作业3　习题三　王宇涵　202200400053　A+

3.(1) 证明

设 $\langle a,c\rangle \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$ 则 $\exists b\ (\langle a,b\rangle \in R_1) \cap (\langle b,c\rangle \in (R_2 \cup R_3))$

则 $(\langle a,b\rangle \in R_1 \cap \langle b,c\rangle \in R_2) \cup (\langle a,b\rangle \in R_1 \wedge \langle b,c\rangle \in R_3)$

则 $(\langle a,c\rangle \in R_1 \circ R_2) \vee (\langle a,c\rangle \in R_1 \circ R_3)$

则 $\langle a,c\rangle \in ((R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3))$ 则 $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

则同理有 $(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3) \subseteq R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$ 则两者相等

(2) 证明：

设 $\langle a,c\rangle \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$ 则 $\exists b$ 使 $(\langle a,b\rangle \in R_1) \cap (\langle b,c\rangle \in (R_2 \cap R_3))$

则 $(\langle a,b\rangle \in R_1 \cap \langle b,c\rangle \cap R_2) \cap (\langle a,b\rangle \in R_1 \cap \langle b,c\rangle \cap R_3)$

则 $\langle a,c\rangle \in (R_1 \circ R_2) \cap \langle a,c\rangle \in (R_1 \circ R_3)$

则 $\langle a,c\rangle \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$ 则 $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

5. 证明：

$\forall (x,z) \in S \circ S$ 则 $\exists y$ 使 $(x,y) \in S$ $(y,z) \in S$ 由传递性 $(x,z) \in S$

则 $S \circ S \subseteq S$

$\forall (x,z) \in S$ 则由自反性 $(z,z) \in S$ 则 $\exists z$ 使 $(x,z) \in S$, $(z,z) \in S$

则 $(x,z) \in S \circ S$ 则 $S \subseteq S \circ S$

则 $S = S \circ S$.

8. 对应的关系矩阵为　$R^0: \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$R_1: \begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$　$R_2: \begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$　$R_3: \begin{pmatrix} 0&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = R_1$　$R_4 = R_2$

则 $R^n = \begin{cases} \langle a,a\rangle\ \langle b,b\rangle\ \langle c,c\rangle\ \langle d,d\rangle & n=0 \\ \langle a,b\rangle\ \langle a,c\rangle\ \langle b,c\rangle\ \langle c,b\rangle & n\text{为偶数(除0外)}. \\ \langle a,b\rangle\ \langle a,c\rangle\ \langle b,b\rangle\ \langle c,c\rangle & n\text{为奇数} \end{cases}$

Date.

习题四

1. (1) 证明：

$\forall x \in (R_1 \cup I_A)$ $\because R_1 \subseteq R_2$ 则 $x \in (R_2 \cup I_A)$ 则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) 证明.

$\forall x \in (R_1 \cup R_1^-)$ $\because R_1 \subseteq R_2$ 则 $R_1^- \subseteq R_2^-$ 则 $x \in (R_2 \cup R_2^-)$

则 $(R_1 \cup R_1^-) \subseteq (R_2 \cup R_2^-)$ 则 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$.

(3) 证明.

先证明当 $R_1 \subseteq R_2$ 时 $R_1^n \subseteq R_2^n$ ($n \geq 0$且 n为整数)

则 $n=0$ 时成立 设 $n=k$时成立 即 $R_1^k \subseteq R_2^k$ 则 $\forall (x,z) \in R_1^{k+1} = R_1^k \circ R_1$

$\exists y$ 使 $(x,y) \in R_1^k$ $(y,z) \in R_1$ 又 $\because R_1^k \subseteq R_2^k$ 且 $R_1 \subseteq R_2$

则 $(x,y) \in R_2^k$, $(y,z) \in R_2$ 则 $(x,z) \in R_2^k \circ R_2 = R_2^{k+1}$

则 $R_1^{k+1} \subseteq R_2^{k+1}$

又$\because$ $t(R_1) = R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cdots$ $t(R_2) = R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3 \cdots\cdots$

$\therefore$ $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

3. 证明

(1) $\because r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$ $r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

$\therefore$ $r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$

又$\because$ $R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

又 $(R_1 \cup R_2) \cup (I_{A(R_1 \cup R_2)}) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2) \cup I_{A(R_1 \cup R_2)}$

则 $r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$

则 $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $\because R_1 \subseteq s(R_1)$ $R_2 \subseteq s(R_2)$ $\therefore$ $R_1 \cup R_2 \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$

则 $s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$

又 $s(R_1) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$ $s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$ 则 $s(R_1) \cup s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$

则 $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ $t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ 则 $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

反例：$A = \{2,3,4\}$ $R_1: \{<2,3>\}$ $R_2: \{<3,4>\}$

$t(R_1) \cup t(R_2) = \{<2,3>\ <3,4>\}$ $t(R_1 \cup R_2) = \{<2,3>\ <3,4>\ <2,4>\}$.

