回 顾

- 命题演算 Propositional Calculus;

1、命题 (T/F) , p,q,r。

2、联结词, ¬, ∧,∨,→, ↔ , ⊕ 。

3、命题公式的等价与蕴涵。 ⇔ ⇒

4、命题公式的范式

不为矛盾式(非空集合)的命题公式的主析取范式存在。

不为重言式的命题公式的主合取范式存在。

5、命题演算的推理理论

谓词演算（predicate Calculus）

- 在命题演算中，把简单命题作为基本研究单位，对它不再进行分解，这使得命题逻辑有很大的局限性。有些很简单的推理形式，如典型的逻辑三段论，用命题演算的推理理论无法论证

例　　所有的人总是要死的。p

　　苏格拉底（Socrates）是人。q

　　所以苏格拉底是要死的。　r

- 从直观上看，第三个命题是前两个命题的结论。
- 但是，它的前提和结论里都没有联结词，它们都是简单命题，用命题逻辑来表示，
- 它的形式是$P \wedge Q \rightarrow R$。显然，这不是命题逻辑里的重言式。

谓词演算（predicate Calculus）

例　熊猫是动物。　P
　　长颈鹿是动物。Q
　　大象是动物。R

•它们是三个简单命题，只能用两个不同的符号来表示，但这样的符号不能揭示命题的共性，因此，将命题演算扩展成谓词演算，对简单命题的成分、结构和简单命题间的共同特性等作进一步的分析，这正是一阶谓词逻辑所要研究的问题。

一个简单命题是一个能判定真假的陈述句，在谓词演算中，进一步将简单命题分解为个体词（主语)与谓词(谓语)两部分。

一. 个体词、个体域和谓词

定义1 可以独立存在的事物称为**个体**(individual)。

表示具体的、特指的个体词，称为**个体常元**，常用小写字母a，b，c…来表示。

表示抽象的、泛指的、或在一定范围内变化的个体词，称为**个体变元**，常用小写字母x，y，z…来表示。

个体变元的取值范围称为个体域(domain)，常用D表示。

个体域可以是有限的或无限的。最大的个体域是包含宇宙全体事物的个体域，称为**全总个体域D**。若无特别声明，个体域均指全总个体域。

例1 个体可以是计算机、熊猫、围棋、集合、图、自然数、定理、爱国主义等都是个体。

定义2 用来刻划个体性质或多个个体之间关系的词称为**谓词**(predicate)。谓词中包含个体的数目称为谓词的元数。谓词常用大写字母P，Q，R…来表示。如P(x),一元谓词；Q(x,y)，二元谓词。

表示有具体确定意义的性质或关系的谓词，称为**谓词常元**，否则称为**谓词变元**。

一元谓词表达了个体的“性质”，而多元谓词表达了个体之间的“关系”。

例2 将下列命题符号化：
(1) 大象是动物。
(2) 济南位于北京与南京之间。
(3) 2是偶数且是素数。

解：(1)A(x):x是动物，这里x是个体变元，它可在动物范围内任意取值。b:大象，b是个体常元，则命题可符号化为A(b)或A(大象)。

对于谓词A,A(x)实际上是个体变元x的函数。如A(大象)是真命题，而A(苹果)是假命题
从数学角度看,谓词是一个以D为定义域,以{1,0}为值域的函数。f:D→{1,0}

(2)B(x,y,z): x位于y与z之间。a:济南，b:北京，c:南京，则命题可符号化为B(a, b, c)或符号化为B(济南,北京,南京)。

(3)E(x):x是偶数，P(x):x是素数，a:2，则命题可符号化为$E(a)\wedge P(a)$ 或 $E(2)\wedge P(2)$。

• 一般地，一个由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，其中P表示n元谓词，a_1，$a_2, \ldots,$ a_n 分别表示n个个体。

• a_1，$a_2, \ldots, a_n$ 的排列次序通常是重要的。

例3 B(a, b, c)不同于B(b, a, c)。而B(北京,济南,南京)为假命题，变元的次序有关。

定义3 由一个谓词和若干个体变元组成的表达式称为**简单命题函数**。

例由n元谓词和n个个体变元x_1，$x_2,\ldots x_n$ 组成的命题函数，表示为$P(x_1,x_2,\ldots x_n)$。

由有限个简单命题函数以及逻辑联结词组成的命题函数称为**复合命题函数**。

简单命题函数和复合命题函数统称为**命题函数**。 $f:D\to\{1,0\}$

例4 $P(x) \to Q(x,y)$ ，$(P(x)\vee Q(y,z)) \leftrightarrow R(x,z)$都是命题函数。

命题逻辑中的简单命题都可以用**0元谓词**表示，即可把命题看作是谓词的特殊情况。

二、量词

•在引出个体词和谓词后，仍不足以表达逻辑三段论和日常生活中的各种问题，问题在于“**所有的**”和“**有某个（些）**”这种全称量词和特称量词还没有分析出来，因此必须引入量词。

