

离散数学

Discrete Mathematics

2022/3/29



Chapter 4

代数结构
Algebra System

2022/3/29

多选题 2分

设置

自然数集N上的下列那几种运算不具有封闭性的特点。

A

+

B

-

C

×

D

÷

提交

多选题 2分

设置

以下哪些性质不属于代数运算（如+，-，×，÷）的运算定律。

A

封闭性

E

吸收律

B

结合律

F

传递性

C

交换律

G

分配律

D

对称性

H

割去律

提交

§ 4.1 代数系统的引入 (1)

一个代数系统需要满足下面三个条件：
(1) 有一个非空集合S；
(2) 有一些建立在S上的运算；
(3) 这些运算在集合S上是封闭的。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (1)

4.2.1 运算的概念

定义

假设A是一个集合， $A \times A$ 到A的映射称为A上的二元运算。

一般地， A^n 到 A 的映射称为A上的n元运算。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (2)

4.2.2 运算的性质

假设 $*, +$ 都是集合 A 上的运算

(1) 封闭性

如果 $S \subseteq A$ ，对任意的 $a, b \in S$ ，有 $a * b \in S$ ，则称 S 对运算 $*$ 是封闭的。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (3)

4.2.2 运算的性质

(2) 交换律

如果对任意的 $a, b \in A$ ，都有 $a * b = b * a$ ，则称运算 $*$ 是可交换的。

(3) 结合律

如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，都有 $(a * b) * c = a * (b * c)$ ，则称运算 $*$ 是可结合的。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (4)

(4) 分配律

如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，都有 $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ ，则称 $*$ 对 $+$ 运算满足左分配；

如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，都有 $(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$ ，则称 $*$ 对 $+$ 运算满足右分配。

如果运算 $*$ 对 $+$ 既满足左分配又满足右分配，则称运算 $*$ 对 $+$ 满足分配律。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (5)

(5) 消去律

如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，当 $a * b = a * c$ ，必有 $b = c$ ，则称运算 $*$ 满足左消去律；

如果对任意的 $a, b, c \in A$ ，当 $b * a = c * a$ ，必有 $b = c$ ，则称运算 $*$ 满足右消去律；

如果运算 $*$ 既满足左消去律又满足右消去律，则称运算 $*$ 满足消去律。

2022/3/29

§ 4.2 运算 (6)

(6) 吸收律

如果对任意的 $a, b \in A$ ，都有 $a * (a + b) = a$ ，则称运算 $*$ 关于运算 $+$ 满足吸收律。

(7) 等幂律

如果对任意的 $a \in A$ ，都有 $a * a = a$ ，则称运算 $*$ 满足等幂律。

2022/3/29

§ 4.2 运算

(7)

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

- (1) 封闭性 ✓
- (2) 交换律 ✓
- (3) 结合律 ✓
- (4) 分配律 ✓
- (5) 消去律 ✗
- (6) 吸收律 ✗
- (7) 等幂律 ✗

2022/3/29

§ 4.3 代数系统

(1)

4.3.1 代数系统的概念

定义

假设 A 是一个非空集合, f_1, f_2, \dots, f_n 是 A 上的运算 (运算的元素可以是不相同的), 则称 A 在运算 f_1, f_2, \dots, f_n 下构成一个代数系统, 记为: $\langle A, f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$

§ 4.3 代数系统

(2)

4.3.1 代数系统的概念

定义

假设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, $S \subseteq A$, 如果 S 对 $*$ 是封闭的, 则称 $\langle S, * \rangle$ 为 $\langle A, * \rangle$ 的子代数系统。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统

(3)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(1) 单位元 (幺元)

假设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, 如果 $\exists e_l \in A$, 对于任意元素 $x \in A$, 都有 $e_l * x = x$, 则称 e_l 为 A 中关于运算 $*$ 的左单位元;

如果 $\exists e_r \in A$, 对于任意元素 $x \in A$, 都有 $x * e_r = x$, 则称 e_r 为 A 中关于运算 $*$ 的右单位元;

如果 A 中一个元素 e 既是左单位元又是右单位元, 则称 e 为 A 中关于运算 $*$ 的单位元。

§ 4.3 代数系统

(4)

Δ	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

$e_l = a, b, c$

\emptyset	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$e_r = a, b, c$

\bullet	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$e_l = a \quad e_r = a$

2022/3/29

§ 4.3 代数系统

(5)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(1) 单位元 (幺元)

定理

假设 $\langle A, * \rangle$ 是代数系统, 并且 A 关于运算 $*$ 有左单位元 e_l 和右单位元 e_r , 则 $e_l = e_r = e$ 并且单位元唯一。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (6)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(2) 零元

假设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, 如果 $\exists \theta_L \in A$, 对于任意元素 $x \in A$, 都有 $\theta_L * x = \theta_L$, 则称 θ_L 为 A 中关于运算 $*$ 的左零元;

如果 $\exists \theta_R \in A$, 对于任意元素 $x \in A$, 都有 $x * \theta_R = \theta_R$, 则称 θ_R 为 A 中关于运算 $*$ 的右零元;

