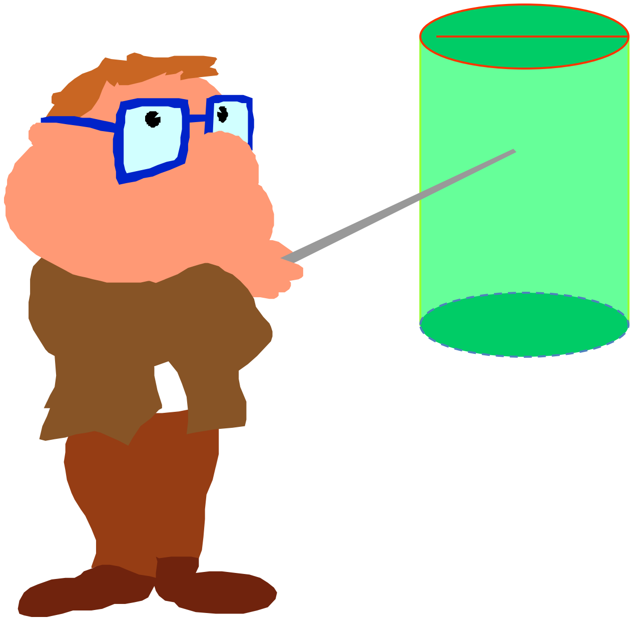
随机变量函数的分布

问题的提出

在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

例如，已知圆轴截面直径 d 的分布，



求截面面积 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$ 的分布.

§2.4 随机变量函数的分布

重要

问题 **设随机变量X的分布已知，$Y = g(X)$(设g是连续函数)(Y is a transformation of X)，如何由X的分布求出Y的分布？**

方法 将与Y有关的事件转化成X的事件

重要

离散型随机变量函数的分布

设 r.v. X 的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

由已知函数 $g(x)$可求出 r.v. Y 的所有可能取值，则 Y 的概率分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_{k:\, g(x_k)=y_i} p_k, \quad i = 1,2,\cdots$$

一般，若**X**是离散型 ***r.v***，**X**的分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

则 **Y=g(X)**

$$\sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_k) \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

如果$g(x_k)$中有一些是相同的，把它们作并项，对应概率相加即可.

例1 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求 $Y_1 = 2X - 1$ 与 $Y_2 = X^2$ 的分布律

解

Y_1	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Y_2	1	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Y_2	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

重要

连续型随机变量函数的分布

已知 X 的d.f. $f(x)$ 或分布函数 $F(x)$

求 $Y=g(X)$ 的d.f.

方法：

(1) 从分布函数出发

(2) 用公式直接求d.f.

方法一 从分布函数出发

重要

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

对于连续型随机变量，在求$Y=g(X)$ 的分布时，关键的一步是把事件 $\{ g(X) \le y \}$ 转化为X在一定范围内取值的形式(即对应值域的转换)，从而可以利用 X 的分布来求 $P\{ g(X) \le y \}$.

方法一求解步骤

1. 如未直接给定x的密度，先列出

$$f_X(x) =$$

2. 根据x来确定y的范围

$$A_y = \{x : g(x) \le y\}$$

3. 求y的分布

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$
$$= P(\{x; g(x) \le y\})$$
$$= \int_{A_y} f_X(x)dx$$

4. 求y的密度

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

例 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解： 设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P(2X+8\leq y)$$

$$=P\{X\leq \frac{y-8}{2}\}=F_X(\frac{y-8}{2})$$

于是Y的密度函数

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Y=2X+8

注意到 $\mathbf{0<x<4}$ 时，$f_X(x)\neq 0$

即 $\mathbf{8<y<16}$ $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\neq 0$

此时 $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)=\frac{y-8}{16}$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8<y<16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 已知 X 的 d.f.为 $f_X(x), Y = aX + b$,
a,b为常数，且 $a \neq 0$, 求 $f_Y(y)$

解
$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$= P(aX + b \le y)$$

当 $a > 0$ 时，
$$F_Y(y) = P\left(X \le \frac{1}{a}(y-b)\right)$$
$$= F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$
$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

当$a<0$时，

$$F_Y(y)=P\left(X\ge\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\Rightarrow\quad f_Y(y)=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

故

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)}$$

例如 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = aX + b$，则

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

$$Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$$

特别地，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，

$a = 1/\sigma$
$b = -\mu/\sigma$

则 $$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

例 设 X 具有概率密度$f_X(x)$,求$Y=X^2$的概率密度.

解：设Y和X的分布函数分别为$F_Y(y)$和$F_X(x)$，

注意到 $Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0$时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$

$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

求导可得

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

例如,设 X~$N(0,1)$,其概率密度为:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<\infty$$

则 $Y=X^2$ 的概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

重要

从上述两例中可以看到，在求$P(Y\le y)$的过程中，关键的一步是设法从$\{ g(X) \le y \}$中解出X，从而得到与$\{g(X) \le y \}$等价的X的不等式 .

例如，用$\{X \le \frac{y-8}{2}\}$代替 $\{2X+8 \le y \}$

用$\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$代替$\{ X^2 \le y \}$

这样做是为了利用已知的 X的分布，从而求出相应的概率.

这是求$r.v$的函数的分布的一种常用方法.

方法二 用公式

重要

定理 设连续型r.v X具有概率密度 $f_X(x)$，又设 $y=g(x)$单调可导，其反函数为 $x=g^{-1}(y)$，则 $Y=g(X)$是一个连续型r.v，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中， $\alpha=\min\limits_{a\le x\le b} g(x),\ \beta=\max\limits_{a\le x\le b} g(x),$

此定理的证明与前面的解题思路类似.

方法二求解步骤

1. 如未直接给定x的密度，先列出

$$f_X(x) =$$

2. 求反函数及导数

$$x = g^{-1}(y)$$

$$\frac{dx}{dy} =$$

3. 带入公式求y的密度及取值

$$\boxed{f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}}$$

其中, $\alpha = \min\limits_{a\le x\le b} g(x),\ \beta = \max\limits_{a\le x\le b} g(x),$

前例 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 Y=2X+8 的概率密度.

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y-8}{2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

绝对值号

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 $X \sim E(2)$, $Y = -3X + 2$, 求$f_Y(y)$

解
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad \lambda>0\text{ 为常数}$$

$$g^{-1}(y)=x=\frac{y-2}{-3},\qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{1}{3}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中, $\alpha=\min\limits_{a\le x\le b} g(x)$, $\beta=\max\limits_{a\le x\le b} g(x)$,

$$f_Y(y)=\left|\frac{1}{-3}\right| f_X\left(\frac{1}{-3}(y-2)\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot 2e^{-2\times\left(-\frac{y-2}{3}\right)}, & -\frac{y-2}{3}>0\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}e^{-\frac{2(2-y)}{3}}, & y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Summary

2.1 r.v. X, $F(x)$, $f(x)$定义,关系,性质

2.2 离散型随机变量及其分布律

超几何分布
几何分布
两点分布
二项分布
泊松分布

2.3连续型随机变量及其分布

均匀分布
指数分布
正态分布、标准正态分布

2.4 随机变量函数的分布

(1) 从分布函数出发
(2) 用公式直接求d.f.