定义4 （1）称表示数量的词为**量词**(quantifier)。

（2）表示“所有”、“任意”、“一切”的词称为**全称**(universal)量词，记为“$\forall$”。$\forall x$表示对个体域中的所有个体，

$\forall xA(x)$表示个体域中的所有个体都有性质A。

例 个体域D是有限的，$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

(3) 表示“存在着”、“有某些”、“至少存在一个”的词称为存在(existence)量词，记为“∃”表示。

$\exists x$表示存在个体域中的个体，

$\exists x A(x)$表示存在着个体域中的个体具有性质A。

例 个体域D是有限的，$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，

$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

量词也可看作是对个体词所附加约束的词。

例5 设$F(x)$：x会飞，D为鸟集合。

$\forall x F(x)$表示所有的鸟都会飞， $\exists x F(x)$表示存在某些鸟会飞。

例6 设$Y(x)$：x是粉红的，D为菊花集合。

$\exists x Y(x)$表示有些菊花是粉红的， $\forall x F(x)$表示所有菊花都是粉红的

包含有量词的表达式的真值与个体域的指定有关。

例7　我为人人，人人为我。

解　设 S(x, y): x为y服务，用i表示我。命题表示为:

$\forall xS(i,x)\wedge\forall xS(x,i)$或$\forall x(S(i,x)\wedge S(x,i))$

例8 勇敢者未必都是成功者。

解 设 B(x): x勇敢，S(x): x是成功者。命题表示为:

$\neg\forall x(B(x)\rightarrow S(x))$　并非所有勇敢者都是成功者

或 $\exists x(B(x)\wedge\neg S(x))$ 有些人是勇敢者且是非成功的

例9 并非一切劳动都能用机器代替。

解 设L(x):x是一种劳动，M(x):x是一种机器，

R(x,y):x被y代替。命题表示为:

$\neg\forall x(L(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge R(x,y)))$

例10　数学分析中函数f(x)在点a连续的定义为：
对任意的ε>0，存在一个δ>0，使得对所有x，
若|x - a|<δ，则 |f(x) - f(a)|<ε，符号化此定义。

解 令R(x)：x是实数，G(x, y)：x大于y。

$$\forall\varepsilon\,((R(\varepsilon)\wedge G(\varepsilon, 0))\rightarrow$$

$$\exists\delta\,(R(\delta)\wedge G(\delta, 0)\wedge\forall x\,((R(x)\wedge G(\delta, |x-a|))$$

$$\rightarrow G(\varepsilon, |f(x)-f(a)|)))) 。$$

小结 谓词和量词

1 谓词与个体,P,Q,R

2 命题函数 $(P(x) \vee Q(y,z)) \leftrightarrow R(x,z)$

3 量词 “$\forall$”, “$\exists$”; $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$

4 自然语言到公式的翻译

•由n元谓词P和n个个体变元x_1，x_2，…，x_n 构成的命题函数$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$称为**原子谓词公式**。

•一个命题或一个命题变元也称为原子谓词公式，即原子谓词公式是不含联结词和量词的命题函数。n=0时，$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$为简单命题P。

定义1 谓词公式(合式WFF)的递归定义

（1）任意原子谓词公式都是谓词公式。

（2）若A，B是谓词公式，则$\neg A$、$(A \vee B)$、$(A \wedge B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$、$(A \oplus B)$也是谓词公式。

（3）若A是谓词公式，x是A中的个体变元，
则$\forall$xA和$\exists$xA也是谓词公式。

（4）当且仅当有限次地使用规则1，2，3得到的公式才是谓词公式。

谓词公式是由原子谓词公式、命题联接词、量词以及圆括号按照上述规则组成的一个符号串。

本章讨论的是一阶谓词逻辑，限定量词仅作用于个体变元，不允许量词作用于命题变元、谓词变元。
个体变元有自由free变元和约束bound变元之分。

定义2 量词的**辖域**(scope) 在谓词公式中，形如∀xA(x)或∃xA(x)的那一部分称为公式的x约束(bound)部分。而A(x)称为是量词∀x或∃x的**辖域**(scope)。

