概率统计第四章习题课

1.学生做实验需要动物数量为X,则

X	1	2	3	4	5
P	0.25	0.4	0.2	0.1	0.05

平均每组需要动物数量为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}x_k p_k=2.3$$

2.甲乙两种方法测得结果如下，

比较哪种方法精度高？

X_1, X_2	48	49	50	51	52
$P(X_1)$	0.1	0.1	0.6	0.1	0.1
$P(X_2)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

$$E(X_1) = E(X_2) = 50$$

$$D(X_1) = 1 < D(X_2) = 2$$

甲方法测得精度高.

3. 一批零件中有9个合格品，3个次品，从这批零件中任取一个，如果每次取出的废品不再放回，求在取得合格品以前已取出的废品数的期望、方差和标准差

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{3}x_k p_k=0.3$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\sum_{k=0}^{3}x_k{}^2 p_k-0.3^2=0.32$$

$$\sqrt{D(X)}=0.566$$

4.设随机变量X的数学期望为$E(X)$，方差为$D(X)>0$，引入新的随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

验证$E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$

$$E(X^*) = E[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X) - E(X)] = 0$$

$$D(X^*) = E[X^* - E(X^*)]^2 = E(X^{*2}) - E^2(X^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{D(X)}E[X - E(X)]^2 = \frac{1}{DX} \cdot D(X) = 1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在, 且$D(X)\neq 0$, 则称

$$X^{*}=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量.

$$E(X^{*})=0,\quad D(X^{*})=1$$

5.随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(X),D(X)$.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

6. 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty$$

求 $E(X),D(X)$.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=E(X^2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-|x|}dx=2$$

16. 设$r.v\ X$服从几何分布，

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots,$$

其中$0<p<1$,求$E(X)$, $D(X)$

解： 记$q=1-p$

等比级数求和公式

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'$$

求和与求导交换次序

$$=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}$$

$$=p[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]$$

$$=qp(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)''+E(X)=qp(\frac{q}{1-q})''+\frac{1}{p}$$

$$=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)\text{-}[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

7.设 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{1}{1+a}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k, k=0,1,2,\cdots$$

其中 $a>0$ 为已知常数，求 $E(X), D(X)$

解法1：根据定义

解法2：利用16题结论

设$p=\dfrac{1}{1+a}, q=\dfrac{a}{1+a}$ $\therefore P(X=k)=pq^k, k=0,1,2,\cdots$

利用16题结论 引入几何分布的随机变量，

$$P(Y=k)=pq^{k-1}, k=1,2,\cdots \quad E(Y)=\frac{1}{p}, D(Y)=\frac{q}{p^2}$$

$\because X=Y-1$

本题$P(X=k)=\dfrac{1}{1+a}(\dfrac{a}{1+a})^k, k=0,1,2,\cdots$

$$E(X)=E(Y-1)=E(Y)-1=1+a-1=a$$

$$D(X)=D(Y-1)=D(Y)=a(1+a)$$

9.证明：对任意常数C, $D(X) \le E(X-C)^2$

法一：$E(X-C)^2 = E\{[X-E(X)]-[C-E(X)]\}^2$

$$\because E\{2[X-E(X)][C-E(X)]\} = 2E[CX - XE(X) - CE(X) + E^2(X)]$$
$$= 2[CE(X) - E^2(X) - CE(X) + E^2(X)] = 0$$

$$= E[X-E(X)]^2 + E[C-E(X)]^2$$

D(x)定义

$$\because E[C-E(X)]^2 = E[C^2 - 2CE(X) + E(X)^2] = [C-E(X)]^2$$

$$= D(X) + (C-E(X))^2$$

当$C = E(X)$时，显然等号成立；

当$C \ne E(X)$时, $(C-E(X))^2 > 0 \quad E(X-C)^2 > D(X)$

法二：$D(X) \le E(X-C)^2$

$$E(X-C)^2 - DX$$

$$= E(X^2 - 2CX + C^2) - [E(X^2) - (EX)^2]$$

$$= (EX)^2 - 2CEX + C^2$$

$$= (C - E(X))^2 \ge 0$$

10. 11岁男孩身高服从正态分布，期望143.10厘米，标准差5.67厘米，

$$X\sim N(143.1,\ 5.67^2)$$

求身高的95%正常范围。

$$P(|X-143.1|<a)=0.95$$

$$P\left(\frac{|X-143.1|}{5.67}<\frac{a}{5.67}\right)=0.95$$

$$Y=\frac{X-143.1}{5.67}\sim N(0,1)\quad \Phi(1.96)=0.975$$

解得 α=1.96*5.67=11.11

则 (131.99, 154.21)

12. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求: (1) $Y=2X$ (2) $Y=e^{-2X}$的数学期望.

(1) $$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} 2xe^{-x}dx$$

$$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_{0}^{+\infty}=2$$

(2) $$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

14.设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(X\,Y)$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy=\frac{7}{12}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

15.设X，Y相互独立, 概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5\\ 0 & ,其他\end{cases}$$

求$E(XY)$

解法一 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy$$

解法二 $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

18.设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是独立同分布的随机变量

$$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$$

$i=1,2,\ldots,n$.记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$.

