§6.2 区间估计

前面，我们讨论了参数点估计．它是用样本算得的一个值去估计未知参数．但是，点估计值仅仅是未知参数的一个*近似值*，它没有反映出这个近似值的*误差范围*，使用起来把握不大．区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷．

引例 已知 $X \sim N(\mu, 1)$,

μ 的无偏、有效点估计为 $\bar{X}$

$\downarrow$ 常数 $\qquad$ $\downarrow$ 随机变量

不同样本算得的 μ 的估计值不同,因此除了给出 μ 的点估计外,还希望根据所给的样本确定一个随机区间,使其包含参数真值的概率达到指定的要求.

1. 置信区间Confidence Interval定义

重要

设θ是一个待估参数，给定 $\alpha>0$，若由样本$X_1,X_2,\ldots X_n$确定的两个统计量

$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

$(\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2)$ 满足

$$P(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha$$

则称区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信水平(置信度、置信概率)为 $1-\alpha$ 的置信区间.

$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限.

2.求置信区间的步骤

例　设$X_1,\ldots X_n$是取自$N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，σ^2已知求参数μ的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

明确问题:求什么参数的置信区间?
置信水平是多少?

解　选μ的点估计为 $\bar{X}$

寻找未知参数的一个良好估计.

取　$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

寻找一个待估参数和估计量的函数，要求其分布为已知.

有了分布，就可以求出U取值于任意区间的概率.

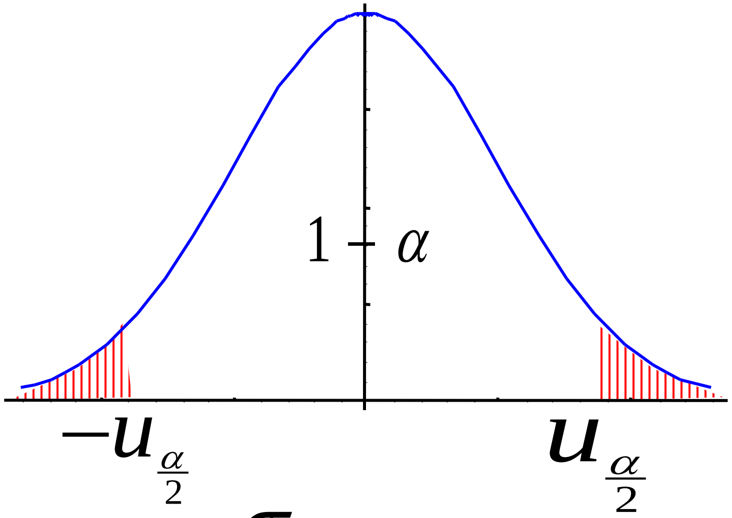
对于给定的置信水平(大概率)，根据U的分布，确定一个区间，使得U取值于该区间的概率为置信水平.

对给定的置信水平$1-\alpha$

查正态分布表得 $u_{\alpha/2}$,

使 $$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

从中解得



$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

于是所求μ的 置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

也可简记为 $\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$

重要

从例1解题的过程，我们归纳出求置信区间的一般步骤如下:

1. 明确问题, 是求什么参数的置信区间?
置信水平 1-α是多少?

2. 寻找参数θ的一个良好的点估计$T(X_1,X_2,\ldots X_n)$

3. 寻找一个待估参数 θ和估计量T的函数 $S(T, \theta)$,且其分布为已知.

称$S(T, \theta)$为枢轴量.

重要

4. 对于给定的置信水平$1-\alpha$，根据$S(T, \theta)$的分布，确定常数a, b，使得

$$P(a \le S(T, \theta) \le b) = 1-\alpha$$

5. 对“$a \le S(T, \theta) \le b$”作等价变形,得到如下形式: $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha$

则$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$就是$\theta$的置信度为 $1-\alpha$的置信区间.

重要

可见，确定区间估计很关键的是要寻找一个待估参数θ和估计量T的函数$S(T,\theta)$, 且$S(T,\theta)$的分布为已知, 不依赖于任何未知参数 (这样我们才能确定一个大概率区间).

而这与总体分布有关，所以，总体分布的形式是否已知，是怎样的类型，至关重要.