x在公式的x约束部分的任一出现都称为x的约束出现。

当x的出现不是约束出现时，称x的出现是自由(free)出现。因此，公式中约束出现的变元是约束变元，自由出现的变元是自由变元。

例2 $\forall y$(如果y是辣椒，则y是红的)。

个体变元y是约束变元。

这不是一个命题函数,而是一个命题。

•对于其中的个体变元不需要再作代入，它的含义是确定的，它断定“一切辣椒都是红的”，这当然是一个假命题。

例3 (1) $\forall xP(x)\wedge Q(y)$，公式中的个体变元x是约束变元，y是自由变元 ,量词$\forall x$的辖域是P(x)。

(2) $\forall x(A(x)\vee\exists y\ B(x, y))$,

$\forall x(A(x)\vee\exists yB(x,y))$是x的约束部分,

$\exists yB(x, y)$是y的约束部分。

- 量词$\forall x$的辖域是$A(x) \vee \exists y B(x,y)$，
- $\exists y$的辖域是$B(x,y)$；
- x和y两者的所有出现都是约束出现。

(3)$\exists x(A(x) \to B(x))$，$\exists x$的辖域是$A(x) \to B(x)$，

　　x的所有出现都是约束出现。

(4)$\exists x A(x) \to B(x)$，$\exists x$的辖域是$A(x)$，

　　x在$B(x)$中是自由出现。

如果一个变元有两种情况出现，一般表示为 $\exists x A(x) \to B(y)$ 变元的换名

有了谓词合式公式的定义，下一步就要讨论公式之间的关系。

命题函数不是命题，只有当把其中的谓词P赋予确定的含义，所有的个体变元都分别代之以确定的个体后，该谓词公式才能成为命题，有了确定的真值。

一、公式指派assignment

定义1 谓词公式A的每一个指派由如下四部分组成：
（1）非空的个体域D;
（2）自由个体变元用D中确定的个体代入;
（3）对每个谓词变元，分别指定为D上的一个确定的命题函数;

（4）对每个命题函数，分别指定为D上的一个确定的函数。

•由定义可知，只有不包含自由变元的公式才可能求出其真值，此时的谓词公式就称为一个有确切意思的命题。

定义2　如果对于公式A的任一组指派，公式A的值总是为真，则称A为永真公式。

如果对于公式A的任一组指派，公式A的值总是为假，则称A为永假(或不可满足的)公式。

如果至少存在着一组指派，使公式A的值为真，则称A是可满足的公式。

例1　G(x，y)是二元谓词，如指定D为**实数域**，G(x，y)表示“x大于y”，则G有了确定的含义，但还不是命题。

如再指定a为3.14，b为2.72，则G(a，b)就是命题“3.14大于2.72”，其真值为1。

例2 若个体域是{a，b，c}，消去$\forall x\neg P(x)\vee\exists yP(y)$中的量词。

解 $\forall x\neg P(x)\vee\exists yP(y)$

$$\Leftrightarrow (\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(a)\vee P(b)\vee P(c))$$

而命题的真假值还取决与P与a，b，c的实际意义

例3 设个体域为{0, 1}，将$\exists x(\forall yF(x,y)\vee G(x))$转换成不含量词的形式：

解 $\exists x(\forall yF(x,y)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x((F(x,0)\wedge F(x,1))\vee G(x))$

$\Leftrightarrow ((F(0,0)\wedge F(0,1))\vee G(0))\vee((F(1,0)\wedge F(1,1))\vee G(1))$

另 $\exists x(\forall yF(x,y)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow (\forall yF(0,y)\vee G(0))\vee(\forall yF(1,y)\vee G(1))$

$\Leftrightarrow ((F(0,0)\wedge F(0,1))\vee G(0))\vee((F(1,0)\wedge F(1,1))\vee G(1))$

例4 设论域D={1,2,3}，请确定下列公式的真值 $\exists x((P\wedge Q(x))\rightarrow R(c))$. 其中命题、谓词、常量分别如下：

$P:6>1;\quad Q(x):x\le 2;\quad R(x):x>5;\quad c=5$

解 公式$\Leftrightarrow((P\wedge Q(1))\rightarrow R(5))\vee((P\wedge Q(2))\rightarrow R(5))\vee((P\wedge Q(3))\rightarrow R(5))$

$\Leftrightarrow(T\wedge T\rightarrow F)\vee(T\wedge T\rightarrow F)\vee(T\wedge F\rightarrow F)$

$\Leftrightarrow(T\rightarrow F)\vee(T\rightarrow F)\vee(F\rightarrow F)$

$\Leftrightarrow F\vee F\vee T$

$\Leftrightarrow T$

二、谓词等价公式和蕴涵公式

定义3 设A，B是个体域D上的两个公式，若对于A和B的任意一组指派，两公式都具有相同的真值（即$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow 1$），则称公式A和B在D上等值(等价)，记作$A \Leftrightarrow B$。

