概率统计第六章习题课

2. 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知, 求(1)参数a, b 的矩估计量.

解 由于 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

令
$$\begin{cases} E(X)=\dfrac{a+b}{2}=A_1=\overline{X} \\ E(X^2)=\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=A_2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$$

解得 $\hat{a}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$

$$= \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{b}_{矩} = \bar{X} + \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$$

$$= \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

(2) 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知, $x_1,\ldots x_n$是一个样本值，求参数a, b 的极大似然估计量.

解：X的概率密度为?

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令$x_{\min}=\min\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$，$x_{\max}=\max\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$

似然函数为

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{\min}, x_{\max} \le b;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

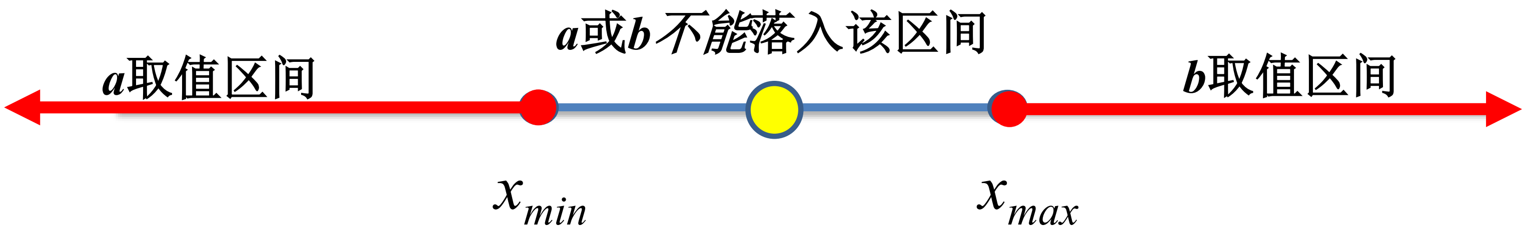
$$\ln L(a,b)=\begin{cases}-n\ln(b-a), & a\le x_{\min}, x_{\max}\le b;\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

$$\because \frac{\partial \ln L(a,b)}{\partial a}=\frac{n}{b-a}\neq 0 \quad \frac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b}=-\frac{n}{b-a}\neq 0$$

$\therefore$只能从定义上来分析

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_{\min}, x_{\max}\le b;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1)iff $a \le x_{min}$ 且$x_{max} \le b$ 时,$L \neq 0$ (且 a 越大, b 越小, L 越大);
(2) else L=0。



所以取 $\hat{a}=x_{\min}$, $\hat{b}=x_{\max}$

则对满足 $a\le x_{\min}\le x_{\max}\le b$ 的一切 $a<b$,

都有 $$\frac{1}{(b-a)^n}\le\frac{1}{(x_{\max}-x_{\min})^n}$$

故 $\hat{a} = x_{\min}$, $\hat{b} = x_{\max}$

是 a , b 的极大似然估计值.

$$X_{\min} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$
$$X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

分别是 a , b 的极大似然估计量.

4 设总体 $X \sim G(p)$，$X_1,\ldots X_n$是来自X的一个样本值，试求参数p与EX的极大似然估计.

解：X的分布律为：

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots$$

故似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i-n},$$

$$\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n} x_i-n)\ln(1-p)$$

令 $$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0.$$

解得p的极大似然估计值

$$\hat{p}=\frac{\mathrm{n}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}$$

因为$EX=\dfrac{1}{p}$，故EX的极大似然估计为

$$E\hat{X}=\frac{1}{\hat{p}}=\overline{x}$$

5. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\theta>0$为参数

$x_1,\ldots x_n$是为 X 的一个样本.

求θ的极大似然估计量, 并判断它是否无偏估计量.

解 由似然函数 $L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$, $x_i>0$

$$\Longrightarrow \quad \ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} \overset{令}{=} 0$$

$$\longrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

$$\because X \sim E\left(\frac{1}{\theta}\right) \qquad \therefore E(X) = \theta$$

故 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta$

它是θ的无偏估计量.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，求 C 的值，使 $S^2 = C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$是$\sigma^2$的无偏估计.

解

$$E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2] = C\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1} - X_i)^2]$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1} - X_i) + (E(X_{i+1} - X_i))^2]$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1}) + D(X_i) + (EX_{i+1} - EX_1)^2]$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2 + 0^2) = C2(n-1)\sigma^2$$

当 $C = \dfrac{1}{2(n-1)}$时, $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自$P(\lambda)$的样本，证明$\overline{X}$,

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 和$a\overline{X} + (1-a)S^2 (0 \le a \le 1)$

都是λ的无偏估计.

