王宇涵 2022004000053 2班 离散数学作业

第五章

习题三.

1. 证明：$\forall a \in G$ 有 $(a) = \{a^i \mid i \in Z\}$ 是 G 的子群，设 $|G| = n$. n 是有限的，则 $|(a)| = m \le n$ 也是有限的. 由定理三得 $|(a)| = |a| = m$ 也是有限的，因此 a 的周期必为有限数。

4、证明：

设 $|a^{-1}| = x$ $|a| = y$ 下证 $x = y$ ∴

$a^x = ((a^{-1})^x)^{-1} = e$ 则 $y \mid x$

$(a^{-1})^y = (a^y)^{-1} = e$ 则 $x \mid y$.

则 $x = y$.

6. 证明：

设 $|ab| = x$ $|ba| = y$ 下证 $x = y$.

$(ab)^y = a(ba)^{y-1}b = a(ba)^{-1}b = a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot b = e$. 则 $x \mid y$

$(ba)^x = b(ab)^{x-1}a = b \cdot (ab)^{-1}a = bb^{-1}a^{-1}a = e$ 则 $y \mid x$

则 $x = y$.

8. 证明，对 $\forall$ 正整数 n 若 $a^n = e$ 则 $(f(a))^{(n)} = f(a^n) = f(e)$ $= e'$ (e' 为 G_2 单位元，e 为 G_1 单位元)

则 $|a| = |f(a)|$.

习题四

1、证明：设 $G = (a)$ $a \in G$ 且 $|G| = n$ 证对于 $\forall b, c \in G$ 有 $bc = cb$.

∵ $b = a^i$ $c = a^j$ ∴ $bc = a^{i+j} = a^{j+i} = cb$.

∴ G 为 Abel 群.

2. 生成元：[1] [2] [3] [4]

子群：([1]) = {[0] [1] [2] [3] [4]}

([2]) = {[0] [1] [2] [3] [4]}

([3]) = {[0] [1] [2] [3] [4]}

([4]) = {[0] [1] [2] [3] [4]}.

3. 证明：

设 $G=(a)$ $H=(b)$.

令：$f: a^m \to b^m$

证明满射：H中任意元素均可写成 b^m 的形式，都有唯一的 a^m 与对应

证明同态：$\forall x,y \in G$ $f(xy) = (xy)^m = a^n a^k = a^{n+k} \to b^{n+k} = b^n$ $= f(x)\cdot f(y)$

$(x=a^n \cdot y=a^k)$

4. 证明：

设G为无限循环群(a)，有限子群(b)，且 $b^m=e$. 有 $b=a^i$ 则 $a^{im}=e$ 则a的周期为 im，G为有限群，与条件矛盾，则G不存在有限子群，(除了{e}之外).

习题五. $\varphi_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ $\varphi_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ $\varphi_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$

1. $\varphi_1\varphi_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$

$\varphi_2\varphi_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$

$\varphi_2^{-1}\varphi_3 = \begin{pmatrix}3&4&1&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$.

$\varphi_3 x = \varphi_1$ 则 $x = \varphi_3^{-1}\varphi_1 = \begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$

Date. 封闭性：$\forall a,b \in R$ $a \oplus b = a+b-1 \in R$.

交换律 $a \oplus b = b \oplus a = a+b-1$. 则 $<R, \oplus>$ 为 Abel 群

② 证：$<R, \otimes>$ 为有单位元的半群

结合律：$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

单位元：$\forall a \in R$ $a \otimes 0 = a+0-0 = a$

封闭性：$\forall a,b \in R$ $a \otimes b = a+b-ab \in R$.

则 $<R, \oplus, \otimes>$ 构成有单位元 0 的环.

习题二.一

1. 证明：

设 R 中可逆元 a 则 $a \cdot a^{-1} = e$

若 a 为零因子 则 $a \cdot b = 0$ $(a \neq 0$ $b \neq 0)$

左右两边同乘以 a^{-1} 有 $b=0$ 矛盾

则 a 不为零因子

2. 证明：

设 R 中有左零因子 a

则 $\exists b \neq 0$ 使 $ab=0$ 则 $\exists a \neq 0$ 使 $ab=0$ 则 R 中存在零因子

反之同理.

4. 证明：

设 $\forall a \in R$ 且 $a \neq 0$

令 $R = \{a_1, a_2 \cdots a_n\}$ 设 a_i 不为可逆元

~~则 $S = \{a_1 a, a_2 a, \cdots a_n a\}$ 由 $S \subseteq R$.~~

~~且 $a_i a \neq e$ 得 $|S| \leq n-1$~~

~~则 $\exists a_i a = 0$ 则 a_i 必有零因子~~

5. 证明：$\forall a,b,c \in S$. 有 $a,b,c \in R$. ，则 $S \subseteq R$

$\because R$ 是环 $\therefore$ 满足结合律 则 $<S, \cdot>$ 满足结合律

则 $(a \cdot b) c = a (b \cdot c)$.

封闭性，$\forall a,b \in S$ $ab \in S$ ($\because a,b$ 是非零因子,则 $ab \neq 0$).

习题五

3. 4阶群有2种，则与G同构的4次置换群有2种

①

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

置换群为：$G' = \{ \begin{bmatrix} 1234 \\ 1234 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1234 \\ 2143 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1234 \\ 3412 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1234 \\ 4321 \end{bmatrix} \}$

②

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

置换群为 $G' = \{ \begin{bmatrix} 1234 \\ 1234 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1234 \\ 2143 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1234 \\ 3421 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 1234 \\ 4312 \end{bmatrix} \}$

第六章

习题一

4. 证明：若多于一个元素 则必 $\exists a \in S$，且 $a \neq 0$

对于加法运算，$\forall a \in S$　$a \in S$　则 $a+a = 2a \in S$，（封闭性）

则 $4a \in S$，$8a \in S$ … 因此S为无限实数集，与有限实数集矛盾，

则不构成环

5. 证明：若a可逆 则 $a \cdot a^{-1} = e$.

则 $(-a) \cdot (-a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = e$

$(-a^{-1})(-a) = a^{-1}a = e$

则 $(-a)^{-1} = -a^{-1}$，$-a$ 也是可逆的

7. 证明：

① 证 $<R, \oplus>$ 为 Abel 群

结合律：$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a+b+c-2$

单位元：$\forall a \in R$.　$a \oplus 1 = a+1-1 = a$　则1为单位元

逆元：　$\forall a \in R$　$a \oplus 2-a = a+2-a-1 = 1$　则 $a-2$ 为 a 逆元