第三章习题课

3. 从 1, 2, 3, 4 这4个数中随机取出一个，记为 X，再从1到 X 中随机地取出一个数，记为 Y，试求 (X, Y) 的联合分布律与 X 及 Y 的边缘分布律.

X 与 Y 的取值都是 1，2，3，4，而且 $Y \le X$，

所以，当 $i < j$ 时，$P(X=i, \quad Y=j)=0$

当 $i \ge j$ 时，由乘法公式，得

$$P_{ij}=P(X=i, \quad Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{1}{4i} \qquad p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij} \text{ 及 } p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$$

$(X, \ Y)$的联合与边缘分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

4. 袋中有3个黑球,2个白球，从中随机取出4个，X表示取到的黑球数,Y表示取到的白球数，求$(X, \ Y)$的联合分布律.

$$X+Y=4 \longrightarrow \begin{array}{l} X=2,3 \\ Y=1,2 \end{array}$$

$$P(X=2,Y=2)=C_3^2C_2^2/C_5^4=3/5,$$

$$P(X=3,Y=1)=C_3^3C_2^1/C_5^4=2/5,$$

$$P(X=2,Y=1)=P(X=3,Y=2)=0.$$

$(X,\ Y)$的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2
2	0	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{2}{5}$	0

5. 设二维随机变量$(X, \quad Y)$的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(1) 求常数A;

(2) 求$(X, \quad Y)$的联合分布函数;

(3) 求$P(0<X<1, \quad 0<Y<2)$.

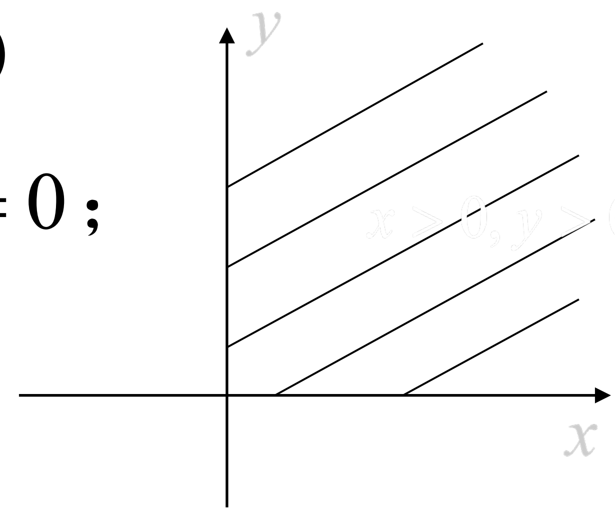
解:(1) 由密度函数的性质,得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dxdy = A\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=A\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\,dy \ =\frac{A}{12}$$

所以,$A=12.$

(2) $F(x, \quad y) = P(X \le x, \quad Y \le y)$



当 $x \le 0$ 或 $y \le 0$ 时，$F(x, \quad y) = 0$；

当 $x > 0$ 且 $y > 0$ 时，

$$F(x, \quad y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, \quad v) du dv$$

$$= 12 \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} e^{-(3u+4v)} du dv = 12 \int_{0}^{x} e^{-3u} du \cdot \int_{0}^{y} e^{-4v} dv$$

$$= \left(1 - e^{-3x}\right)\left(1 - e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x, \quad y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-3x}\right)\left(1 - e^{-4y}\right) & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

(3) $P(0<X<1,\ 0<Y<2)$

$$=\iint_{0<x<1,\ 0<y<2} f(x,\ y)dxdy$$

$$=12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

或者 $P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

6.已知随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

试求A,B,C及(X, Y)的联合密度函数.