$t(R_1) \cup t(R_2) \neq t(R_1 \cup R_2)$

Date. 习题四 王宇涵 202200400053

4. $r(R) = \{\langle a,a\rangle \langle a,b\rangle \langle b,a\rangle \langle b,b\rangle \langle b,c\rangle \langle c,c\rangle \langle c,d\rangle \langle d,d\rangle\}$

$s(R) = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle \langle b,c\rangle \langle c,b\rangle \langle c,d\rangle \langle d,c\rangle\}$

$t(R) = \{\langle a,a\rangle \langle a,b\rangle \langle a,c\rangle \langle a,d\rangle \langle b,a\rangle \langle b,b\rangle \langle b,c\rangle \langle b,d\rangle \langle c,d\rangle\}$

其中 $R^4 = R_2$ $R_3 = R^5$ ……

习题五

2. 证明：

自反性：$\forall x \in A$ 有自反：xRx 则 $(x,x) \in R$ 且 $(x,x) \in R$ 则 $(x,x) \in T$.

对称性：设 $\langle a,b\rangle \in T$ 则 $\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,a\rangle \in R$ 则 $\langle b,a\rangle \in R$ 且 $\langle a,b\rangle$ 则 $\langle b,a\rangle \in T$ 则 T满足对称性

传递性 设 aTb, bTc, 有 $\langle a,b\rangle \langle b,a\rangle \in R$, $\langle b,c\rangle \langle c,b\rangle \in R$ 由R传递性得 $\langle a,c\rangle \langle c,a\rangle \in R$ 则 $\langle a,c\rangle \in T$ 则 T满足传递性

3. 证明，

自反性：$\forall (x,y) \in N^+ \times N^+$ $(x,y) R (x,y)$，有 $x/x = y/y$

对称性：设 $\langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle$ 有 $a/c = b/d$ 即 $c/a = d/b$ 则 $\langle c,d\rangle R \langle a,b\rangle$.

传递性：设 $\langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle$ $\langle c,d\rangle R \langle e,f\rangle$ 即 $a/c = b/d$ ① $c/e = d/f$ ② ①和②等式两边相乘得 $a/e = b/f$ 则 $\langle a,b\rangle R \langle e,f\rangle$

4. 证明，

若R为等价关系 且 aRb aRc 则由对称得 bRa aRc 由传递得 bRc

若 aRb, $aRc \Rightarrow bRc$

对称性：设 aRb, 由自反性得 aRa 则 bRa.

传递性：设 aRb bRc 由对称性得 bRa bRc 则 aRc.

7. 先将A进行划分 则有

{{1},{2,3}} {{1,2},{3}} {{1,3},{2}} {{1},{2},{3}} {{1,2,3}}

则共5个等价关系

8 R: {<1,1> <1,2> <2,1> <2,2> <3,3> <3,4> <3,5> <4,3> <4,4> <4,5>

<5,3> <5,4> <5,5> <6,6>}

关系图:

习题六

2. 证明:

设a为P的唯一极小元 证a为最大元

$\forall x \in P$ 若 $x=a$ 则 $x \geq a$ 若 $x \neq a$ 则 x不是极小元

$\exists x_1 \in P$ 使 $x > x_1$ 若 $x_1 = a$ 则 $x > a$ 否则 $x_1 > x_2 \cdots$

则 $x > x_1 > x_2 \cdots > x_k$ 且 $x_k = a$

则 $\forall x \in P$, $x > a$, 则 a为最小元

4. 证明:

设a为A的最大下界, b为A的最大下界,

则由 $a \geq b$, $b \geq a$ 得 $a=b$.

则最小上界同理

7 证明:

若A中不存在极小元, 则 $\forall x \in A$ $\exists y \in A$ 使 $y \leq x$, 重复循环

则产生无限集, 与有限集矛盾.

极大元证明同理.

9.