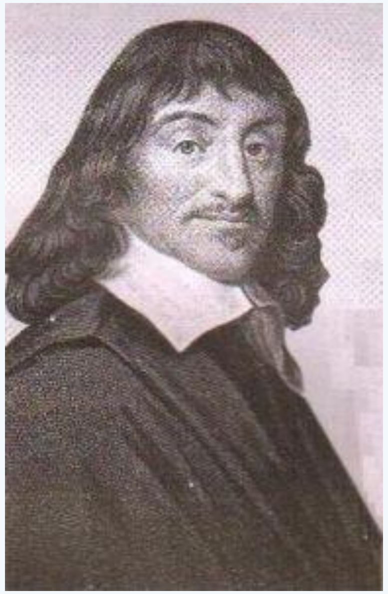
有序n元组与笛卡尔积

❖有序n元组与笛卡尔积 Descartes product

❖多重集



Rene Descartes

笛卡尔积，法国

平面坐标系（x,y)

有序n元组与笛卡尔积

❖ 概念：序偶-由两个具有固定次序的个体组成的序列，称为序偶(ordered pair) （又称有序对），记作‹a, b›或(a, b)。其中个体a, b称为序偶的分量。

定义 1：两个有序对〈x, y〉与〈u, v〉，当其元素依次对应相等时，称这两个有序对相等，记为〈x, y〉=〈u, v〉，即

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x=u,\ y=v$$

{a,b}={b,a}?

有序n元组与笛卡尔积

❖n个有确定次序的事物构成的整体称为一个有序n元组

(n-tuple)

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \text{ 或 } (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

第*i*个元素（或第*i*个分量）： a_i $(1 \le i \le n)$

有序n元组与笛卡尔积

❖定义2：两个有序*n*元组相等

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$$

$$\Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_n=b_n$$

有序n元组与笛卡尔积

定义 3 设A，B为两个集合，集合
$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A, y\in B\}$ 称为A与B的笛卡尔积.

例 设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{\alpha\}$，
则 $A\times B=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$(A\times B)\times C=\{\langle\langle a, 1\rangle, \alpha\rangle, \langle\langle a, 2\rangle, \alpha\rangle,$
$\langle\langle b, 1\rangle, \alpha\rangle, \langle\langle b, 2\rangle, \alpha\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{\langle a, \langle 1, \alpha\rangle\rangle, \langle a, \langle 2, \alpha\rangle\rangle,$
$\langle b, \langle 1, \alpha\rangle\rangle, \langle b, \langle 2, \alpha\rangle\rangle\}$

$A\times B\times C=\{\langle a, 1, \alpha\rangle, \langle a, 2, \alpha\rangle, \langle b, 1, \alpha\rangle$
$, \langle b, 2, \alpha\rangle\}$

有序n元组与笛卡尔积

例 设$A = \{a, b, c\}$，$B = \{0, 1\}$，则

$A \times B = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

$B \times A = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$

$A \times A = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

$B \times B = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

所以有 $A \times B \neq B \times A$

(除非$A = \varnothing$或 $B = \varnothing$或 $A = B$)

即笛卡尔积不满足交换律。

有序n元组与笛卡尔积

例 设$A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{u, v\}$ 则

$A \times B \times C = \{\langle a, 0, u\rangle, \langle a, 0, v\rangle, \langle a, 1, u\rangle, \langle a, 1, v\rangle, \langle b, 0, u\rangle, \langle b, 0, v\rangle, \langle b, 1, u\rangle, \langle b, 1, v\rangle\}$

$(A \times B) \times C = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle\} \times \{u, v\}$

$= \{\langle\langle a, 0\rangle, u\rangle, \langle\langle a, 0\rangle, v\rangle, \langle\langle a, 1\rangle, u\rangle, \langle\langle a, 1\rangle, v\rangle,$

$\langle\langle b, 0\rangle, u), \langle\langle b, 0\rangle, v), \langle\langle b, 1\rangle, u), \langle\langle b, 1\rangle, v\rangle\}$

$A \times (B \times C) = \{a, b\} \times \{\langle 0, u\rangle, \langle 0, v\rangle, \langle 1, u\rangle, \langle 1, v\rangle\}$

$= \{\langle a, \langle 0, u\rangle\rangle, \langle a, \langle 0, v\rangle\rangle, \langle a, \langle 1, u\rangle\rangle, \langle a, \langle 1, v\rangle\rangle,$

$\langle b, \langle 0, u\rangle\rangle, \langle b, \langle 0, v\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, u\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, v\rangle\rangle\}$

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (除非$A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$ 或 $C = \varnothing$),

即笛卡尔积不满足结合律。

❖定理1　设A，B，C为三个集合，则有

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

❖证明 定理1 （2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$

$$\forall\langle x,\ y\rangle\in A\times(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,\ y\rangle\in A\times B\wedge\langle x,\ y\rangle\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x,\ y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)。$$

有序n元组与笛卡尔积

定义 4　设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，集合

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, a_2, \cdots, a_n > \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔积.

