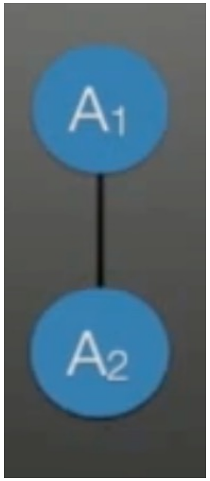
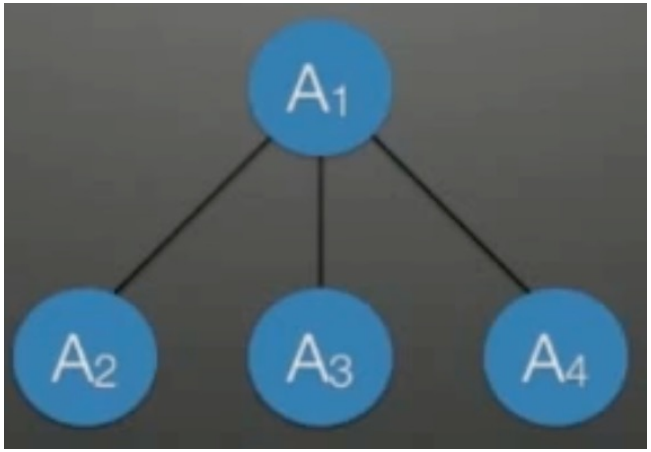
第11章

二叉树和其他树

简要回顾

- 线性数据结构：一对一
  - 线性表：数组描述、链式描述（第五、六章）
  - 数组和矩阵 （第七章）
  - 栈：先进后出 （第八章）
  - 队列：先进先出 （第九章）
- 一对多的数据结构？





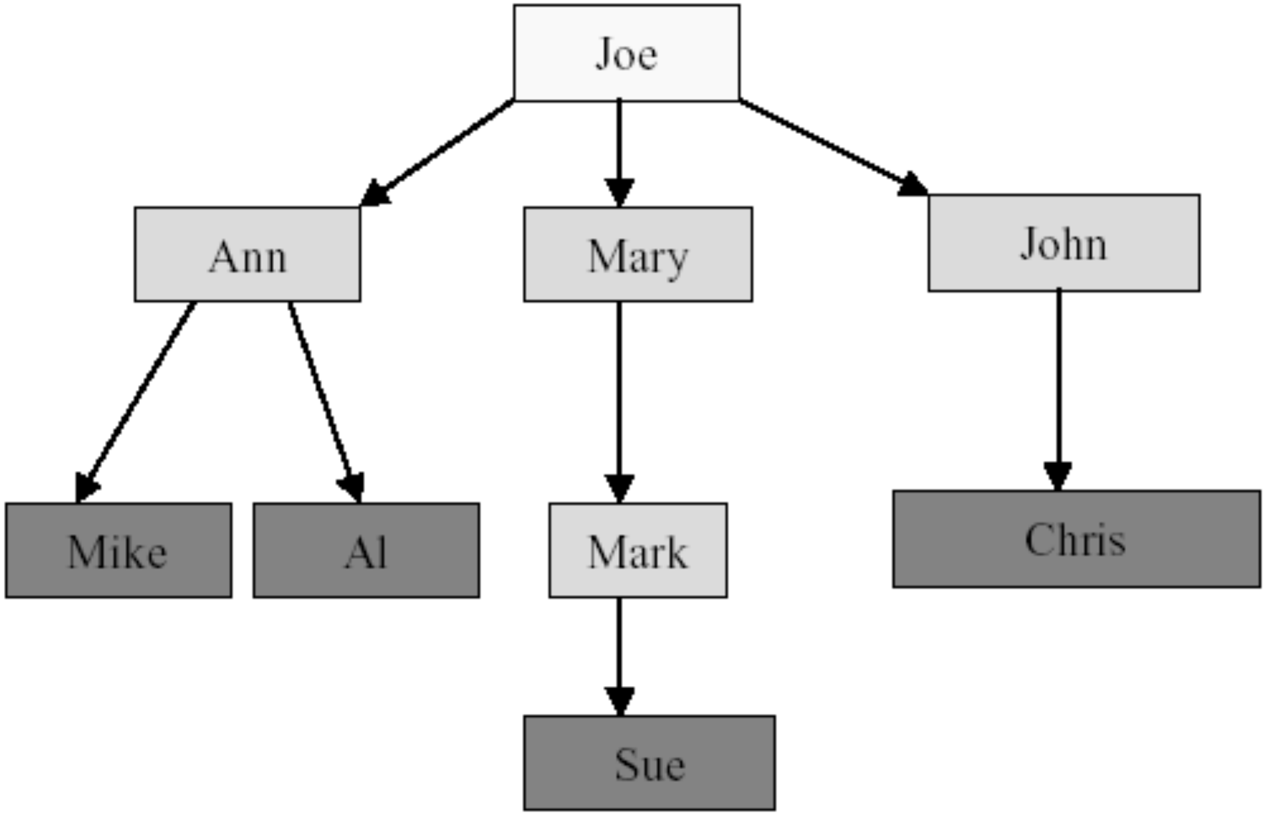
本章内容

- 11.1 树
- 11.2 二叉树
- 11.3 二叉树的特性
- 11.4 二叉树的描述
- 11.5 二叉树常用操作
- 11.6 二叉树遍历
- 11.7 抽象数据类型BinaryTree
- 11.8 类linkedBinaryTree
- 11.9 应用

11.1 树

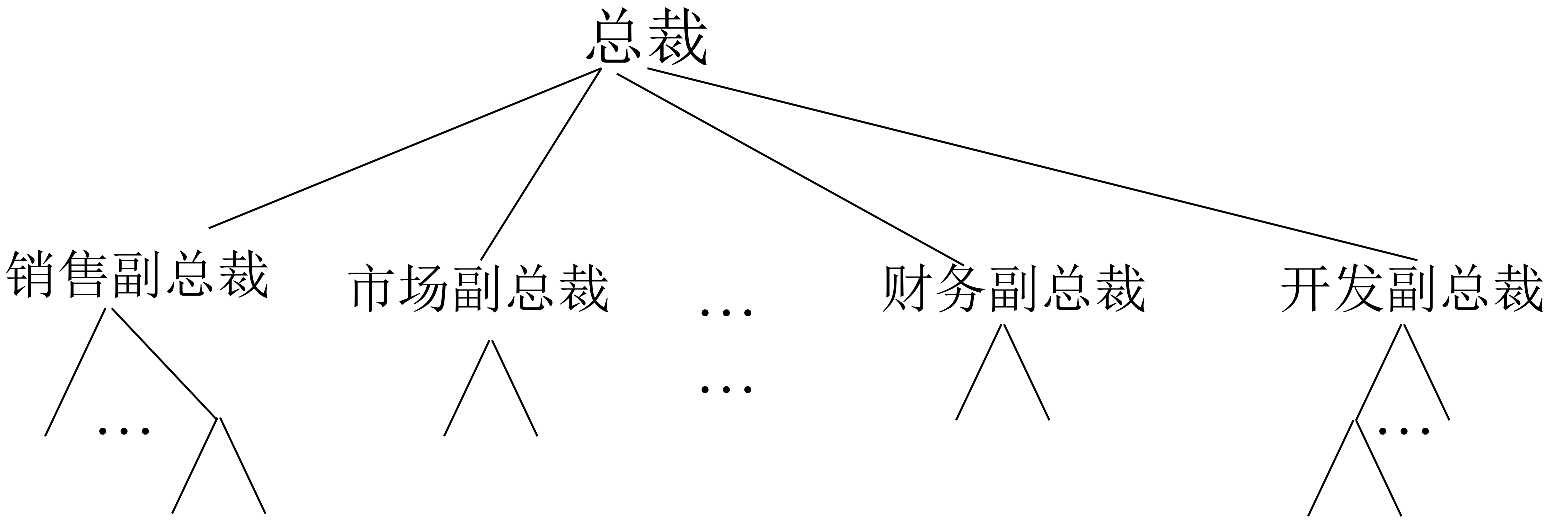
- 线性数据结构和表数据结构一般不适合于描述具有层次结构的数据。
- 例：层次结构的数据

例 11.1 Joe的后代



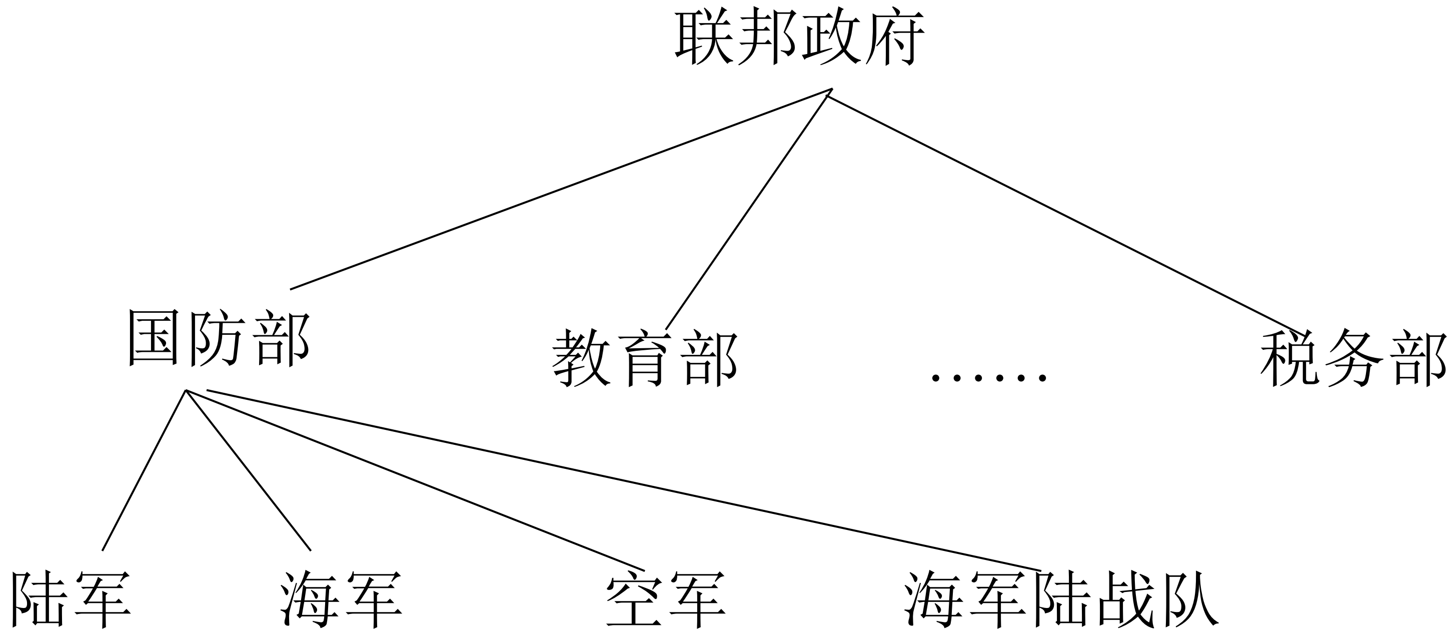
- 元素之间的关系是父母——子女

例 11.2 公司组织机构



- 元素之间的关系是上级——下级

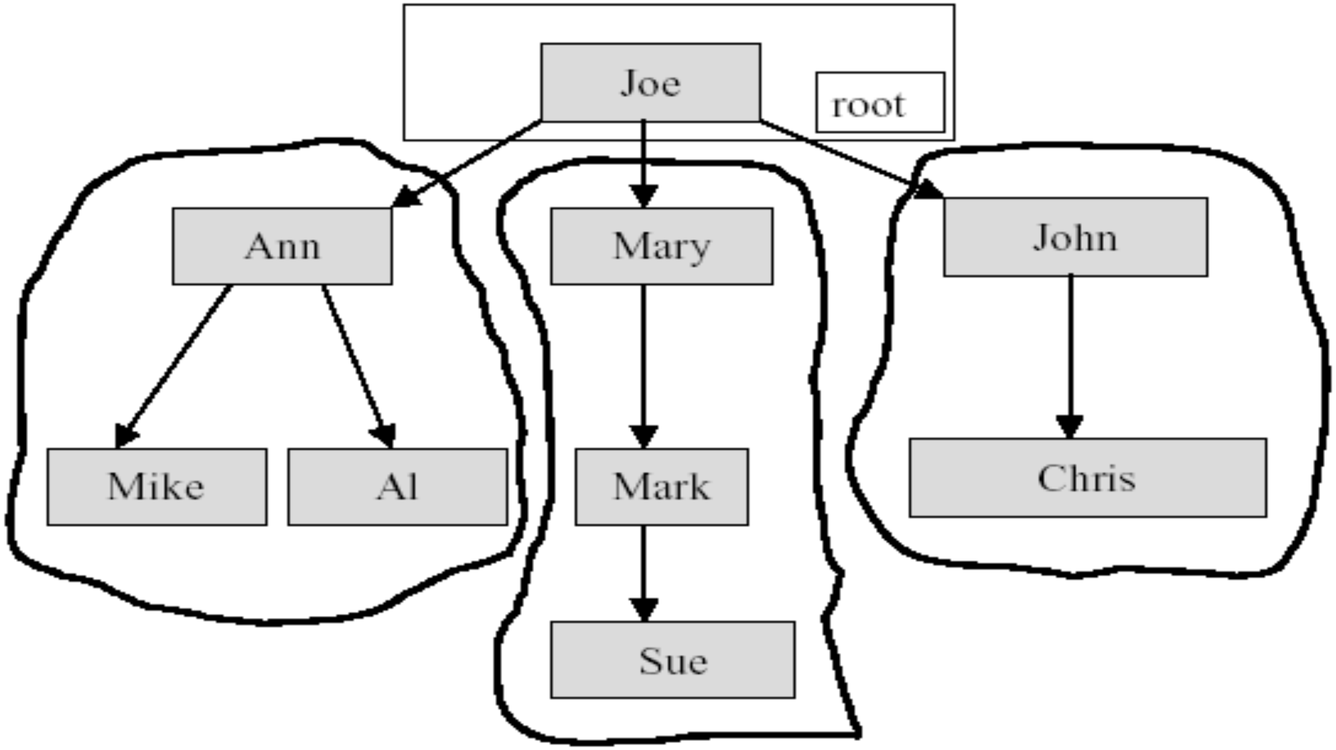
例 11.3 政府机构



- 元素之间的关系是整体——部分

树的定义

- 定义[树]：
  - 树(tree)t是一个**非空的**有限元素的集合.
  - 其中一个元素为根(root).
  - 其余的元素(如果有的话)组成t的子树(subtrees).