联合分布函数的性质

$$A=1/\pi^2, B=\pi/2, C=\pi/2.$$

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1,$$

$$F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0,$$

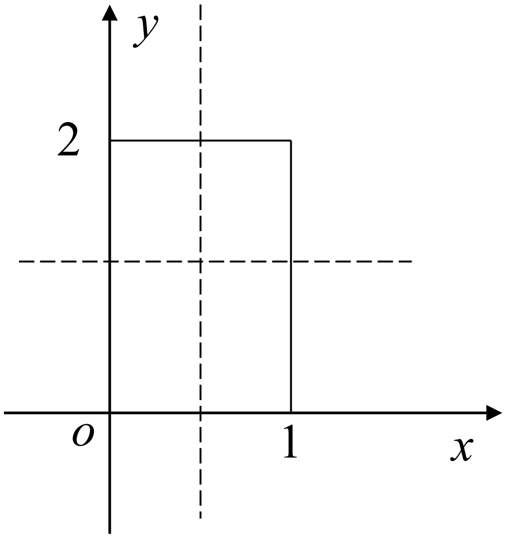
$$F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0,$$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$$

8.设随机变量$(X, \quad Y)$的密度函数为

$$f(x, \quad y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求X与Y的边缘密度函数.



解：当$0\le x\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dy$$

$$=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy \quad =2x^2+\frac{2}{3}x$$

所以，X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} 2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当$0\le y\le 2$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

所以，Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

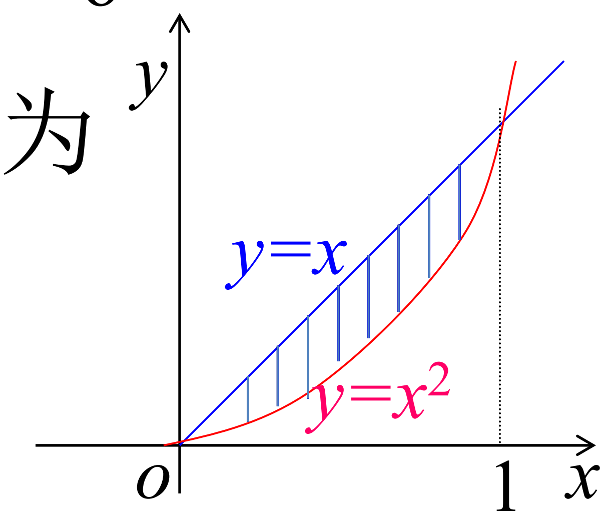
9. 设平面区域D是由抛物线$y=x^2$及直线$y=x$所围，随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布．试求随机变量(X,Y)的联合密度函数及X、Y各自的边缘密度函数.

解：(1)区域D的面积为

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x}dydx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$

所以,(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$



(2)随机变量 X 的边缘密度函数为

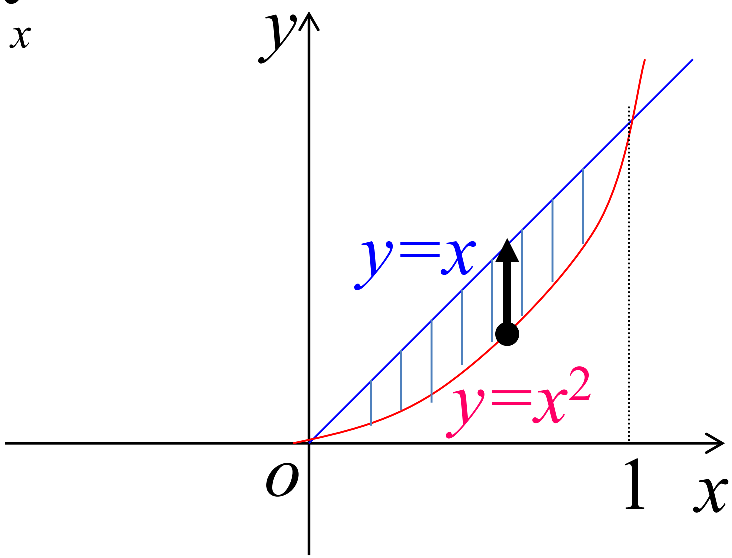
$$f(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x^2}+\int_{x^2}^{x}+\int_{x}^{+\infty}$$

$$=\int_{x^2}^{x}6dy=6\left(x-x^2\right)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}6\left(x-x^2\right) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

