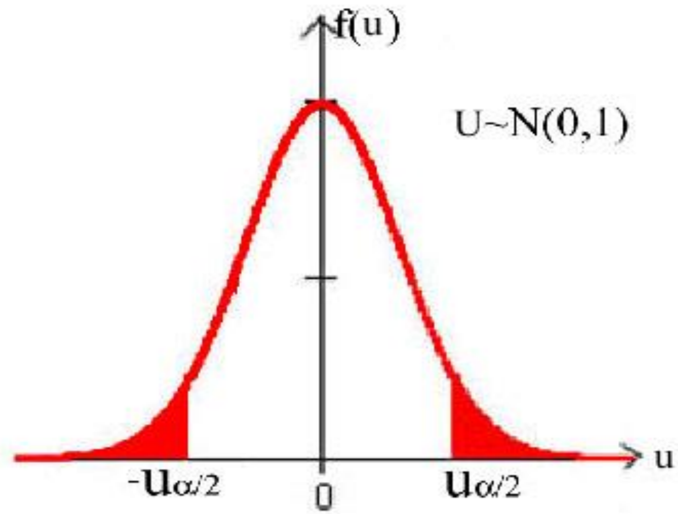
$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

重要

$$P\{|U| \geq u_{\alpha/2}\} = \alpha$$

也就是说,“ $|U| \geq u_{\alpha/2}$ ”是一个小概率事件.

故我们可以取拒绝域为:



W: $|U| \geq u_{\alpha/2}$

如果由样本值算得该统计量的实测值落入区域W，则拒绝H_0；否则，不能拒绝H_0.

U 检验法

U 检验法 (σ^2 已知)

重要

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -u_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq u_{\alpha}$

T 检验法 (σ^2 未知)

重要

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T\leq -t_{\alpha}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T\geq t_{\alpha}$

例6. 4. 1 化肥厂用自动包装机装化肥，规定每袋标准重量为100，设每袋重量X服从正态分布且标准差$\sigma=0.9$不变. 某天抽取 9袋，测得重量为

99.3, 98.7, 101.2, 100.5, 98.3, 99.7, 102.6, 100.5, 105.1

问机器工作是否正常($\alpha=0.05$)?

H_0： $\mu=100$； H_1： $\mu\neq 100$

U 检验法

构造统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-100}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$|U|\geq u_{\alpha/2}$

$U=\dfrac{100.66-100}{\dfrac{0.9}{\sqrt{9}}}=2.2 > u_{0.025}=1.96$ 拒绝域

拒绝

例6.4.2　金属锰的熔化点 X 服从正态分布，测量5次得熔化点为：1267，1271，1256，1265，1254 能否认为熔化点为 $1260(\alpha=0.05)$？

$$X \sim N(\mu,\sigma^2),\ \ \sigma^2 \text{ 未知.}$$

$$H_0 : \mu = 1260; \quad H_1 : \mu \neq 1260$$

接受

$$|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - 1260}{S/\sqrt{5}} = 0.796 \boxed{<} t_{0.025}(4) = 2.776$$

重要

（2）关于 σ^2 的检验 χ^2**检验法**(μ已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n)$

重要

χ^2检验法(μ 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例6. 4. 3　已知维尼纶纤度 X 在正常情况下服从正态分布$N(\mu, 0.048^2)$. 现在测了5 根纤维，其纤度分别为:

1.44，　1.36，　1.40，　1.55，　1.32，

问：产品的精度是否有显著的变化$(\alpha = 0.05)$?

$$H_0 : \sigma^2 = 0.048^2; \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.048^2.$$

拒绝

$$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{或} \ \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{0.03112}{0.048^2} = 13.51 > \chi^2_{0.025}(4) = 11.143$$

$$\chi^2_{0.975}(4) = 0.485$$

重要

2. 单侧检验与双侧检验

原假设和备择假设的内容随问题的侧重点不同而不同，但它们本质上都是将参数空间Θ分解为两个互不相容的子集(不妨设为Θ_0及Θ-Θ_0)，然后检验参数θ属于哪一个子集。即检验的假设都可写成

$$H_0:\theta\in\Theta_0, H_1:\theta\in\Theta-\Theta_0$$

如果在数轴上，集合Θ-Θ_0位于集合Θ_0的两侧，这种类型的参数检验称为双侧检验；反之，如果在数轴上，集合Θ-Θ_0位于集合Θ_0的一侧，这种类型的参数检验称为单侧检验。

双侧检验总是按$\alpha/2$查表，单侧检验总是α按查表。

下面看一个单侧检验的例子:

方差已知时，正态总体均值μ的单侧检验：

重要

$$H_0: \mu \le \mu_0,\quad H_1: \mu > \mu_0,$$

μ_0是一个已知常数

选择 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 作为检验统计量。

当H_0成立时，有

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

从上式看到，当统计量U的值偏大，上式不成立，即拒绝H_0。

U的值偏大，等价于 $\bar{X} - \mu_0$的值偏大，等价于μ_0偏小。对于给定的显著性水平α，有

$$P\left(U \ge u_\alpha\right) \le P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \ge u_\alpha\right) = \alpha$$

因此拒绝域为

$$V = \left\{\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) : U \ge u_\alpha\right\}$$

重要

另一种类型的单侧检验：$H_0: \mu \geq \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$

- 仍可取 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

  作为检验统计量。对U的取值进行类似分析，当观测值偏小时，应拒绝H_0。故拒绝域为

$$V = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : U \leq -u_\alpha\}$$

- 类似可讨论方差未知时，正态总体均值的单侧检验问题，以及正态总体方差的单侧检验问题。

例 某织物强力指标X的均值 μ_0=21公斤. 改进工艺后生产一批织物，今从中取30件，测得 $\overline{X}$=21.55公斤. 假设强力指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 且已知σ=1.2公斤， 问在显著性水平 α=0.01下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高?

