# 群理论

# Group theory

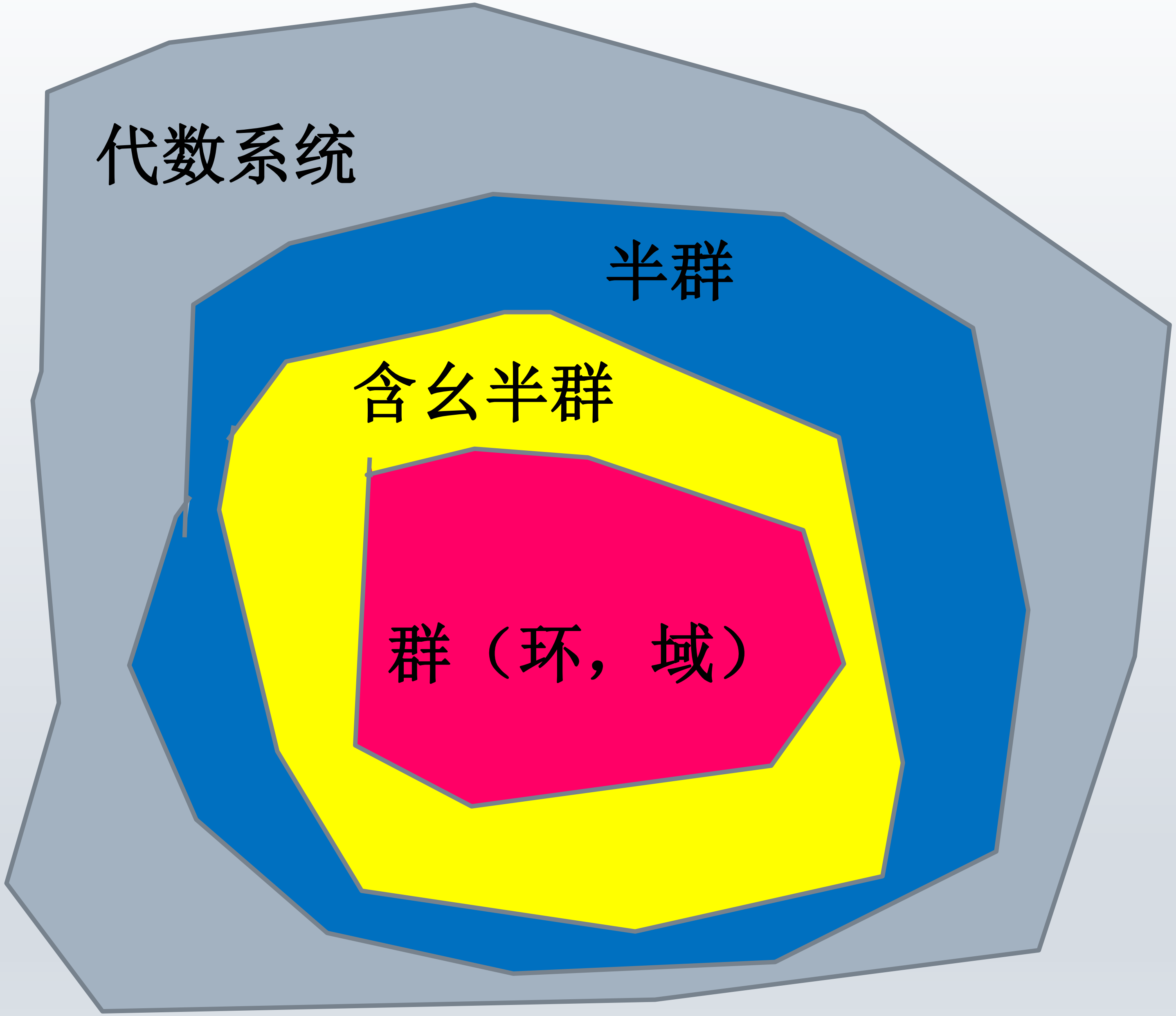
# 内容回顾：

1、代数系统 <A,*>
2、7种性质：封闭性，交换律，结合律，分配律，消去律，吸收律，等幂律；
3、4个特出元素：单位元，逆元，零元，幂等律；
4、满同态映射下两个系统之间具有“6类保持”．

**<A,*>**

群,环,域

格与布尔代数



# Chapter 5

## 群 Group theory

# § 5.1 半群

## 5.1.1 半群的定义

**定义：**

设 <S,*> 是一个代数系统，如果 * 运算满足结合律，则称 <S,*> 是一个半群。

举例：**<N,+>,<N, × >,<Z,+>, <Z, × >,<R,+>**，半群

**<N,->,<N, ÷ >,<Z,->,**不能构成半群，运算不满足结合律

# § 5.1 半群

举例：$< M_n(R),+ >$，**n是大于等于1的正整数**。$M_n(R)$ 实系数方阵

举例：$< M_n(R),\bullet >$，**n是大于等于1的正整数**。

举例：**$<P(S),\oplus>$**，**S**非空集合，$\oplus$是集合的对称差。**P(S)** 幂集

举例：**$<A^A ,\circ >$**，**A**非空集合，$\circ$是函数的复合运算。$A^A$ 所有函数

以上系统都可以组成半群。

# § 5.1 半群

例：假设S={a,b,c}，在S上定义运算Δ，如运算表给出。证明<S,Δ>是半群。

| Δ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | a | b | c |
| c | a | b | c |