这里，我们主要讨论总体分布为正态的情形．若样本容量很大，即使总体分布未知，应用中心极限定理，可得总体的近似分布，于是也可以近似求得参数的区间估计．

重要

置信区间常用公式

(一) 一个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的情形

(1) 方差σ^2已知, μ 的置信区间

$$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}]$$

$$\text{枢轴量} \ U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(2) 方差σ^2未知，μ的置信区间

重要

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

推导 选取枢轴量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$$P\{|T|\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|\le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\le\mu\le\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

(3) 当 μ 已知时，方差σ^2的置信区间

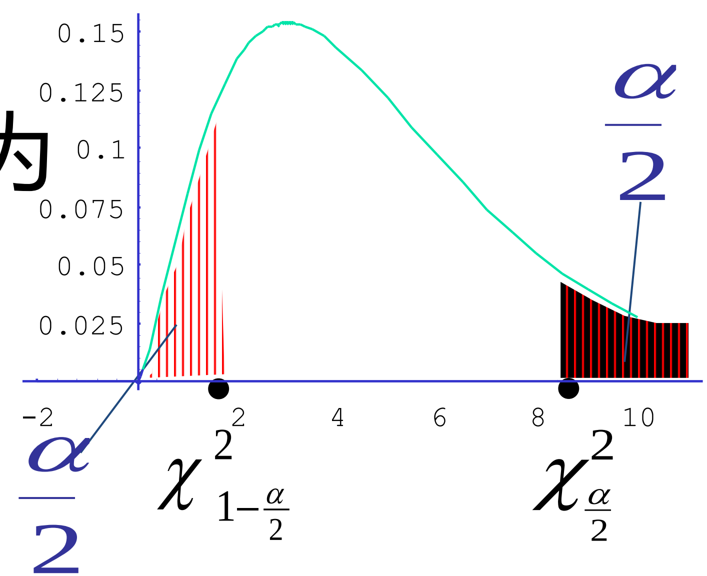
重要

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$,

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=1-\alpha$$

得 σ^2 的置信度为1-α置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$$



重要

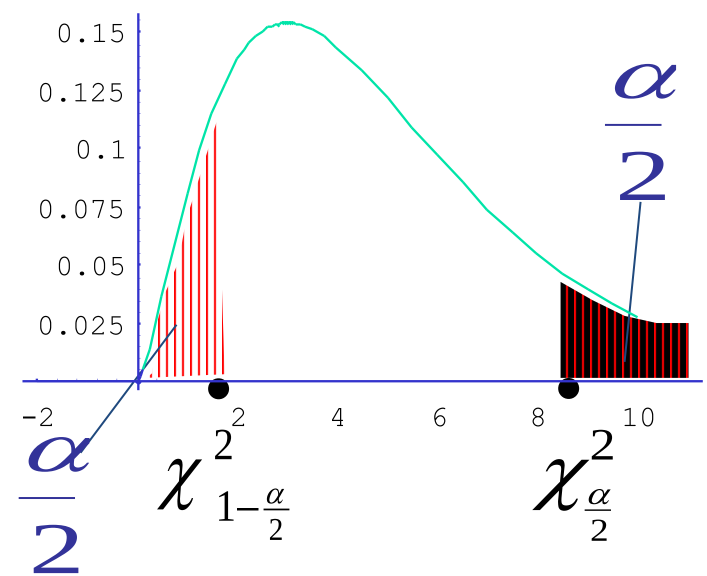
(4) 当μ未知时，方差σ^2的置信区间

选取 $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$



例 某工厂生产一批滚珠，其直径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从某天的产品中随机抽取6件，测得直径为

15.1，14.8，15.2，14.9，14.6，15.1

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \text{若}\sigma^2=0.06,\ \text{求}\mu\text{的置信区间}\\(2)\ \text{若}\sigma^2\text{未知,求}\mu\text{的置信区间}\\(3)\ \text{若}\mu\text{未知,求方差}\sigma^2\text{的置信区间.}\end{array}\right\}\ \text{置信度均为}0.95$$

解 (1) $$\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right]$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$$

由给定数据算得 $\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=14.95$

由公式得 μ 的置信区间为

$$(14.95-1.96\times 0.1,\quad 14.95+1.96\times 0.1)$$

$$=(14.75,\quad 15.15)$$

(2) $[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$

查表 $t_{0.025}(5)=2.5706$

$$s^2=\frac{1}{5}(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2)=0.051.\quad s=0.226$$

由公式得 μ 的置信区间为

$$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5),\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5))$$

$$=(14.71,\quad 15.187)$$

(3) $$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}]$$ $s^2=0.051.$

查表得 $\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\quad \chi^2_{0.975}(5)=0.831$

由公式得 σ^2 的置信区间为

$$(\frac{5s^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\quad \frac{5s^2}{\chi^2_{0.975}(5)})=(0.0199,\quad 0.3069)$$

例6. 2. 3 某工厂生产的灯泡寿命近似服从正态分布，标准差σ=40，若25个灯泡的样本平均寿命为1180h，

(1)求此厂家生产的所有灯泡总体均值μ的0.95置信区间

(2)若希望误差 $e=|\bar{x}-\mu|<10h$,需要多大的样本?