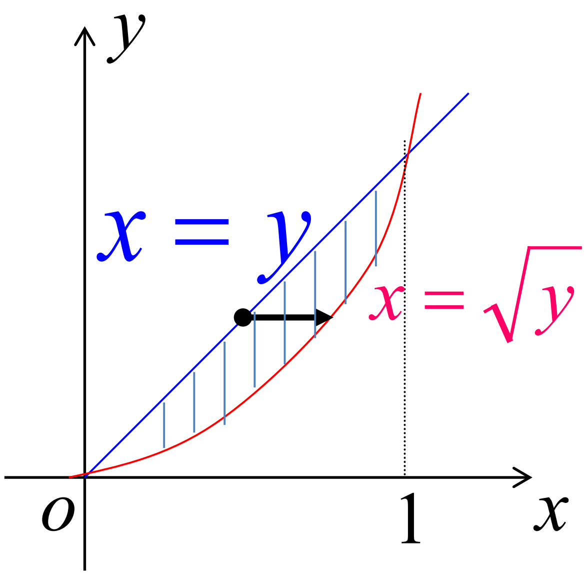


同理，随机变量Y的边缘密度函数为

当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{y} + \int_{y}^{\sqrt{y}} + \int_{\sqrt{y}}^{+\infty}$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6\left(\sqrt{y}-y\right)$$



$$f_Y(y)=\begin{cases} 6\left(\sqrt{y}-y\right) & 0<y<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

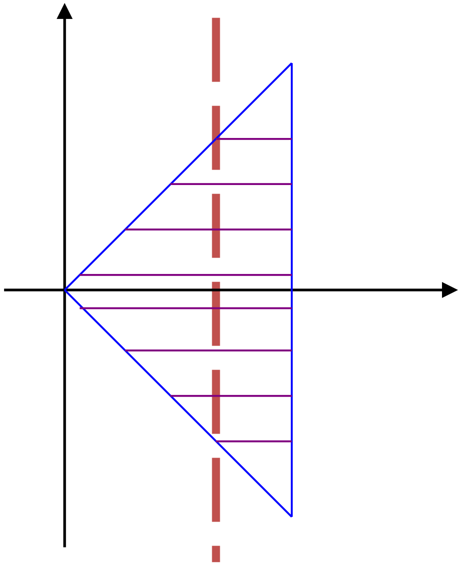
10.设随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x|y)$ ，$f_{Y|X}(y|x)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

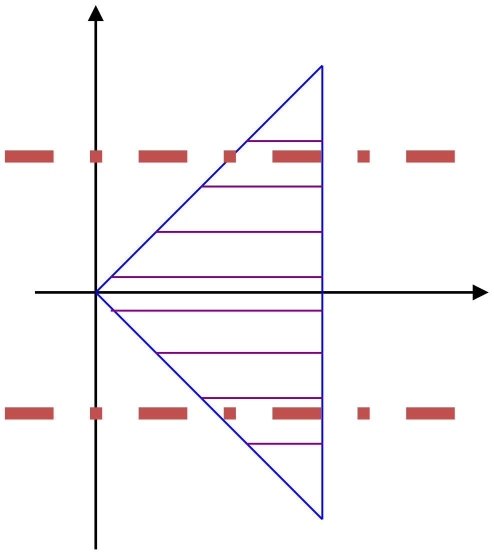
$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 dx, & 0<y<1\\ \int_{-y}^1 dx, & -1<y<0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-y, & 0<y<1\\ 1+y, & -1<y<0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$



当$-1 < y < 1$时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|y|}, & |y| < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

当$0 < x < 1$时，

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & |y| < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

13. 已知(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求A;

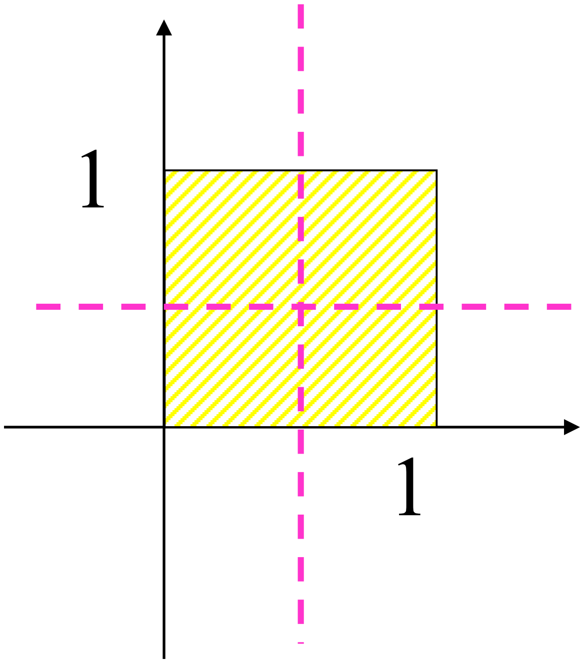
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \boxed{A=6}$$

(2)证明X, Y相互独立.

