无 限 集

- 集合的势
- 可数集
- 连续势集
- 关于集合论的讨论

可数集

❖定义1　与自然数集N等势的（或说势为$\aleph_0$的）集合称为**可数集(可列集)**.

❖一个集合A，如果是可数集，也说A具有可数(可列)个元素.

可数集

❖引理1 对任意集合A，A是可数集 **当且仅当**A的元素可不重复的排成如下一个无穷序列。

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, a_n, \ \ldots$$

❖引理2　可数集的无穷子集必是可数集.

证明　设A是一可数集，则A的元素可排成

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$$

设B是A的任一无穷子集，则B的元素构成上述序列的一个子列，从而按其在上面序列中的顺序排成

$$a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots$$

故B为可数集.

可数集

❖**定理1　任何无限集必有可数子集。**

证明　设A是无限集，可从A中取出一列彼此相异的元素

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

这些元素构成A的一个可数子集。

整数集Z，　R={(a,b)|(a-b)/3∈Z 整数}，Z_1, Z_2, Z_3可数子集

$$Z_1=[0]_3 = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

$$Z_2=[1]_3 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$Z_3=[2]_3 = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

可数集

❖定理2　在可数集中加入(或删除)有限个元素，仍为可数集.

❖定理3　设A_1，A_2为可数集，则$A_1 \cup A_2$是可数集.

证明　(I) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

(II) $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

令$A_2' = A_2 - A_1$，则$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2'$, 且

$A_1 \cap A_2' = \varnothing$. 由于$A_2$是可数集，$A_2'$必为可数集或有限集　,…

可数集

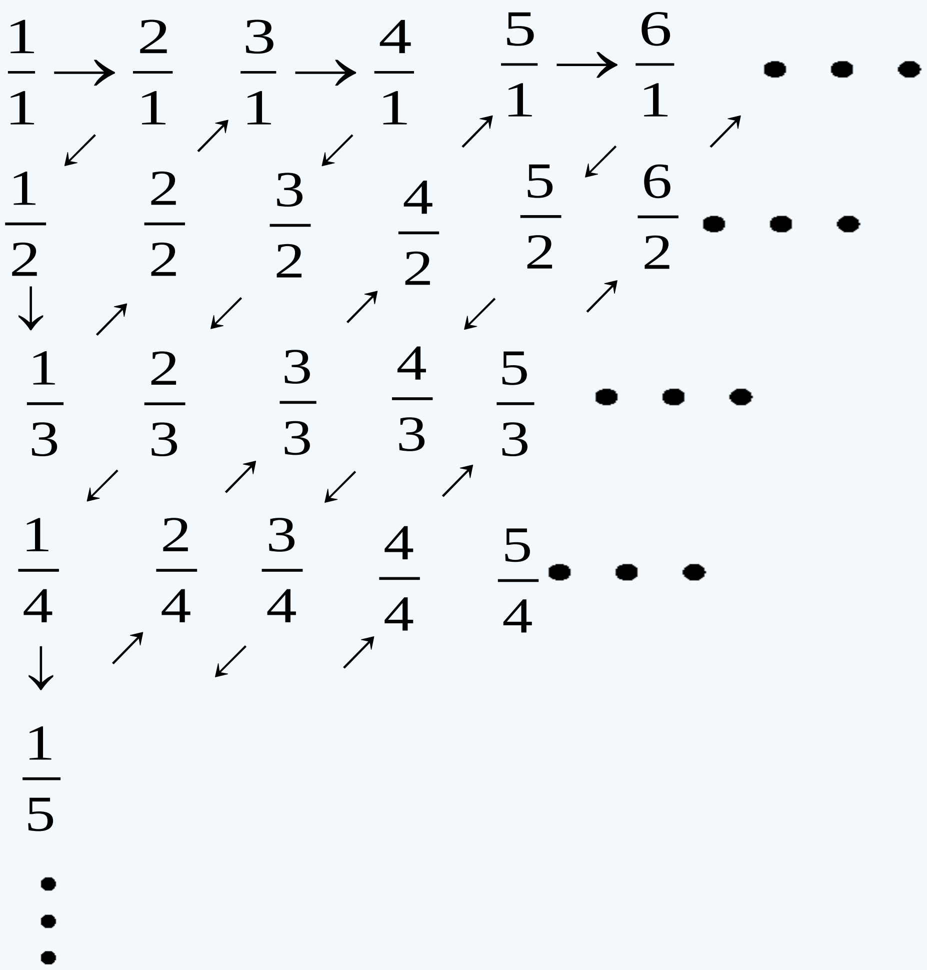
❖推论　设A_1，A_2，…，A_n为n个可数集，则$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$必为可数集.

❖定理4　设A_1，A_2，…，A_n，…为一列可数集，

则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集.

可数集

例，利用定理4可以证明有理数集Q是可数集。



每个正整数都出现在阵列中，按照箭头方向依次重新排序，略去已经出现过的数就得到全体正有理数的一个无穷序列

$\{ r_1, r_2, r_3, \ldots \}$

$Q=\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, \ldots\}$

所以 有理数集Q可数.

Cantor悖论

设C为所有集合构成的集合，则由Cantor定理知 $|C| < |2^C|$.

由于C是所有集合构成的集合，故必有
$2^C \subseteq C$,
因此，$|2^C| \le |C|$.

所以，$|C|=|2^C|$，任意集合与其幂集的元素一样多（显然是不成立的）。

罗素（Russell）悖论

设A是一个集合，由集合的概念知$A \in A$与$A \notin A$中恰有一个成立，

将集合分成两类：满足$A \in A$的集合A归于第一类，

满足$A \notin A$的集合A归于第二类，

令S是第二类：$S = \{A \mid A \notin A\}$

S应属于哪一类？

若$S \in S$，则由S的定义知$S \notin S$ …….

无限集小结

1、可数集：与自然数集N等势的（或者说势为$\aleph_0$的）集合称为**可数集(可列集)**.

2、任何无限集必有可数子集。

3、关于集合论的讨论：Cantor悖论；Russell悖论