第三章 多维随机变量及其分布

多维
随机变量及其分布

我们开始学习——多维随机变量

它是第二章内容的推广.

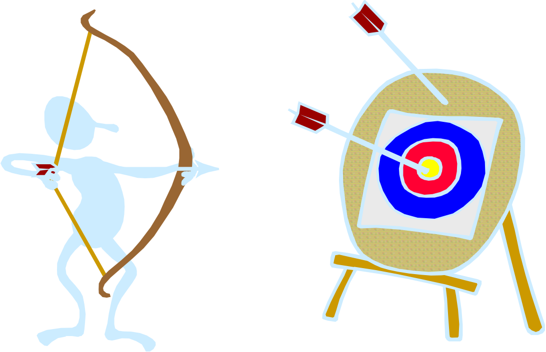
一维随机变量及其分布

多维随机变量及其分布

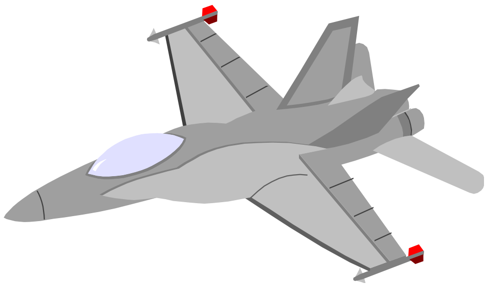
由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量.

到现在为止，我们只讨论了一维*r.v*及其分布．但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

在打靶时,命中点的位置是由一对*r.v*(两个坐标)来确定的.



飞机的重心在空中的位置是由三个*r.v* (三个坐标)来确定的等等.



一般地，我们称n个随机变量的整体$X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$为n维随机变量或随机向量. 以下重点讨论二维随机变量.

请注意与一维情形的对照 .

§3.1 二维随机变量及其分布

定义 设Ω为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists \left(X(\omega), Y(\omega)\right) \in \mathrm{R}^2$$

则称(X, Y)为**二维$r.v.$**或**二维随机向量**

1. 二维随机变量的联合分布函数 重要

定义 设(X, Y)为二维 $r.v.$ 对任何一对实数(x, y), 事件

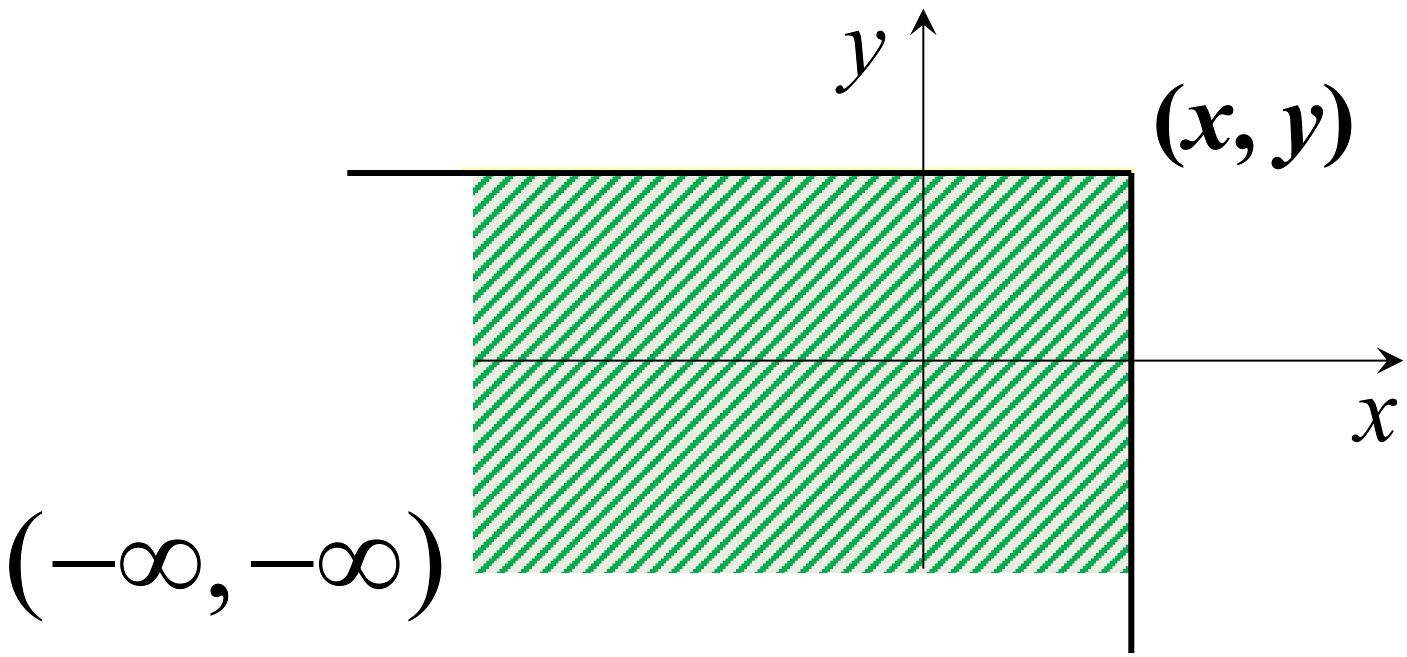
$$(X \le x) \cap (Y \le y) \text{ (记为 } \{X \le x, Y \le y\}\text{)}$$