(2) 由图知边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



显然 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

故 X,Y 相互独立

14. 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$

试确定常数a，b使得随机变量X与Y相互独立.

并求$P(X = i \mid Y = 1)$.

解：由表，可得随机变量X与Y的边缘分布律为

Y \ X	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{a}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{b}$	

X与Y相互独立，则$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}\ (i=1,2;j=1,2,3)$

$$\frac{1}{9}=P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{a}\right)\Rightarrow \alpha=\frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{18}=P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{b}\right)\Rightarrow b=9$$

而当$a=\dfrac{9}{2}$， $b=9$ 时，联合分布律及边缘分布律为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

可以验证当$a=\dfrac{9}{2}, b=9$时, $p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$,即$X$与$Y$相互独立.

所以$P(X=i\,|\,Y=1)=P(X=i)=p_{i\bullet}$

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

15. 设随机变量X和Y相互独立,它们的密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, \quad x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, y > 0, \\ 0, \quad y \le 0. \end{cases}$$

求 (1)（X，Y）的密度函数; (2)$P(X \le 1 | Y > 0)$.

因为随机变量 X 和 Y 相互独立

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$P(X \leq 1 \mid Y > 0) = \frac{P(X \leq 1, Y > 0)}{P(Y > 0)}$$

或者由独立性

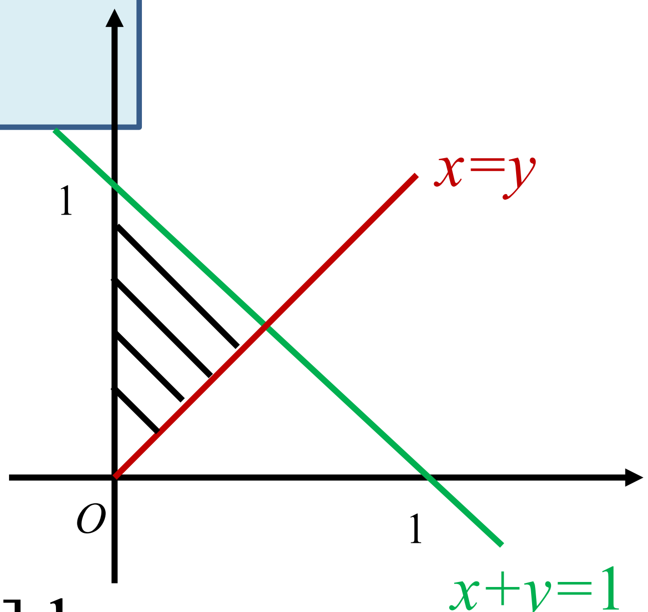
$$P(X \leq 1 \mid Y > 0) = P(X \leq 1) = F_X(1)$$

$$= 1 - e^{-1}$$

设二维随机变量（X， Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求概率 $P\{X+Y\le 1\}$



解 $P\{X+Y\le 1\}$

$$=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\mathrm{x}}^{1-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{1}{2}}[\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{x})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}]\mathrm{d}x$$

$$=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其密度函数

分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0;\\ 0, \quad x\le 0,\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, y>0;\\ 0, \quad y\le 0,\end{cases}$$

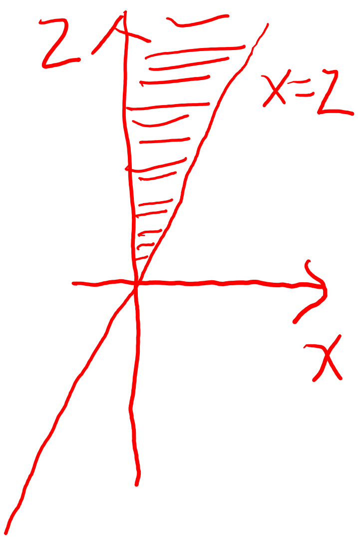
求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$$

$$z\ge 0,\quad f_Z(z)=\int_0^{z}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{z-x}{3}}dx$$

$$=e^{-\frac{z}{3}}(1-e^{-\frac{z}{6}})$$

$$z<0,\quad f_Z(z)=0$$



$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}(1-e^{-\frac{z}{6}}), & z\ge 0;\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从 $(0,\ 1)$ 上的均匀分布，Y 服从 $\lambda = 1$ 的指数分布，求随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数.

