回顾　基本计数法则与模型

1、乘法规则，加法法则，鸽巢原理

2、排列（允许重复）、组合（允许重复）

3、给盒子分装物体的计数模型

Chapter 14

高级计数技术

§14.1 递推关系

1、递推关系

例1： $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$， $a_0=0,a_1=2$;

$\{a_n\}$:0,2,4,6,8,…　　　$a_n=2n$

$2(3n-3)-(3n-6)=3n=a_n$

例2： $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$， $a_0=2,a_1=7$; $\{a_n\}$

例3： $a_n=6a_{n-1}+9a_{n-2}$， $a_0=1,a_1=6$; $\{a_n\}$

2、 建立递推关系

例1：利息的计算

$$P_n = (1.11)P_{n-1}$$

例2：Fibonacci数列

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

例3：Hanoi塔问题

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

例4： 数字字串的计数问题

十进制数串中有偶数个0的数串个数的计数。

解：a_n表示n位十进制数串中有偶数个0的数串个数，a_{n-1}表示n-1位十进制数串中有偶数个0的数串个数，

n-1位有奇数个0的数串末位加0，复合要求

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

n-1位符合要求的数串末位加1，2 …9，仍然复合要求

通过求解递推关系的解可以找到递推关系的一般规律。

§ 14.2 生成函数

1、生成函数的概念

（1）普通生成函数

定义：

实数数列$a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots$对应的生成函数表示为:

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

（2）指数型生成函数

定义：

实数数列$a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots$所对应的指数型生成函数为：

$$f_e(x)=a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

§14.2 生成函数

2、扩充的二项式系数

定义：

设α是一个实数而k是非负整数，那么扩充的二项式系数定义如下： C(α,k)

$$\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k! & if\ \ k>0\\ 1 & if\ \ k=0\end{cases}$$

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!} = -4$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (n)(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (n)(n+1)\ldots(n+r-1)(n-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$= (-1)^r C(n+r-1, r) = C(-n, r)$$

§14.2 生成函数

3、扩充的二项式定理

定理：
设x是一个实数且|x| < 1 ，而α是一个实数，则有

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

例，分析如下两个二项式。

$$(1+x)^{-n} \qquad\qquad (1-x)^{-n}$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c(n+k-1,k) x^k$$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c(n+k-1,k) x^k$$

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$ √
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1 √
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$ √

$\dfrac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\dfrac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k = 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\dfrac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

√

√

√

§14.2 生成函数

4、使用生成函数解决计数问题

分析下列生成函数解决的计数问题

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (x^0 + x^1)(x^0 + x^1)\ldots(x^0 + x^1)$$

第1　　第2　　.....　　第n

$C(\mathrm{n}, \mathrm{k})$　　从n个不同物体中无顺序的选取k个

分析下列生成函数解决的计数问题

$$(1-x)^{-n}=(\frac{1}{1-\mathrm{x}})^{n}=(x^{0}+x^{1}+x^{2}+x^{3}\ldots+)^{n}$$

$$=(x^{0}+x^{1}+x^{2}+x^{3}\ldots+)\ldots(x^{0}+x^{1}+x^{2}+x^{3}\ldots+)$$

第1类 ..... 第n类

n类物体允许重复的选取r个的方案是： C(n+r-1,r)

例1:求解下列方程的整数解的个数

$x_1+x_2+x_3=11$ x1 ≥ 0; x2 ≥ 0; x3 ≥ 0

解:

方法1: C(3+11-1,11)=78

方法2:利用生成函数求解

$$(x^0+x^1+\ldots+x^{11})(x^0+x^1\ldots+x^{11})(x^0+x^1+\ldots+x^{11})$$

$$=1x^0+3x^1+\ldots+78x^{11}+?x^{12}+\ldots$$

例2:求解下列方程的整数解的个数

$$x_1+x_2+x_3=11 \qquad x1 \geq 1;\ x2 \geq 2;\ x3 \geq 3$$

解:

方法1：组合法：C(3+11-6-1,11-6)=21

方法2：生成函数

$$(x^1+\ldots+x^{11})(x^2\ldots+x^{11})(x^3+\ldots+x^{11})$$

$$=x^6+\ldots+21x^{11}+?\,x^{12}+\ldots$$

例3:求解下列方程的整数解的个数

$$x_1+x_2+x_3=11 \qquad 5 \ge x_1 \ge 2;\ 6 \ge x_2 \ge 3;\ 7 \ge x_3 \ge 4$$

解:

$$(x^2+\ldots+x^5)(x^3\ldots+x^6)(x^4+\ldots+x^7)$$

$$=+\ldots+?x^{11}+?x^{12}+\ldots$$

例4:求解下列方程的整数解的个数

$x_1+2x_2=15$ x1 ≥0; x2 ≥0

解:

$$(x^0+x^1+\ldots x^{15})(x^0+x^2+\ldots x^{16})=$$

$$(x^0+x^1+\ldots x^{15}+\ldots)(x^0+x^2+\ldots x^{16}+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)x^r+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}x^r+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r x^r$$