的概率 $P\{X \le x, Y \le y\}$ 定义了一个二元实函数 $F(x, y)$，称为二维 $r.v.(X, Y)$ 的**分布函数 Joint Cumulative Distribution Function**，即

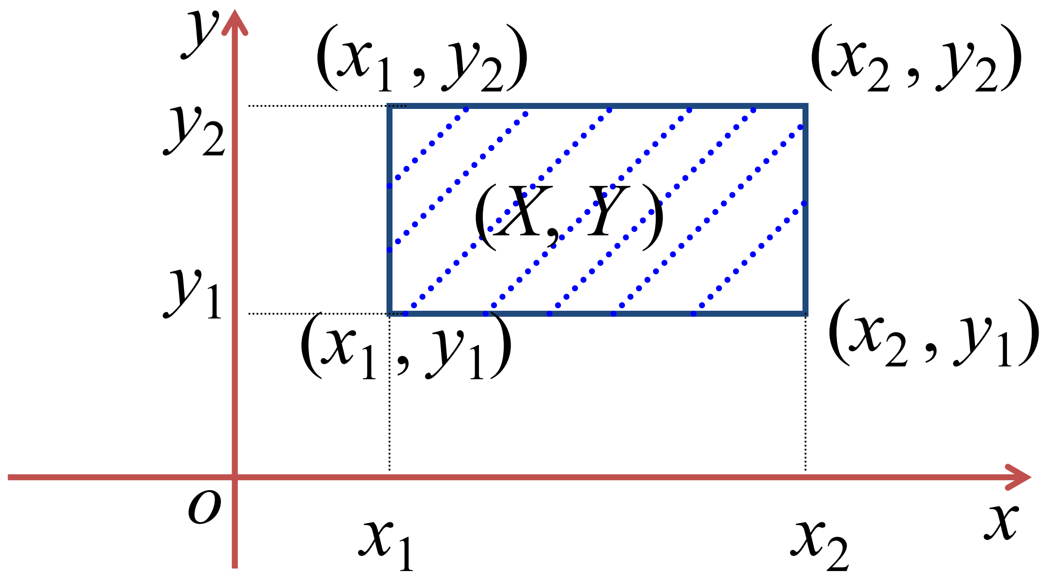
$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

分布函数的几何意义

如果用平面上的点 (x, y) 表示二维*r.v.* (X, Y)的一组可能的取值，则 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 的取值落入图所示角形区域的概率.



