回顾

❖高级计数技术与模型

1、建立问题的递推关系。

2、利用生成函数求解各类计数问题。

3、利用生成函数求解递推关系。

4、利用一般容斥原理求解计数问题。

❖ **容斥原理 Inclusion-exclusion**

[DeMorgan law] **全集 U，集合A的补集** $\overline{A}$

$$\overline{A} = \{x \in U \wedge x \notin A\}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$ 同时不具有集合A和B的属性的元素

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$ 不具有集合A或B的属性的元素

❖ **DeMogan定理的推广：设** $A_1, A_2, \ldots, A_n$是U的子集

则 (a) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

同时不具有任意一种属性的元素

(b) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

任意一种属性都不具有的元素

容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合A和B的并的元素数目.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$

即具有性质A或B的元素的个数等于具有性质A和B的元素个数之和减去同时具有性质A和B的元素个数。

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ &\quad - |\mathrm{A} \cap \mathrm{C}| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned} \qquad (2)$$

容斥原理

设 A1,A2,…,An 是有限集，则

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\
&+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad (4)
\end{aligned}
$$

容斥原理的应用

设具有性质P_i 的元素组成的集合为A_i ，那么同时具有性质$P_1,P_2,P_3 \ldots P_k$ 元素个数表示为 $N(P_1P_2P_3 \ldots P_k)$ ，即

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k\right| = N(P_1 P_2 \ldots P_k)$$

容斥原理的应用

属性$P_1,P_2,P_3…P_k$ 的任何属性都不满足的元素个数表示为$N(P'_1P'_2P'_3…P'_k)$，N表示全集中元素个数,则

$$N(P_1'P_2'\ldots P_k') = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k\right|$$

容斥原理的应用

那么容斥原理的一般形式可以表示为：

$$N(P_1^{'}P_2^{'}\ldots P_k^{'}) = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right|$$

$$= N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i \cap A_j\right|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots$$

$$+(-1)^n\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

容斥原理的应用

例1:方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

满足$x_1<=3$, $x_2<=4$, 且 $x_3<=6$ 不同正整数解的个数？

方法1：用生成函数求解

$x_1+x_2+x_3=11$ $3 \geq x_1 \geq 0$; $4 \geq x_2 \geq 0$; $5 \geq x_3 \geq 0$

$G(x)=(1+X+X^2+X^3)(1+X+X^2+X^3+X^4)$

$(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6)=$

$\ldots.+6X^{11}\ldots.$

容斥原理的应用

方法2：用容斥原理求解

解：令 P_1表示性质$X_1>3$ ，令 P_2表示性质$X_2>4$ ，令 P_3表示性质$X_1>6$
满足 $x_1<=3$, $x_2<=4$, and $x_3<=6$解的个数是:

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1P_2) +$$
$$N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3)$$

其中，N =解的总数= $C(3+11-1,11)=C(3+11-1,3-1)=78$;
$N(P_1)$=满足 $X_1>3$ 的解的数目= $C(3+7-1,7)=36$;（$11-4=7$）
$N(P_2)$=满足 $X_2>4$ 的解的数目= $C(3+6-1,6)=28$;（$11-5=6$）
$N(P_3)$=满足 $X_1>6$ 的解的数目= $C(3+4-1,4)=15$;（$11-7=4$）
$N(P_1P_2)$=满足 $X_1>3$ and $X_2>4$ 的解的数目= $C(3+2-1,2)=6$;

容斥原理的应用

$N(P_1P_3)$=满足 $X_1>3$ and $X_3>6$ 的解的数目

$= C(3+0-1,0)=1;$

$N(P_2P_3)$=满足 $X_2>4$ and $X_3>6$ 的解的数目= *0 (11-5-7=-1)*

$N(P_1P_2P_3)$=满足 $X_1>3$ and $X_2>4$ and $X_3>6$ 的解的数目= *0*

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1P_2) +$$

$$N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3)$$

$$= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 + 0 = 6$$

容斥原理的应用

例2：现把五个不同的程序$Prog_1$,$Prog_2$,$Prog_3$,$Prog_4$,$Prog_5$分配给赵，钱，孙，李四位同学来完成编写，要求每个学生至少要编写一个程序，问有多少种不同的分配方案？