X^r的系数 $\frac{1}{2}(r+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^r$ $\frac{1}{2}(15+1)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{15}=8$

例5:利用生成函数求解n类物体允许重复的r组合数。

解:

$$G(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = (x^0+x^1+\ldots)\ldots(x^0+x^1+\ldots)=$$

$$=(x^0+x^1+x^2+x^3\ldots+)^n=(1-x)^{-n}=(1/(1-x))^n$$

x^r的系数 $\binom{-n}{r}(-1)^r=(-1)^r C(n+r-1,r)(-1)^r$

$$=C(n+r-1,r)$$

例6:利用生成函数求解n类物体允许重复的r组合数,且每类物体至少选取一个。

解:

$$G(x)=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = (x^1+x^2+\ldots)\ldots(x^1+x^2+\ldots)=$$

$$=(x^1+x^2+x^3+\ldots+)^n = x^n(1-x)^{-n} = x^n(1/(1-x))^n$$

$$=x^n\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r = x^n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r C(n+r-1,r)(-1)^r x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C(n+r-1,r)x^{n+r} \quad =\sum_{t=n}^{\infty} C(t-1,t-n)x^t$$

$$=\sum_{r=n}^{\infty} C(r-1,r-n)x^r$$

x^r的系数 $C(r-1,r-n)$

§14.2 生成函数

5、使用生成函数求解递推关系

例:利用生成函数求解递推关系．$a_n = 2a_{n-1}+3, n\geq 1$， $a_0=3$

解：方法1: $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

$$G(x)-2xG(x)=a_0+(a_1-2a_0)x+(a_2-2a_1)x^2+\cdots$$

$$=3+3x+3x^2+\cdots=3(1+x+x^2+\cdots)$$

$$(1-2x)G(x)=3(1+x+x^2+\cdots)$$

$$G(x)=3(1+x+x^2+\cdots)/(1-2x)$$

§14.2 生成函数

$$G(x) = 3(1 + x + x^2 + \cdots) / (1 - 2x)$$

$$G(x) = 3\frac{1}{(1-x)(1-2x)} \qquad G(x) = 3(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x})$$

$$G(x) = 3(2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n)$$

$$a_n = 3(2 \cdot 2^n - 1) \qquad a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$$

方法2:　$a_n=2a_{n-1}+3;\ a_0=3$

$a_n=2a_{n-1}+3$

$\{a_n^{(h)}\};\ a_n=2a_{n-1}$

$r-2=0\ ,r=2$

$a_n^{(h)}=\alpha\cdot 2^n$

$F(n)=3;\ a_n^{(p)}=c\cdot n+d$ 代入

$a_n=2a_{n-1}+1$

$c\cdot n+d=2(c\cdot(n-1)+d)+3$

$c\cdot n+(d-2c+3)=0$

$c=0;d=-3$

$a_n^{(p)}=-3$

$a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}=\alpha\cdot 2^n-3$

$a_0=3=\alpha\cdot 2^0-3$

$\alpha=6$

$an=6\cdot 2^n-3=3\cdot 2^{n+1}-3$

§ 14.2 生成函数

例：十进制数串中有偶数个0的数串个数的计数。

$$a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}$$
$$a_0=1,\ a_1=9$$

解：方法1:

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

$a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}$

$$-8xG(x)=-8a_0x-8a_1x^2-8a_2x^3+\dots$$

$a_1-8a_0=10^0$

$$(1-8x)G(x)=a_0+(a_1-8a_0)x+(a_2-8a_1)x^2+\dots$$

$$=1+10^0x+10^1x^2+10^2x^3+\dots$$

$$=1+(10^0x^0+10^1x^1+10^2x^2+\dots)x$$

$$=1+\frac{1}{1-10x}x=\frac{1-9x}{1-10x}$$

$$G(x)=\frac{1-9x}{(1-10x)(1-8x)}\qquad G(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x}\right)$$

$$G(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x})$$

$$G(x)=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}8^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(8^n+10^n)x^n$$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 8^n+\frac{1}{2}\cdot 10^n$$

解：方法2:

$a_n=8 \cdot a_{n-1}+10^{n-1}$

$a_0=1$,$a_1=9$

$\{a_n^{(h)}\}$ $a_n=8a_{n-1}$

$r-8=0$ $r=8$

$$a_n^{(h)}=\partial \cdot 8^n$$

$$f(n)=10^{n-1}=\frac{1}{10}10^n \qquad a_n^{(p)}=p_0 \cdot 10^n$$

$$p_0 \cdot 10^n=8 \cdot p_0 \cdot 10^{n-1}+10^n \qquad p_0=\frac{1}{2}$$

$$a_n^{(p)}=\frac{1}{2}10^n \qquad a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}=\partial \cdot 8^n+\frac{1}{2}10^n$$

$$a_0 = 1 = \partial \cdot 8^0 + \frac{1}{2} 10^0$$

$$\partial = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n$$

生成函数

1、利用生成函数求解计数问题。
2、利用生成函数求解递推关系。