

第七章 王宇涵 202200400053 离散第八次作业 Date AP  
习题六

2. 证明:

若  $a \leq b$  成立 有  $a \wedge b' = a$  则  $a \wedge (b')' = a \wedge b = a \wedge b' \wedge b = 0$   
则  $a \wedge b = 0$  则  $a \leq b'$  不成立 则  $a \wedge b \neq 0$  设  $x = a \wedge b$   
则有  $x \leq a$ ,  $x \leq b$  证明完毕

第八章

习题一

2. 证明: 设图  $G$ , 其中  $E$  为面中的边,  $V$  为面,  
则问题转化为证明 不存在有奇数个奇顶点的图

由握手定理得 度之和为偶数, 若存在有奇数个奇顶点,  
则偶顶点度数之和为奇数与实际矛盾, 证明完毕

4. 证明:

设简单图顶点个数为  $n$ , 则完全图边数为  $C_n^2$

由于  $E \leq C_n^2$  因此简单图必满足  $E \leq C_n^2$

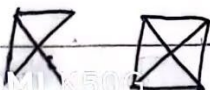
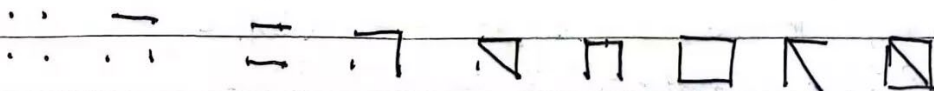
8. 证明: 设图  $G$ , 其中  $E$  为朋友关系,  $V$  为人

问题转化为证明存在 2 点度数相同

反证: 设没有 2 点度数相同, 即所有点度数均不相同,

则度数分别为  $0, 1, \dots, n-1$ . 由度数为  $0$  的点与度数为  $n-1$  的点  
矛盾, 则证毕

9. 证明: 画图如下:



Date.

### 习题二

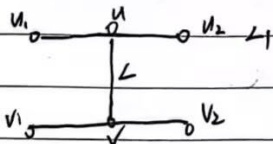
3. 证明:  $\forall v_1 \in V(G) \quad \because \deg(v_1) = 2 \quad \therefore$  有两个相邻顶点  
 设其中一个为  $v_2$  则有路径  $v_1 v_2 \dots$  而  $v_2$  同理有相邻顶点  $v_3$   
 则有路径  $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$  (设一共有  $k$  个顶点), 此时  $v_k$  的另一个  
 相邻顶点必为  $v_1$ , 则由  $v_1 v_2 \dots v_k v_1$  得该连通图为圈。  
 下证: 若  $v_k$  相邻顶点不为  $v_1$ , 不妨设  $v_2$ , 则  $v_1 v_2 \dots v_k v_2$   
 故  $v_2$  度为 3 与题设矛盾, 因此  $v_k$  另一个相邻顶点必为  $v_1$ 。

4. 证明: 设不存在长为  $\sigma$  的路, 则最长路长度  $< \sigma$

设  $p = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_l v_l$ , 则由简单图以及  $p$  为最长可得  
 $d(v_0) \leq l < \sigma$ , 这与  $d(v_0) \geq \sigma$  矛盾,  
 因此存在长为  $\sigma$  的路。

9. 证明: 设最长路  $L_1, L_2$  不存在公共顶点

由连通得, 必存在边  $e$  将  $L_1, L_2$  相连, 其中  $e$  除端点外既无  $L_1$   
 中顶点也无  $L_2$  中顶点, 如图



则路  $u_1 u + v v_2 = m$  (最长路长)

则路:  $u_1 u v v_2 = m + k > m$

其中  $k$  为  $e$  路长, 则与最长路矛盾

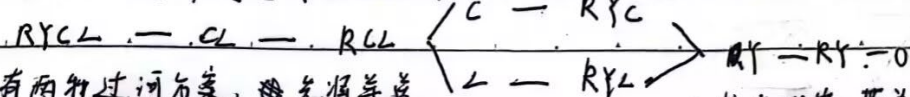
因此最长路间必有公共顶点

A+

### 习题三

2. 分别用  $R, Y, C, L$  代表人, 羊, 菜, 狼, 则共有  $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 = 16$   
 组合, 而  $YL, YC, YL$  不能出现, 因此  $RL, RC, R$  不能出现  
 则共有 10 种状态, 每次渡河相当于一次状态转化。

将图表示为, 问题转化为求解  $RYCL$  到  $0$  的最短路



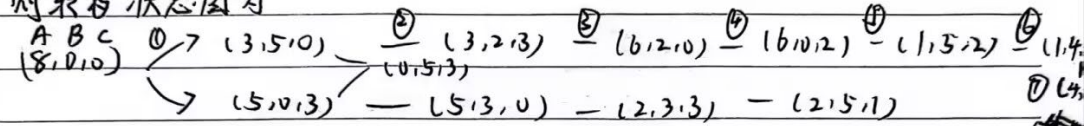
则有两种过河方案, ① 先将羊送  
 对岸, 再将①狼送对岸, 带羊回来, 送菜走, 接羊走 ② 菜送对岸, 带羊回来,  
 接羊走, 接羊走

王宇涵

习题三

3. 设容量分别为 8, 5, 3 的壶为 A, B, C. 初始状态记为 (8, 0, 0)

则转移状态图为



转化为从 (8, 0, 0) 到 (4, 4, 0) 或 (0, 4, 4) 或 (4, 0, 4) 最短路径

即一共进行如图 7 步操作, 即可平分酒。

4. 为每个节点记录在最短路径中的前驱节点, 则找到最短路径后, 可沿着前驱节点回溯, 从而确定完整的最短路径。