概率论与数理统计

任课教师：任鹏杰、于东晓

任鹏杰

联系信息

- 姓名：任鹏杰
- 邮箱：renpengjie@sdu.edu.cn
- 主页：https://pengjieren.github.io/
- 办公室：N3-321

先修课程

- 微积分

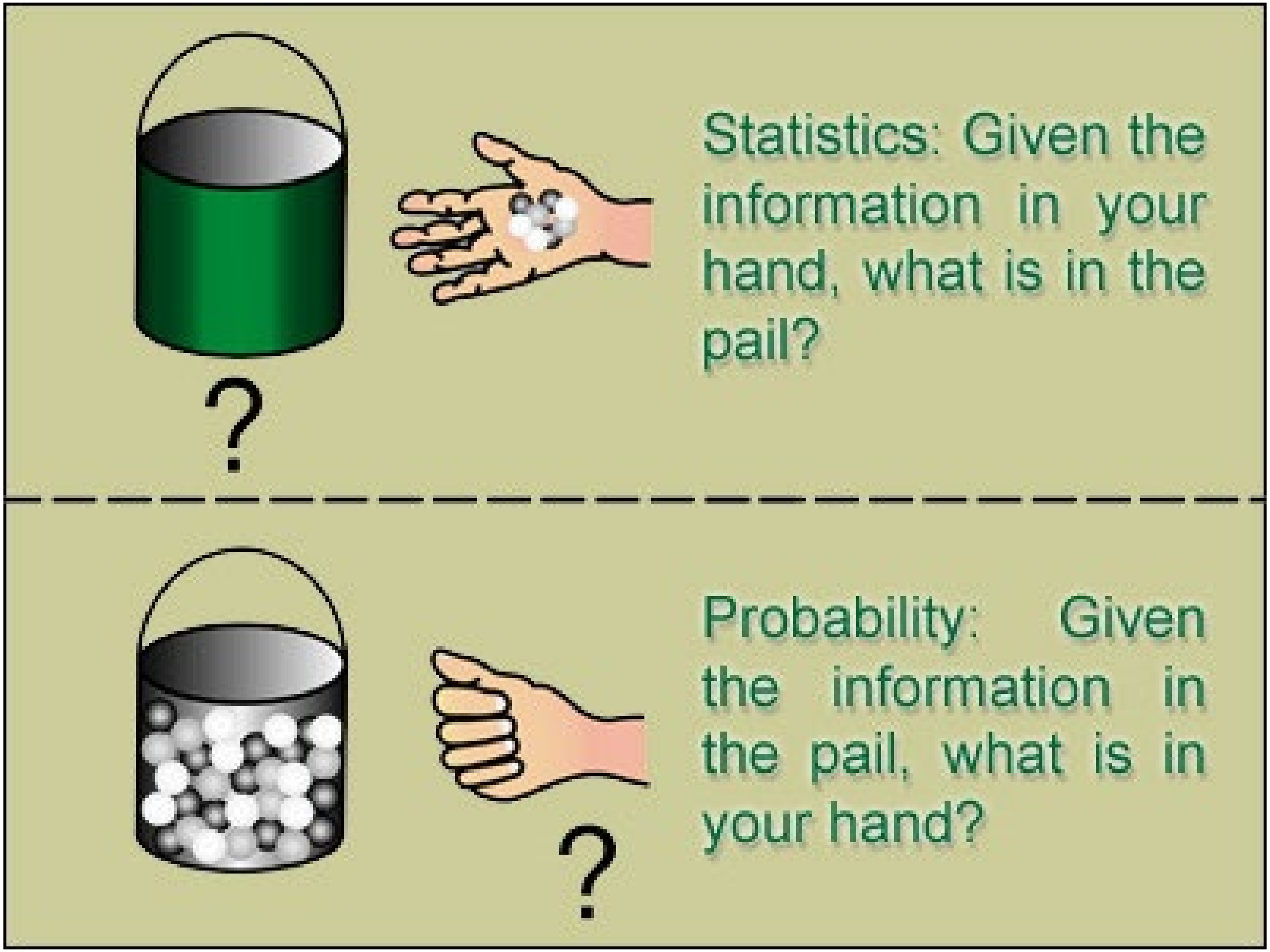
成绩

- 考试80% + 作业20%

参考教材

- 1.《概率论与数理统计》（第3版），刘建亚，吴臻，胡发胜，高等教育出版社.
- 2. A First Course in Probability. 9th edition, by Sheldon Ross, 2013.
- 3.《概率论与数理统计》（第四版），浙江大学，盛骤主编，高等教育出版社，2008.
- 4. All of Statistics. Larry Wasserman，Springer，2004.