定义4 对于公式A和B，若$A \rightarrow B \Leftrightarrow 1$，则称公式A蕴含公式B，记作$A \Rightarrow B$。

•当个体域是有限集合的时候，原则上来说，可以用真值表的方法来验证一个公式是否为永真公式，或者验证两个公式是否等值(等价)。

• 因此对命题演算中的所有重言式，若将其中每一个命题变元分别用这些公式去作代入，便可得到谓词演算中的永真公式。

例5 在$P\vee\neg P$和$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$中，若用$\forall xP(x)$代替P，用$\exists xQ(x)$代替Q，得到永真公式：

$$\forall xP(x)\vee\neg\forall xP(x),$$

$$(\forall xP(x)\to\exists xQ(x))\leftrightarrow(\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))。$$

- 量词转换律：反映量词的特性以及量词与¬联结词之间的关系。
- 例6 个体域D：全班同学，A（x），今天早上来上课了。

（1）$\forall xA(x)$：全班同学今天早上来上课了。

（2）$\exists xA(x)$：有些同学今天早上来上课了。

（3）$\neg\forall xA(x)$：并非全班同学今天早上来上课了。

（4）$\exists x\neg A(x)$：有些同学今天早上没来上课。

（5）$\neg\exists xA(x)$：并非有些同学今天早上来上课了。

（6）$\forall x\neg A(x)$：全班同学今天早上没来上课。

（3）与（4），　（5）与（6）是等价的

• 量词转换律：反映量词的特性以及量词与联结词之间的关系。

$\neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$

$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$

当个体域为有限集D={a_1，a_2，…，a_n }，证明如下：

$\neg(\forall x A(x))$

$\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1)) \vee (\neg A(a_2)) \vee \ldots \vee (\neg A(a_n)))$ 否定连接词深入，摩根定理

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$ 存在量词的意义

$\neg(\exists x A(x))$

$\Leftrightarrow \neg(A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n))$

$\Leftrightarrow (\neg A(a_1))\wedge(\neg A(a_2))\wedge\ldots\wedge(\neg A(a_n)))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$

对于无穷个体域，可作语义解释如下：

如果$\forall xA(x)$为真，则可以把$\neg(\forall xA(x))$理解成“并非命题$\forall xA(x)$是真的”即“命题$\forall xA(x)$是假的”，而它与“存在某些x，A(x)不是真的”意思等价。

即 $\neg(\forall xA(x))\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x))$

- 类似地，如果$\exists x A(x)$为真，则$\neg(\exists x A(x))$表示

  “至少存在某些x，能使A(x)为真”这个命题为假。

  它等价于“不存在任何一个x能使A(x)为真”，

  或者“对于所有的x，A(x)是假的”。

即

$$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$$

表16.3.1

量词转换律

E_{13} $\neg(\forall xA(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$

E_{14} $\neg(\exists xA(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$

量词辖域的扩张与收缩律

E_{15} $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$

E_{16} $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$

E_{17} $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$

E_{18} $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$

量词分配律

E_{19} $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ 全称量词对合取

E_{20} $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$ 存在量词对析取

量词分配蕴涵律

I_{16} $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

I_{17} $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x((A(x)\vee B(x))$

注意： $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

$\forall x(A(x)\vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

$\forall x$不能对$\vee$分配，$\exists x$不能对$\wedge$分配。全称量词对析取，存在量词对合取不满足分配律

看例子。

例7 设个体域为整数集合，O(x)表示“x是奇数”，E(x)表示 “x是偶数”。

(1) $\forall x(O(x)\lor E(x))$：“对于任意的整数x，x或者是奇数或者是偶数”，是真命题。
(2) $\forall xO(x)\lor\forall xE(x)$：“所有的整数都是奇数,或者所有的整数都是偶数”，是假命题。
(1)和(2)两者没有等值关系。

(3) $\exists xO(x)\land\exists xE(x)$：“存在奇整数，也存在偶整数”，是真命题。
(4) $\exists x(O(x)\land E(x))$：“要求存在一个整数，它既是奇数，同时又是偶数”，是假命题。
(3)和(4)两者没有等值关系。

例8 证明 $\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

证明 $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x))\vee\exists xB(x)$ $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$ 量词转换

$\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$ $P\rightarrow Q\Leftrightarrow \neg P\vee Q$

若A不含有个体变元，则

$\forall xA\Leftrightarrow A$； $\exists xA\Leftrightarrow A$。

下表16.3.2 列出了包含联结词“→”和“↔”的一些基本的等值关系式和蕴涵关系式。

表16.3.2辖域的扩张与收缩律

等价关系

E_{21} $\exists x\ (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\ A(x) \rightarrow B$

