第四章　习题三　王宇涵　202200400053　A

2. 设 $f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

证 则对于 $\forall x, y \in Z$，$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

当 $x=0$ 或 $y=0$，$f(x \cdot y) = f(0) = 0$　$f(x)$ 或 $f(y) = 0$．成立

当 $x>0$，$y<0$ 时　$\underset{-1}{f(x \cdot y)} = \underset{1}{f(x)} \cdot \underset{-1}{f(y)}$

当 $x>0$　$y>0$ 时　成立　当 $x<0$　$y<0$ 时　成立

则 f 为 $Z \to \{-1, 0, 1\}$ 的同态．又由 f 为满射

则 $\langle Z, \cdot \rangle \sim \langle \{-1, 0, 1\}, \cdot \rangle$．

3. 证明：

设 $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$　则 $\forall x, y \in N$ 有 $f(x+y) = f(x) \vee f(y)$

当 $x=0$，$y=0$ 时　$f(0) = 0 = f(0) \vee f(0)$

当 $x>0$，$y=0$ 时　$f(x+y) = 1 = 0 \vee 1$　成立

则 f 为 $N \to \{0, 1\}$ 同态．又由 f 为满射

则 $\langle N, + \rangle \sim \langle \{0, 1\}, \vee \rangle$．

4. 对于 $\langle Z_3, +_3 \rangle$　$\forall (x, y) \in Z_3$ 有　$f(x +_3 y) = f(x) +_3 f(y)$

则对于任意一个双射，均有自同构

则共有　$3 \times 2 \times 1 = 6$ 种自同构，分别为

f_1：$[0] \to [0]$　$[1] \to [1]$　$[2] \to [2]$

f_2：$[0] \to [0]$　$[1] \to [2]$　$[2] \to [1]$

f_3：$[0] \to [1]$　$[1] \to [0]$　$[2] \to [2]$

f_4：$[0] \to [1]$　$[1] \to [2]$　$[2] \to [0]$

f_5：$[0] \to [2]$　$[1] \to [1]$　$[2] \to [0]$

f_6：$[0] \to [2]$　$[1] \to [0]$　$[2] \to [1]$

5 证明：设 $f: R\to Z$

若元论构建总择射f，由于 R 上：$f(x\cdot y)$ 是连续的

Z上 $f(x)\cdot f(y)$ 是离散的，则无法保持运算性质不变，因此

无法构建同构

T6 见第二张纸。

第五章　习题一

1、S^S：$f_1: a\to a\ \ b\to b$　$f_2: a\to a\ \ b\to a$　$f_3: a\to b\ \ b\to b$

$f_4: a\to b\ \ b\to a$　则对于 $f_2\in S^S$，$f_3\in S^S$ 则

$f_2\circ f_3 = f_3$　$f_3\circ f_2 = f_2$　不同　则 $\langle S^S,\circ\rangle$ 不是可交换半群

2. 证明：

$\langle M,\circ\rangle$ 有单位元 恒等函数 I_A 使得 $\forall f\in M$ 有 $f\circ I_A = I_A\circ f = f$

下证 $\langle M,\circ\rangle$ 满足结合律

即对 $\forall x,y,z\in M$，有 $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$

由 x,y,z 均为 $\langle A,\circ\rangle$ 的自同态，则有 $x\circ y: A\to A$　$(x\circ y)\circ z: A\to A$

$x\circ(y\circ z): A\to A$　由复合函数结合律得 $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$

3、证明：

充分性：若 $\forall a,b\in S$　$(ab)^2 = a^2b^2$

则 $abab = aabb$　由消去律得 $ba = ab$　则满足交换律

必要性：若 S 为可交换半群　则 $\forall a,b\in S$　有 $ab = ba$

则 $abab = aabb = a^2b^2$　即 $(ab)^2 = a^2b^2$

习题二

1. 证明：对于 $\langle\{0\},\cdot\rangle$　$\langle\{1\},\cdot\rangle$ 和 $\langle\{1,-1\},\cdot\rangle$，$\forall a,b\in A$

都有 $a * b\in A$，满足封闭性，且均有 $a\cdot a^{-1} = e = 1$ 且

$a^{-1}\in A$。若还有存在一个有限实数乘法群，则由 $a\cdot a^{-1} = 1$ 得

若 $\forall b\in A$，则 $\frac{1}{b}\in A$，由封闭性得 $b^2\in A$，$b^4\in A\cdots$
则该群为无限群，与有限群定义矛盾.

2. 证明：
有单位元：设 $e^{-1}\in S$，$e\in S$（S单位元） 则 $e\in S$,
$\forall a\in S$，则有 $a\in S$ $a^{-1}\in S$ 成立
与 $a^{-1}\in S$ $(a^{-1})^{-1}=a\in S$ 成立 则 $a^{-1}\in S$
封闭性 $\forall a,b\in S$，有 $a\in S$ $a^{-1}\in S$ $b\in S$. $b^{-1}\in S$
则 $(ab)^{-1}\in S$. $(ab)\in S$ 则 $ab\in S$,
则 $<S,*>$ 为群.（结合律自然满足）

5. $\forall a,b\in G$ 有 $a^{-1}=a$ $b^{-1}=b$.
则 $a*b=a^{-1}*b^{-1}=(b*a)^{-1}=b*a$.
则满足交换律，$<G,*>$ 为 Abel 群

6. 证明：
同态：$\forall (x,y)\in G$ 有 $f(x*y)=a\,x*y\,a^{-1}$
$f(x)*f(y)=axa^{-1}*aya^{-1}$ 由 G 为群，则存在 e 使 $a^{-1}*a=e$
则 $f(x)*f(y)=ax*y\,a^{-1}=f(x*y)$,
双射：
1° 单射 $\forall x,y\in G$ 且 $x\neq y$ 若 $f(x)=f(y)$，即 $axa^{-1}=aya^{-1}$
由消去律得 $x=y$ 矛盾，则 $f(x)\neq f(y)$ 单射

2° 满射 $\forall y\in G$ 有设 $f(x)=y$ 则 $axa^{-1}=y$ 即 $x=a^{-1}ya$
唯一解，则满射
由1°2°得 f 双射
则 f 为 G 的自同构.

习题三

6. 证明：设 $\langle R, \cdot \rangle \cong \langle R, + \rangle$

则有 f 使 $\forall x, y \in R$ 有 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

令 $x=0$ $y=0$ 则 $f(0)=0$

令 $x=0$ $y=1$ 则 $f(0) = f(0) + f(1)$ 则 $f(1) = 0 = f(0)$

则不满足双射，与同构满足矛盾.

则 $\langle R, + \rangle$ 与 $\langle R, \cdot \rangle$ 不同构