(X,Y) 落在矩形区域$[x_1 < x \le x_2; y_1 < y \le y_2]$
内的概率可用分布函数表示



$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

联合分布函数的性质

重要

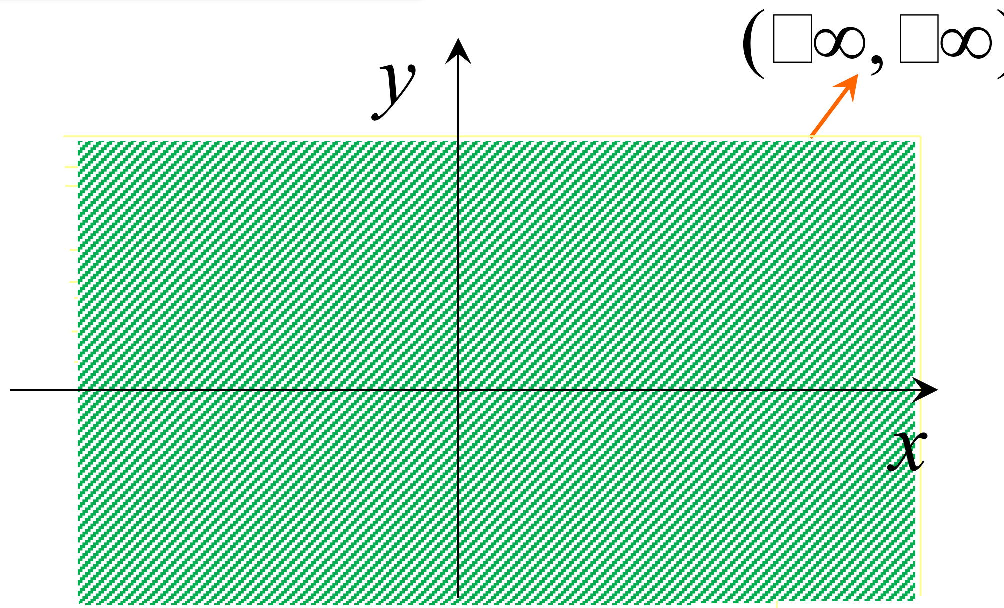
① $0 \le F(x,y) \le 1$

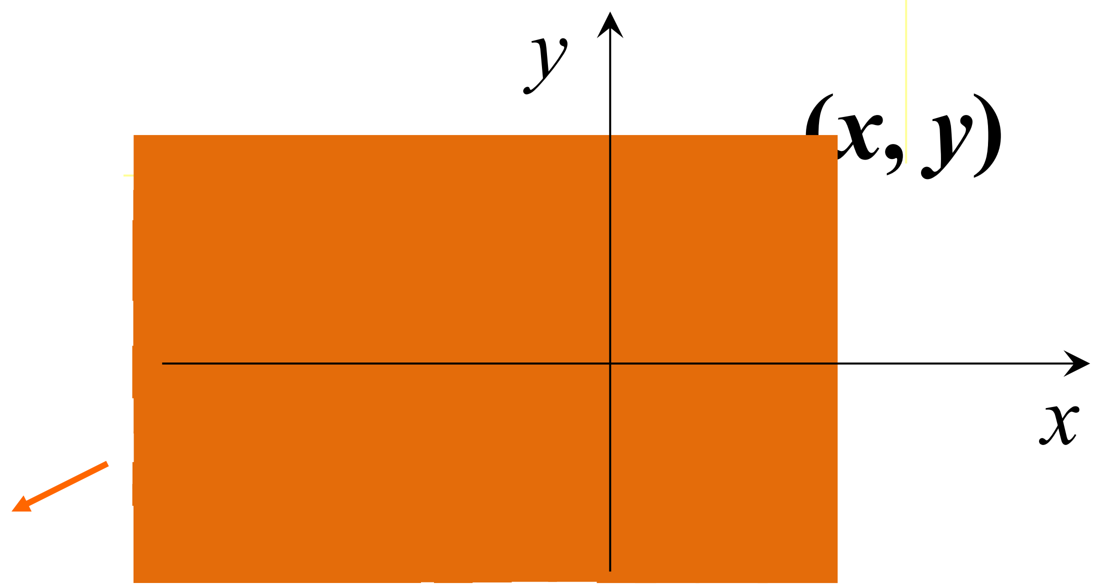
$F(+\infty, +\infty) = 1$

$F(x, -\infty) = 0$

$F(-\infty, y) = 0$

$F(-\infty, -\infty) = 0$





$(-\infty, -\infty)$

② 对每个变量单调不减

固定 x，对任意的 $y_1 < y_2$，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

固定 y，对任意的 $x_1 < x_2$，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$

③ 对每个变量右连续

$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$$

$$F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$$

2. 二维离散型变量及其概率分布

定义 若二维 $r.v.(X,Y)$所有可能的取值为有限多个或无穷可列多个, 则称 (X,Y) 为**二维离散型** $r.v.$

要描述二维离散型 $r.v.$的概率特性及其与每个 $r.v.$之间的关系常用其**联合概率分布**和**边缘概率分布**

联合分布律

设(X,Y)的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \ldots$$

则称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

为二维 $r.v.(X,Y)$ 的联合概率分布

也简称 概率分布 或 分布律

显然， $p_{ij} \geq 0,\ i, j = 1, 2, \cdots$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