概率统计序言



Difference between Probability & Statistics

一. 概率统计的研究对象

确定性现象
(deterministic phenomenon)

- A. 太阳从东方升起;
- B. 上抛物体一定下落;

随机现象
(random phenomenon)

- C. 明天的最高温度;
- D. 新生婴儿的体重.

在我们所生活的世界上，充满了随机性

从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；从婴儿的出生，到世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化……，我们无时无刻不面临着随机性.

概率统计的研究对象

二.概率统计的研究内容

随机现象是不是没有规律可言?　　否!

在一定条件下对随机现象进行大量观测会发现某种规律性.

随机现象的统计规律性

从表面上看，随机现象的每一次观察结果都是随机的，但多次观察某个随机现象，便可以发现，在大量的偶然之中存在着必然的规律. 这种随机现象所呈现出的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**.

概率统计的研究内容

三.概率统计的应用

天气预报	信息处理
经济管理	保险金融
生物医药	…………

下面我们就来开始一门“将不定性数量化”的课程的学习，这就是

概率论与数理统计

概率论与数理统计

概率论与数理统计

第一章　随机事件及其概率

§ 1.1 随机事件及其运算

1.随机试验(Random Test)与样本空间(Sample Space)

对某事物特征进行观察, 统称**试验 (experiment)**.

若它有如下特点,则称为**随机试验,** 用E表示

- 可在相同的条件下重复进行
- 试验结果不止一个，但能明确所有的结果
- 试验前不能预知出现哪种结果

样本空间(Sample Space)—— 随机试验E 所有可能的结果组成的集合称为 **样本空间** 记为Ω (omega), or S

样本空间的元素, 即E 的直接结果, 称为**样本点**(**或基本事件Simple Event**) 常记为ω (omega), $\Omega = \{\omega\}$

随机事件 (Random Event)—— Ω的子集, 记为$A, B, \ldots$

它是满足某些条件的样本点所组成的集合.

例1 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1:投一枚硬币3次，观察正面出现的次数

$\Omega_1 = \{0,1,2,3\} \longrightarrow$ 有限样本空间

E_2:观察总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$\Omega_2 = \{0,1,2,3,\cdots,N\}$

E_3:观察某地区每天的最高温度与最低温度

$\Omega_3 = \{(x,y) \mid T_1 \le x \le y \le T_2\} \longrightarrow$ 无限样本空间

其中T_1, T_2分别是该地区的最低与最高温度

基本事件(Simple Event) — 仅由一个样本点组成的子集. 它是随机试验的直接结果, 每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件.

复合事件(Joint Event) —由若干个基本事件组成的随机事件.

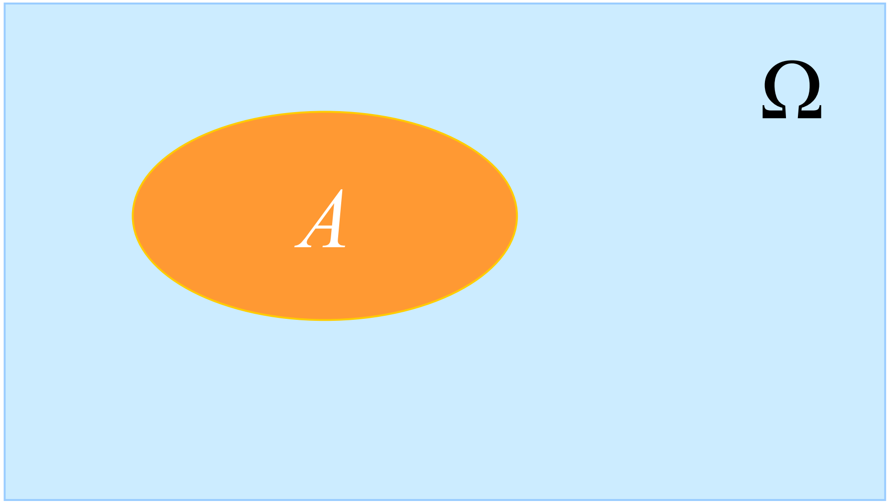
必然事件(Certain Event)—全体样本点组成的事件,记为Ω/S, 每次试验必定发生的事件.

