§5.2 群的概念及其性质

5.2.2 群的性质

（1）任何群都没有零元。

（2）设 $<G,*>$ 是群，则 G 中消去律成立。

证明：$\forall a,b,c \in G, a*b=a*c$

$\because$ 群中任何元素的逆元都存在，设a的逆元是a^{-1}

$\therefore a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c)$即$(a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c$

$\therefore e*b=e*c \quad b=c$

同理 若 $b*a=c*a$ 则 $b=c$

$\therefore$群中消去律成立

§5.2 群的概念及其性质

5.2.2 群的性质

(3) 设 <G,*> 是群，单位元e是 G 中的唯一幂等元。

证明：∵ $e*e=e$ ∴ e是群中幂等元，

又设$a\in G$，且 $a*a=a$，a是群中另一幂等元

∵ $a^{-1}*a*a=a^{-1}*a$

∴ $a=e$

∴ e是群中唯一幂等元

5.2.2 群的性质

(4) 设<G,*>,<H, 。>是群，f是 G 到 H 的同态，若 e 为<G,*>的单位元，则 f(e) 是<H, 。> 的单位元，并且对任意 $a \in G$，有 $f(a^{-1})= f(a)^{-1}$。

证明： ∵ f是 G 到 H 的同态

∴ f(e) 。f(e) = f(e*e)=f(e)

从而**f(e)**是群<H, 。>中幂等元，

∴ **f(e)**是群<H, 。>的单位元

又**f(a) 。f(a⁻¹)=f(a*a⁻¹)=f(e)**

f(a⁻¹) 。f(a)=f(a⁻¹*a)=f(e)

∴ **f(a)** 与**f(a⁻¹)**互为逆元

5.2.2 群的性质

(5) 设<G,*>是群，<H,。**>**是任意代数系统，若存在G 到 H 的满同态映射，则<H,。**>**必是群。

证明： ∵满同态映射具有“**6**保持”

∴ H必是群，

5.2.4 有限群的性质

定理：设 <G,*> 是一个 n 阶有限群，它的运算表中的每一行（每一列）都是 G 中元素的一个全排列。

证明：设G中的n个不同元素为$a_1, a_2, \ldots, a_n$

即 $G=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 其中任意$a_i \neq a_j$（$i \neq j$）

其运算表中的第i行为 $a_i a_1, a_i a_2, \ldots, a_i a_n$

要说明是一个全排列，只要说明每个元素都不相同，

若 $a_i a_j = a_i a_k$（$j \neq k$）

由群众消去律成立 则$a_j = a_k$, 矛盾

$\therefore$ $a_i a_1, a_i a_2, \ldots, a_i a_n$ 是n个元素的全排列

5.2.4 有限群的性质

依据群的运算表中的每一行（每一列）都是 G 中元素的一个全排列。分析**1**，**2**，**3**阶群的运算表。

*	e
e	e

一阶群

*	e	a
e	e	a
a	a	e

二阶群

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

三阶群 **是唯一的吗？**

5.2.4 有限群的性质

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	?
b	b	?	e

若$a*b=b$ 则$a*b*b^{-1}=b*b^{-1}=e$, $a=e$

表1 填e ×

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	?
b	b	?	?

若$a*b=a$ 则$a^{-1}*a*b=a^{-1}*a=e$, $b=e$

表2 填a ×

5.2.4 有限群的性质

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

表3 填b √

只有 $a*b=e$,$b*a=b*a*e=b*a*（b*b^{-1}）=b*（a*b）*b^{-1}）=b*e*b^{-1}= b*b^{-1}=e$

$a*b=b*a$

三阶群的运算表是唯一

5.2.4 有限群的性质

四阶群的运算表？

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

第一类：每个元素自身为逆元

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

第二类：两个元素（包括**e**）自身为逆元另两个元素互为逆元

5.2.4 有限群的性质

例：$\langle G ,*\rangle$ 是可交换(ABEL)群的充要条件是 $\forall a,b \in G$ 有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