解：令 P1表示赵没有分配到程序的分配方案，方案数$N(P_1)$

P2表示钱没有分配到程序的分配方案，方案数$N(P_2)$

P3表示孙没有分配到程序的分配方案，方案数$N(P_3)$

P4表示李没有分配到程序的分配方案，方案数$N(P_4)$

$N(P'_1)$：表示赵分配到程序的分配方案数；

$N(P'_2)$：表示钱分配到程序的分配方案数；

而满足“每个学生至少要编写一个程序”要求的分配方案数是:

$N(P'_1P'_2P'_3P'_4)$

容斥原理的应用

$$N(P_1'P_2'P_3'P_4') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1P_2) +$$
$$N(P_1P_3) + N(P_1P_4) + N(P_2P_3) + N(P_2P_4) + N(P_3P_4)$$
$$-N(P_1P_2P_3) - N(P_2P_3P_4) - N(P_1P_2P_4) - N(P_1P_3P_4)$$

其中，N =总方案数4^5;把5个程序分配给4个同学（没有任何附加条件）
$N(P_i)=3^5$;i=1,2,3,4;把5个程序分配给3个同学
$N(P_iP_j)=2^5$; $1\le i<j\le 4$;把5个程序分配给2个同学
$N(P_iP_jP_k)=1$; $1\le i<j<k\le 4$;把5个程序分配给1个同学
$N(P_1P_2P_3P_4)=0$；没有同学分配程序完成

$$N(P_1'P_2'P_3'P_4') = 4^5 - 4\bullet 3^5 + 6\bullet 2^5 - 4\bullet 1 = 240$$

容斥原理的应用

例3：6个元素$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$到3个元素$B=\{b_1,b_2,b_3\}$的集合可以构成多少种不同的满射（映上）函数？

解：函数定义中的定义域，陪域，值域，值域是陪域的子集。

陪域（ codomain ） $B=\{b_1,b_2,b_3\}$,设 P_1,P_2,P_3 分别表示元素b_1,b_2和 b_3不在值域中的函数。

$N(P_1)$=值域中不含$\mathbf{b_1}$的函数个数， $N(P_i)$=值域中不含b_i 的函数个数

$N(P_1' P_2' P_3')$=值域中包含b_1,b_2和 b_3的函数个数（满射）.

容斥原理的应用

$N=3^6$

$N(P_i)$值域中不含b_i 的函数个数.

$N(P_i)\ =2^6$; $N(P_iP_j)=1^6$; $N(P_1P_2P_3)=0$

$N(P_1'\quad P_2'\quad P_3'\ )=N-\ (N(P_1)+N(\ P_2)+N(\ P_3))$

$+\ (N(P_1P_2)+N(\ P_3P_3)+N(\ P_2P_3))$

$-\ N(P_1P_2P_3)=3^6-\ (2^6+2^6+2^6)+(1^6+1^6+1^6)-0=\ 3^6-$

$C(3,1)2^6+C(3,2)1^6-0=540$

定理：

设m和n是非负整数，且m ≥ n，则m个元素集合到n个元素集合的映上函数个数是：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$

容斥原理的应用

例:5种不同的工作分别分给4个人去完成，每人至少分配一种工作，问有多少种分配方案?

解：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$
$$= 4^5 - C(4,1)(4-1)^5 + C(4,2)(4-2)^5 - C(4,4-1)1^5 = 240$$

分配物体到盒中的模型

n个球	m个盒子	是否允许空盒	计数方案	备注
有区别	有区别	允许空盒		全排列
无区别	有区别	允许空盒	C(m+n-1,n)	m个有区别的元素,取n个作允许重复的组合
无区别	有区别	不允许空盒	C(n-1,m-1)	(1)选取m个球每盒一个 (2)n-m有区别的球放入m个有区别盒子中,允许某盒不放 C(n-m+m-1,n-m)=C(n-1,m-1)
无区别	无区别	允许空盒		一本书的6本复印件放入4个相同的箱子中
无区别	无区别	不允许空盒		n-m个无区别物体允许为空的放入无区分m盒子
有区别	有区别	不允许空盒		映上函数的个数
有区别	无区别	允许空盒	(集合的划分)	4人分配完全相同的3间办公室
有区别	无区别	不允许空盒		Stirling数

Stirling数（斯特林数）

定义：Stirling数（斯特林数） n个有区别的球放到m个相同的盒子中,要求无空盒,其不同的分配方案数用S(n,m) 表示,称为第二类Stirling数（斯特林数）.