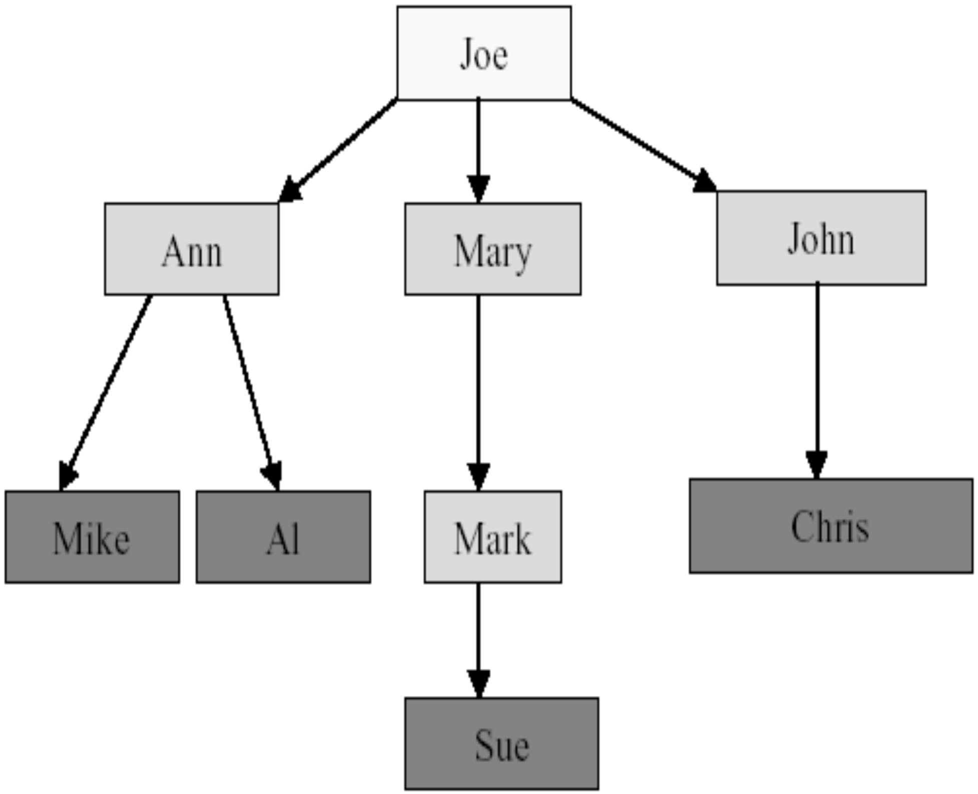


术语

- 层次中最高层的元素为**根 (root)** 。
- 其余的元素分成不相交的集合。根的下一级的元素是**根的孩子(children)** 。是余下元素所构成的**子树的根**。
- 树中没有孩子的元素称为**叶子(leaves)**

术语

- 父母(Parent),孙子(grandchildren),祖父(Grandparent),
- 兄弟(Sibling),祖先(Ancestors),后代(Descendent)



叶子= {Mike,Al,Sue,Chris}

父母(Mary) = Joe

祖父(Sue) = Mary

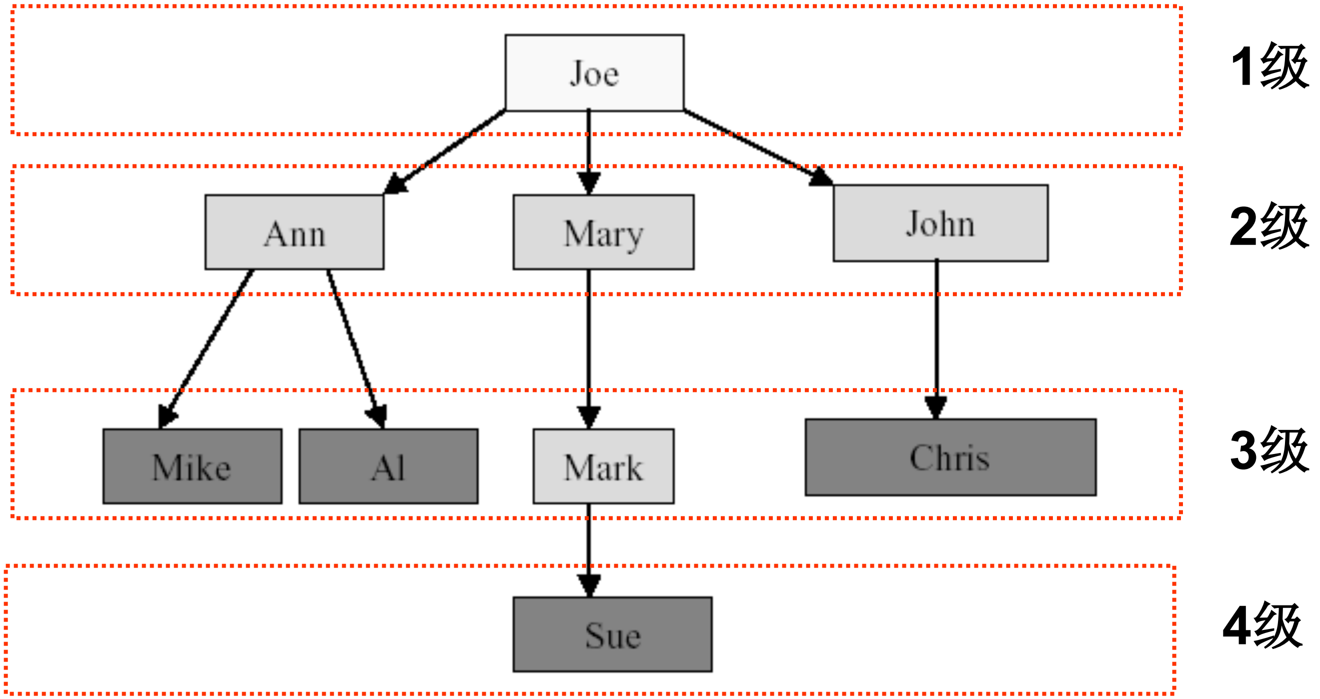
兄弟(Mary) = {Ann,John}

祖先(Mike) = {Ann,Joe}

后代(Mary}={Mark,Sue}

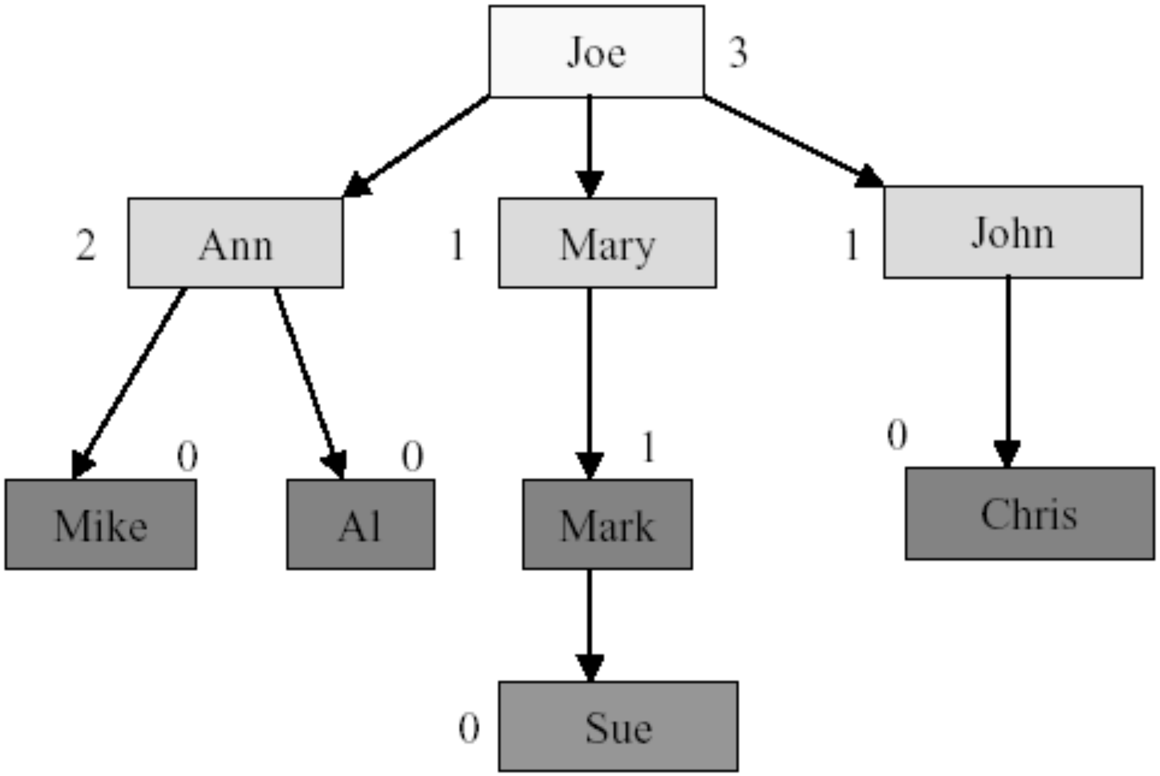
术语

- 级(level)/层次：指定树根的级为1，其孩子(如果有)的级为2。 一个元素的级=其父母的级+1.



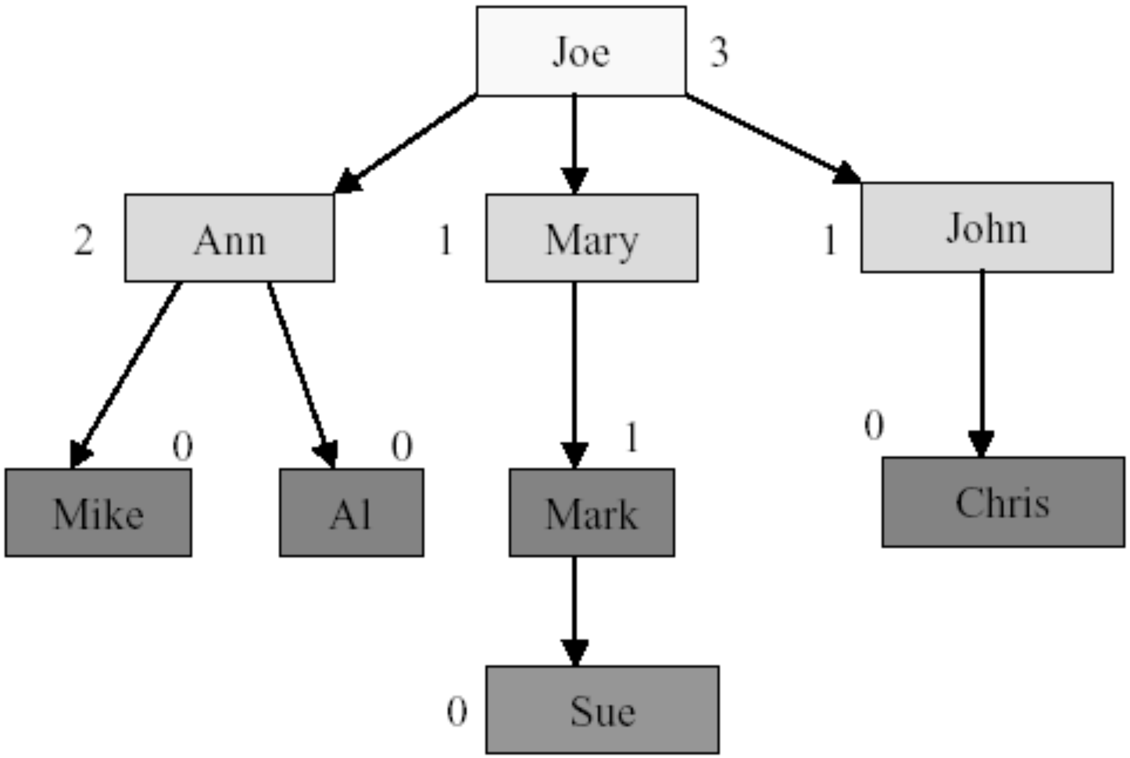
术语

- 元素的度(Degree of an element)
  - 是指其孩子的个数。



术语

- 树的度(The degree of a tree)
  - 是其元素度的最大值。



树的度 = 3

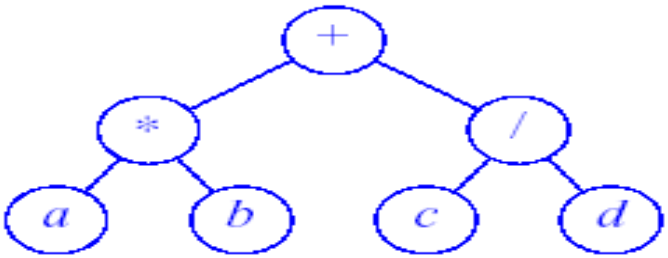
11.2 二叉树

- 定义[二叉树]：
- **二叉树(binary tree)t** 是有限个元素的集合(可以为空)。
- 当二叉树非空时，其中有一个称为**根(root)**的元素，余下的元素(如果有的话)被组成2个二叉树，分别称为**t的左子树和右子树**.