解 (1)因σ已知，所以选枢轴变量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$\therefore P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha=0.95$$

$$\therefore 置信区间[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

$$查表 u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$$

由公式得 μ 的置信区间为

$$(1180-1.96\times\frac{40}{\sqrt{25}},\quad 1180+1.96\times\frac{40}{\sqrt{25}})$$

$$=(1164.32,\quad 1195.68)$$

(2)若希望误差 $e=|\bar{x}-\mu|<10h$

$$\because \left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_{\alpha/2}$$

$$\therefore |\bar{X}-\mu| \le u_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore u_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10$$

$$\therefore n > (u_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{10})^2 = 61.465$$

所以样本大小为62个灯泡

(二) 两个正态总体的情形

$(X_1, \ldots X_n)$为取自总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本,

$(Y_1, \ldots Y_n)$为取自总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,

$\bar{X}, S_1^2$；$\bar{Y}, S_2^2$ 分别表示两样本的均值与方差

置信度为 $1-\alpha$

(1) σ_1^2, σ_2^2 已知，μ_1-μ_2的置信区间

$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n})$, $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$ $\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立,

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

μ_1-μ_2的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},\quad (\bar{X}-\bar{Y})+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}} \right)$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知$\mu_1$-$\mu_2$的置信区间

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)$$

$$\frac{[(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)]/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}/(n+m-2)}}\sim t\,(n+m-2)$$

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

μ_1-μ_2的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}} \right)$$

(3) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1，μ_2 已知)

取枢轴量

$$F=\frac{\dfrac{1}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{1}{m}\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\dfrac{m}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n,m)$$

因此，方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n),\quad \frac{m}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n) \right)$$

(4) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 未知)

取枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2\big/S_2^2}{\sigma_1^2\big/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n-1)}{\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(m-1)}\sim F\,(n-1,m-1)$$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1),\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right)$$

几点说明

1. 要求θ以很大的可能被包含在$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$内，$P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$要尽可能大.

即要求估计尽量可靠.

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度$\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$尽可能短.

置信度与精度是一对矛盾，当样本容量固定时，置信度越高，则精度越差.

处理“可靠性与精度关系”的原则

求参数置信区间

先

保证可靠性

再

提高精度

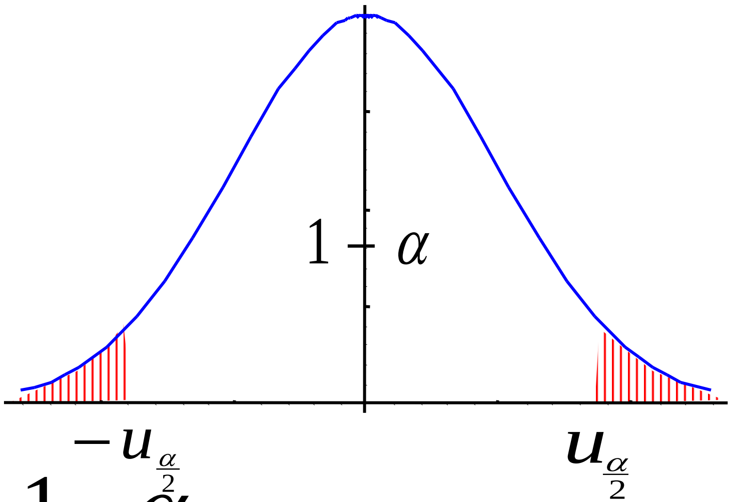
特别说明

需要指出的是，给定样本，给定置信水平，置信区间也不是唯一的.

对同一个参数，我们可以构造许多置信区间.

例　设$X_1,\dots X_n$是取自$N(\mu,\sigma^2)$的样本，σ^2已知. 求参数μ 的置信水平为 1-α 的置信区间.

对给定的置信水平1-α



查正态分布表得$\mu_{\alpha/2}$

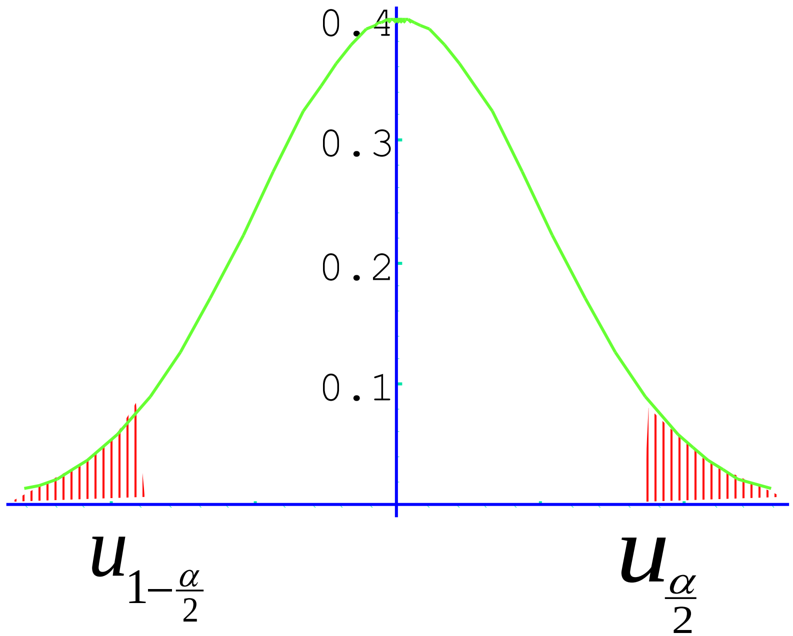
使　$$P\{|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le\mu\le\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

