概率统计第五章习题课

1.设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

其中 μ,σ^2 未知.

(1) 求样本的样本空间和联合分布密度.

(2) 问下列随机变量中哪些是统计量

$$T_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$T_2 = X_n - EX_1;$$

$$T_3 = 2X_2 + X_3;$$

$$T_4 = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n);$$

$$T_5 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma};$$

$$T_6 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2.$$

2. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自泊松分布$P(\lambda)$的样本，$\bar{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差，求

$E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$

3. 在总体$N(10, 4)$中随机抽容量为5的样本 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5. 求

(1) $P(|\overline{X}-10|>2)$

(2) $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>12\}$

(3) $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>8\}$

4.设总体 $X \sim N(0,0.2^2),(X_1, X_2,\cdots, X_8)$为其样本，

求a, 使$P(\sum\limits_1^8 X_i^2 < a) = 0.95.$

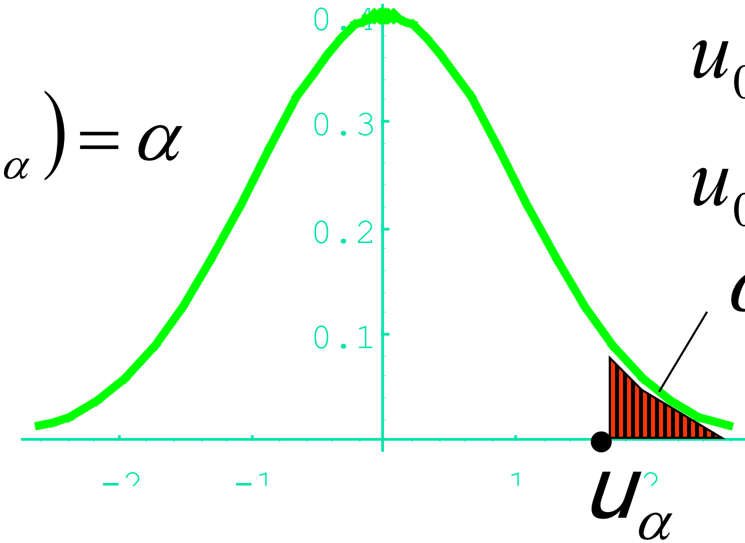
,

5.某厂灯泡的寿命 $X \sim N(2500, 250^2)$,为使灯泡的平均寿命大于2450的概率超过99%,至少应检查多少灯泡?

7.分位数查表

标准正态分布的上α分位数

$$P(X > u_\alpha) = \alpha$$



$$\left.\begin{aligned} u_{0.05} &= 1.645 \\ u_{0.025} &= 1.96 \end{aligned}\right\}$$ 常用数字

$$t_{0.95}(20) = t_{1-0.05}(20) = -t_{0.05}(20) = -1.7247$$

$$F_{0.95}(4,6) = \frac{1}{F_{0.05}(6,4)} = \frac{1}{6.16} = 0.1623$$

8.证明 $F_{1-\alpha}(m,n)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$

9.设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的样本.

(1) $Y=C[(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4)^2]\sim\chi^2(n)$

C,n为多少？

3.5 正态随机变量的结论

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N\left(\mu_1, \ \sigma_1^2\right) \qquad Y \sim N\left(\mu_2, \ \sigma_2^2\right)$$

$$Z = X + Y,$$

则 $Z \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

χ^2 - 分布定义

χ^2分布是由正态分布派生出来的一种分布.

定义: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 都服从正态分布$N(0,1)$, 则称随机变量:

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布.

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

(2) 证明$Z=\dfrac{(X_1-X_2)^2}{(X_3+X_4)^2}\sim F(1,1)$

F 分布定义

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, X, Y 独立,

则称随机变量

$$\mathrm{F} = \frac{X / n_1}{Y / n_2}$$

为服从自由度是n_1, n_2 的 $F-$分布,

记作$F \sim F(n_1, n_2)$.

10. $X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单样本,

$$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2), Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim \underline{\qquad\qquad}$$

t 分布 (Student 分布)

$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$独立，则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

为服从自由度是n的$t-$分布，记作$T \sim t(n)$.

其密度函数为

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

11.设$X_1, X_2, \cdots, X_9$为总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \cdots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2, \text{证} Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2).$$

12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n} (n \geq 2)$ 为从正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，求统计量

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$$

的期望.

17*.设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,令

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|,\text{试证}\quad E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma, D(Y) = (1 - \frac{2}{\pi})\frac{\sigma^2}{n}.$$