E_{22} $\forall x\ (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\ A(x) \rightarrow B$

E_{23} $\exists x\ (A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x\ B(x)$

E_{24} $\forall x\ (A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x\ B(x)$

E_{25} $\exists x\ (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\ A(x) \rightarrow \exists x\ B(x)$ （例8）

蕴含关系

I_{18} $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\ A(x) \rightarrow \forall x\ B(x)$

I_{19} $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\ A(x) \rightarrow \exists x\ B(x)$

I_{20} $\exists x\ A(x) \rightarrow \forall x\ B(x) \Rightarrow \forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$

I_{21} $\forall x\ (A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\ A(x) \leftrightarrow \forall x\ B(x)$

- 在谓词公式中，若有多个量词，那么量词的次序直接关系到命题的意义。
- 但有两个例外，即

  相同量词间的次序是可以任意交换的：

  E_{26} $\forall x \forall y\ A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\ A(x,y)$

  E_{27} $\exists x \exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\ A(x,y)$

- “对于所有的x和所有的y，A(x, y)均成立”与

  “对于所有的y和所有的x，A(x, y)均成立”

  其含义是完全相同的，故E26正确。

  类似地，E27正确。

小结 谓词演算等价

- 谓词演算等价公式 E_{13}-E_{26} 新增14组
- 谓词演算蕴涵公式 I_{16}-I_{21} 新增5组

一.前束范式

定义1 一个谓词公式，如果它的所有量词均非否定地出现在公式的最前面，且它们的辖域一直延伸到公式的末尾，则称这种形式的公式为前束范式(prenex form)。记作下述形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$

其中，每个Q_i(1≤i≤k)为量词∀或∃，B为不含量词的谓词公式。

例1 (1) $\forall x\exists y\forall z\ (P(x) \rightarrow Q(y)\wedge R(x,\ z))$

(2) $\exists x\forall y\forall z\ ((P(x,y)\wedge(\neg Q(x))) \rightarrow (R(y,z)\vee(\neg Q(x)))$

都是前束范式。

定理1 任一谓词公式都可以化成为与之等值的前束范式。

证明 构造性算法步骤如下：

1．消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$， $\oplus$ 。

2．将联结词$\neg$向内深入，使之只作用于原子公式。

3．利用换名或代入规则使所有约束变元的符号均不同，并且自由变元与约束变元的符号也不同。

4．利用量词辖域的扩张和收缩律，将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面，扩大量词的辖域至整个公式。

例2 求公式A: $(\forall x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y)) \rightarrow \forall x\ R(x)$的前束范式。

解 $A \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \vee \forall x R(x)$ 消去联结词→

$\Leftrightarrow (\neg\forall x P(x) \wedge \neg\exists y Q(y)) \vee \forall x R(x)$ 德.摩根律

$\Leftrightarrow (\exists x \neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)) \vee \forall z R(z)$ 量词转换

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z((\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee R(z))$ 量词辖域扩张

定义2 设谓词公式A是一前束范式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$ ，

若A的尾部B具有形式：

$$(A_{11}\vee A_{12}\vee\ldots\vee A_{1n_1})\wedge...\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\ldots\vee A_{mn_m}) \qquad (*)$$

其中A_{ij}是原子谓词公式或其否定，则称A是前束合取范式；

若A的尾部B具有形式：

$$(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\ldots\wedge A_{1n_1})\vee...\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\ldots\wedge A_{mn_m}) \qquad (**)$$

则称A是前束析取范式。

例4

$\forall x\exists y\forall z((P(x, y)\vee\neg R(x, z))\wedge(\neg Q(y, z)\vee\neg P(x, y)))$是前束合取范式；

$\exists x\forall z\ \forall y\ (S(x, z)\vee(\neg P(x, y)\wedge Q(y, z)))$是前束析取范式。

定理2 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的前束合取范式和前束析取范式。

证明 将一个公式化为前束合取范式或前束析取范式时，只需在前面求前束范式的(1)~(4)三个步骤基础上再增加下面步骤：

(5) 利用分配律将公式化为前束合取范式或前束析取范式。

例5 将A: $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x,y)) \rightarrow (\neg\exists xR(x)\wedge\exists zS(z))$化为前束合取范式和前束析取范式。

解 (1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$:

$A \Leftrightarrow \forall x((P(x)\rightarrow Q(x,y))\wedge(Q(x,y)\rightarrow P(x)))$