解：

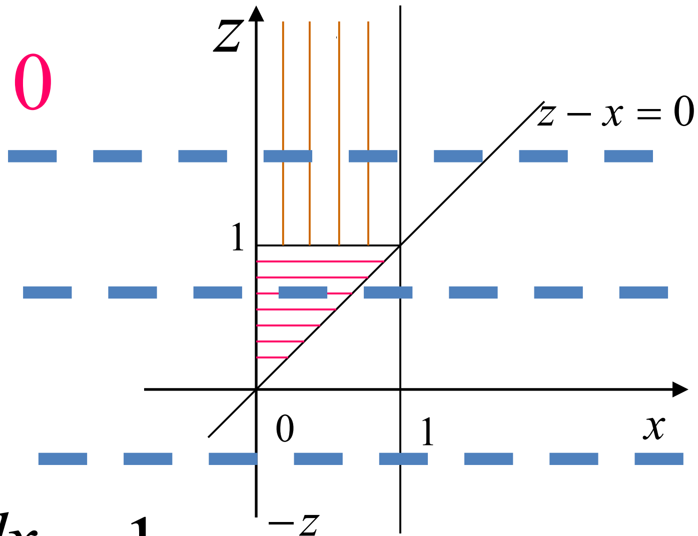
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx,$$



$0<x<1,\ \ z-x>0$

(1)若$z<0$， $f_Z(z)=0$

(2)若$0 \le z<1$，

$$f_Z(z)=\int_0^z 1 * e^{-(z-x)}dx \ = e^{-z}\int_0^z e^x dx = 1-e^{-z}$$

(3)若 $z \ge 1$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx \ = e^{-z}\int_0^1 e^x dx = e^{-z+1}-e^{-z}$$

综上所述，可得$Z=X+Y$的密度函数为

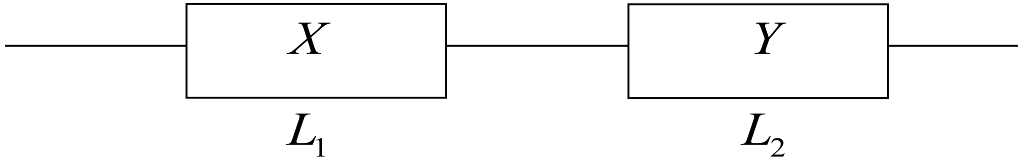
$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ 1-e^{-z}, & 0\le z<1 \\ e^{-z+1}-e^{-z}, & z\ge 1 \end{cases}$$

21. 设系统L是由2个相互独立的子系统L_1，L_2连接而成，并且L_1，L_2的寿命分别为X,Y，它们的密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求L在串联和并联方式下寿命Z的密度函数.

解 (1) 串联的情况



因为有一个损坏时，系统 L就停止工作，所以 L的寿命为

$Z = \min\{X, Y\}$,

X,Y都服从指数分布，分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, x > 0; \\ 0, x \le 0, \end{cases} \quad , \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, y > 0; \\ 0, y \le 0, \end{cases}$$