不可能事件(Impossible Event)—不包含任何样本点的事件,记为Φ(Phi),每次试验必定不发生的事件.

2.事件的关系和运算

随机事件的关系和运算
类同集合的关系和运算

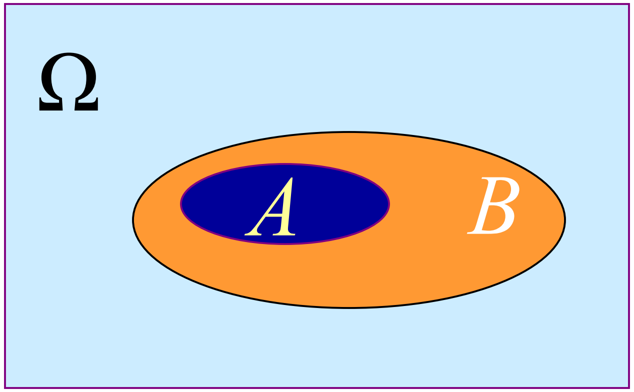
文氏图 (Venn diagram)



1. 事件的包含

$A \subset B$ —— A 包含于B

$\Leftrightarrow$事件 A 发生必导致事件 B 发生



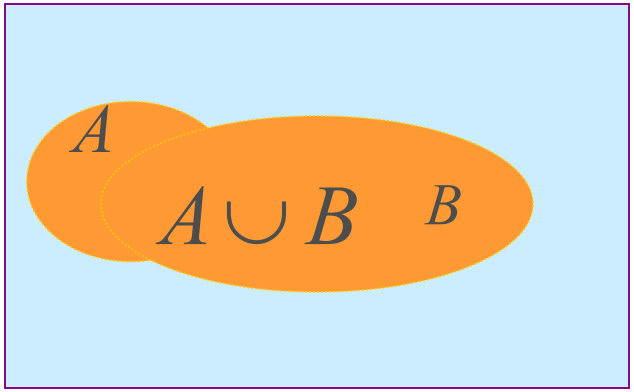
2. 事件的相等

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

3. 事件的并union (和)

$A \cup B$ 或 $A+B$

—— A与B 的和事件



$A \cup B$发生

$\Leftrightarrow$ 事件 A与事件B 至少有一个发生

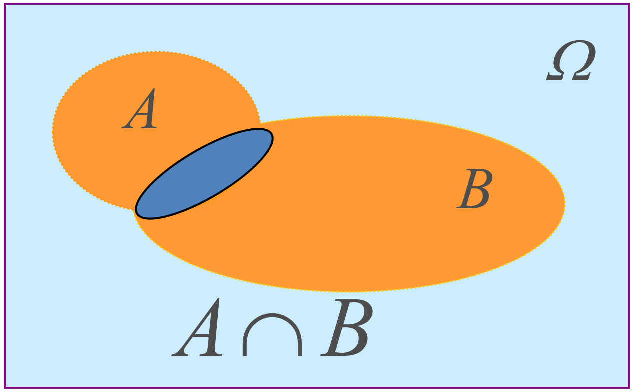
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

4. 事件的交intersection (积)

$A \cap B$ 或 AB

—— A 与 B 的积事件



$A \cap B$ 发生

$\Leftrightarrow$事件 A与事件B **同时**发生

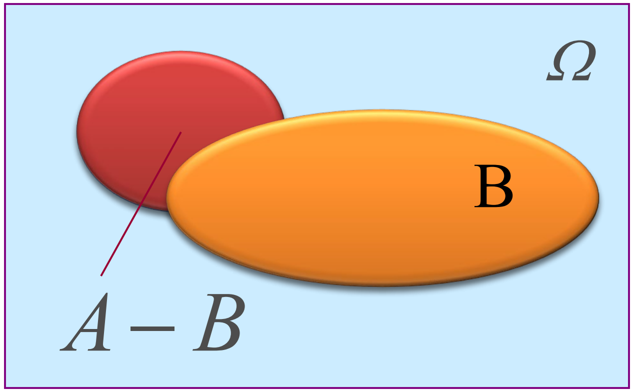
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