$\rightarrow (\neg\exists xR(x)\wedge\exists zS(z))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge(\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\vee(\neg\exists xR(x)\wedge\exists zS(z))$

$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

(2) 将联结词$\neg$深入至原子谓词公式:

$A \Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg P(x)\vee Q(x,y))\vee\neg(\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\vee(\forall x\neg R(x)\wedge\exists zS(z))$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(Q(x,y)\wedge\neg P(x)))$

$\vee(\forall x\neg R(x)\wedge\exists zS(z))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (Q(x,y) \wedge \neg P(x))) \vee (\forall x \neg R(x) \wedge \exists z S(z))$

(3) 换名:

$A \Leftrightarrow \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee (Q(x,y) \wedge \neg P(x)))$

$\vee (\forall t \neg R(t) \wedge \exists z S(z))$

(4) 将量词提到公式前:

$A \Leftrightarrow \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee$

$(Q(x,y) \wedge \neg P(x))) \vee \forall t \exists z((\neg R(t)) \wedge S(z))$

$\Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,y)) \vee$

$(Q(x,y) \wedge \neg P(x)) \vee (\neg R(t)) \wedge S(z)))$

至此，已得A的前束析取范式(三个基本合取项的析取式)。

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(Q(x,y)\wedge\neg P(x))\vee(\neg R(t))\wedge S(z)))$

(5) 利用分配律化其为前束合取范式:

$A\Leftrightarrow$

$\exists x\forall t\exists z((P(x)\vee Q(x,y))\wedge(P(x)\vee\neg P(x))\wedge(\neg Q(x,y)\vee Q(x,y))\vee(\neg Q(x,y)\vee\neg P(x)))$

$\vee(\neg R(t))\wedge S(z)))$ (E_5) 互补律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow 1$ (E_4) 同一律 $P\wedge 1\Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow\exists x\forall t\exists z(((P(x)\vee Q(x,y))\wedge(\neg Q(x,y)\vee\neg P(x))\vee(\neg R(t))\wedge S(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z(((P(x)\vee(Q(x,y)\vee\neg R(t))\wedge(\neg Q(x,y)\vee\neg P(x))\vee\neg R(t))$

$\wedge(\neg Q(x,y)\vee\neg P(x)\vee S(z))\wedge(\neg Q(x,y)\vee\neg P(x))\vee S(z)))$

前束合取范式(四个基本析取项的合取式)。

例6 求等价于$\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(\forall zQ(x,y)\rightarrow\neg\forall zR(y,x)))$的前束(主)合取范式和前束(主)析取范式.

解 $\forall x\ (P(x)\rightarrow\forall y\ (\forall z\ Q(x,y)\ \rightarrow\ \neg\forall z\ R(y,x))$

$\Leftrightarrow\ \forall x\ (\neg P(x)\vee\forall y\ (Q(x,y)\ \rightarrow\ \neg R(y,x))$

$\Leftrightarrow\ \forall x\forall y\ (\neg P(x)\vee\neg Q(x,y)\vee\neg R(y,x))\qquad(M_{111})$

至此，已得前束(主)合取范式，

由主范式性质可得前束(主)析取范式 $\Leftrightarrow$

$\forall x\forall y\ (m_{000}\vee m_{110}\vee m_{101}\vee m_{100}\vee m_{011}\vee m_{010}\vee m_{001})\ \Leftrightarrow$

$\forall x\forall y\ ((\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))\vee(P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x))\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge R(y,x))\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x)))$

二. 斯柯林范式-一类特出的前束范式

•前束合(析)取范式的优点在于它的量词全部集中在公式的首部，公式的其余部分实际上是一个命题演算公式，这就为谓词公式提供了一种规范的形式，从而将公式形式的范围缩小，给研究工作提供了一定的方便。

•但前束范式的不足之处是首标中比较杂乱无章，全称量词与存在量词无一定的排列规则。

•下面我们再引入前束词都是某种特定类型量词的斯柯林(Skolem)范式。

定义3 首标中不含存在量词的前束合取范式称为斯柯林范式。

定理3 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的斯柯林范式。

证明 由定理1知，任一谓词公式A均可以变换为与它等值的前束范式，因此可假定公式A已是前束范式：$A \Leftrightarrow Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_nG(x_1, x_2, \ldots x_n)$

其中首标Q_ix_i为$\forall x_i$或$\exists x_i$ $(1 \le i \le n)$，公式G中不含量词。

可进行如下的斯柯林变换消去首标中的存在量词：

1．若$\exists x_k$ $(1 \le k \le n)$左边没有全称量词，则取不在G中出现过的个体常元c替换G中所有的x_k，并删除首标中的$\exists x_k$。