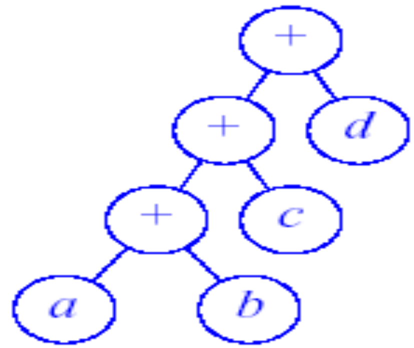
二叉树和树的区别

- 二叉树可以为**空**，但树**不能为空**。
- 二叉树中每个元素都恰好有**两棵子树**(其中一个或两个可能为空)。而树中每个元素可有**任意多个子树**。
- 在二叉树中每个元素的子树都是**有序的**，也就是说，可以用左、右子树来区别。而树的子树间是**无序的**。

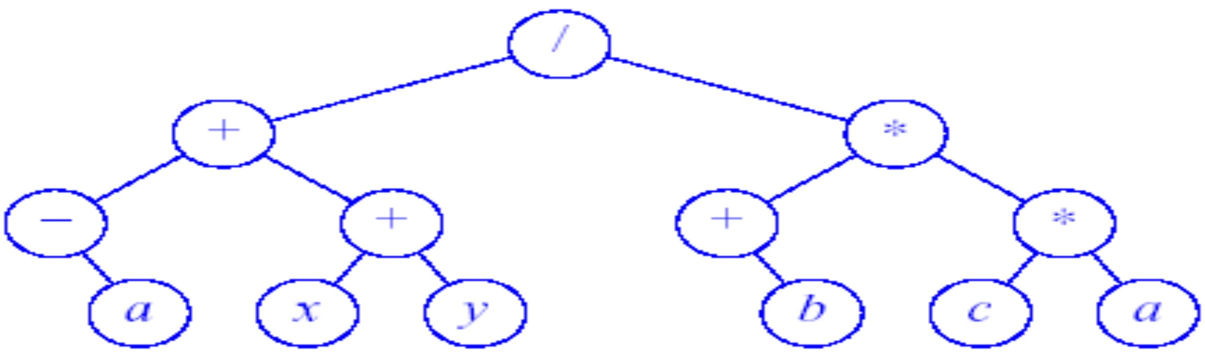
二叉树和树的区别



(a) $(a * b) + (c / d)$



(b) $((a + b) + c) + d)$



(c) $((-a) + (x + y)) / ((+b) * (c * a))$

算术表达树说明一些通常可以用二叉树来表示的操作

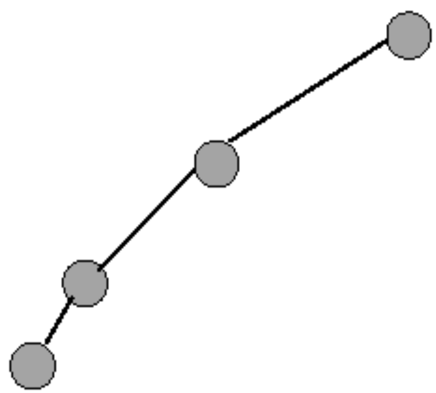
11.3 二叉树的特性

- 特性 1:
- 包含n (n> 0)个元素的二叉树边数为n-1。
- 证明：
  - 二叉树中每个元素(除了根节点）有且只有一个父节点
  - 在子节点与父节点间有且只有一条边
  - 因此，边数为n−1。

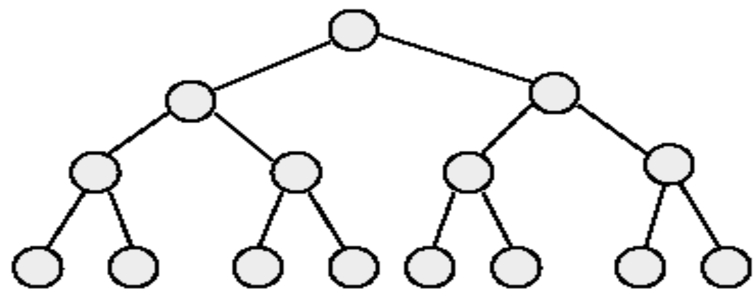
11.3 二叉树的特性

✓ 特性 2:

- 若二叉树的高度为h，h≥0，则该二叉树最少有h个元素，最多有2^h-1 个元素。
- 证明：



元素数最少为h



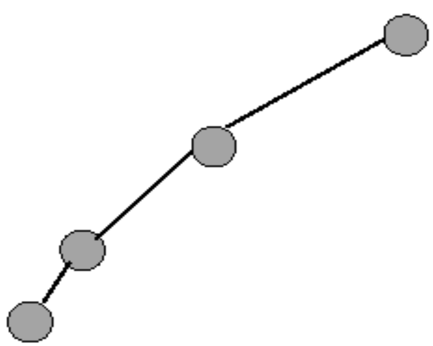
第i 层节点元素最多为2^{i-1}

元素的总数最多为$\sum 2^{i-1} = 2^h - 1$ 个元素

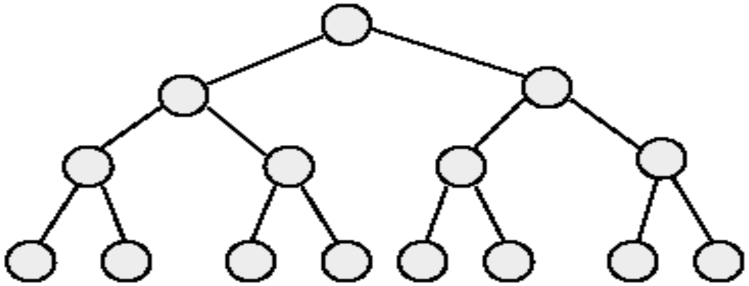
11.3 二叉树的特性

✓ 特性 3:

- 包含n(n≥0)个元素的二叉树的高度最大为n，最小为 $\lceil (log_2(n+1)) \rceil$.
- 证明：



高度最大为n。



高度最小为：

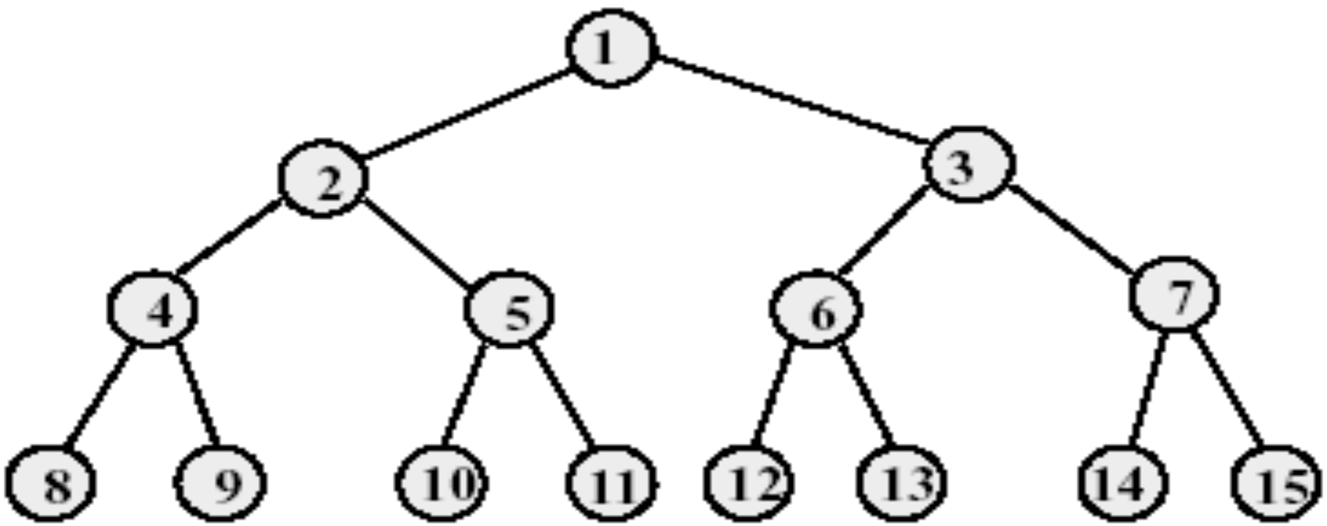
$n \le 2^h-1$

$h \ge log_2(n+1)$

$h = \lceil (log_2(n+1)) \rceil$

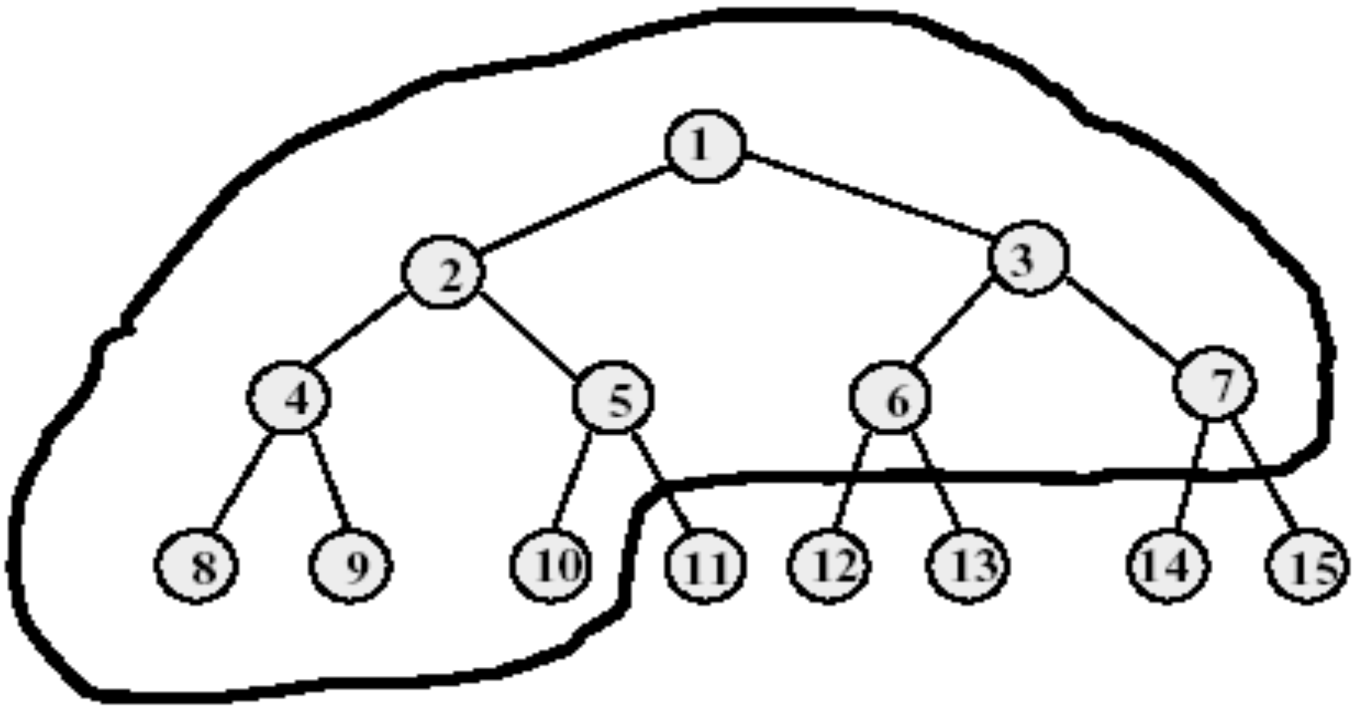
满二叉树

- 当高度为h 的二叉树恰好有 2^h-1个元素时，称其为满二叉树(full binary tree).
- 对高度为h 的满二叉树中的元素按从第上到下，从左到右的顺序从1到 2^h-1 进行编号。



完全二叉树

- 从满二叉树中删除k个元素，其编号为 2^h-i，$1 \leqslant i \leqslant k$，所得到的二叉树被称为完全二叉树(complete binary tree)。

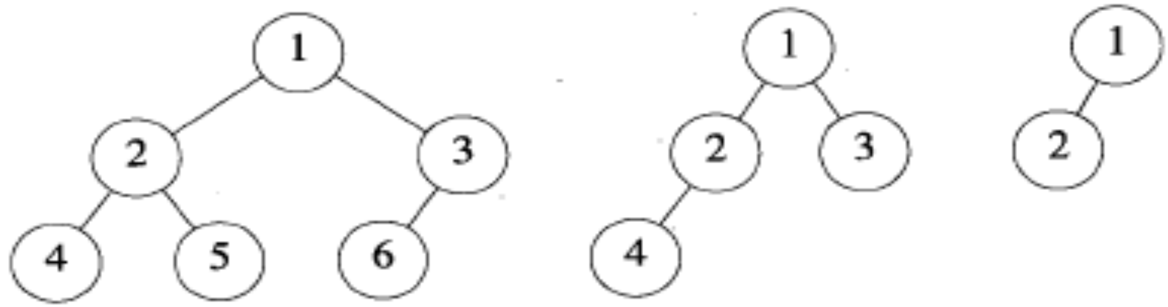


完全二叉树

- 深度为k具有n个节点的二叉树是一颗完全二叉树，当且仅当它与k层满二叉树前1~n个节点所构成的二叉树结构相同。
- k层完全二叉树:
  - 1) 前k-1层为满二叉树；
  - 2) 第k层上的节点都连续排列于第k层的左端。

完全二叉树

- 满二叉树是完全二叉树的一个特例.
- 有n个元素的完全二叉树的深度为$\lceil (log_2(n+1)) \rceil$



✓ 特性 4:

- 设完全二叉树中一元素的序号为i，$1 \le i \le n$。则有以下关系成立：

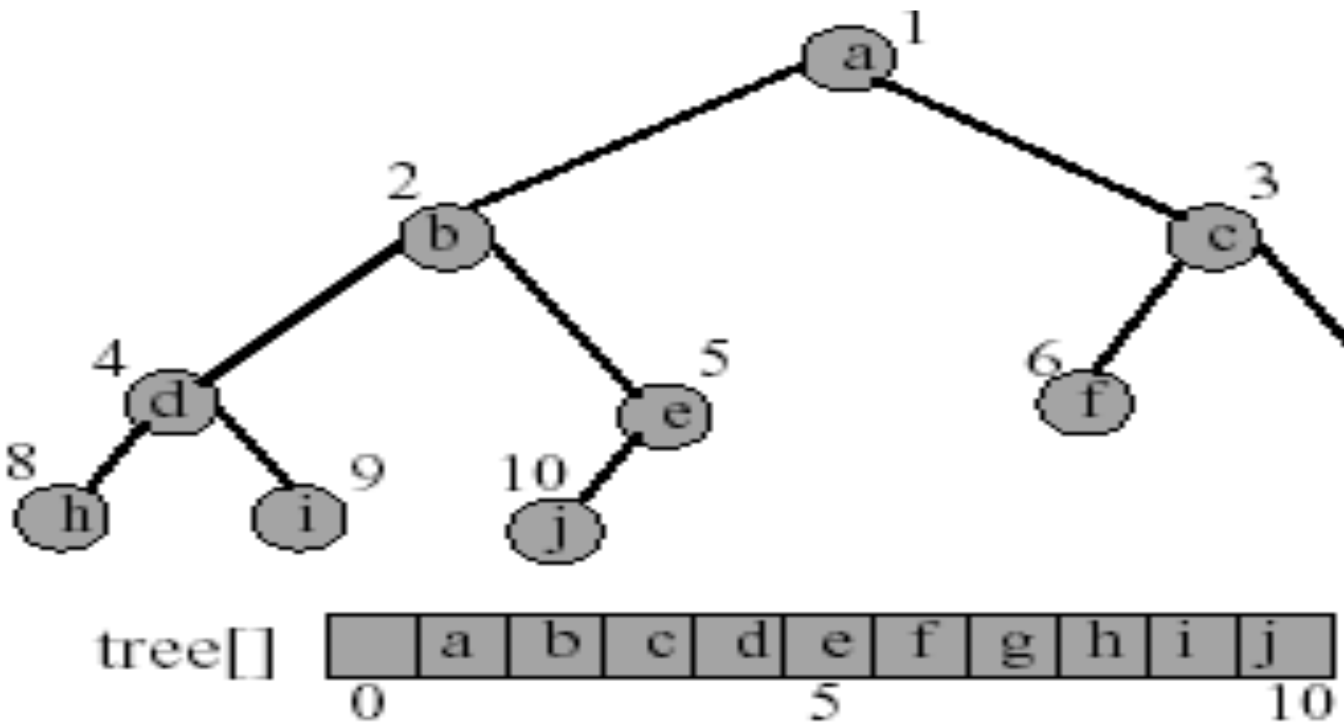
1. 当$i = 1$时，该元素为二叉树的根。若$i > 1$，则该元素父节点的编号为$\lfloor (i/2) \rfloor$.
2. 当$2i > n$时，该元素无左孩子。否则，其左孩子的编号为$2i$.
3. 若$2i+1>n$，该元素无右孩子。否则，其右孩子编号为 $2i+1$.

11.4 二叉树描述

- 数组描述
- 链表描述

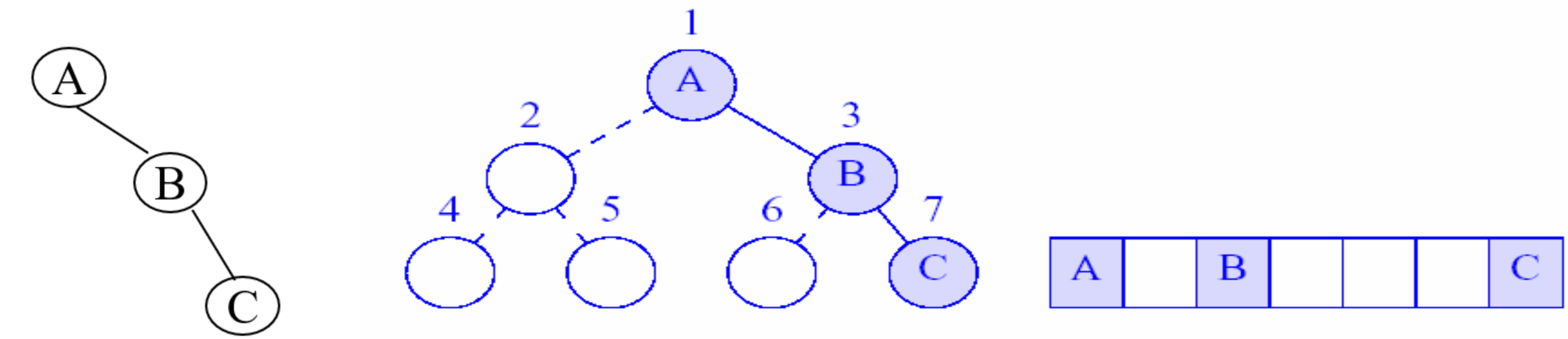
11.4.1 数组描述

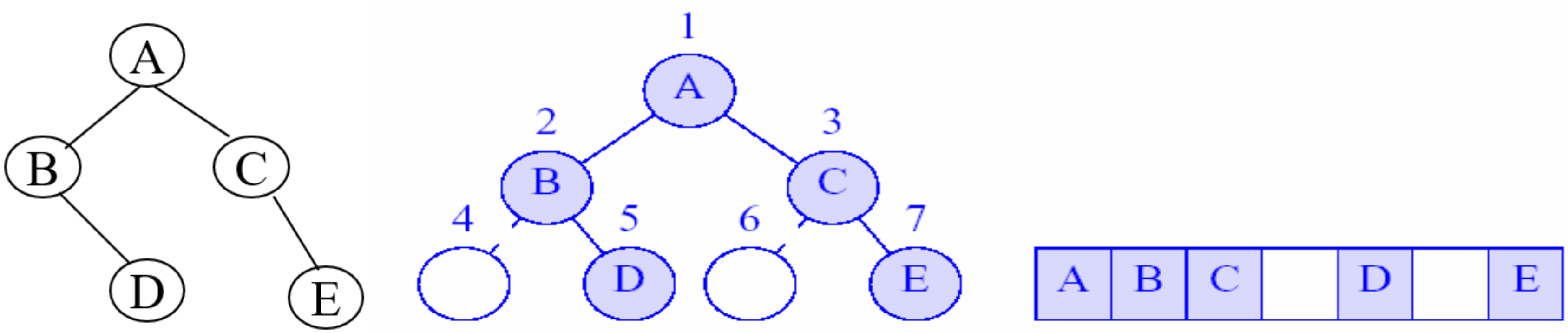
- 完全二叉树：
- 按照二叉树对元素的编号方法，将二叉树的元素存储在数组中。



11.4.1 数组描述

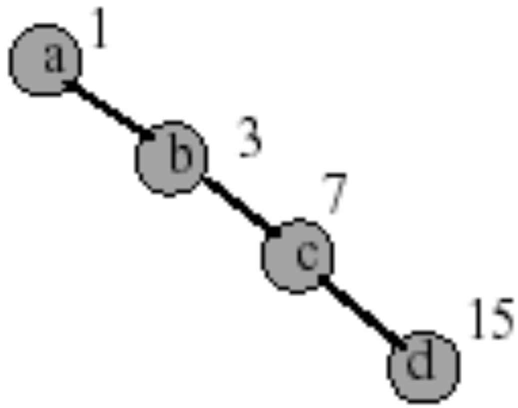
- 二叉树可以看作是缺少了部分元素的完全二叉树。





11.4.1 数组描述

- 一个有n个元素的二叉树需要存储空间：$n+1$ 到 2^n（或：n到2^n-1）.
- 右斜(Right-skewed)二叉树存储空间达到最大。



tree[]

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	a	-	b	-	-	-	c	-	-	-	-	-	-	-	d

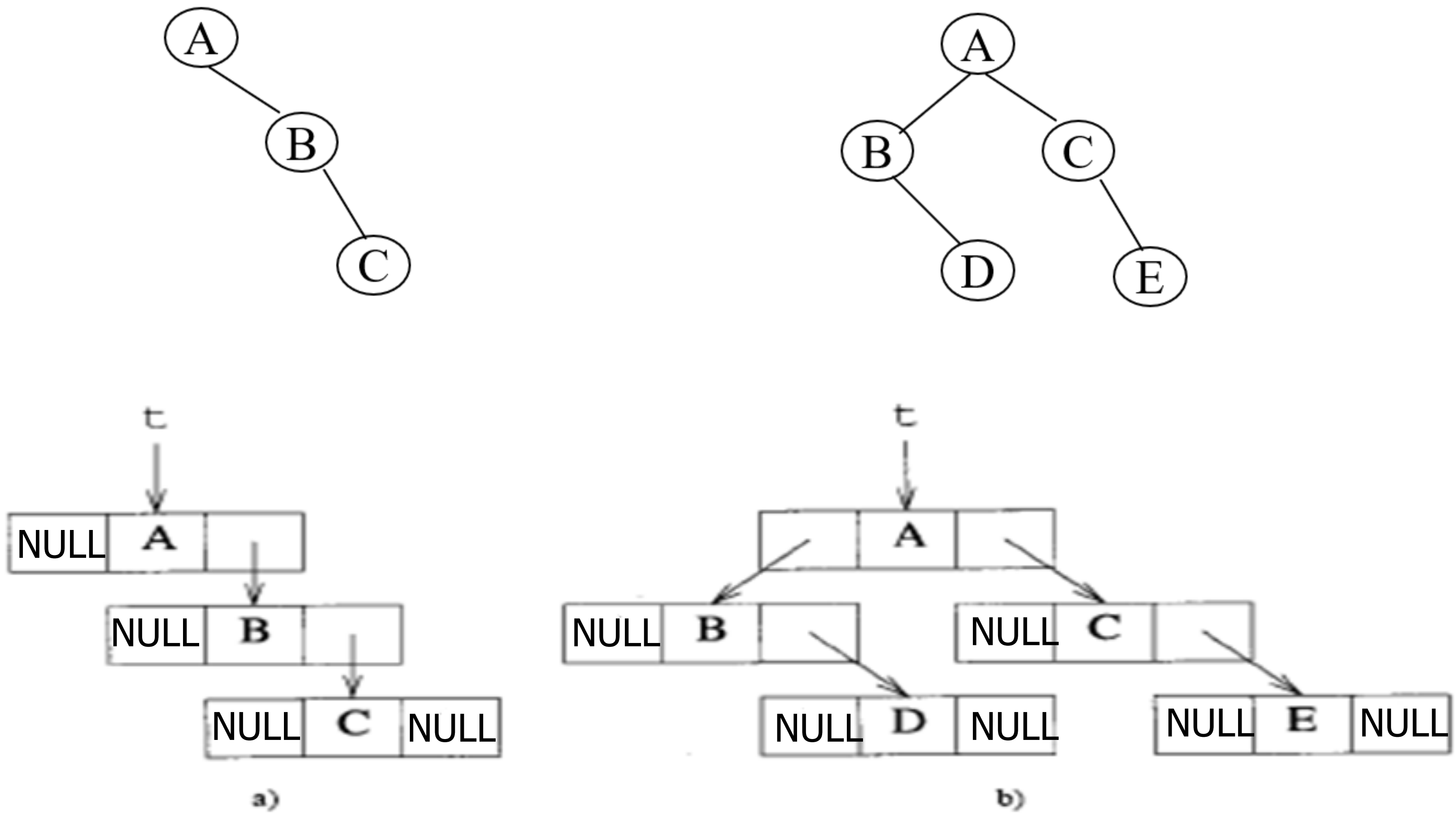
- 当缺少的元素数目比较少时，数组描述方法是有效的.