(X,Y) 的联合分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

基本概念

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">一维随机变量</th><th colspan="2">二维随机变量</th></tr>
<tr><td>离散</td><td>概率分布(分布律)</td><td rowspan="2">概率分布函数</td><td>联合…</td><td rowspan="2">联合…</td></tr>
<tr><td>连续</td><td>概率密度函数</td><td>联合…</td></tr>
</table>

已知联合分布律可以求出其联合分布函数

二维离散 *r.v.* 的联合分布函数

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij},$$

$$-\infty < x, y < +\infty.$$

重要

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j)$$ 的求法

(1) 利用古典概型直接求；

(2) 利用乘法公式

$$p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j \mid X = x_i).$$

例 设随机变量 X 在 1,2,3 三个数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在1~X 中等可能地取一整数值，试求 (X,Y) 的分布律。

解 由题意知，（X=i，Y=j）的取值情况是：

i=1,2,3,且是等可能的； j 取不大于 i 的正整数。

由乘法公式求得 (X,Y) 的分布律。

$$P(X=i,Y=j)=P(Y=j\mid X=i)P(X=i)=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{3},$$

$$\text{其中 } j\le i,\quad i=1,2,3.$$

$$P(X=i,Y=j)=0,\quad \text{其中 } j>i.$$

由此得（X，Y）的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. 二维连续型随机变量

重要

定义 设二维 $r.v.(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x, y 有

$$F(x,y) \square P(X \le x, Y \le y) \square \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

则称(X,Y) 为**二维连续型** $r.v.$

$f(x,y)$ 为(X,Y) 的**联合概率密度函数**

简称**概率密度函数**简记 $p.d.f.$

联合密度函数的性质

重要

(1) $f(x,y) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$

(3) **在** $f(x,y)$ **的连续点处**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

(4) **若** G **是平面上的区域，则**

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

例 设 $r.v.\ (X,Y)$ 的联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(9+x^2)(16+y^2)}$$

(1) 求常数A;

(2) 求$(X,\ Y)$的联合分布函数;

(3) 求$P(0<X\le 3,\ 0<Y\le 4)$.

解：(1) 由密度函数的性质，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\frac{A}{12}=1$$

所以，$A=12.$

不是任意函数都是密度函数

(2) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{9+u^2}\cdot\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{16+v^2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{4}\right)$$

(3) $$P(0 < X \le 3, 0 < Y \le 4)$$

$$= F(3,4) - F(0,4) - F(3,0) + F(0,0)$$

$$= \frac{1}{16}$$

常用连续型二维随机变量分布

◆ 区域G上的**均匀分布**，记作$U(G)$

G是平面上的有界区域，面积为A

若$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.$为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/A, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的**均匀分布**

若(X, Y)服从区域G上的均匀分布,

则 $\forall G_1 \subseteq G$, 设G_1的面积为A_1,

$$P\{(X,Y)\in G_1\} = \frac{A_1}{A}$$

关键是确定**A1**的面积，规则形状可以直接计算，否则需要转化为积分求面积

联合分布、边缘分布、条件分布皆如此

例 设$(X,Y)\sim G$上的均匀分布,

$$G = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$$

求

(1) $f(x,y)$;

(2) $P(Y>X^2)$;

(3) (X,Y)在平面上的落点到y轴距离小于0.3的概率.