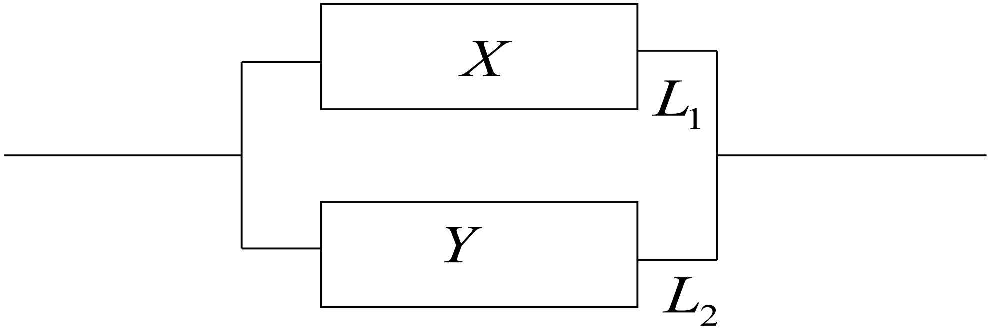
故Z 的分布函数 $F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, z > 0, \\ 0, \qquad z \le 0, \end{cases}$$

于是，得Z的密度函数

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z > 0; \\ 0, \qquad z \le 0. \end{cases}$$

(2) 并联的情况



因为当且仅当都损坏时，系统 L 才停止工作，
所以L的寿命Z为 $Z=\max\{X,Y\}$

Z的分布函数 $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$$=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

Z的密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

设随机变量X,Y相互独立，且均服从区间[0, 3]上的均匀分布，则P{max{X, Y}≤1}=( )

X,Y具有相同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P\left\{\max\left\{X,Y\right\}\le 1\right\}=P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}$$

$$=P\left\{X\le 1\right\}P\left\{Y\le 1\right\}$$

$$=\left(P\left\{X\le 1\right\}\right)^2=\left(\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{9}$$

设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有(　　)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

利用事件和的运算和条件概率的概念即可

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1\Rightarrow P(AB)=P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$$

故应选(C).

设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$， Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$$

则必有(　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

【分析】 利用标准正态分布密度曲线的几何意义可得.

$$P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\}\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$$

$\Phi(x)$ 是单调增函数（累积分布），则

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}\qquad \Rightarrow \sigma_1<\sigma_2$$

某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为p (0<p<1)，则此人第 4次射击恰好第 2次击中目标的概率为(　)

(A) $3p(1-p)^2$　　(B)$3p^2(1-p)^2$

(C)$6p(1-p)^2$　　(D)$6p^2(1-p)^2$

P(前三次仅有一次击中目标，第 4次击中目标)

$$= C_3^1 p(1-p)^2 p$$

随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，$f_X(x), f_Y(y)$分别表示X,Y的概率密度，则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$

(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $f_X(x)/f_Y(y)$

[分析] 本题求随机变量的条件概率密度，利用X与Y的独立性和公式

因为X与Y不相关，所以 X与Y独立，所以

$f_X(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$$

令$Y=X^2$, $F(x,y)$为二维随机变量X,Y的分布函数

(1) 求Y的概率密度$f_Y(y)$

(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$$

(1)设Y的分布函数为$F_Y(y)$，即

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)$$

$$-1<x<0\Rightarrow 1>x^2>0\Rightarrow 0<y<1$$

$$0\le x<2\Rightarrow 0\le x^2<4\Rightarrow 0\le y<4$$

$$\therefore y<0,\ 0\le y<1,\ 1\le y<4,\ y>4$$

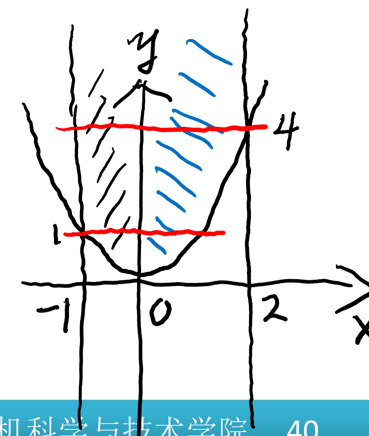
当$Y<0$时，$F_Y(y)=0$

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=P\left(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\right)=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$

当$1\le y<4$时，$F_Y(y)=P\left(-1<X<\sqrt{y}\right)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2}$

当$Y\ge4$时，$F_Y(y)=1$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}},0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}},1\le y\le 4\\ 0,其他\end{cases}$$



$$(2)\ F\left(-\frac{1}{2},4\right)$$

$$=P\left(X\le-\frac{1}{2},Y\le4\right)=P\left(X\le-\frac{1}{2},X^2\le4\right)$$

$$=P\left(X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le2\right)=P\left(-2\le X\le-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$