11.4.2 链表描述

- 二叉树最常用的描述方法。
- 每个元素都存储在一个节点内，每个节点：

leftChild	element	rightChild

11.4.2 链表描述


A
B
C
A
B
C
D
E
t
NULL
A
NULL
B
NULL
C
NULL
B
D
NULL
NULL
C
NULL
E
NULL
a)
b)

链表二叉树的节点结构

```
template<class T>
struct  binaryTreeNode
{   T element;
    binaryTreeNode<T> *leftChild,    //指向左孩子节点的指针
                      *rightChild; //指向右孩子节点的指针
                    // 3 个构造函数
    binaryTreeNode()     // 没有参数
        {leftChild = rightChild = NULL; }
    binaryTreeNode(const T& theElement)     //只有数据参数
        {element(theElement); leftChild = rightChild = NULL; }
    binaryTreeNode(const T& theElement,  // 数据 + 指针参数
           binaryTreeNode *theLeftChild,
           binaryTreeNode *theRightChild)
        {  element(theElement);
           leftChild = theLeftChild;
           rightChild = theRightChild;}
}
```

11.5 二叉树常用操作

- 确定其高度
- 确定其元素数目
- 复制
- 在屏幕或纸上显示二叉树
- 确定两棵二叉树是否一样
- 删除整棵树
- 若为数学表达式树，计算该数学表达式
- 若为数学表达式树，给出对应的带括号的表达式

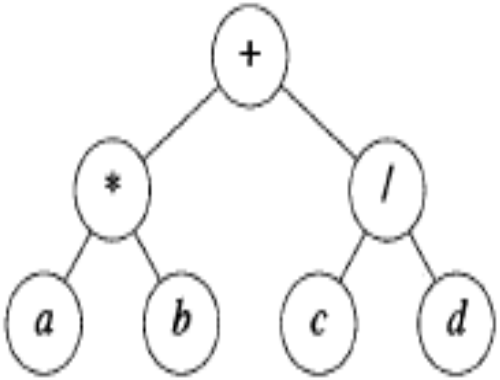
11.6 二叉树遍历

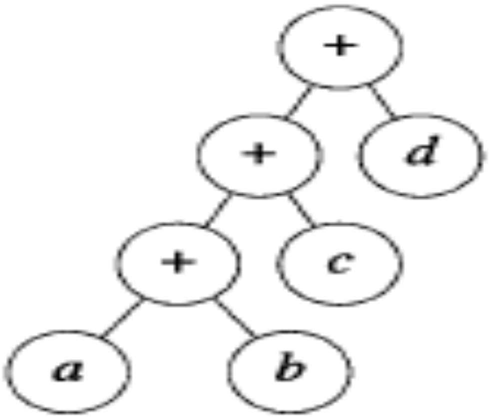
- 许多二叉树操作是通过对二叉树进行遍历来完成。
- 在二叉树的遍历中，每个元素都被访问到且仅被访问一次。
- 在访问时执行对该元素的相应操作(复制、删除、输出等)。

二叉树遍历方法

- 二叉树遍历方法：
- 前序遍历
  - 访问根元素；前序遍历左子树；前序遍历右子树。
  - (根、左、右)
- 中序遍历
  - 中序遍历左子树；访问根元素；中序遍历右子树。
  - (左、根、右)
- 后序遍历
  - 后序遍历左子树；后序遍历右子树；访问根元素。
  - (左、右、根)
- 层次遍历
- 注："访问"可以代表对节点操作的函数操作，如输出,复制、删除

遍历示例 (visit(t)= cout(t ->element))





前序:+*ab/cd

中序:a*b+c/d

后序:ab*cd/+

前序:+++abcd

中序:a+b+c+d

后序:ab+c+d+

前序遍历

```
template<class E>
void preOrder (binaryTreeNode<E> *t)
{//前序遍历二叉树*t
   if (t != NULL)
      {visit(t);                        //访问根节点
       preOrder(t->leftChild);      //前序遍历左子树
       preOrder(t->rightChild);    //前序遍历右子树
      }
}
```

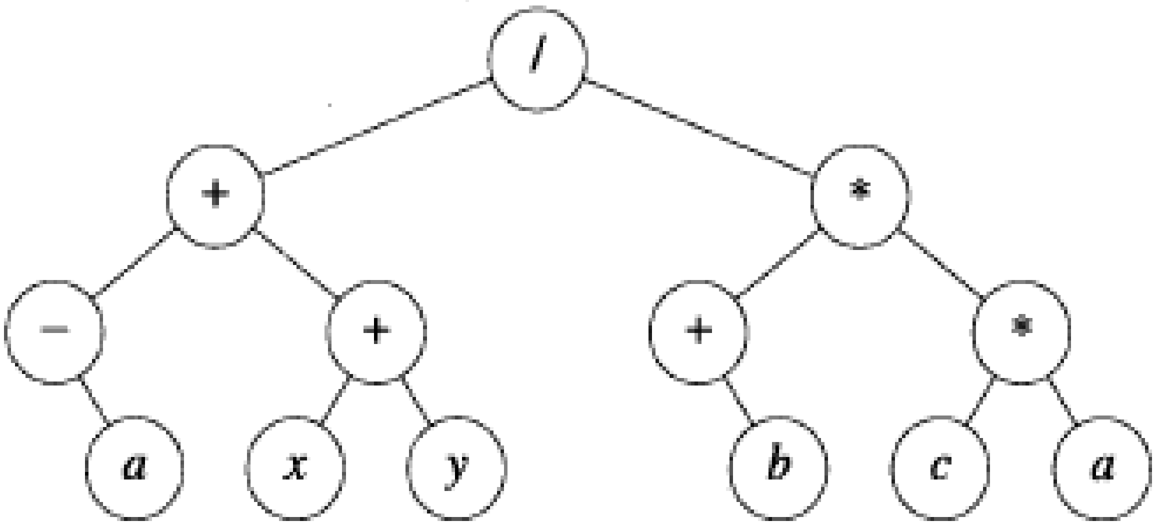
中序遍历

```
template<class E>
void inOrder(binaryTreeNode<E> *t)
{//中序遍历二叉树*t
    if (t != NULL)
     { inOrder(t->leftChild);          //中序遍历左子树
       visit(t);                       //访问根节点
       inOrder(t->rightChild);         //中序遍历右子树
     }
}
```

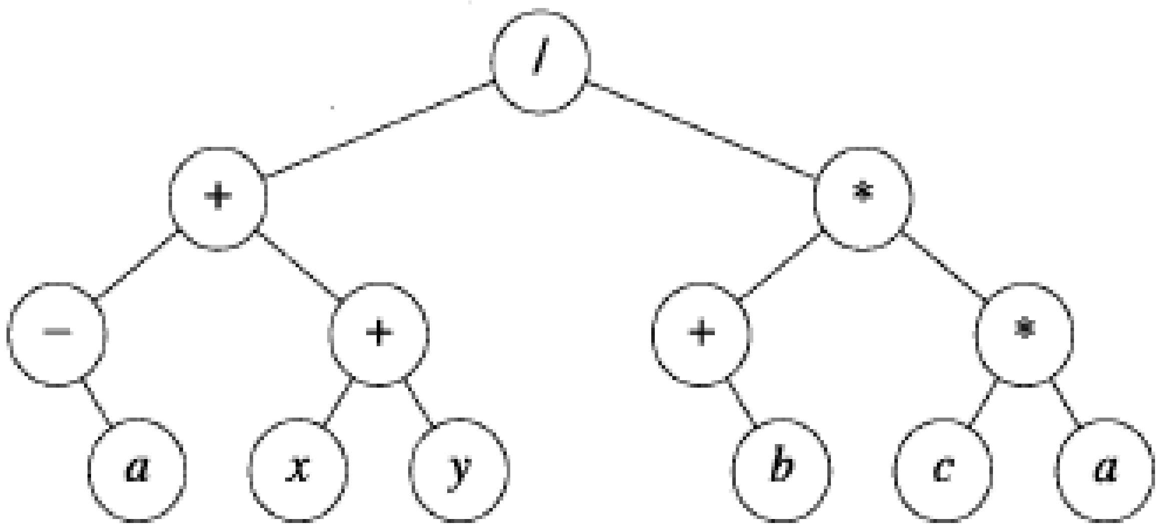
后序遍历

```
template<class E>
void postOrder(binaryTreeNode<E> *t)
{//后序遍历二叉树*t
   if (t != NULL)
    {postOrder(t->leftChild);      //后序遍历左子树
     postOrder(t->rightChild);   //后序遍历右子树
     visit(t);                                //访问根节点
    }
}
```

表达式二叉树的遍历



表达式二叉树的遍历



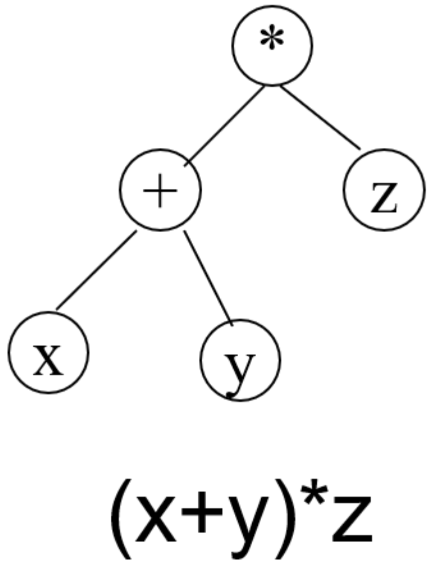
前序:/+-a+xy*+b*ca --表达式的前缀形式

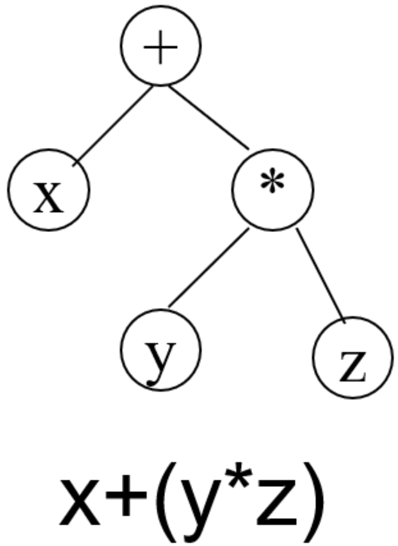
中序:-a+x+y/+b*c*d --表达式的中缀形式

后序:a-xy++b+ca**/ --表达式的后缀形式

表达式二叉树的遍历

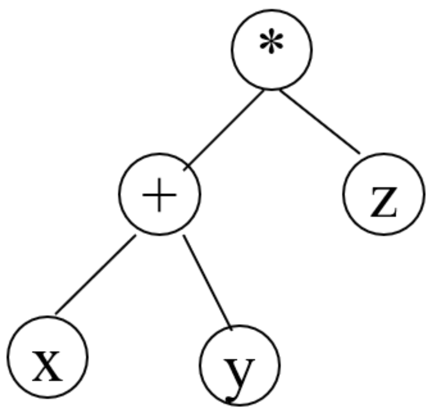
- 表达式的中缀形式存在歧义:
  - x+y*z

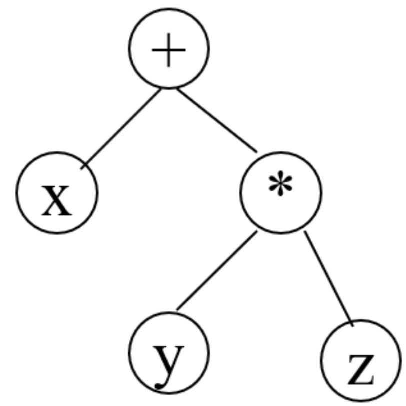




数学表达式二叉树的遍历

- 完全括号化的中缀表达式:
  - 每个操作符和相应的操作数都用一对括号括起来。更甚者把操作符的每个操作数也都用一对括号括起来。





(((x)+(y))*z)

((x)+((y)*(z)))

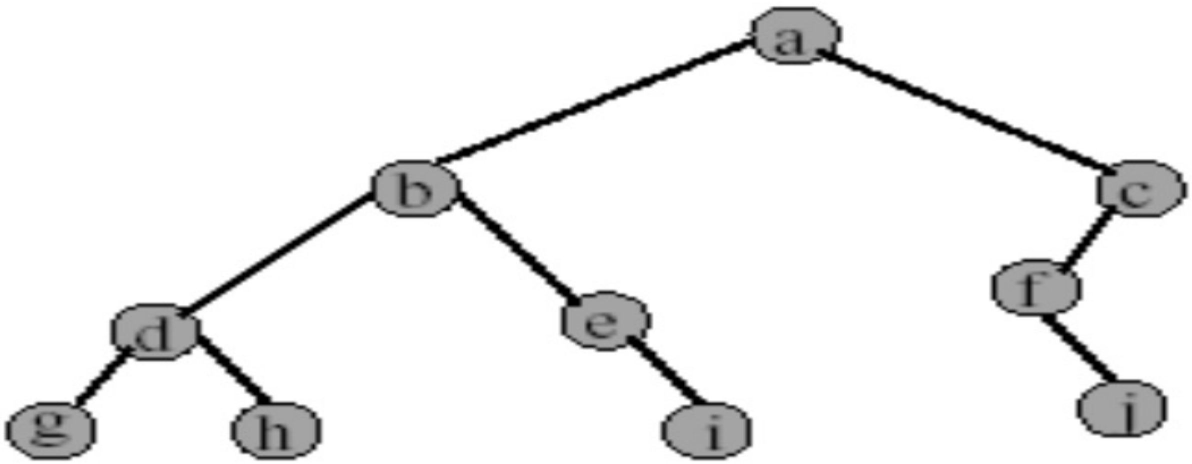
输出完全括号化的中缀表达式

```
template <class E>
void infix(binaryTreeNode<E> *t)
{// 输出表达式的中缀形式
    if (t != NULL)
    {cout << '(';
     infix(t->leftChild);// 左操作数
     cout << t->element; // 操作符
     infix(t->rightChild);//右操作数
     cout << ')';}
}
```

- 前缀和后缀表达式中不会存在歧义。

层次遍历

- 在层次遍历过程中，按从顶层到底层的次序访问树中元素，在同一层中，从左到右进行访问。
- 逐层示例 (visit(t)= cout(t->element))



- 输出： a b c d e f g h i j

层次遍历

```
template <class E>
void levelOrder(binaryTreeNode<E> *t)
{//层次遍历二叉树*t
  arrayQueue<binaryTreeNode<E>*> q;
  while (t != NULL)
    { visit(t);  //访问t
     //将t的左右孩子放入队列
     if (t->leftChild) q.push(t->LeftChild);
     if (t->rightChild) q.push(t->rightChild);
     try  {t=q.front();}   //访问下一个节点 .
     catch (queueEmpty)   {return;}
     q.pop();
    }
}
```

front()的返回值指向队首元素指针

遍历算法性能

- 设二叉树中元素数目为n。四种遍历算法：
  - 空间复杂性均为O(n) 。
  - 时间复杂性均为Θ(n)。

11.7 抽象数据类型binaryTree

抽象数据类型 binaryTree

{

实例:

元素集合；如果不空，则被划分为根、左子树和右子树；每个子树仍是一个二叉树;