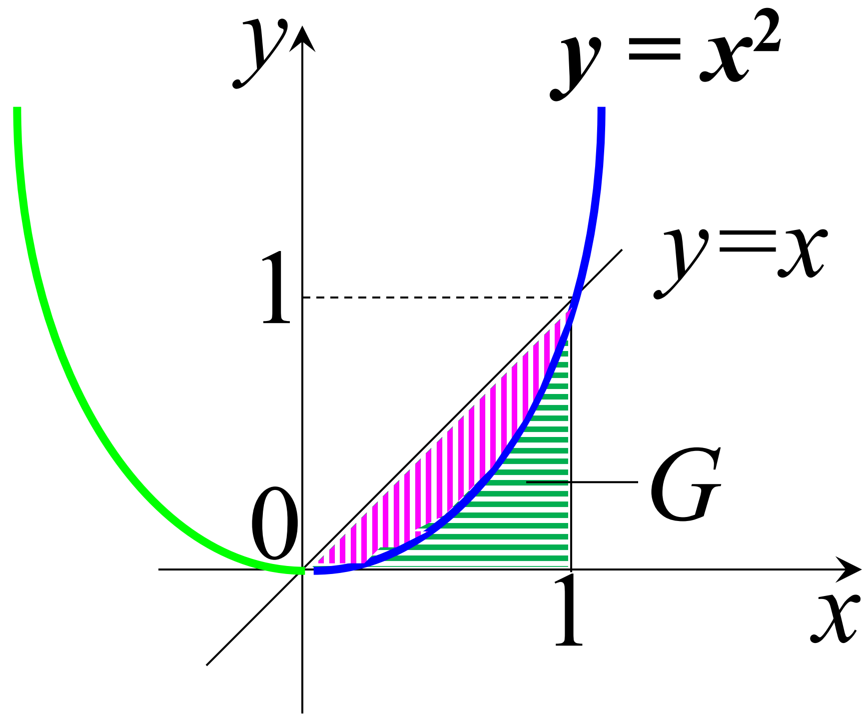
解 (1)

$$f(x,y) \square \begin{cases} 2, & 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) $P(Y \square X^2)$

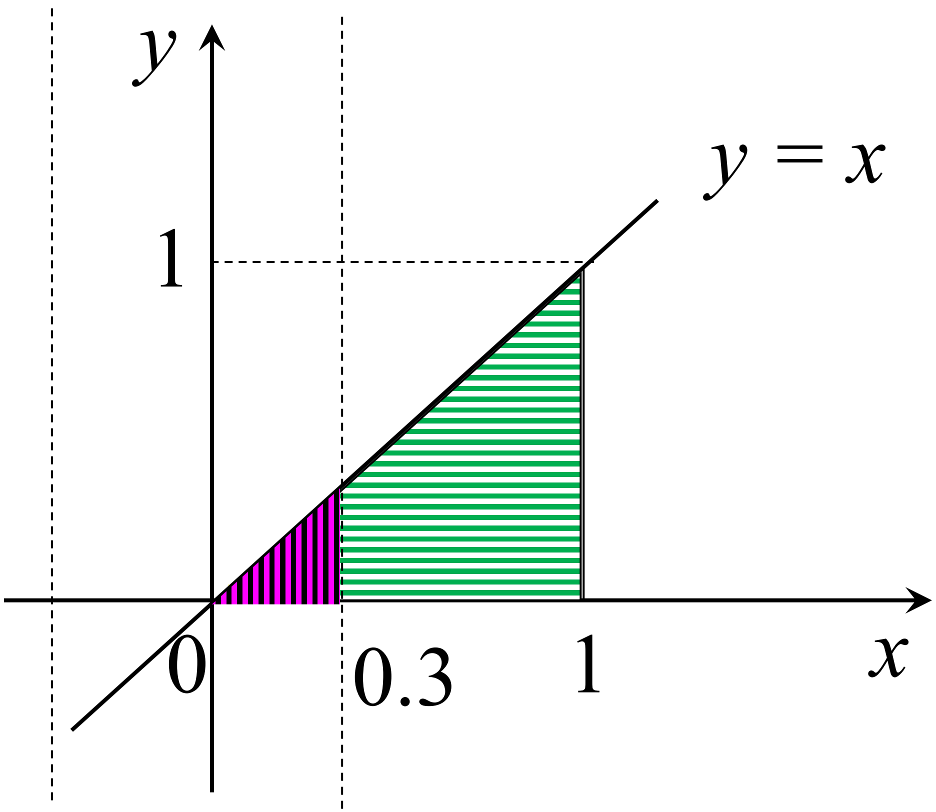
$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} 2dy$$

$\square 1/3$



$$(3)\ P(|X| \square 0.3) \square P(-0.3 \square X \square 0.3)$$

$$\square\, 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.3)^2 \square 0.09$$