为何要取 $u_{\alpha/2}$？

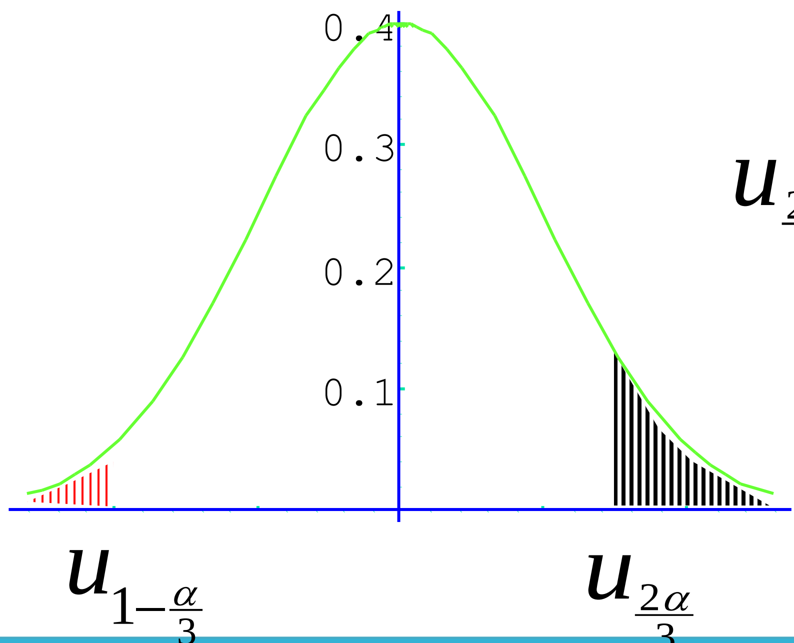
区间的长度为$2u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ —— **达到最短**



取 $\alpha = 0.05$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 - (-1.96)$$

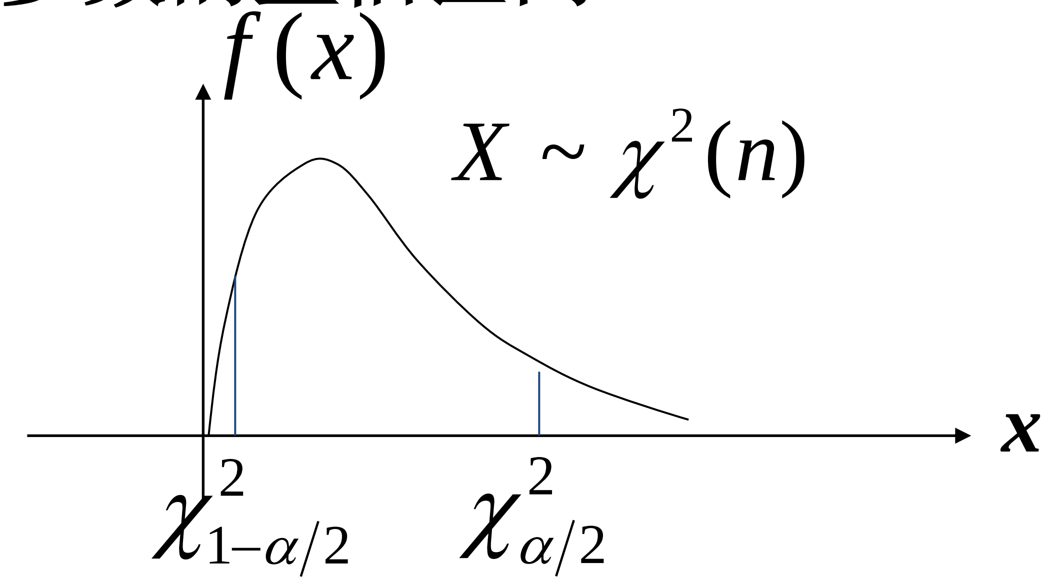
$$= 3.92$$



$$u_{\frac{2\alpha}{3}} - u_{1-\frac{\alpha}{3}} = 1.84 - (-2.13)$$

$$= 3.97$$

即使在概率密度不对称的情形，如χ^2分布，F分布，习惯上仍取对称的百分位点来计算未知参数的置信区间.



在保证足够可靠的前提下，尽量使区间的长度短一些.