操作:

empty：如果二叉树为空，则返回true，否则返回false

Size(): 返回二叉树的节点/元素个数

preorder(visit)：前序遍历二叉树，visit是访问函数

inOrder(visit)：中序遍历二叉树

postOrder(visit)：后序遍历二叉树

LevelOrder(visit)：层次遍历二叉树

}

二叉树抽象类 binaryTree

```
template<class T>     //T:节点类型
class binaryTree {
{
  public:
   virtual ~ binaryTree() {}
   virtual bool empty() const = 0;
            //二叉树为空时返回true，否则返回false
   virtual int size() const = 0;
             //返回二叉树中元素的个数
    virtual void preOrder( void (*) (T *) ) = 0;  //前序遍历二叉树
    virtual void inOrder( void (*) (T *) ) = 0;   //中序遍历二叉树
    virtual void postOrder( void (*) (T *) ) = 0;  //后序遍历二叉树
    virtual void levelOrder( void (*) (T *) ) = 0; //层序遍历二叉树
}
```

11.8 类 linkedBinaryTree(1/3)

```
template<class E>
class linkedBinaryTree： public binaryTree <binaryTreeNode<E>>
{public :
    linkedBinaryTree()  {root = NULL; treeSize = 0;};
    ~BinaryTree()  {erase()};
    bool empty( ) const   {reurn treeSize==0;}
    void preOrder( void(*theVisit) (binaryTreeNode<E> *) )
        {visit= theVisit; preOrder(root);}
    void inOrder( void(*theVisit) (binaryTreeNode<E> *) )
        {visit= theVisit; inOrder(root);}
    void postOrder( void(*theVisit) (binaryTreeNode<E> *) )
        {visit= theVisit; postOrder(root);}
    void levelOrder(void(*) (binaryTreeNode<E> *));
```

类 linkedBinaryTree(2/3)

```
 void  erase();
     {postOrder(dispose);
      root=NULL;
      treeSize=0;
     }
private:
   binaryTreeNode<E>*root;//根节点指针
   int  treeSize;//数的元素个数
   static void (*visit) (binaryTreeNode<E> *) ;//访问函数
   static void preOrder(binaryTreeNode<E> *t);
   static void inOrder(binaryTreeNode<E> *t);
   static void postOrder(binaryTreeNode<E> *t);
   static void dispose(binaryTreeNode<E> *t)
              {delete  t};//删除t指向的节点
}
```

私有preOrder

```
template<class E>
void linkedBinaryTree<E>::preOrder (binaryTreeNode<E> *t)
{//前序遍历二叉树*t
   if (t != NULL)
      {linkedBinaryTree<E>:: visit(t);         //访问根节点
       preOrder(t->leftChild);      //前序遍历左子树
       preOrder(t->rightChild);    //前序遍历右子树
      }
}
```

linkedBinaryTree<E> :: levelOrder

```
template <class E>
void linkedBinaryTree<E> :: levelOrder(
                                   void(*theVisit) (binaryTreeNode<E> *))
{//层次遍历二叉树
  binaryTreeNode<E> * t=root;
  arrayQueue<binaryTreeNode<E>*> q;
  while (t != NULL)
    { theVisit(t);  //访问t
     //将t的左右孩子放入队列
     if (t->leftChild) q.push(t->LeftChild);
     if (t->rightChild) q.push(t->rightChild);
     try  {t=q.front();}   //访问下一个节点 .
     catch (queueEmpty)   {return;}
     q.pop();
    }
 }
```

类linkedBinaryTree的扩充

- *增加如下操作:*
  - *preOrderOutput*()：按前序方式输出二叉树中的元素。
  - *inOrderOutput*()：按中序方式输出二叉树中的元素。
  - *postOrderOutput*()：按后序方式输出二叉树中的元素。
  - *levelOrderOutput*()：逐层输出二叉树中的元素。
  - *height*()：返回树的高度。

输出(Output)

```
Private:
    ……
    static void output(binaryTreeNode<E> *t)
            { cout << t->element << ' ' ;}
Public:
    ……
    void preOrderOutput( )
        { preOrder(output); cout << endl;}
    void inOrderOutput( )
        { inOrder(output); cout << endl;}
    void postOrderOutput( )
        {postOrder(output); cout<<endl;}
    void levelOutput( )
        { levelOrder(output); cout << endl;}
```

计算高度(Height)

```
Public:
    ……
    int Height( ) const {return height (root);}
private:
    ……
    int height (binaryTreeNode<E> *t) const;
    ……
template <class E>
int  linkedBinaryTree<E>::height(BinaryTreeNode<E> *t)
{//返回二叉树*t的高度
    If  (t==NULL)   return    0;    // 空树
    int hl = height(t->leftChild);   // 左子树的高度
    int hr = height(t->rightChild); // 右子树的高度
    if (hl > hr)    return ++hl;
    else   return ++hr;
}
```

测验

已知一个二叉树的前序遍历结果是（ACDEFHGB），中序遍历结果是（DECAHFBG）,请问后续遍历结果是（）。

A. HGFEDCBA

B. EDCHBGFA

C. BGFHEDCA

D. EDCBGHFA

E. BEGHDFCA

F. BGHFEDCA

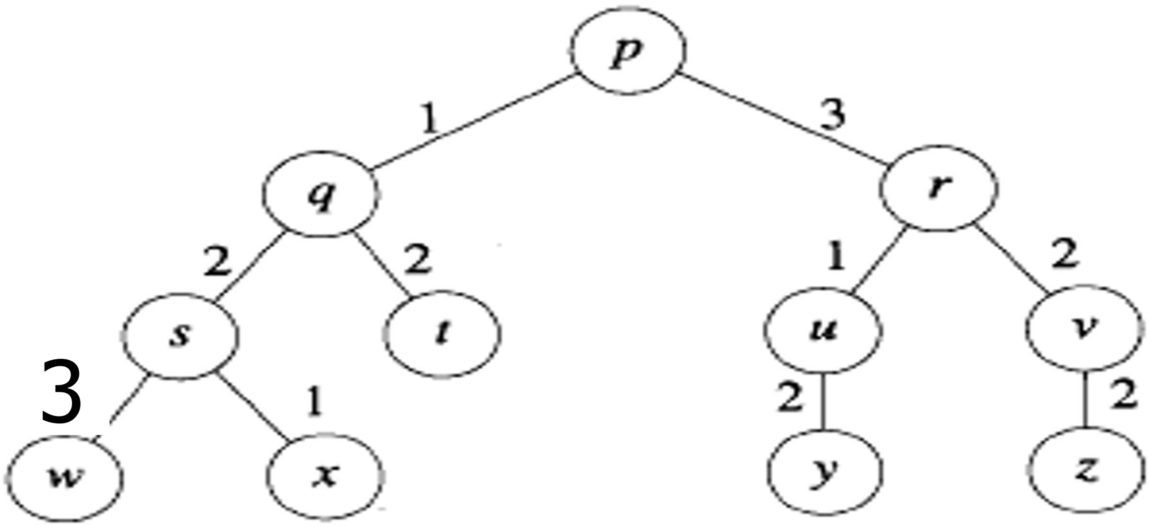
11.9 应用

- 11.9.1 设置信号放大器
- 11.9.2 并查集

11.9.1 设置信号放大器

- 信号（汽油、天然气、电力等）在网络中传输时，在某一方面的的性能可能会损失或衰减；同时噪声会增加
- 在信号从信号源到消费点传输的过程中，仅能容忍一定范围内的信号衰减，为了保证信号衰减不超过容忍值（tolerance），应在网络中重要的位置上放置信号放大器（signal booster）

11.9.1 设置信号放大器



- 设计一个算法确定把信号放大器放在何处。
- 目标是要使所用的放大器数目最少并且保证信号衰减(与源端信号相关)不超过给定的容忍值。

树形分布网络信号放大器的放置

- *degradeFromParent(i)* —— 节点*i* 与其父节点间的衰减量
- If *degradeFromParent(i)*＞容忍值，则不可能通过在节点i处放置放大器来使信号的衰减不超过容忍值。

- *degradeToLeaf(i)* —— 从节点*i* 到以*i* 为根节点的子树的任一叶子的衰减量的最大值。
  - 若 i 为叶节点， 则 $degradeToLeaf(i) = 0$
  - 对其它节点i， $degradeToLeaf(i) = max\{degradeToLeaf(j) + degradeFromParent(j)\}$

    j 是 i的孩子

树形分布网络信号放大器的放置

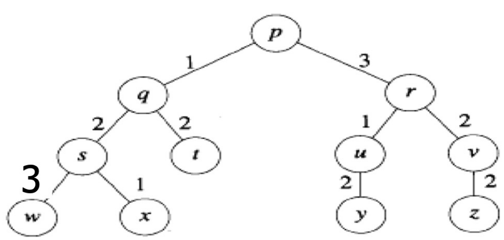
- *degradeToLeaf*(*i*) —— 从节点*i* 到以*i* 为根节点的子树的任一叶子的衰减量的最大值。
  - 若 i 为叶节点， 则 *degradeToLeaf*(*i*) = 0
  - 对其它节点i， *degradeToLeaf*(*i*)= *max*{*degradeToLeaf*(*j*) + *degradeFromParent* (*j*) }

    j 是 i的孩子

- 要计算节点的degreeToLeaf值，就要先计算其子节点的degreeToLeaf值，对树进行遍历
- 先访问子节点再访问父节点
- 在访问一个节点时，同时计算它的degreeToLeaf值

计算*degradeToLeaf*和放置放大器的伪代码

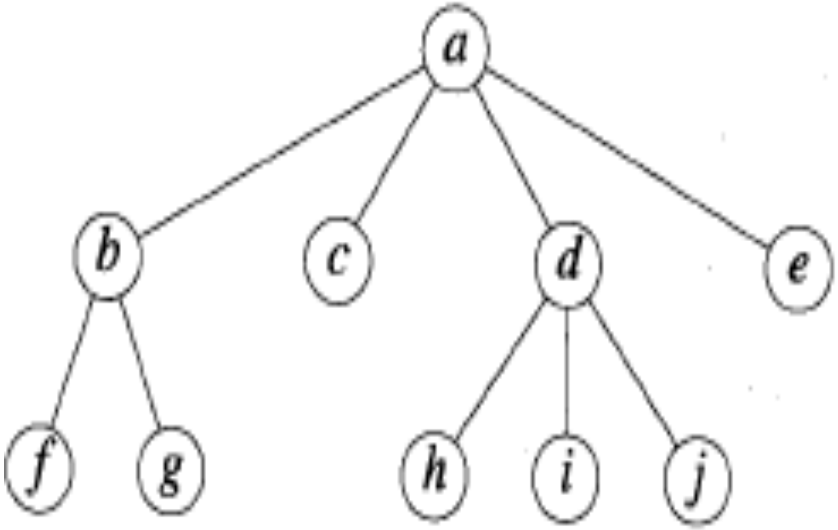
```
degradeToLeaf(i) = 0 ;
for (i 的每个孩子j )
if   (degradeToLeaf(j) +degradeFromParent(j))>容忍值)
   {在j 放置放大器;
    degradeToLeaf(i) =
                max{degradeToLeaf(i), degradeFromParent(j)};
else
   degradeToLeaf(i) = max{degradeToLeaf(i),
                         degradeToLeaf(j) +degradeFromParent(j)};
```



