§4.4 同态与同构

4.4.1 基本概念

定义

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 是代数系统，$f:A\to B$，如果 f 保持运算，即对 $\forall x,y\in A$,有$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$。称 f 为代数系统 $<A,*>$ 到 $<B,\circ>$的同态映射，简称同态。也称之为两代数系统同态。

§4.4 同态与同构

4.4.1 基本概念

定义

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 是代数系统，f 是 A 到 B 的同态。如果 f 是单射的，称 f 为**单同态**；如果 f 是满射的，称 f 为**满同态**；如果 f 是双射的，称 f 为同构映射，简称为**同构**。

§4.4 同态与同构

4.4.1 基本概念

定义

设 $<A,*>$ 是代数系统，若存在函数$f:A\to A$，并且对 $\forall x,y\in A$,有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$。称 f 为 $<A,*>$ 的自同态；如果 f 是双射的，则称 f 为 $<A,*>$ 的自同构。

§4.4 同态与同构

例：验证下列两个代数系统是同构的。

<A,*> <B,° >

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

<A,*>

°	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	α	γ
γ	γ	δ	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

<B,° >

§ 4.4 同态与同构

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 是代数系统，

（1）$f:A\to B$, 如果 f 保持运算，即对 $\forall x,y\in A$,有

$f(x*y)=f(x)\circ f(y)$。

（**2**） **f**是双射函数（单射，满射）

(1)建立函数f，$f(a)=\alpha;f(b)=\beta;f(c)=\gamma;f(d)=\delta$

是否满足 $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$;

$f(a*b)=f(b)=f(a)\circ f(b)=\alpha\circ\beta=\beta$;

$f(a*c)=f(c)=f(a)\circ f(c)=\alpha\circ\gamma=\gamma$

$f(a*d)=f(d)=f(a)\circ f(d)=\alpha\circ\delta=\delta$ ....

(2) **f**是双射函数（单射，满射）

由函数的定义可知， **f**是双射函数。

§ 4.4 同态与同构

下列两个代数系统还同构吗？

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	d	d	c
d	d	b	c	d

∘	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	α	δ	γ
δ	δ	β	γ	δ

$f(b*c)=f(a)=\alpha$? $f(b)\circ f(c)=\beta\circ\gamma=\delta$

运算保持不满足

§ 4.4 同态与同构

例：验证下列两个代数系统是同态的。$<A,*>$ $<B,\circ>$; e是B的单位元。$f:a\to e$ ，$\forall a\in A$ 同构吗？

解：$f:a\to e$；该函数不是满射的，所以不是同构函数

又

$f(x*y)=f(z)=e$

$f(x)\circ f(y)=e\circ e=e$ 所以 $f(x*y)= f(x)\circ f(y)$

所以f是同态

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（1）如果两函数是同态、同构的，则复合函数也是同态、同构的。

定理

假设 f 是 $<A,*>$ 到 $<B,\bullet>$ 的同态，g是 $<B,\bullet>$ 到 $<C,\Delta>$ 的同态，则 $g\circ f$ 是 $<A,*>$ 到 $<C,\Delta>$ 的同态；如果 f 和 g 是单同态、满同态、同构时，则 $g\circ f$ 也是单同态、满同态和同构。

注：“o”是函数的复合运算

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（2）满同态保持结合律

定理

假设 f 是 $<A,*>$ 到 $<B,\circ>$ 的满同态。如果 $*$ 运算满足结合律，则 $\circ$ 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,∘>的满同态。如果 * 运算满足结合律，则 ∘ 运算也满足结合律，即满同态保持结合律。

证明：

*满足结合律 $\forall x,y,z \in A$;即有 $x*(y*z) = (x*y)*z$

∘也满足结合律， $\forall a,b,c \in B$; $\mathbf{a \circ (b \circ c)=(a \circ b) \circ c}$

$f(x*y)=f(x) \circ f(y)$

$a \circ (b \circ c)=f(x) \circ (f(y) \circ f(z))=$

$f(x) \circ f(y*z)=f(x*(y*z))=f((x*y)*z)$

$= (f(x) \circ f(y)) \circ f(z)= (a \circ b) \circ c$

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（3）满同态保持交换律

（4）满同态保持单位元

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,∘>的满同态。e 是<A,*> 的单位元，则 f(e) 是<B,∘>的单位元。

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（5）满同态保持逆元

定理

假设 f 是<A,*>到<B,∘>的满同态。e_A和 e_B分别是<A,*>和<B,∘>的单位元，如果 A 中元素 x 和 x′ 互逆，则 B 中元素 f(x) 和 f(x′)也互逆。

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（6）满同态保持零元

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,∘>的满同态。θ 是<A,*> 的零元，则 f(θ) 是<B,∘>的零元。

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（7）满同态保持幂等元

定理

假设 f 是<A,*>到<B,∘>的满同态。并且 $x \in A$是<A,*>的幂等元，则 $f(x) \in B$ 是<B,∘>的幂等元。

§4.4 同态与同构

4.4.2 同态、同构的性质

（8）同构映射运算性质双向保持

定理

假设 f 是<A,*> 到 <B,∘>的同构映射。

则 f^{-1}是<B,∘> 到 <A,*> 的同构映射。

§4.5 同余关系与商代数

4.5.1 同余关系

定义

假设 $<A,*>$ 是一个代数系统，E 是 A 上的等价关系。如果对 $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in A$，当 x_1Ex_2,y_1Ey_2 时，必有 $(x_1*y_1)E(x_2*y_2)$，则称 E 是 A 上的同余关系。

§4.6 直积

定义：

设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 为两个代数系统，$<A\times B,\Delta>$ 称为两代数系统的直积。其中 $A\times B$ 是 A 和 B 的笛卡尔乘积，Δ 定义如下：

对任意的$<x,y>,<u,v>\in A\times B$，

$$<x,y>\Delta<u,v>=<x*u,y\circ v>$$

§4.6 直积

定理：

假设 $<A,*>$ 和 $<B,\circ>$ 为两个代数系统，且分别有单位元 e_A,e_B，在两代数系统的直积 $<A\times B,\Delta>$中存在子代数系统 S,T，使得

$$<A,*> \cong <S,\Delta>，<B,\circ> \cong <T,\Delta>。$$

小结

1、同态和同构

2、满同态具有 “六保持”：结合律，交换律，单位元，零元，幂等元，逆元。

3、同余关系，直积