概率统计第二章习题课

习题二

1.是否分布列?

X	-1	0	1
P	-0.5	0.9	0.6

否

X	0	1	2
P	0.6	0.1	0.15

2.袋中有5只球，编号为1,2,3,4,5. 在袋中同时取3只球，用X表示取出的3只球中的最大号码数，求X的分布列

$$P(X=3)=P(\text{一球为3号, 两球为1,2号})=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=4)=P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球})=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球})=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

3.设在15只零件中有3只是次品，在其中不放回取4次，每次任取一只，以 X 表示取出次品的只数，求 X 的分布律.

超几何分布

$$P(X=k)=\frac{C_3^k C_{12}^{4-k}}{C_{15}^4}, k=0,1,2,3.$$

4.设随机变量X的分布律为：

$$(1)\ P(X=k)=\frac{a}{N},k=1,2,\cdots,N \qquad a=1$$

$$(2)\ P(X=k)=\frac{a}{2^k},k=1,2,\cdots, \qquad a=1$$

试确定常数a .

解: 依据概率函数的性质:

$$\begin{cases} P(X=k)\geq 0, \\ \sum_k P(X=k)=1 \end{cases}$$

5.设每次试验成功的概率为 3/4，求首次成功所需试验次数X的分布律及X取偶数的概率。

几何分布

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots$$

$$P(X=k)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots$$

$$P(X=\text{偶数})=\frac{1}{2}, \quad k=2,4,\cdots$$

× 为啥取偶数的概率不是1/2?

$$P(X\text{取偶数})=\sum_{n=1}^{\infty}P(X=2n)=\frac{3}{4}\,\frac{1/4}{1-1/16}=\frac{1}{5}$$

7.已知零件的次品率为0.1，现从中任取20个，求:(1)恰有3个次品的概率；

令X表示次品数,则 $X \sim B(20,0.1)$

$$P(X=3)=C_{20}^{3}(0.1)^{3}(0.9)^{17}$$

(2)至少有3个次品的概率；

$$P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{20}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

(3)次品数的最可能值.

$$k=[(n+1)p]=2$$

第8，9，10，11都是二项分布的题目，其中后两题可以使用泊松近似简化计算，我们重点讲解第10题。

10.设同类型设备100台，每台工作相互独立，每台设备发生故障的概率都是0.01. 一台设备发生故障可由一个人维修. 问至少要配备多少维修工人，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

解 设需要配备 N 个维修工人,

设 X 为同时发生故障的设备台数,

则 $X \sim B(100, 0.01)$

泊松近似

$$P(X > N) = \sum_{k=N+1}^{100} C_{100}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{100-k} < 0.01$$

$$\lambda = 100 \times 0.01 = 1$$

$$P(X > N) \approx \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-1} \frac{1^k}{k!} < 0.01$$

查附表3得 $N+1=5$

$$N = 4$$

至少要配备4名维修工人

12.电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布，求

（1）某一分钟内有8次呼唤的概率;

（2）某一分钟内呼唤次数大于10的概率。

（1）$P(X=8)=\dfrac{4^8}{8!}e^{-4}=0.029770$

（查λ= 4泊松分布表）

$P(X=8)=P(X\geq 8)-P(X\geq 9)$

$=0.051134-0.021363=0.029771$

（2）$P(X>10)=P(X\geq 11)=0.002840$（查表计算）

13. 设随机变量 X 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases} cx, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1)c;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \quad 得\ c=2$$

(2)$P(0.3<X<0.7)$;

$$\int_{0.3}^{0.7} f(x)dx=0.4$$

(3)a, $P(X>a)=P(X<a)$;

$$P(X>a)+P(X<a)=1\Rightarrow P(X<a)=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4)分布函数$F(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{0}^{x} 2tdt=x^2$;

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$

15. 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求c及$P(|X|\le\dfrac{1}{2})$.

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,故

$$c=\frac{1}{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=c\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=c(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=1$$

$$P(|X|\le\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

16. 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求 (1) X 的分布密度 $f(x)$;

(2) $P(X\le 4)$, $P(X>1)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$P(X\le 4)=F(4)$$

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)$$

21.某机器生产的螺栓长度(*cm*)服从参数为μ=10.05，σ=0.06的正态分布。规定长度在范围10.05±0.12内为合格品，求一螺栓为不合格的概率是多少？

设螺栓长度为X

$$P(X不属于(10.05-0.12,\ 10.05+0.12))$$

$$=1-P(10.05-0.12<X<10.05+0.12)$$

$$=1-\left\{\Phi\left[\frac{(10.05+0.12)-10.05}{0.06}\right]-\Phi\left[\frac{(10.05-0.12)-10.05}{0.06}\right]\right\}$$

$$=1-\{\mathbf{\Phi}(2)-\mathbf{\Phi}(-2)\}$$

$$=1-\{0.9772-0.0228\}$$

$$=0.0456$$

22.一工厂生产的电子管的寿命X（小时）服从参数为μ=160，σ(未知)的正态分布，若要求$P(120 \le X \le 200) \ge 0.8$，允许$\sigma$最大为多少？

$$P(120 \le X \le 200)$$

$$= \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right] \ge 0.80$$

$$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \ge 0.9 \qquad \frac{40}{\sigma} \ge 1.281 \qquad \sigma \le \frac{40}{1.281} = 31.25$$

24. 设$X \sim N(3,4)$，求常数c，使

$$P(X > c) = P(X \le c)$$

$$P(X > c) + P(X \le c) = 1$$

$$P(X > c) = P(X \le c) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \le \mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 3$$

26*.若随机变量X服从几何分布，证：

$$P(X=n+k\mid X>n)=P(X=k)$$

$$\boxed{P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\cdots\cdots}$$

$$P(X=n+k\mid X>n)=\frac{P(X=n+k)}{P(X>n)}$$

$$=\frac{q^{n+k-1}p}{p\sum_{k=n+1}^{\infty}q^{k-1}}=\frac{q^{n+k-1}}{q^{n}+q^{n+1}+\ldots}=\frac{q^{k-1}}{1+q^{1}+q^{2}+\ldots}$$

$$\boxed{1+q^1+q^2+\ldots=1/(1-q)=1/p}$$

$$=q^{k-1}p=P(X=k)$$

27*.若每只母鸡产 k 个蛋的概率服从参数为λ的泊松分布,而每个蛋能孵化成小鸡的概率为 p. 试证:每只母鸡有 n 只小鸡的概率服从参数为λp的泊松分布.