5. 事件的差

$A-B$

—— A 与 B 的差事件



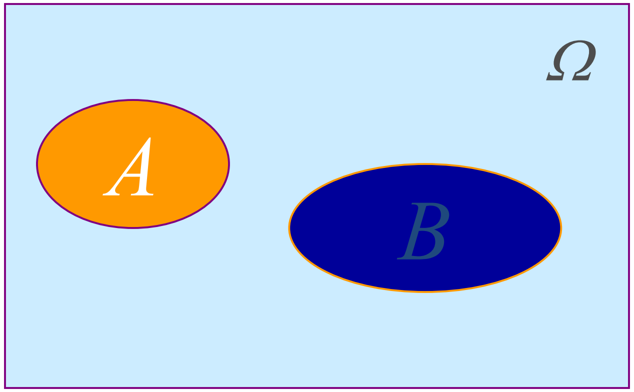
A-B 发生

$\Leftrightarrow$ 事件 A 发生，但事件 B 不发生

6. 事件的互斥mutually exclusive（互不相容）

$AB = \varnothing$ —— A 与B 互斥

$\Leftrightarrow$ A、B不可能同时发生



$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥

$$\Leftrightarrow A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥

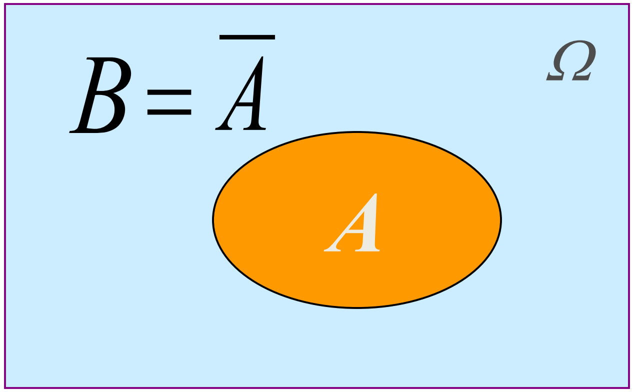
$$\Leftrightarrow A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$$

7. 事件的对立（互补）complement

$AB = \varnothing$， $A \cup B = \Omega$

—— A 与 B 互相对立

$\Leftrightarrow$ 每次试验 A、 B 中有且只有一个发生



称 B 为 A 的对立事件(或逆事件)，

记为 $B = \overline{A}$

注意：“A 与 B 互相对立”与“A 与 B 互斥”是不同的概念

运算律

事件运算 $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ 集合运算

- 吸收律
  $A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
  $A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$
  $A \cup (AB) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$
- 重余律 $\overline{\overline{A}} = A$
- 幂等律 $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$
- 差化积 $A - B = A\overline{B} = A - (AB)$

- 交换律 $A \cup B = B \cup A \qquad AB = BA$
- 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(AB)C = A(BC)$
- 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$
- 反演律 $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

运算顺序： **逆交并差，括号优先**

例1 在图书馆中随意抽取一本书,

事件 A表示数学书,

B表示中文书,

C表示平装书.

则

$AB\overline{C}$ —— 抽取的是精装中文版数学书

$\overline{C} \subset B$ —— 精装书都是中文书

$\overline{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的,且中文版的书都是非数学书

例2 利用事件关系和运算表达多个事件的关系

A, B, C 都不发生——

利用文氏图或反演律

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

A, B, C 不都发生——

利用文氏图或反演律

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

思考题

1.设A、B、C表示三个事件，利用A、B、C表示下列事件：

(1)A与B发生，C不发生；

(2)A、B、C都发生；

(3)A、B、C都不发生；

(4)A、B、C中恰有两个发生；

(5)A、B、C中至少有一个不发生；

(6)A、B、C中不多于一个发生。

思考题

1.设A、B、C表示三个事件，利用A、B、C表示下列事件：

(1)A与B发生，C不发生；$AB\bar{C}$

(2)A、B、C都发生；　ABC

(3)A、B、C都不发生；$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4)A、B、C中恰有两个发生；　$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC$

(5)A、B、C中至少有一个不发生；$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

(6)A、B、C中不多于一个发生。

$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2.指出下面式子中事件之间的关系：

(1)$AB=A$；

(2)$A\cup B=A$；

(3)$ABC=A$；

(4)$A\cup B\cup C=A$.

2.指出下面式子中事件之间的关系：

(1)$AB=A$； $A \subset B$

(2)$A \cup B=A$； $B \subset A$

(3)$ABC=A$； $A \subset BC$

(4)$A \cup B \cup C=A$. $B \cup C \subset A$

总结

1. 基本概念
2. 事件关系
3. 事件运算