验证Δ运算是可结合的。

$(a \Delta b) \Delta c = a\Delta c = c$， $a \Delta (b\Delta c) = a \Delta c = c$

所以 $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b\Delta c)$

$(b \Delta a) \Delta c = b \Delta (a \Delta c)$ 。。。等

所以Δ运算满足结合律， <S,Δ>是半群

# § 5.1 半群

例：**<N, ◦>**，在N上定义运算◦，如下：

**a ◦ b=a+b+a*b,**证明**<N, ◦>** 是半群；

$(a\circ b)\circ c=(a\circ b)+c+(a\circ b)*c$

$=(a+b+a*b)+c+(a+b+a*b)*c$

$=a+b+c+a*b+a*c+b*c+a*b*c$

$a\circ(b\circ c)=a+(b\circ c)+a*(b\circ c)$

$=a+(b+c+b*c)+a*(b+c+b*c)$

$=a+b+c+a*b+a*c+b*c+a*b*c$

满足结合律 $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$

◦定义如下：**a ◦ b=a+b - a*b,** 如何？

封闭性不一定满足

$a\circ(b\circ c)=?$

# § 5.1 半群

## 5. 1. 1 半群的定义

**定义：**

假设 $<S,*>$ 是一个半群，$a \in S$，$n$ 是正整数，则 $a^n$ 表示 $n$ 个 $a$ 的计算结果，即 $a^n = a * a * \ldots * a$

对任意的正整数 $m,n$，

$a^m * a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$

# § 5.1 半群

## 5. 1. 2 交换半群

定义：

如果半群 $<S,*>$ 中的 $*$ 运算满足交换律，则称 $<S,*>$ 为交换半群。

在交换半群 $<S,*>$ 中，若 $a,b \in S$，$n$ 是任意正整数，则 $(a*b)^n = a^n * b^n$

# §5.1 半群

## 5.1.3 独异点（含幺半群）

**定义：**

假设 <S,*> 是一个半群，如果 <S,*> 中有**单位元e**，则称 <S,*> 是独异点，或含幺半群。

**<N,+>,<N,×>,<Z,+>, <Z,×>,<R,+>**是独异点吗？

都可以构成独异点（含幺半群）**+**的单位元是**0**， ×的单位元是**1**

**<N-{0},+>,<N-{0},×>**是独异点吗？

都不能构成独异点（含幺半群），没有单位元

下列各代数系统是否可以构成独异点（含幺半群）？

举例1：$< M_n(R), + >$，**n**是大于等于**1**的正整数。

构成独异点，单位元是“零矩阵”

举例2：$< M_n(R), \bullet >$，**n**是大于等于**1**的正整数。

构成独异点，单位元是“单位矩阵”

举例3：$< A^A, \circ >$，**A**非空集合，$\circ$是函数的复合运算。

构成独异点，单位元是“恒等函数”，$I_A$

# §5.1 半群

## 5.1.3 独异点（含幺半群）

**定理：** 假设 <S,*> 是独异点，如果$a,b\in S$，并且 a,b 有逆元 $a^{-1},b^{-1}$存在，则：

（1）$(a^{-1})^{-1} = a$； （2）$(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$。

证明：<S,*> 是独异点，单位元一定存在$\mathbf{e} \in S$，

$a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$；所以有 $(a^{-1})^{-1} = a$

$$(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*b^{-1})*a^{-1}= a*e*a^{-1}=a*a^{-1}=e$$

所以 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

# §5.1 半群

## 5.1.4 子半群

**定义：**

假设 $<S,*>$ 是一个半群，若 $T \subseteq S$，且在 $*$运算下也构成半群，则称 $<T,*>$ 是 $<S,*>$ 的子半群。

## 5.1.4 子半群

假设A={a,b}，$<P(A),\cap>$ 是一个含幺半群。

若B={a}  则$P(B)\subseteq P(A)$

并且$<P(B),\cap>$
构成半群，是$<P(A),\cap>$的子半群。
还有否？

若B={b},则$P(B)\subseteq P(A)$

| $\cap$ | $\varnothing$ | {a} | {b} | {a,b} |
|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| {a} | $\varnothing$ | {a} | $\varnothing$ | {a} |
| {b} | $\varnothing$ | $\varnothing$ | {b} | {b} |
| {a,b} | $\varnothing$ | {a} | {b} | {a,b} |

# §5.1 半群

## 5.1.4 子半群

**定义：**

设 <S,*> 是含幺半群，若 <T,*> 是它的子半群，并且 <S,*> 的单位元 e 也是 <T,*>单位元，则称 <T,*> 是 <S,*> 的子含幺半群。

# § 5.1 半群

例：设<S,*>是可交换的含幺半群，T={a|a∈S，且a*a=a}，则<T,*>是<S,*>的子含幺半群。

解：

(1)封闭 ∵ 对a,b∈T a*a=a, b*b=b,

$$(a*b)*(a*b)=a*b*a*b=a*a*b*b=a*b$$

∴ a*b ∈T

(2)可结合 *本来就是可结合的

(3)单位元与S是同一个 ∵ e*e=e; ∴e∈T

∴ <T,*>是<S,*>的子含幺半群

# 小结

**<G,*> 代数系统，**

**(1) 半群；**

**(2) 幺半群(独异点)；**

**(3) 子半群；**

**(4)子含幺半群**