例如红R,黄Y,蓝B,白W四种颜色的球,放到两个无区别的盒子里,不允许有空盒,其方案有7种：

	1	2	3	4	5	6	7
第1盒子	r	y	b	w	ry	rb	rw
第2盒子	ybw	rbw	ryw	ryb	bw	yw	Yb

$\therefore$ S(4,2)=7

Stirling数（斯特林数）

定理1:第二类Stirling S(n,k)有下列性质:

(a) $S(n,0)=0$
(b) $S(n,1)=1$
(c) $S(n,n)=1$
(d) $S(n,2)=2^{n-1}-1$
(e) $S(n,n-1)=C(n,2)$

证明: (d)设有n个不相同的球b1,b2,...bn,从中取出一球b1,对其余的n-1个球,每个都有与b1同盒,或不与b1同盒两种选择,

n-1个球入盒方案是2^{n-1},

但其余的n-1个球全部与b1同盒不许出现(出现空盒)，所以$S(n,2)=2^{n-1}-1$

Stirling数（斯特林数）

定理1:第二类Stirling S(n,k)有下列性质:

(e) S(n,n-1)=C(n,2).

证明: (e) n个球放到**n-1**个盒子里**,**不允许有一空盒**,**
根据鸽巢原理，故必有一盒有两个球**,**

从**n**个有区别的球中取**2**个共有**C(n,2)**种组合方案。

Stirling数（斯特林数）

定理2:第二类Stirling数满足下面的递推关系，

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1),(n\ge 1,m\ge 1)$$

证明: 设有n个不相同的球b1,b2,...bn,从中取出一球b1,入盒方案分为两类， b1独占一个盒子，或者b1不独占一个盒子，

（1）b1独占一个盒子，入盒方案S(n-1,m-1)

（2）b1不独占一个盒子，m个盒子中任选一个放入b1，对其余的n-1个小球放入m个盒子中，方案数S(n-1,m)，所以该类总方案数：mS(n-1,m)

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$$

Stirling数（斯特林数）

递推关系 S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)

例如：S(1,1)=1， S(2,1)=1， S(3,2)=2S(2,2)+S(2,1)=2+1=3

例如：S(5,2)=
2S(4,2)+S(4,1)
=2×7+1=15

例如：S(5,4)=
4S(4,4)+S(4,3)
=4×1+6=10

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	05	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Stirling数（斯特林数）

映上函数的个数的另一种表示形式：$m!S(n,m)$, $m \geq n$

映上函数的个数:

映上函数：有区别的物体放入有区别的盒子中，且不允许空盒。

第一步：有区别的物体放入无区别的盒子中，且不允许空盒。

其计数方案是S(n,m)，

第二部：盒子有区别，对盒子进行全排列，m!

所以有, S(n,m) m!

Stirling数（斯特林数）

例：用斯特林数求解**5种不同的工作分配给4人去完成，每人至少有一种工作，问有多少种分配方案？**

方法1：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$
$$= 4^5 - C(4,1)(4-1)^5 + C(4,2)(4-2)^5 - C(4,4-1)1^5 = 240$$

方法2：**S(5,4) 4!=10*24=240**

小结

❖高级计数技术与模型

一般容斥原理求解计数问题。

1、属性$P_1,P_2,P_3…P_k$ 的任何属性都不满足的元素个数表示为$N(P'_1P'_2P'_3…P'_k)$，N表示全集中元素个数,则

$$N(P_1'P_2'\ldots P_k') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

2、定理：

设m和n是非负整数，且m ≥ n，则m个元素集合到n个元素集合的映上函数个数是：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$

3、Stirling数（斯特林数）