2. 若$\exists x_k(1 \le k \le n)$左边有全称量词

$\forall x_{s1}, \forall x_{s2}, \ldots, \forall x_{sr}\ (1 \le r,\ 1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_r < k)$,

则取不在G中出现过的r元函数$f_r(x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr})$

替换G中所有的x_k，并删除首标中的$\exists x_k$。

反复执行1.和2.的变换，直至删除首标中的所有存在量词，即得到不含存在量词的斯柯林范式。

其中用来替换x_k的个体常元和函数符号称为关于公式A的斯柯林函数。

例7 :将下式化为Skolem标准形:

$$\neg\forall x\exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists x(\neg\forall y Q(y,b)\rightarrow R(x))$$

解:第一步,消去 → 号,得:

$$\neg\neg\forall x\exists y P(a,x,y)) \vee \exists x(\neg\neg\forall y Q(y,b)\vee R(x))$$

第二步, ¬ 深入到量词内部,得:

$$\forall x\exists y P(a,x,y)\vee\exists x(\forall y Q(y,b)\vee R(x))$$

第三步,变元易名,得

$$\forall x\exists y P(a,x,y)\vee\exists u\forall v(Q(v,b)\vee R(u))$$

第四步,存在量词左移,直至所有的量词移到前面,得:

$$\forall x\exists y\exists u\forall v(P(a,x,y)\vee Q(v,b)\vee R(u))$$

由此得到前述范式

$\forall x\exists y\exists u\forall v(P(a,x,y)\vee Q(v,b)\vee R(u))$

第五步，消去“∃”（存在量词），略去“∀”全称量词

消去∃y，因为它左边只有∀x，所以使用x的函数f(x)代替之，这样得到：

$\forall x\exists u\forall v(P(a,x,f(x))\vee Q(v,b)\vee R(u))$

消去∃u，同理使用g(x)代替之，这样得到：

$\forall x\forall v(P(a,x,f(x))\vee Q(v,b)\vee R(g(x))$

则，略去全称变量，原式的Skolem标准形为：

$P(a, x, f(x)) \vee Q(v, b)\vee R(g(x))$

例8 求$\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\ G(x,y,z,u,v,w)$的斯柯林范式:

解 用a替换x，删除$\exists x$得

$\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\ G(a, y, z, u, v, w)$,

用f (y, z)替换u，删除$\exists u$得

$\forall y\forall z\forall v\exists w\ G(a, y, z, f(y,z), v, w)$,

用h(y, z, v)替换w，删除$\exists w$得

$\forall y\forall z\forall v\ G(a, y, z, f(y,z), v, h(y, z, v))$

斯柯林范式 : $G(a, y, z, f(y,z), v, h(y, z, v))$。

定理4 设公式G是谓词公式A的斯柯林范式，则公式A是永假式当且仅当公式G是永假式（不可满足的）。谓词公式A是永假的等价于公式G不可满足的。（归结为空子句）

证明 （略）

•注意，斯柯林范式与前束范式不同，任何公式与它的前束范式是等值的，但是一个公式的斯柯林范式不一定与其自身等值。

•一般说来，如果公式A不是永假式，则A与它的斯柯林范式G不等值。

•一阶逻辑中的斯柯林范式在定理的机器证明中很有用。在定理的机器证明中，由Robinson提出的消解(归结)(resolution)原理就是建立在斯柯林范式基础上的。

•机器自动定理证明是人工智能研究的问题之一。吴文俊教授，四色定理的证明。

小结 前束范式

前束析取范式

前束合取范式

斯柯林范式：首标中不含存在量词的前束合取范式称为斯柯林范式。

由Robinson提出的消解(归结)(resolution)原理就是建立在斯柯林范式基础上的。

- 利用谓词公式间的各种等价关系和蕴含关系，通过一些推理规则，从一些谓词公式推出另一些谓词公式，这就是谓词演算中的推理。

- 要进行正确的推理，必须构造一个结构严谨的形式证明，给出一些相应的推理规则。

- 由于谓词逻辑中引进了个体、谓词和量词，所以要增加一些与量词有关的推理规则。

1. 全称（指定）特定化（US Universal aSsignment）规则 $\forall x\ A(x) \Rightarrow A(y)$

US规则成立的条件是:

(1) x是A(x)中约束出现的个体变元;

(2) y为任意的不在A(x)中约束出现的个体变元;

(3) 自由变元y也可替换成任意个体常元c。

•US规则的意思：如果个体域的所有个体都具有性质A，则个体域中的任一个个体c也具有性质A。

2. 存在（指定）特定化（ES Existence aSsignment）规则 $\exists x\ A(x) \Rightarrow A(c)$

•ES规则成立的条件是:

（1） c是使A为真的特定的个体常元;

（2） c不曾在A(x)中出现过;

（3） A(x)中除x外还由其它自由出现的个体变元时，不能用此规则。

•ES规则是说，如果个体域存在有性质A的个体，则个体域中必有某一个个体c具有性质A。

•注意，这里的个体c不是任意的。

3. 全称（推广）一般化（UG）规则 $A(x) \Rightarrow \forall y A(y)$

UG规则成立的条件是：

(1) y在A(y)中自由出现，且y取任何值时A均为真；

(2)取代x的y不能在A(x)中约束出现，否则会出错

•UG规则是说，若个体域中任意一个个体都具有性质A，则个体域中的全体个体都具有性质A。

4. 存在（推广）一般化（EG）规则 $A(c) \Rightarrow \exists y\ A(y)$

EG规则成立的条件是：

（1）c是特定的个体常元；

（2）取代c的x不能已在A(c)中出现过。

EG规则是说，如果个体域中有某一个体c具有性质A，则个体域中存在着具有性质A的个体。

- 在使用以上4个规则时，要严格按照限制条件去使用，并从整体上考虑个体变元和常元符号的选择，否则会犯错误。
- 这4个规则可形象地称为：“脱帽”、“戴帽”规则，

- 对全称量词“脱帽(US)容易戴帽(UG)难”，
- 而对存在量词“戴帽(EG)容易脱帽(ES)难”。

例1 证明$\forall x\,(P(x)\to Q(x))\wedge P(c)\Rightarrow Q(c)$。

证明 编号	公式	依据
(1)	$\forall x\,(P(x)\to Q(x))$	前提
(2)	$P(c)\to Q(c)$	(1); US
(3)	$P(c)$	前提
(4)	$Q(c)$	(2),(3);(I_9) $P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$

这就是“三段论方法”的形式化证明:

“所有的人都是要死的,
Socrates是人,
所以Socrates是要死的”。

例2 证明 $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

证明

编号	公式	依据
(1)	$\neg\forall x\ (A(x) \to B(x))$	假设
(2)	$\exists x\ \neg(A(x) \to B(x))$	(1), E
(3)	$\neg(A(a) \to B(a))$	(2), ES
(4)	$A(a) \wedge \neg B(a)$	(3), E
(5)	$A(a)$	(4), I
(6)	$\neg B(a)$	(4), I
(7)	$\exists x\ A(x)$	(5),EG
(8)	$\exists x\ A(x) \to \forall x\ B(x)$	前提
(9)	$\forall x\ B(x)$	(7),(8),I
(10)	$B(a)$	(9),US
(11)	$B(a) \wedge \neg B(a)$	(5)(10)矛盾

I_{20} $\exists x\ A(x) \to \forall x\ B(x) \Rightarrow \forall x\ (A(x) \to B(x))$

例3符号化下列命题，并推证其结论。

任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车；每个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有些人不爱骑自行车，因而有些人不爱步行。

提示:给定谓词P(x):x喜欢步行；Q(x):x喜欢乘汽车；R(x):x喜欢骑自行车。

前提：$\forall x\,(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$，$\forall x\,(Q(x)\vee R(x))$，$\exists x\neg R(x)$
结论：$\exists x\neg P(x)$

证明 编号	公式	依据
(1)	$\exists x \neg R(x)$	前提
(2)	$\neg R(a)$	(1), ES
(3)	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	前提
(4)	$Q(a) \vee R(a)$	(3), US
(5)	$Q(a)$	(2)(4), I
(6)	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	前提
(7)	$P(a) \to \neg Q(a)$	(6), US
(8)	$\neg P(a)$	(5)(7), I
(9)	$\exists x \neg P(x)$	(8), EG

❖ 作业

- 习题 一　1,2
- 习题 二　1, 3
- 习题 三　1, 2
- 习题 四　1,2

∀∃∅∩∪⊆⊂

⊄∉∈≤≥…ℵ∑{ }≡±°∝αβσρυωζψηδεφλμπΔ θ ±∏∧∨∀ }∴√⊃

•≌≈∽∞⊇∩∪℃‰≥≤∵∏∈∑≮≯½¼ § ¥{}?±

↔∨∧¬→←⇒⇔ ↓↑Λ⊕≠⊙— 〈〉 ☆★▽≮≯⌒∵∵⇔∩≠−

— 〃 // ∴ ∵ ∷ ⊥ ↘ ↗ ↙ ↖ √

• 〔「−」÷×·º·‹2, b›︸︷