对任意集合A，　$A\times A\times\ldots\times A$（$n$个）常记为 A^n

定理２　设$A_1, A_2,\ldots, A_n$是有限集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

有序n元组与笛卡尔积

例1：A, B, C是任意三个集合, C是非空集合,

(1) $A \subseteq B$的充分必要条件是$A \times C \subseteq B \times C$;

(2) $A \subseteq B$的充分必要条件是$C \times A \subseteq C \times B$。

证明 (1) 必要性: 因C非空, 存在$c \in C$。

若$A \subseteq B$, 则对任意的 $\langle a, c\rangle \in A \times C$,

其中$a \in A \subseteq B$, $c \in C$, 必有$\langle a, c\rangle \in B \times C$,

所以$A \times C \subseteq B \times C$。

充分性: 对任意的$\langle a, c\rangle \in A \times C$其中$a \in A$, $c \in C$。

若$A \times C \subseteq B \times C$, 则$\langle a, c\rangle \in B \times C$, 其中$a \in B$。

所以$A \subseteq B$。

同理可证(2)。

有序n元组与笛卡尔积

例2 设A，B，C，D为四个非空集合, 则

$A \times B \subseteq C \times D$的充分必要条件是$A \subseteq C$, $B \subseteq D$

证明 必要性: 若$A \times B \subseteq C \times D$,

又A, B, C, D都不是空集，故对任意的$a \in A$, $b \in B$,

$\langle a, b \rangle \in A \times B \subseteq C \times D$，则$a \in C$，$b \in D$,

因此$A \subseteq C$, $B \subseteq D$。

充分性: 若$A \subseteq C$，因B非空,

故$A \times B \subseteq C \times B$。

又 $B \subseteq D$，因C非空,

又 $C \times B \subseteq C \times D$。 由$\subseteq$的传递性, 可得 $A \times B \subseteq C \times D$。

- 有序n元组与笛卡尔积 Descartes product
- 多重集

多重集

❖ 如果有一组事物，其中可以有某些事物不加区别（或说某些事物可重复出现多次，且出现几次就看作是几个事物），这组事物构成的整体就称为一个**多重集**.

❖ {1，1，2，3，3，3，4}

❖ $\{a, a, a, a, a, a, a, b\}$

❖ 重复度 -- $M_A(a)$

多重集

❖一个多重集A，如果任何事物在A中的重复度只能为 1 或 0，则该多重集就是一个通常意义下的集合

多重集

定义 1　设A，B是两个多重集，A与B的并A∪B是一个多重集，任一元素在A∪B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的最大值，即：

$$M_{A\cup B}(x) = \max\{M_A(x),\ M_b(x)\}$$

定义2　设A，B是两个多重集，A与B的交A∩B是一个多重集，任一元素在A ∩ B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的最小值，即

$$M_{A\cap B}(x)=\min\{M_A(x),\ M_b(x)\}$$

❖ 非负差

$$m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & m \geq n \\ 0, & m < n \end{cases}$$

定义 3　设A，B是两个多重集，A与B的差A - B是一个多重集，任一元素在A - B中的重复度等于该元素在A中重复度与其在B中重复度的非负差，即

$$M_{A-B}(x) = M_A(x) \dot{-} M_B(x)$$

定义 4　设A，B是两个多重集，A与B的和A + B是一个多重集，任一元素在A + B中的重复度等于该元素在A，B中重复度的和，即

$$M_{A+B}(x) = M_A(x) + M_B(x)$$

作业

❖ 作业：

❖ 习题四　　1、2、3

∀∃∅∩∪⊆⊂⊄∉∀∈≤≥…ℵ∑︴︴≡±°∞

αβσρυωζψηδεφλμπΔθ±∏∧∨∀ }∴√⊃

≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼§¥{}?±

↔∨∧¬→←⇒⇔↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉

☆★▿≮≯⌒∵∴∪∩≠–— 〃

// ∴∵∷⊥↘↗↙↖√

〔 ⌈–⌋ ÷×·º·‹2, b›︶︸Φ