解：充分性 $\forall a,b \in G$ 有

$(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

则$\langle G ,*\rangle$ 是可交换(ABEL)群。

必要性 $\langle G ,*\rangle$ 是可交换(ABEL)群则有$\forall a,b \in G$ 有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

5.2.4 有限群的性质

例：任何阶数是1,2,3,4阶的群都是可交换(ABEL)群。

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

1阶群是可交换(ABEL)群，G={e}

2阶群是可交换(ABEL)群，G={e,a}

3阶群是可交换(ABEL)群，G={e,a,b}

若$a*b=a$ 则$a^{-1}*a*b=a^{-1}*a=e$, $b=e$

若$a*b=b$ 则$a*b*b^{-1}=b*b^{-1}=e$，$a=e$

只有 $a*b=e$,$b*a=b*a*e=b*a*(b*b^{-1})=b*(a*b)*b^{-1})=b*e*b^{-1}=b*b^{-1}=e$

$a*b=b*a$

5.2.4 有限群的性质

4阶的群都是可交换(ABEL)群。

4阶群是可交换(ABEL)群，G={e,a,b,c}

(1)a,b,c自为逆元,

则a*b=b*a=c; b*c=c*b=a;

c*a=a*c=b 交换律满足

(2) a,b,c两个元素互为逆元，如a,b互为逆元

若a*b=b*a=e

则c*c =e, a*c≠e, a*c=b

同理c*a=b 所以a*c=c*a,

同理 b*c=c*b

5. 2. 4 有限群的性质

例：假设<G,*>是一个二阶群，则<G×G,*>是一个Klein群。且是可交换（**abel**）群。

G={e,a}

G×G={<e,e>,<e,a>,<a,e>,<a,a>,}

<e,e>*<e,e>=<e*e,e*e>=<e,e>

<e,e>*<e,a>=<e*e,e*a>=<e,a>

<a,a>*<a,a>=<a*a,a*a>=<e,e>

5.2.4 有限群的性质

*	<e,e>	<e,a>	<a,e>	<a,a>
<e,e>	<e,e>	<e,a>	<a,e>	<a,a>
<e,a>	<e,a>	<e,e>	<a,a>	<a,e>
<a,e>	<a,e>	<a,a>	<e,e>	<e,a>
<a,a>	<a,a>	<a,e>	<e,a>	<e,e>

同构 ≅

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$G \to G\times G$;定义如下双射

$e \to \langle e,e\rangle$, $a \to \langle e,a\rangle$,
$b \to \langle a,e\rangle$, $c \to \langle a,a\rangle$

§5.2 群的概念及其性质

5.2.3 半群与群

(1) 假设 $\langle G,*\rangle$ 是半群，并且

① $\langle G,*\rangle$ 中有一左单位元 e，使得对任意的 $a\in G$，有 $e * a = a$；

② $\langle G,*\rangle$ 中任意元素 a 都有“左逆元” a^{-1}，使得 $a^{-1} * a = e$。

则 $\langle G,*\rangle$ 是群。

$a^{-1}*a=e$，有 $a^{-1}\in G$，a^{-1} 的左逆元 $(a^{-1})^{-1}\in G$ 即 $(a^{-1})^{-1}a^{-1}=e$

推证右逆元存在 $aa^{-1}=eaa^{-1}=((a^{-1})^{-1}a^{-1})aa^{-1}=e$

推证右单位存在 $ae=a(a^{-1}a)=ea=e$

5.2.3 半群与群

(2) 有限半群，如果消去律成立，则必为群。

分析:

(1)封闭性 (2)结合律

(3)单位元 (4)逆元 （消去律成立）

群小结（2）

1、任何群都没有零元。

2、群中消去律成立。

3、单位元e是 群中的唯一幂等元。

4、设<G,*>,<H, 。>是群，f是 G 到 H 的同态，单位元的同态像是单位元，逆元的同态像也是逆元。

定理：设 <G,*> 是一个 n 阶有限群，它的运算表中的每一行（每一列）都是 G 中元素的一个全排列。