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow E(X) = D(X) = \lambda$$

$$E(\overline{X}) = E(X) = \lambda$$

$$E(S^2) = D(X) = \lambda$$

$$E[a\overline{X} + (1-a)S^2] = aE(\overline{X}) + (1-a)E(S^2)$$

$$= [a + (1-a)]\lambda = \lambda$$

8. 设 $E(X)=\mu$， $D(X)=\sigma^2$

$X_1,\ldots X_n$为总体 X 的一个样本

(1) 设常数 $c_i,\ i=1,2,\cdots,n.$ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$

证明 $\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量

(2) 证明 $\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 中 $\overline{X}$ 最有效

证 (1) $E(\hat{\mu})=\sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mu=\mu$

$$(2)\ D(\hat{\mu}) = D(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

完全平方公式

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} c_i c_j$$

$$< \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (c_i^2 + c_j^2) = n \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > \frac{1}{n} \Rightarrow D(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2 \le D(\hat{\mu})$$

结论 算术均值$\overline{X}$比加权均值$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$更有效.

13. 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $x_1, x_2, \cdots, x_{15}$为样本值,已知$\sum_{i=1}^{15} x_i = 8.7$,

$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 25.05$, 分别求置信度为0.95的$\mu$和$\sigma^2$的置信区间.

方差σ^2未知，μ的置信区间

$$[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)]$$

当μ未知时，方差σ^2的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$

$\overline{X}$? S?

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 8.7, \sum_{i=1}^{15} x_i^{\ 2} = 25.05,$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \quad = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2)$$

16. 随机地取某种炮弹9发做试验，得炮弹口速度的样本标准差为10.5(m/s). 设炮口速度服从正态分布. 求这种炮弹的炮口速度的标准差σ的置信度为0.95的置信区间.

解 σ^2的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

σ的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = \left(\frac{\sqrt{8}\times 10.5}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8}\times 10.5}{\sqrt{2.18}}\right)$$

$$= (7.1, 20.1)$$

其中α=0.05, n=9 查表知

$$\chi^2_{0.025}(8) = 17.535, \ \ \chi^2_{0.975}(8) = 2.180$$

15. 设 $X \sim N(\mu,\sigma_0^2)$, σ_0^2 已知，样本容量n多大，才能使 μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间长度不大于常数 d？

$$[\bar{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}]$$

区间的长度为 $2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \le d$

$$n \ge (2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{d})^2$$

19. 设考生的考试成绩$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从中随机地抽取40位考生的成绩，算得平均成绩为68分，标准差为17分. 问在显著性水平0.05下，是否可以认为这次考试的平均成绩为72分？

解 $H_0 : \mu = 72;\ H_1 : \mu \neq 72.$

$$T = \frac{\overline{X} - 72}{S / \sqrt{n}} \sim t(39)$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 2.0227$$

拒绝域: $|T|=\left|\dfrac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$|T|=\left|\frac{68-72}{17/\sqrt{40}}\right|=1.49<2.0227$$

落在拒绝域外，接受 H_0

即认为这次考试的平均成绩为72分.

21. 设鸡蛋售价$X \sim N(\mu, 0.18)$，今年30个集市上平均价格为2.21元/500克，而往年平均价格为2元/500克，设方差不变，能否认为今年的鸡蛋价格明显高于往年？$(\alpha = 0.05)$

解：提出假设： $H_0: \mu \le 2$; $H_1: \mu > 2$

取统计量

$$U = \frac{\bar{X} - 2}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

否定域为 W： $U \ge u_{0.05}$ **=1.65**

$$\sigma = \sqrt{0.18}, \quad n = 30$$

$\boldsymbol{U=2.7>1.65}$

落入否定域

故拒绝原假设H_0.

能认为今年的鸡蛋价格明显高于往年

25. 货车有A,B两条行车路线，行车时间分别服从$N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2$. 每条路各跑50次，在A线上$\bar{X}=95$，$S_x=20$; 在B线上$\bar{Y}=76$，$S_y=15$. 问方差是否一样，均值是否一样?$(\alpha=0.05)$

第一阶段 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$; $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(49,49) \quad F=\frac{S_x^2}{S_y^2}=1.78$$

$$F_{0.975}(49,49)<F<F_{0.025}(49,49)$$

故接受H_0

第二阶段

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; ; \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

取统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}} S_w} \sim t(n+m-2)$

$$|T| \geq t_{0.025}(98)$$

拒绝H_0

22. 已知某溶液中的水分 X 服从正态分布

10个测定值给出$\overline{X}=0.637\%$，$S^2=0.044\%$,

在显著性水平$\alpha=0.05$情况下检验假设):

$$H_0:\sigma^2=0.045\%;\quad H_1:\sigma^2<0.045\%.$$

$$\Rightarrow H_0:\sigma^2\geq 0.045\%;\quad H_1:\sigma^2<0.045\%.$$

拒绝域 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=7.9 > \chi^2_{1-\alpha}(9)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$$

故接受H_0