X表示每只母鸡的蛋数，X~π(λ)，Y表示每只母鸡有的小鸡数

X只蛋孵化成n只小鸡的概率服从二项分布Y~B(X,p)

全概率公式

$$P(Y=n)=P(X=n)P(Y=n\mid X=n)$$

$$+P(X=n+1)P(Y=n\mid X=n+1)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}\cdot e^{-\lambda}\cdot p^n+\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{-\lambda}\cdot C_{n+1}^n p^n\cdot q+\cdots\cdots$$

$$=\frac{(\lambda p)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda(1-q)}=\frac{(\lambda p)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda p}$$

28. 设 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.25	0.25	0.2

试求 $Y=2X+1$ 和 $Y=X^2$ 的分布列.

$Y=2X+1$	-3	-1	1	3	5
P	0.1	0.2	0.25	0.25	0.2

$Y=X^2$	0	1	4
P	0.25	0.45	0.3

29. 设随机变量X在[0, 1]上服从均匀分布，求$Y=-2\ln X$的概率密度.

解 在区间(0,1)上，函数$\ln x<0$，

故 $y=-2\ln x>0$，$y'=-\frac{2}{x}<0$

于是 y在区间(0,1)上单调下降，有反函数

$$x=h(y)=e^{-y/2}$$

由前述定理得

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(e^{-y/2})\left|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right|, & 0<e^{-y/2}<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

注意取绝对值

已知X在(0,1)上服从均匀分布，

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

代入 $f_Y(y)$ 的表达式中

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(e^{-y/2})\left|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right|, & 0<e^{-y/2}<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

即Y服从参数为1/2的指数分布.

30.设随机变量X在[0, 6]上服从均匀分布，

求$Y=|X-3|$的概率密度.

解 $F_Y(y)=P(|X-3|\le y)=P(3-y\le X\le y+3)$

$$=\int_{3-y}^{y+3}\frac{1}{6}dx=\frac{y}{3},(0\le y\le 3)$$

$F_Y(y)=0,(y<0);$

$F_Y(y)=1,(y>3)$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3},0\le y\le 3\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

31. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求：

(1) $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度函数;

(2) $Y = |X|$ 的概率密度函数.

$$x = h(y) = \pm\sqrt{(y-1)/2}$$

$$f_Y(y) \overset{?}{=} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right| = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{4}}$$

$y = 2x^2 + 1$ 不严格单调！

解 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

根据定义

（1）$F_Y(y)=P(2X^2+1\le y)$

$$=P(|X|\le\sqrt{\frac{y-1}{2}})=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\phi(x)dx,(y>1)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi\cdot(y-1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}}, y>1\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

（2） $$F_Y(y) = P(|X| \le y)$$
$$= P(-y \le X \le y), (y > 0)$$

同理 $$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

32*.设随机变量X的概率分布为$P(X=k)=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,3,\cdots$.

试求随机变量$Y=\sin(\dfrac{\pi}{2}X)$的分布律.

解 $$P(Y=0)=P(X=2)+P(X=4)+\cdots=\frac{1}{3}.$$

$$P(Y=-1)=P(X=3)+P(X=7)+\cdots=\frac{2}{15}.$$

$$P(Y=1)=1-P(Y=0)-P(Y=-1)=\frac{8}{15}.$$

故Y的概率分布为

Y	-1	0	1
p_i	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{8}{15}$

连续型随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

求(1) 常数c；

(2) 随机变量X的分布函数；

(3) 计算$P\{-1\le X\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dy=1\Rightarrow c=\frac{2}{\pi}$$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \displaystyle\int_0^x \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}dx, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$(3)\ P\{-1\le X\le\frac{\sqrt{2}}{2}\}=F(\frac{\sqrt{2}}{2})-F(-1)=\frac{1}{2}$$

设X的分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

则X的密度函数$f(x)$=__________； $P(0.3<X<0.7)=$________。

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P(0.3<x<0.7)=0.4$$

设某正方体边长$X \sim U[a,b]$，求正方体表面积Y的概率密度函数。

已知$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

表面积$Y=6X^2$，求Y的密度函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(6X^2 \le y\right)$$

$y < 0$时，$F_Y(y) = 0$

$y > 0$时，$F_Y(y) = P\left(6X^2 \le y\right) = P\left(X \le \sqrt{y/6}\right) = F_x(\sqrt{y/6})$

所以$f_Y(y) = {F_Y}'(y) = \frac{dF_x'\left(\sqrt{\frac{y}{6}}\right)}{dy} = f_x\left(\sqrt{\frac{y}{6}}\right) * \frac{1}{2\sqrt{y}} * \frac{1}{\sqrt{6}}$

当$a \le \sqrt{\frac{y}{6}} \le b$，即$6a^2 < y < 6b^2$时，$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} * \frac{1}{2\sqrt{y}} * \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{b-a} \frac{1}{2\sqrt{6y}}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)\sqrt{6y}} & 6a^2 < y < 6b^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$