数学期望的性质

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{相互独立}}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$$

方差的性质

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

19. 设某种商品每周的需求量$X \sim U[10,30]$，而经销商进货数量为区间[10, 30]中的某一个整数，商店每销售一单位商品可获利500元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利300元，为使商店所获利润期望值不小于9280，试确定最少进货量。

解　设进货数量为a，则利润为

$$L = g(X) = \begin{cases} 500a + (X - a)300, & a < X \le 30 \\ 500X - (a - X)100, & 10 \le X \le a \end{cases}$$

$$L = g(x) = \begin{cases} 300X + 200a, & a < X \le 30 \\ 600X - 100a, & 10 \le X \le a \end{cases}$$

$$E(L) = \int_{10}^{30} g(x) \cdot f(x) \mathrm{d}x = \int_{10}^{30} g(x) \cdot \frac{1}{20} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{20} \int_{10}^{a} (600x - 100a) \mathrm{d}x + \frac{1}{20} \int_{a}^{30} (300x + 200a) \mathrm{d}x$$

$$= -7.5a^2 + 350a + 5250 \ge 9280.$$

解得 $20\frac{2}{3} \le a \le 26.$

故利润期望值不小于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

22.证明(2)$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

$$D(X\pm Y)=E[(X\pm Y)^2]-[E(X\pm Y)]^2$$

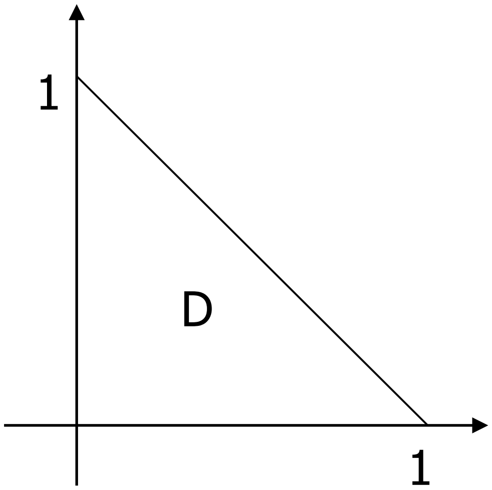
$$=E(X^2+Y^2\pm 2XY)-[(EX)^2+(EY)^2\pm 2EX\cdot EY]$$

$$=EX^2+EY^2\pm 2EXY-(EX)^2-(EY)^2\mp 2EX\cdot EY$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2[E(XY)-E(X)E(Y)]$$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

23. (X,Y)在D上服从均匀分布，求$cov(X,Y)$，ρ_{XY}



解：区域D的面积为 $\frac{1}{2}$

所以,(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & (x,\quad y)\in D\\ 0 & (x,\quad y)\notin D\end{cases}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}.$$

仿照15题

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{2}$$

24.设随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求EX, EY, ρ_{XY}.

$$E(X)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(Y)=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

27. 设$Y=aX+b$，其中a，b为常数，并且$a>0$，证明$\rho_{XY}=1$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=\operatorname{cov}(X,aX+b)\\&=\operatorname{cov}(X,aX)+\operatorname{cov}(X,b)\\&=a\operatorname{cov}(X,X)=aD(X)\end{aligned}$$

$$D(Y)=a^2D(X)$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{aD(X)}{aD(X)}=1$$

28. 设 X,Y 相互独立, 且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$,

$U=aX+bY$, $V=aX-bY$,

a,b 为常数，且都不为零，求 ρ_{UV}

解 $$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,V)&=E(UV)-E(U)E(V)\\&=a^2E(X^2)-b^2E(Y^2)\\&-\left[aE(X)+bE(Y)\right]\left[aE(X)-bE(Y)\right]\end{aligned}$$

由 $$\left.\begin{aligned}&E(X)=E(Y)=\mu,\\&D(X)=D(Y)=\sigma^2\end{aligned}\right\}\longrightarrow\begin{aligned}&E(X^2)=\sigma^2+\mu^2\\&E(Y^2)=\sigma^2+\mu^2\end{aligned}$$

$$\longrightarrow\quad \operatorname{cov}(U,V)=(a^2-b^2)\sigma^2$$

而 $$D(U)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$$

$$D(V)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$$

$$\boxed{\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}}$$

故 $$\rho_{UV}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

思考：还有其他方法吗？

利用协方差的性质

$\mathbf{cov}(X_1+X_2,Y) = \mathbf{cov}(X_1,Y)+\mathbf{cov}(X_2,Y)$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(aX+bY,aX-bY)\\
&=\operatorname{cov}(aX,aX-bY)+\operatorname{cov}(bY,aX-bY)\\
&=\operatorname{cov}(aX,aX)-\operatorname{cov}(aX,bY)+\operatorname{cov}(bY,aX)-\operatorname{cov}(bY,bY)\\
&=a^2\operatorname{cov}(X,X)-b^2\operatorname{cov}(Y,Y)\\
&=a^2D(X)-b^2D(Y)
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \operatorname{cov}(U,V)=(a^2-b^2)\sigma^2$$

29. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是7300，均方差是700 . 利用切比雪夫不等式估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率 .