如果 A 中一个元素 θ 既是左零元又是右零元, 则称 θ 为 A 中关于运算 $*$ 的零元。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (7)

Δ	a	b	c
\emptyset	a	b	c
\bullet	a	a	a
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\theta_R = a, b, c$ $\theta_L = a, b, c$ $\theta_R = b$ $\theta_L = b$

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (8)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(2) 零元

定理

假设 $\langle A, * \rangle$ 是代数系统, 并且 A 关于运算 $*$ 有左零元 θ_L 和右零元 θ_R , 则 $\theta_L = \theta_R = \theta$ 并且零元唯一。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (9)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(3) 逆元

假设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, e 是 $\langle A, * \rangle$ 的单位元。对于元素 $a \in A$, 如果存在 $b \in A$, 使得 $b * a = e$, 则称 a 为左可逆的, b 为 a 的左逆元; 如果存在 $c \in A$, 使得 $a * c = e$, 则称元素 a 是右可逆的, c 为 a 的右逆元。如果存在 $a' \in A$, 使得 $a' * a = a * a' = e$, 则称 a 是可逆的, a' 为 a 的逆元。 a 的逆元记为: a^{-1} 。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (10)

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$a' * a = a * a' = e$
 $e = a$
 $a * a = e$
 $a^{-1} = a$
 $b * c = c * b = e$
 $b^{-1} = c$ $c^{-1} = b$

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (11)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(3) 逆元

定理

设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, 且 A 中存在单位元 e , 每个元素都存在左逆元。如果运算 $*$ 是可结合的, 那么, 任何一个元素的左逆元也一定是该元素的右逆元, 且每个元素的逆元唯一。

2022/3/29

§ 4.3 代数系统 (12)

4.3.2 代数系统中的特殊元素

(4) 幂等元

定义：
在代数系统<A,*>中，如果元素 a 满足
 $a*a=a$ ，那么称 a 是 A 中的幂等元。

§ 4.3 代数系统 (12)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

运算 1

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

运算 2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

运算 3

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

运算 4

§ 4.4 同态与同构 (1)

4.4.1 基本概念

定义
设 $\langle A,* \rangle$ 和 $\langle B,\circ \rangle$ 是代数系统， $f:A \rightarrow B$ ，
如果 f 保持运算，即对 $\forall x,y \in A$ ，有
 $f(x*y)=f(x) \circ f(y)$ 。称 f 为代数系统 $\langle A,* \rangle$
到 $\langle B,\circ \rangle$ 的同态映射，简称同态。也称之为两
代数系统同态。

§ 4.4 同态与同构 (2)

4.4.1 基本概念

定义
设 $\langle A,* \rangle$ 和 $\langle B,\circ \rangle$ 是代数系统，f 是
A 到 B 的同态。如果 f 是单射的，称 f 为
单同态；如果 f 是满射的，称 f 为满同态；
如果 f 是双射的，称 f 为同构映射，简称为
同构。

§ 4.4 同态与同构 (3)

4.4.1 基本概念

定义
设 $\langle A,* \rangle$ 是代数系统，若存在函数
 $f:A \rightarrow A$ ，并且对 $\forall x,y \in A$ ，有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$ 。
称 f 为 $\langle A,* \rangle$ 的自同态；如果 f 是双射的，
则称 f 为 $\langle A,* \rangle$ 的自同构。

§ 4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同构的。

$\langle A,* \rangle$ $\langle B,\circ \rangle$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

°	a	β	γ	δ
a	a	β	γ	δ
β	β	a	a	γ
γ	γ	δ	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

§ 4.4 同态与同构 (1)

设 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 是代数系统，
(1) $f: A \rightarrow B$, 如果 f 保持运算，即对 $\forall x, y \in A$, 有 $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$ 。
(2) f 是双射函数 (单射，满射)
(1) $f(a)=a; f(b)=\beta; f(c)=\gamma; f(d)=\delta$
满足 $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$;
 $f(a*b) = f(b) = f(a) \circ f(b) = a \circ \beta = \beta$; $f(a*c) = f(c) = f(a) \circ f(c) = a \circ \gamma = \gamma$
 $f(a*d) = f(d) = f(a) \circ f(d) = a \circ \delta = \delta$
(2) f 是双射函数 (单射，满射)
函数是用序偶表示的， f 是双射函数。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构 (1)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

\circ	a	β	γ	δ
a	a	β	γ	δ
β	β	a	δ	γ
γ	γ	a	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

还同构吗?
 $f(b*c) = f(a) = a$? $f(b) \circ f(c) = \beta \circ \gamma = \delta$
运算保持不满足

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同态的。 $\langle A, * \rangle$
 $\langle B, \circ \rangle$; e 是 B 的单位元。 $f: A \rightarrow B, \forall a \in A$
同构吗?
解: $f: A \rightarrow B$; 该函数不是满射的，所以不是同构函数
又
 $f(x*y) = f(z) = e$
 $f(x) \circ f(y) = e \circ e = e$ 所以 $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$
所以 f 是同态

§ 4.4 同态与同构 (1)