面积不好直接求怎么办

$$= \int_0^{0.3} dx \int_0^{x} 2dy$$

二维正态分布

若$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.$为

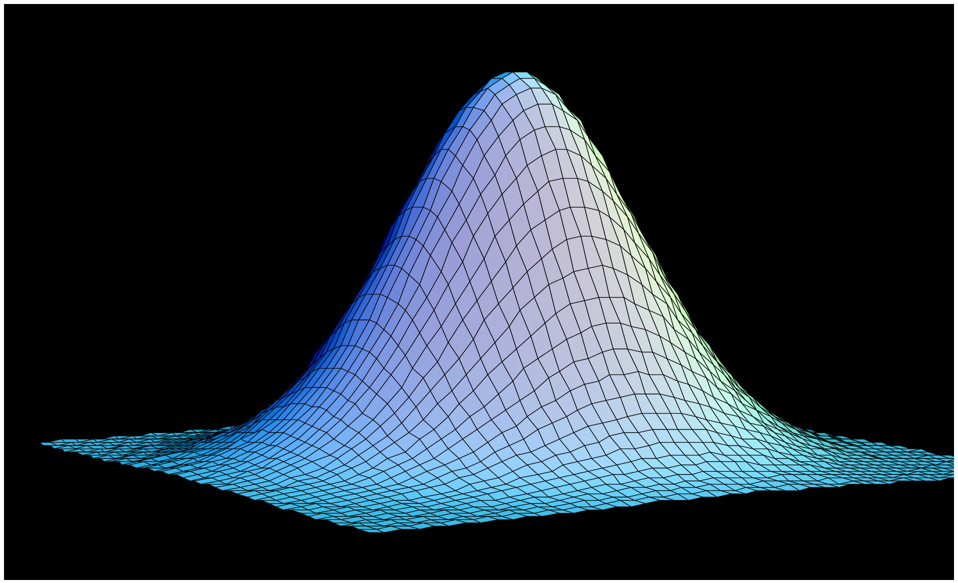
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

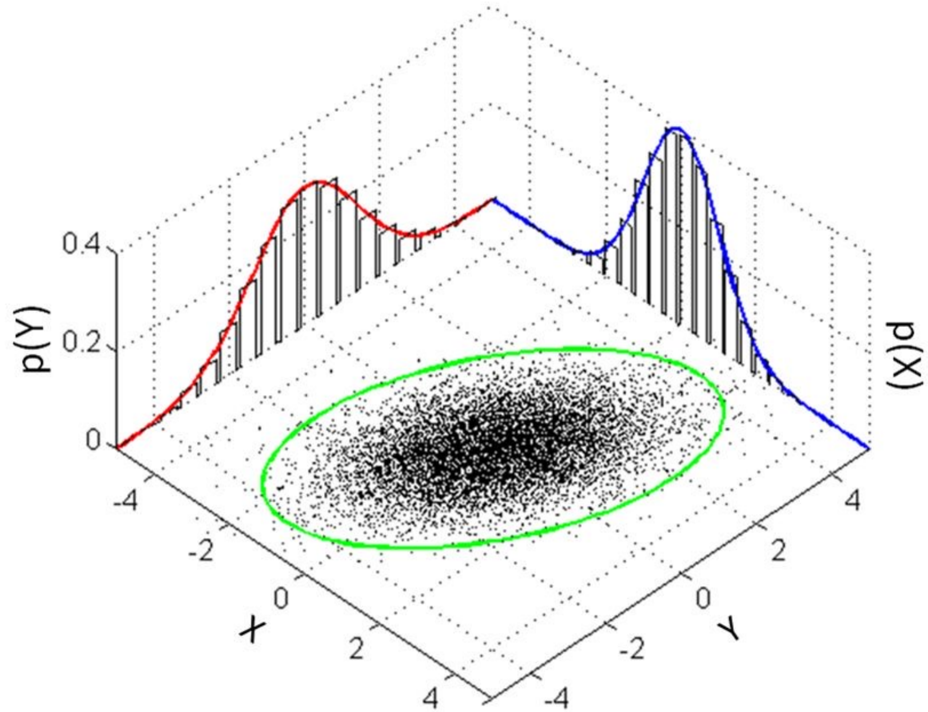
$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho$(Rho)的**正态分布**，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$

其中$\sigma_1,\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$.





二维正态分布图

总结

1. 二维随机变量及其分布
2. 联合分布律

   古典概型

   乘法公式
3. 常用连续型二维分布

   均匀分布

   二维正态分布