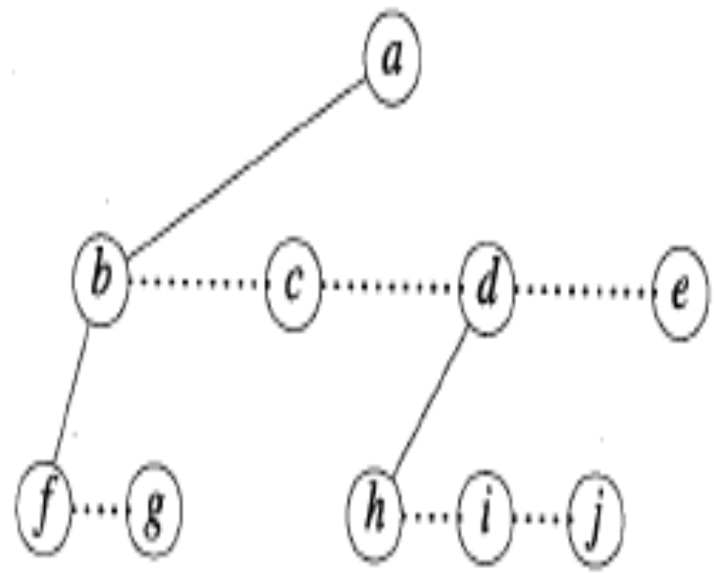
树的二叉树描述

- 当分布树t有节点超过两个孩子时，依然用二叉树来表示

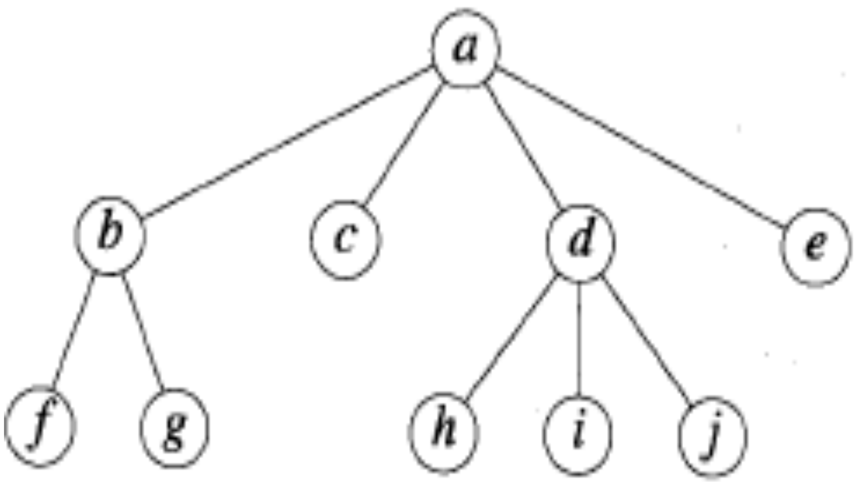
树的二叉树描述



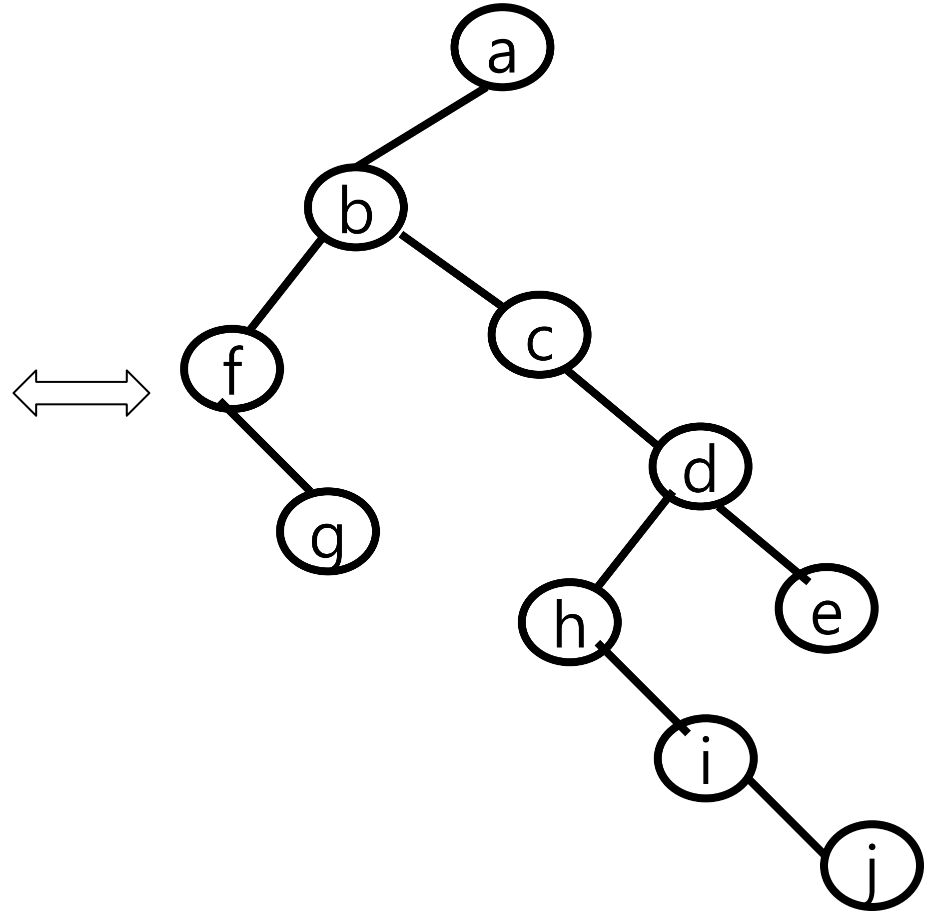
- 对于树t的每个节点x，
- x节点的leftChild指针指向x的第一个孩子。
- x节点的rightChild域指向x的下一个兄弟。



树的二叉树描述

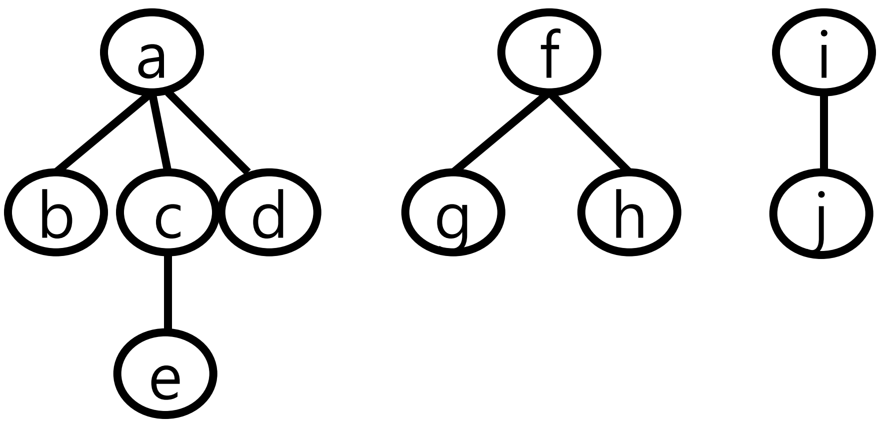


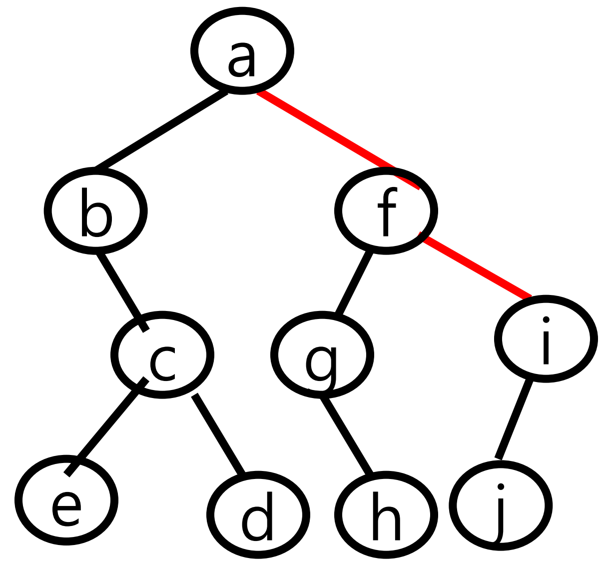
a)



森林的二叉树表示

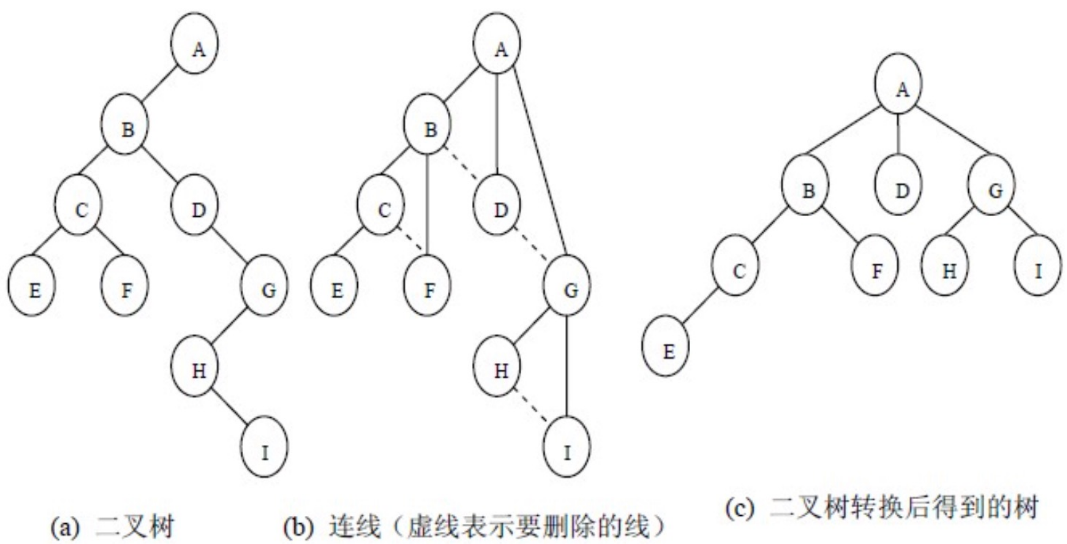
- 森林(forest)是0棵或多棵树的集合.
- 森林的二叉树表示
  - 首先得到树林中每棵树(设有*m*棵树)的二叉树描述 .
  - 然后，第*i*棵作为第*i*-1棵树的右子树(2≤i≤m).





拓展：二叉树转换为树

- 二叉树转换为树是树转换为二叉树的逆过程，其步骤是：
  （1）若某结点的左孩子结点存在，将左孩子结点的右孩子结点、右孩子结点的右孩子结点……都作为该结点的孩子结点，将该结点与这些右孩子结点用线连接起来；
  （2）删除原二叉树中所有结点与其右孩子结点的连线；
  （3）整理（1）和（2）两步得到的树，使之结构层次分明。



二叉树转换为树的过程示意图

拓展：二叉树转换为森林

- 二叉树转换为森林比较简单，其步骤如下：
（1）先把每个结点与右孩子结点的连线删除，得到分离的二叉树；
（2）把分离后的每棵二叉树转换为树；
（3）整理第（2）步得到的树，使之规范，这样得到森林。

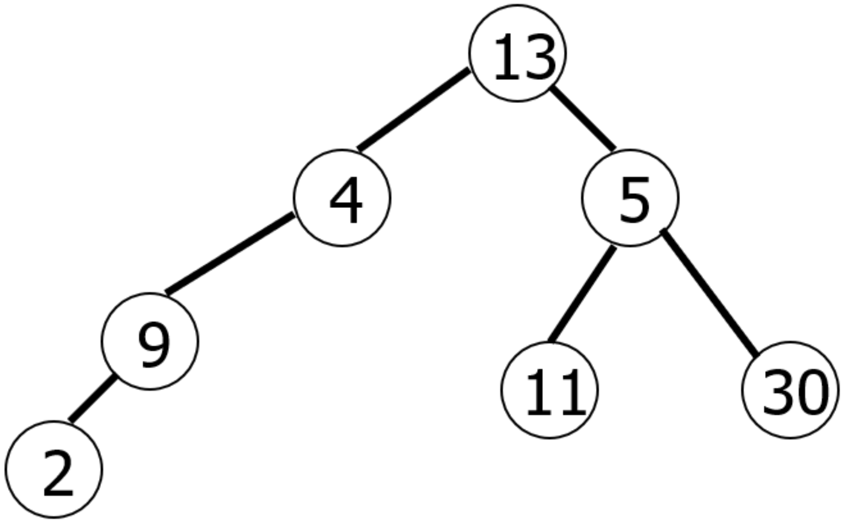
11.9.2 并查集

- 并查集示例：
  - *集合U*：n= 14; n个元素从1号到n号
  - R= { (1 , 11)，(7 , 11)，(2 , 12)，(12 , 8)，
    (11 , 12)，(3 , 13)，(4 , 13)，(13 , 14)，
    (14 , 9)，(5 , 14)，(6 , 10) }

  等价关系把集合U划分为不相交的等价类
  - 等价类: 相互等价的元素的最大集合
    - {1, 2, 7, 8, 11, 12}
    - {3, 4, 5, 9, 13, 14}
    - {6, 10}

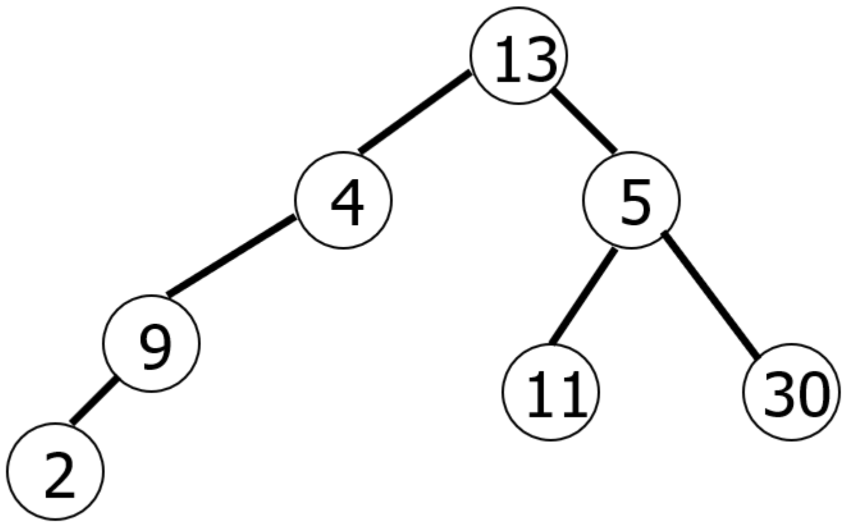
集合(类)的树形描述

- 每个集合(类)描述为一棵树
- 用根元素作为集合标识符。
- 例：13：{2, 4, 5, 9, 11, 13, 30}



find 操作

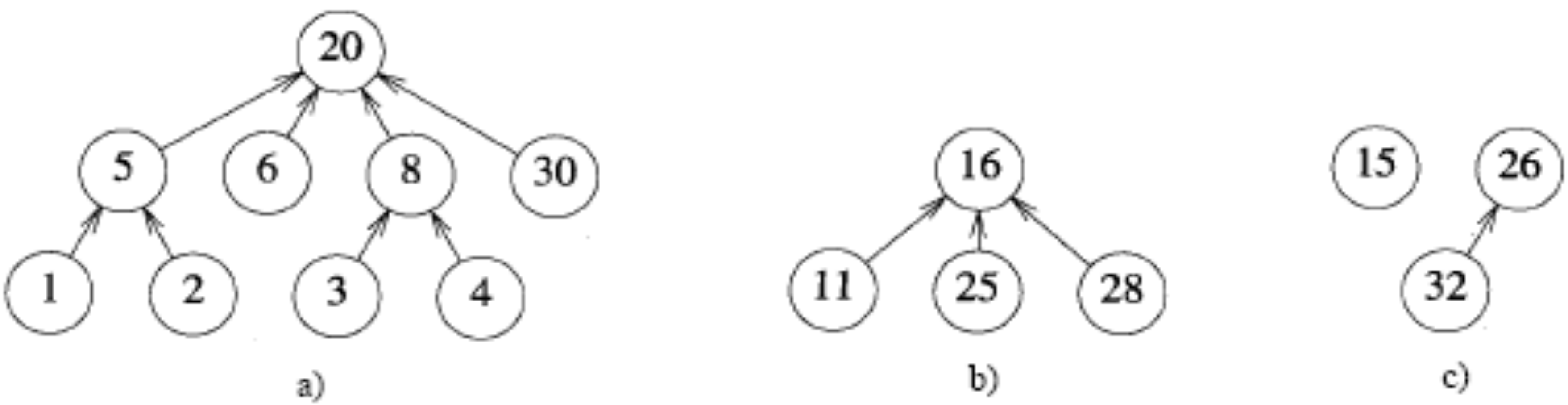
- find(i)： 返回i所在树的根元素.