解:提出假设: $H_0:\mu\le 21;\quad H_1:\mu>21$

取统计量$\boldsymbol{U}=\dfrac{\overline{X}-21}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$\{U\ge u_{0.01}\}$ 是一小概率事件

否定域为 W: $U\ge u_{0.01}$ =2.33

代入 $\sigma=1.2$, $n=30$，并由样本值计算得统计量U的实测值

$$U=2.51>2.33$$

落入否定域

故拒绝原假设H_0.

这时可能犯第一类“弃真”错误，犯错误的概率不超过0.01.

例 某厂生产小型马达,说明书上写着:在正常负载下平均消耗电流不超过0.8 安培.

随机测试16台马达, 平均消耗电流为0.92安培，标准差为0.32安培.

设马达所消耗的电流 服从正态分布, 取显著性水平为$\alpha = 0.05$, 问根据此样本, 能否否定厂方的断言?

假设

$$H_0: \mu \le 0.8\ ; \qquad H_1: \mu > 0.8$$

$$H_0: \mu \ge 0.8\ ; \qquad H_1: \mu < 0.8$$

解一 $H_0: \mu \le 0.8$； $H_1: \mu > 0.8$

σ未知, 选检验统计量:$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{16}} \sim T(15)$

拒绝域为 $T = \dfrac{\bar{x} - 0.8}{s / \sqrt{n}} \ge 1.753 = t_{0.05}(15)$

将 $\bar{x} = 0.92, s = 0.32,$ 代入得

$T = 1.5 < 1.735,$ 落在拒绝域外

故接受原假设 H_0, 即不能否定厂方断言.

解二　H_0：$\mu \geq 0.8$；　H_1：$\mu < 0.8$

选用统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{16}} \sim T(15)$

拒绝域 $T = \dfrac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} \leq -1.753 = -t_{0.05}(15)$

现 $T = 1.5 > -1.735$，落在拒绝域外

故接受原假设，即否定厂方断言.

重要

上述两种解法得到不同的结论

第一种假设是不轻易否定厂方的结论;

第二种假设是不轻易相信厂方的结论.

由例可见：对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设),统计检验的结果也会不同.

为何用假设检验处理同一问题会得到截然相反的结果?

这里固然有把哪个假设作为原假设从而引起检验结果不同这一原因；除此外还有一个根本的原因，即样本容量不够大.

若样本容量足够大，则不论把哪个假设作为原假设所得检验结果基本上应该是一样的．否则假设检验便无意义！

由于假设检验控制犯第一类错误的概率，使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重，也就是 H_0 得到特别的保护．因而，通常把有把握的，经验的结论作为原假设，或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

3. 两个正态总体

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

两样本 X, Y 相互独立,

样本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n), (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$

显著性水平α

（1） 关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

(σ_1^2， σ_2^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$U = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$U \leq -u_\alpha$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$U \geq u_\alpha$

σ_1^2, σ_2^2 未知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}} S_w} \sim t(n+m-2)$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$		$T \geq t_\alpha$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$		$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$

其中 $T \leq -t_\alpha$

(2) 关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

μ_1, μ_2均未知

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n-1, m-1)$	$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$ 或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$
$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \le F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$
$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \ge F_{\alpha}(n-1, m-1)$

例 为比较两台自动机床的精度，分别取容量为11和9的两个样本，测量某个指标的尺寸(假定服从正态分布)，得到下列结果：

车床甲：6.2, 5.7, 6.0, 6.3, 6.5, 6.0,
5.7, 5.8, 6.0, 5.8, 6.0;

车床乙：5.6, 5.7, 5.9, 5.5, 5.6, 6.0,
5.8, 5.5, 5.7.

在 α =0.05时，问这两台机床是否有同样的精度?

解:设两台自动机床的方差分别为σ_1^2,σ_2^2,
在α=0.05下检验假设:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

取统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(10,8)$

其中S_1^2,S_2^2为两样本的样本方差

否定域为 W: $F\leq F_{1-\alpha/2}(10,8)$ 或

$$F\geq F_{\alpha/2}(10,8)$$

由样本值可计算得F的实测值为:

$$F = 2.13$$

查表得 $F_{\alpha/2}(10,8) = F_{0.025}(10,8) = 4.3$

$$F_{1-\alpha/2}(10,8) = F_{0.975}(10,8) = 1/F_{0.025}(8,10)$$

$$= 1/3.85 = 0.26$$

由于 $0.26 < 2.13 < 4.3$， 故接受H_0 .

例 杜鹃总是把蛋生在别的鸟巢中,现从两种鸟巢中得到杜鹃蛋24个.其中9个来自一种鸟巢, 15个来自另一种鸟巢, 测得杜鹃蛋的长度(mm)如下:

$n=9$	21.2	21.6	21.9	22.0	22.0	$\overline{x}=22.20$
	22.2	22.8	22.9	23.2		$s_1^2=0.4225$
$m=15$	19.8	20.0	20.3	20.8	20.9	$\overline{y}=21.12$
	20.9	21.0	21.0	21.0	21.2	$s_2^2=0.5689$
	21.5	22.0	22.0	22.1	22.3	

试判别两个样本均值的差异是仅由随机因素造成的还是与来自不同的鸟巢有关

$$\alpha = 0.05$$

解 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ； $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

取统计量 $$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} S_w} \sim t(n+m-2)$$

拒绝域 $|T| \geq t_{0.025}(22) = 2.074$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} = 0.718$$

$$T_0 = 3.568 > 2.074$$

拒绝H_0即蛋的长度与不同鸟巢有关.