解： 设每毫升白细胞数为X

依题意，$E(X)=7300, D(X)=700^2$

所求为 $P(5200 \le X \le 9400)$

$$P(5200 \le X \le 9400)$$

$$=P(5200-7300 \le X-7300 \le 9400-7300)$$

$$=P(-2100 \le X-E(X) \le 2100)$$

$$=P(|X-E(X)| \le 2100)$$

由切比雪夫不等式

$$P(|X-E(X)| \le 2100) \ge 1-\frac{D(X)}{(2100)^2}$$

$$=1-\left(\frac{700}{2100}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

即估计每毫升白细胞数在5200~9400之间的概率不小于8/9 .

30. 50个寻呼台，每个寻呼台收到的呼叫次数服从 $P(0.05)$，求收到的呼叫次数总和大于3次的概率.

$$X_i \sim P(0.05) \Rightarrow EX_i = DX_i = 0.05$$

由中心极限定理 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\therefore \sum_{i=1}^{50} X_i \sim N(2.5, 2.5)$$

$$P(\sum_{i=1}^{50} X_i > 3) = 1 - P(\sum_{i=1}^{50} X_i \le 3)$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{3-2.5}{\sqrt{2.5}}) \approx 0.375$$

31.一保险公司有10000人投保，每人付18元保险费，已知投保人出意外率为0.006.若出意外公司赔付2500元.求保险公司亏本 的概率.

解 设X为投保的10000人中出意外的人数

则 $X \sim B(10000, 0.006)$

$$E(X) = np = 60,\ D(X) = np(1-p) = 59.64.$$

$$10000 \times 18 < 2500X$$

$$\Rightarrow X > 72$$

由中心极限定理 $N(60, 59.64)$

$$P(X > 72)$$

$$= 1 - P(X \le 72) \approx 1 - \Phi\left(\frac{72-60}{\sqrt{59.64}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.55) \approx 0.06$$

1.一台仪器由5个元件组成，元件发生故障与否相互独立，且第i个元件发生故障的概率为$P_i=0.2+0.1(i-1)$，则发生故障的元件个数X的数学期望$EX=$______.

1.解　设随机变量　$X_i=\begin{cases}1, & 第i个元件发生故障\\ 0, & 其它\end{cases}$

则　$P\{X_i=1\}=0.2+0.1(i-1)$，　$P\{X_i=0\}=0.8-0.1(i-1)$，

故　$EX_i=0.2+0.1(i-1)$，而 $X=\sum_{i=1}^{5}X_i$，由数学期望的性质，有

$$EX=\sum_{i=1}^{5}EX_i=\sum_{i=1}^{5}[0.2+0.1(i-1)]=2.$$

故应填2.

3. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$ ________.

3. 解：X 与 Y 均服从 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，且 $X+Y=n$

$$\therefore E(X)=\frac{n}{2}, E(Y)=\frac{n}{2}, D(X)=\frac{n}{4}, D(Y)=\frac{n}{4},$$

$$E(XY)=E\left(nX-X^2\right)=nE(X)-E\left(X^2\right)$$

$$=\frac{n^2}{2}-D(X)-(E(X))^2=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4}=\frac{n^2}{4}-\frac{n}{4},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{n^2}{4}-\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4}=-\frac{n}{4},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{n}{4}}{\frac{n}{4}}=-1$$

5.设$X \sim N(1,2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$,为X的样本，则下列选项正确的是

(A) $\dfrac{\overline{X}-1}{2} \sim N(0,1)$　　(B) $\dfrac{\overline{X}-1}{4} \sim N(0,1)$

(C) $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　　(D) $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

5.解　因为当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时　$E(\overline{X}) = \mu, D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

所以　$E(\overline{X})=1$，$D(\overline{X})=\dfrac{2^2}{n}$ 于是　　$E\left(\dfrac{\overline{X}-1}{c}\right) = \dfrac{1}{c}E(\overline{X}-1) = \dfrac{1}{c}[E(\overline{X})-1] = 0,$

$$D\left(\frac{\overline{X}-1}{c}\right) = \frac{1}{c^2}D(\overline{X}-1) = \frac{1}{c^2}D(\overline{X}) = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{2^2}{n},$$

已知当 $c=2/\sqrt{n}$ 时　$D\left(\dfrac{\overline{X}-1}{c}\right) = 1$,所以（C）项正确.

2. k个人在一楼进入电梯，楼上有 n 层. 设每个人在任何一层楼出电梯是等可能的，若用 X 表示电梯的停梯次数，求 EX.

2.分析　引入随机变量$X_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$表示电梯在第$i$层停的次数，即

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{在第}i\text{层楼有人下梯}\\ 0, & \text{在第}i\text{层楼无人下梯}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

因每个人在任何一层下梯的概率为$\frac{1}{n}$,若k个人都不在第i层下梯，则电梯在该层不停

而此时的概率为　$P\{X_i=0\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$. 于是$P\{X_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$

显然，电梯的停梯次数$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,故有

$$EX=E\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n$$

而$EX_i=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \qquad i=1,2,\cdots n,$

因此　$EX=n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]$　故应填$n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]$