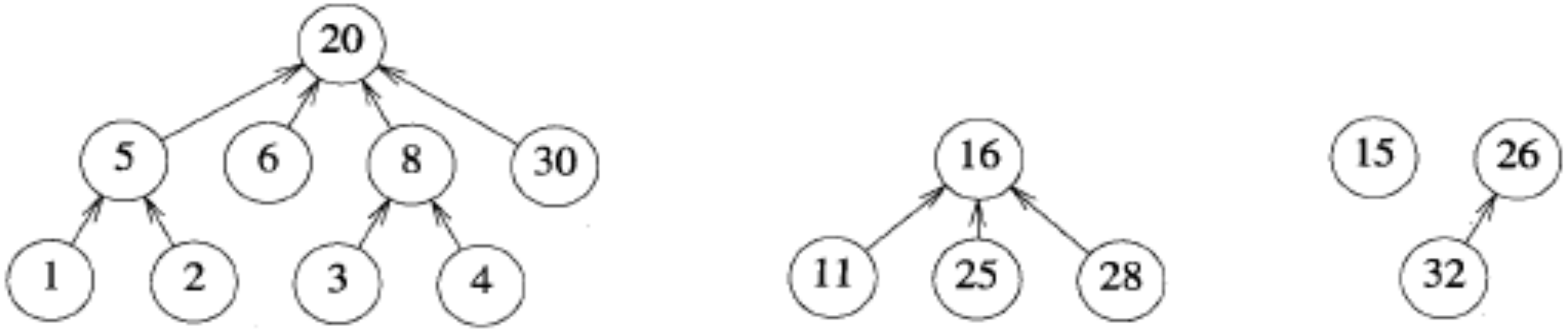
- 从i 所在的节点开始，沿着节点到其父节点移动，直到到达根节点位置.
- 返回根元素.

树的描述

- 每个非根节点都指向其父节点。
- 20: {1,2,3,4,5,6,8,30,20}
- 16:{11,25,28,16}
- 15: {15}
- 26:{32,26}



树的描述



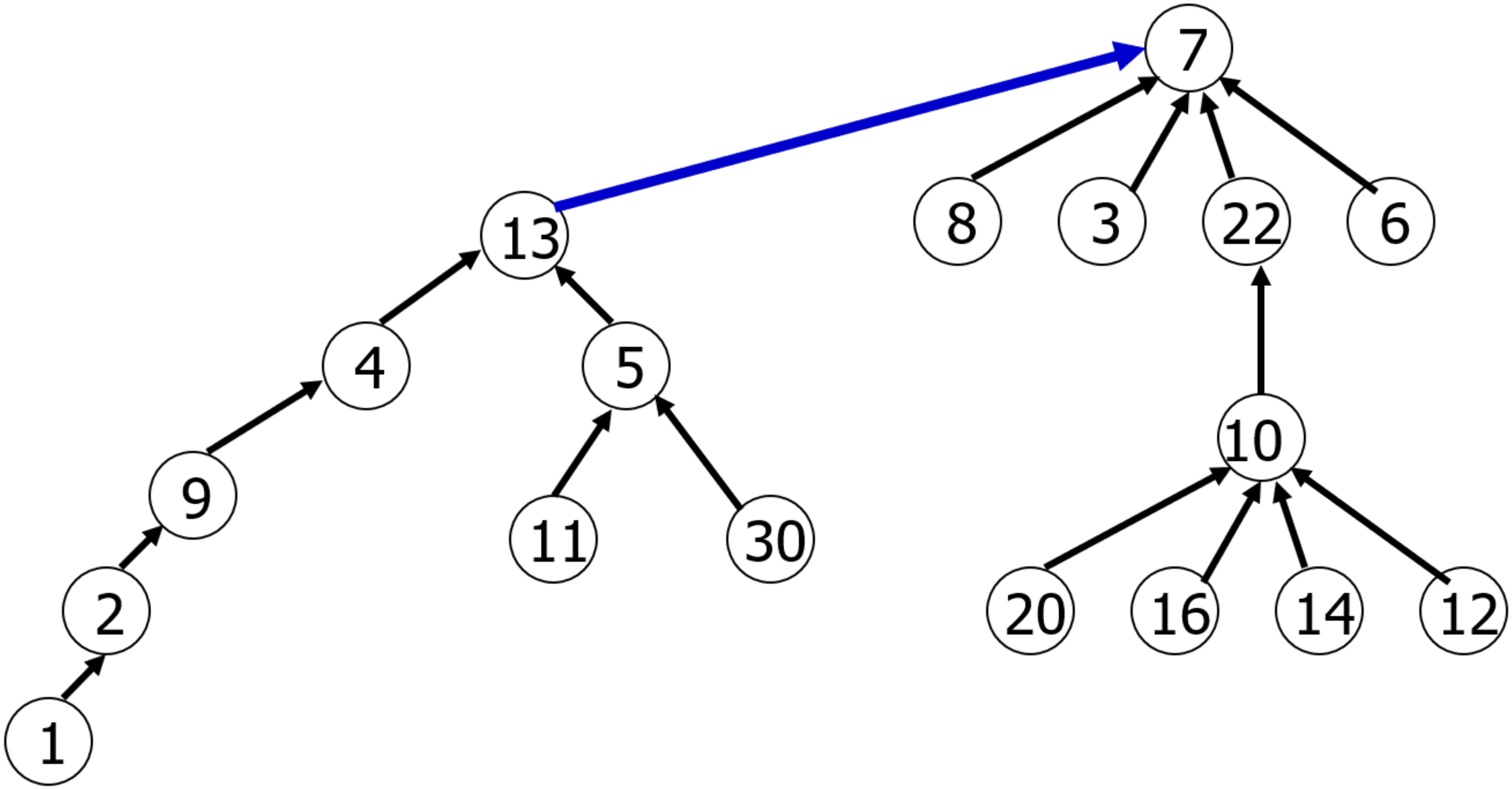
a)　　　　b)　　　　c)

树的描述

```
int    *parent;
```

Unite 操作

- union(7,13)



```
void initialize(int numberOfElements)
{// 初始化，每个类/树有一个元素
    parent = new int[numberOfElements+1];
    for (int e = 1; e <= numberOfElements; e++)
    parent[e] = 0;
}
int find(int theElement)
{ / /返回包含theElement的树的根节点
    while (parent[theElement]!=0)
        theElement = parent[theElement]; // 上移一层
    return theElement;
}
void unite(int rootA, int rootB)
    {// 将根为rootA 和rootB的两棵树进行合并
    parent[rootB] = rootA;
}
```

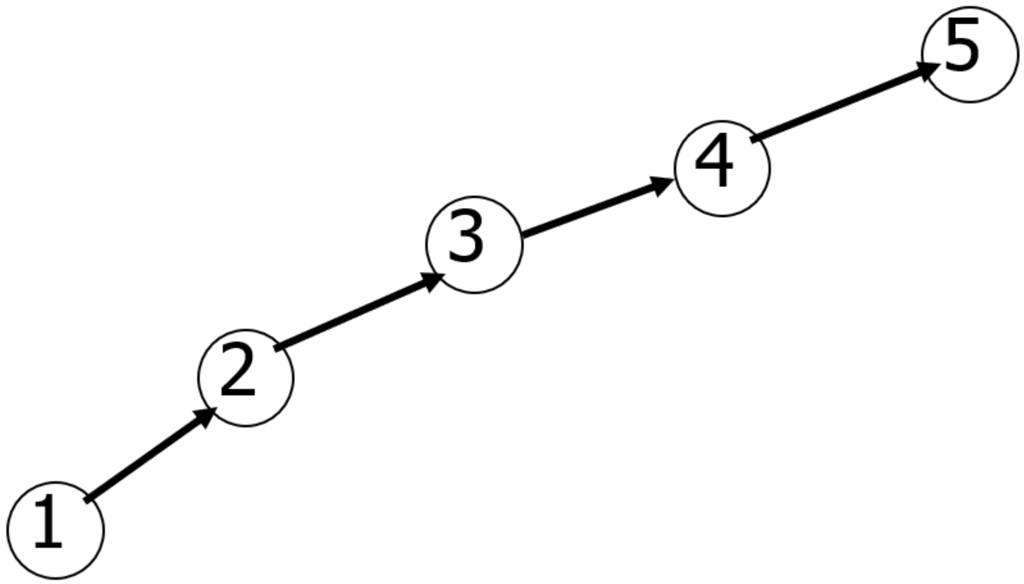
时间复杂性

- 假设一个系列操作：要执行u 次合并和f 次查找。
- 每次合并前都必须执行两次查找，
  - 可假设$f>u$。

- 每次合并所需时间为$\Theta(1)$。

时间复杂性

- 每次查找所需时间由树的高度决定。
- 在最坏情况下，有m个元素的树的高度为m。
  - 当执行以下操作序列时，即可导致最坏情况出现：
  - *Unite*(2,1)，*Unite*(3,2)，*Unite*(4,3)，*Unite*(5,4)，…



时间复杂性

- 要执行一个系列操作(u 次合并和f 次查找)的时间为O（fu）

性能改进-重量规则

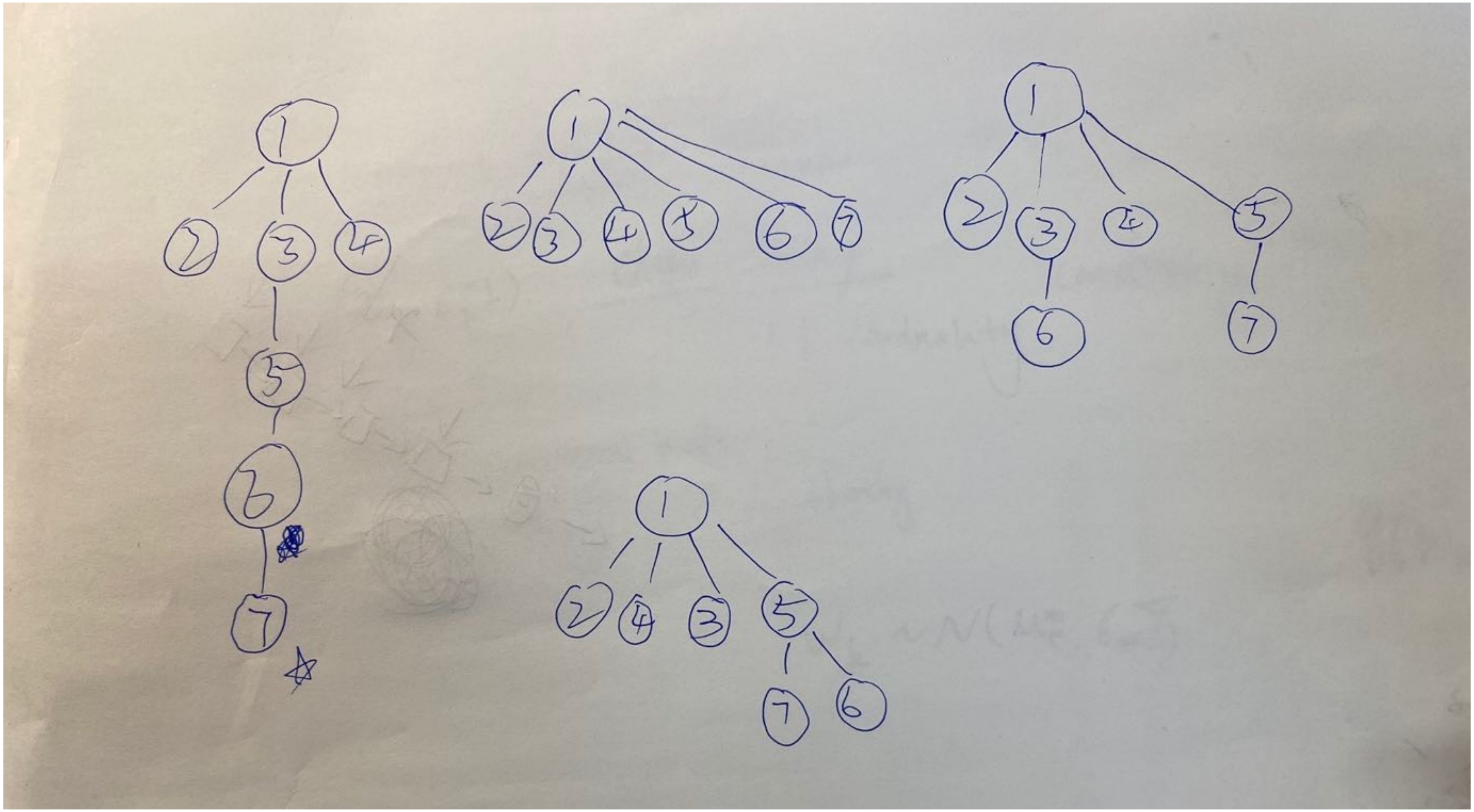
- [重量规则]若树i节点数少于树j节点数，则将j作为i的父节点。否则，将i作为j的父节点。
- [高度规则]若树i的高度小于树j的高度，则将j作为i的父节点，否则将i作为j的父节点。

提高在最坏情况下的性能的方法

- 路径的缩短可以通过称为路径压缩(path compression) 的过程实现。

1. 紧凑路径法(path compaction)
   - 改变从e到根节点路径上所有节点的parent指针，使其指向根节点。
2. 路径分割法(path splitting)
   - 改变从e到根节点路径上每个节点(除了根和其子节点)的parent指针，使其指向各自的祖父节点。
3. 路径对折法(path halving)
   - 改变从e到根节点路径上每隔一个节点(除了根和其子节点)的parent域，使其指向各自的祖父节点。

提高在最坏情况下的性能的方法



作业

- P280. 练习12
- P295. 练习53