2022074800033 王宇涵 22.2

第六章

习题四.

1. ∵ F的特征为 p ∴ $\forall a\in F$ 有 $a^p=a$、令 $\varphi: a\mapsto a^p$

① 同态性: $\varphi(a+b)=(a+b)^p=\varphi(a)+\varphi(b)$ 保持加法

$\varphi(ab)=(ab)^p=a^pb^p=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ 保持乘法

② 单射: ∵ F特征为 p ∴ F含有限个元素

若 $\varphi(a)=0$ 又∵ $\forall a\in F$ $a^p=0$ ∴ $a=0$ 又∵ φ 保持加法 ∴ $\varphi: F\to F$ 为单射

③ 满射: φ 为单射, 且象集与F可建立一一对应, 且F为有限集,

则象集 = F 则 $\varphi: F\to F$ 为满射

则 φ 满足双射

综上: $\varphi: F\to F$ 是F的自同构.

2. 证明:

e 表示F单位元

令 $Q'=\left\{\frac{me}{ne}\mid m,n\in Z,\ n\neq 0\right\}$ 则 $Q\to Q'$ (φ)

$\varphi: \frac{m}{n}\mapsto\frac{me}{ne}$ $\forall m,n\in Z,\ n\neq 0$

有理数 q 的象由 q 唯一确定, 与表示方法无关

设 $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ 则 $mn'=nm'$ 即 $(mn')e=(nm')e$

由 $(mn')e=m(n'e)=(me)(n'e)$

$(nm')e=n(m'e)=(ne)(m'e)$

故 $(me)(n'e)=(ne)(m'e)$ 有: $\frac{me}{ne}=\frac{m'e}{n'e}$ 即 $\varphi(\frac{m}{n})=\varphi(\frac{m'}{n'})$

则 φ 为满射 单射 且保持运算 (下证)

φ: $Q\cong Q'$ ∵ Q为域. Q'为域, 则为F子域.

下证：① φ 满射：

$\forall y=\frac{me}{ne}\in Q'$ $\exists \frac{m}{n}\in Q$ 使 $\varphi(\frac{m}{n})=y$ ∴ φ 为满射

② φ 单射：

令 $f(y_1)=f(y_2)$ 即 $\frac{m_1e}{n_1e}=\frac{m_2e}{n_2e}$ 即 $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$ 则 φ 为单射

③ φ 保持运算

$f(x_1+x_2)=(\frac{m_1e}{n_1e}+\frac{m_2e}{n_2e})=f(x_1)+f(x_2)$

$f(x_1\cdot x_2)=\frac{m_1m_2e}{n_1n_2e}=\frac{m_1e\cdot m_2e}{n_1e\cdot n_2e}=f(x_1)\cdot f(x_2)$

则：$\varphi: Q\cong Q'$

第七章

习题一 3.4

3. 证明：

必要性：若 a与b不可比较 则 $a*b\neq a$ $a*b\neq b$

则 $a*b<b$ $a*b<a$ 成立

充分性：若 $a*b<b$ $a*b<a$

假设 a,b 可比较 设 $a<b$ $(a\neq b)$

则 $a*b=a<b$ 成立

$a*b=a<a$ 不成立

$b<a$ 同理 ∴ 矛盾 ∴ a,b 不可比较

4. 证明：

∵ $\langle L,\leq\rangle$ 是一个格

∴ $\forall x,y\in L$，x,y 有最小上界 a，最大下界 b.

即 $x\leq a$ $y\leq a$ $x\geq b$ $y\geq b$.

$\geq$ 为 $\leq$ 的逆

$\because$ $x \geq a$ $y \geq a$ $x \leq b$ $y \leq b$.

$\therefore$ x 在 $<L, \geq>$ 中 x, y 有最小上界 b 和最大下界 a.

则 $<L, \geq>$ 也是格.

习题二.

1. 证明:

吸收律: $a * (a \oplus b) = a$

$a \oplus (a * b) = a$

幂等律: $a * a = a$ $a \oplus a = a$

则 $a * a = a * (a \oplus (a * b))$

$\because a * b \in L$ 则 $a * a = a$.

$a \oplus a = a \oplus (a * (a \oplus b))$

又 $\because a \oplus b \in L$ 则 $a \oplus a = a$

习题四:

3. 证明:

假设格中 $\exists a$ 满足 $a * a' = 0$ $a \oplus a' = 1$

$\because a = a'$ $\therefore a * a' = 0$, $a \oplus a' = 1$

$\therefore a = 1 = 0$ $\therefore$ 格中只存在一个元素, 与题设矛盾

故不存在该元素.

4. 证明:

(1) 若 $\because$ $x \oplus y = 0$ $\therefore x \leq 0$ $y \leq 0$ 又 $\because$ $x \geq 0$, $y \geq 0$

$\therefore$ $x = 0$, $y = 0$

若 $x = 0$ $y = 0$ 则 $x \oplus y = 0$.

(2) 若 $x * y = 1$ $\therefore x \geq 1$ $y \geq 1$ 又 $\because$ $x \leq 1$ $y \leq 1$ $\therefore x = 1$ $y = 1$

若 $x = 1$ $y = 1$ 则 $x * y = 1$.