例：验证下列两个代数系统是同态的。
 $\langle Z, + \rangle$ $\langle Z, + \rangle$; $f: a \rightarrow 8a, \forall a \in Z$
 $\langle Z, \times \rangle$ $\langle Z, \times \rangle$ 如何?
例：下列两个代数系统是同态的吗？同构吗？
 $\langle R, + \rangle$ $\langle R, \times \rangle$;

§ 4.4 同态与同构 (4)

4.4.2 同态、同构的性质
(1) 如果两函数是同态、同构的，则复合函数也是同态、同构的。
定理
假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \bullet \rangle$ 的同态， g 是 $\langle B, \bullet \rangle$ 到 $\langle C, \Delta \rangle$ 的同态，则 $g \circ f$ 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle C, \Delta \rangle$ 的同态；如果 f 和 g 是单同态、满同态、同构时，则 $g \circ f$ 也是单同态、满同态和同构。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构 (5)

4.4.2 同态、同构的性质
(2) 满同态保持结合律
定理
假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。如果 $*$ 运算满足结合律，则 \circ 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

2022/3/29

(2) 满同态保持结合律

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。如果 $*$ 运算满足结合律，则 \circ 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

$*$ 满足结合律 $\forall x, y, z \in A; \text{有 } x * (y * z) = (x * y) * z$
 \circ 也满足结合律， $\forall a, b, c \in B; a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
 $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$
 $a \circ (b \circ c) = f(x) \circ (f(y) \circ f(z)) =$
 $f(x) \circ f(y * z) = f(x * (y * z)) = f((x * y) * z)$
 $= (f(x) \circ f(y)) \circ f(z) = (a \circ b) \circ c$

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构

(6)

4.4.2 同态、同构的性质

(3) 满同态保持交换律

(4) 满同态保持单位元

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。 e 是 $\langle A, * \rangle$ 的单位元，则 $f(e)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的单位元。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构

(7)

4.4.2 同态、同构的性质

(5) 满同态保持逆元

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。 e_A 和 e_B 分别是 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 的单位元，如果 A 中元素 x 和 x' 互逆，则 B 中元素 $f(x)$ 和 $f(x')$ 也互逆。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构

(8)

4.4.2 同态、同构的性质

(6) 满同态保持零元

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。 θ 是 $\langle A, * \rangle$ 的零元，则 $f(\theta)$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的零元。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构

(9)

4.4.2 同态、同构的性质

(7) 满同态保持幂等元

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的满同态。并且 $x \in A$ 是 $\langle A, * \rangle$ 的幂等元，则 $f(x) \in B$ 是 $\langle B, \circ \rangle$ 的幂等元。

2022/3/29

§ 4.4 同态与同构

(10)

4.4.2 同态、同构的性质

(8) 同构映射运算性质双向保持

定理

假设 f 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, \circ \rangle$ 的同构映射。则 f^{-1} 是 $\langle B, \circ \rangle$ 到 $\langle A, * \rangle$ 的同构映射。

2022/3/29

§ 4.5 同余关系与商代数

4.5.1 同余关系

定义

假设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统， E 是 A 上的等价关系。如果对 $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ ，当 $x_1 E x_2, y_1 E y_2$ 时，必有 $(x_1 * y_1) E (x_2 * y_2)$ ，则称 E 是 A 上的同余关系。

2022/3/29

§ 4.6 直积

(1)

定义：

设 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 为两个代数系统， $\langle A \times B, \Delta \rangle$ 称为两代数系统的直积。其中 $A \times B$ 是 A 和 B 的笛卡尔乘积， Δ 定义如下：对任意的 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in A \times B$ ， $\langle x, y \rangle \Delta \langle u, v \rangle = \langle x * u, y \circ v \rangle$ 。

2022/3/29

§ 4.6 直积

(2)

定理：

假设 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 为两个代数系统，且分别有单位元 e_A, e_B ，在两代数系统的直积 $\langle A \times B, \Delta \rangle$ 中存在子代数系统 S, T ，使得 $\langle A, * \rangle \cong \langle S, \Delta \rangle$ ， $\langle B, \circ \rangle \cong \langle T, \Delta \rangle$ 。

2022/3/29

单选题 1分

设置

课堂练习1

设 $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, \circ \rangle$ 是代数系统， $f: A \rightarrow B$ 是函数； f 是满同态的必要条件之一是： $|A| \leq |B|$

- ☐ A 上述说法是正确的
- ☒ B 上述说法是错误的

提交

填空题 2分

设置

课堂练习2

以下 $*$ 运算的单位元是 [填空1]。没有单位元填写0

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	a	c	b

正常使用微交题库 3.0以上版本浏览器

作答

单选题 2分

设置

以下哪种判断正确。

- ☐ A 运算1满足等幂律
- ☐ B 运算2满足等幂律
- ☒ C 运算3满足等幂律
- ☐ D 运算4满足等幂律

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b
运算 1			
*	a	b	c
a	a	a	c
b	b	b	a
c	c	c	c
运算 2			
*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	b	c
运算 3			
*	a	b	c
a	a	a	b
b	b	b	b
c	c	c	b
运算 4			

提交

