第16章

图(GRAPHS)

简要回顾

- 线性结构
  - 线性表-数组/链表描述
  - 数组和矩阵
  - 栈/队列
  - 散列表
- 树
  - 二叉树和其他树
  - 优先级队列
  - 搜索树
  - 平衡搜索树

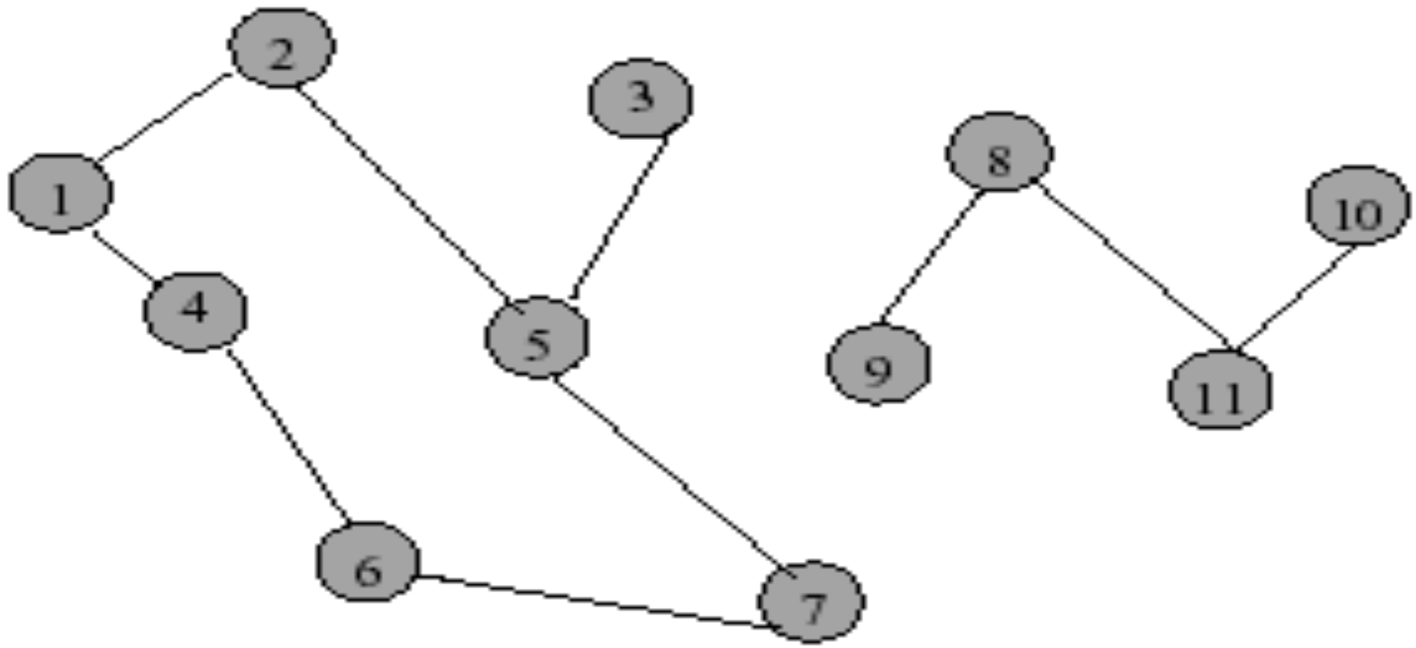
16.1 基本概念

- G = (V,E)
- V 是顶点集. E是边集.
- **顶点**也叫作**节点**(nodes)和**点**(points).
- E中的每一条**边**连接V中两个不同的顶点。边也叫作**弧**(arcs)或**连线**(lines) 。可以用**(*i*, *j*)**来表示一条边，其中 *i*和 *j*是*E*所连接的两个顶点。
- **无向边(undirected edge):** (*i*,*j*)和(*j*,*i*)是一样的。
- **有向边(directed edge):**(*i*,*j*)和(*j*,*i*)是不同的。

图

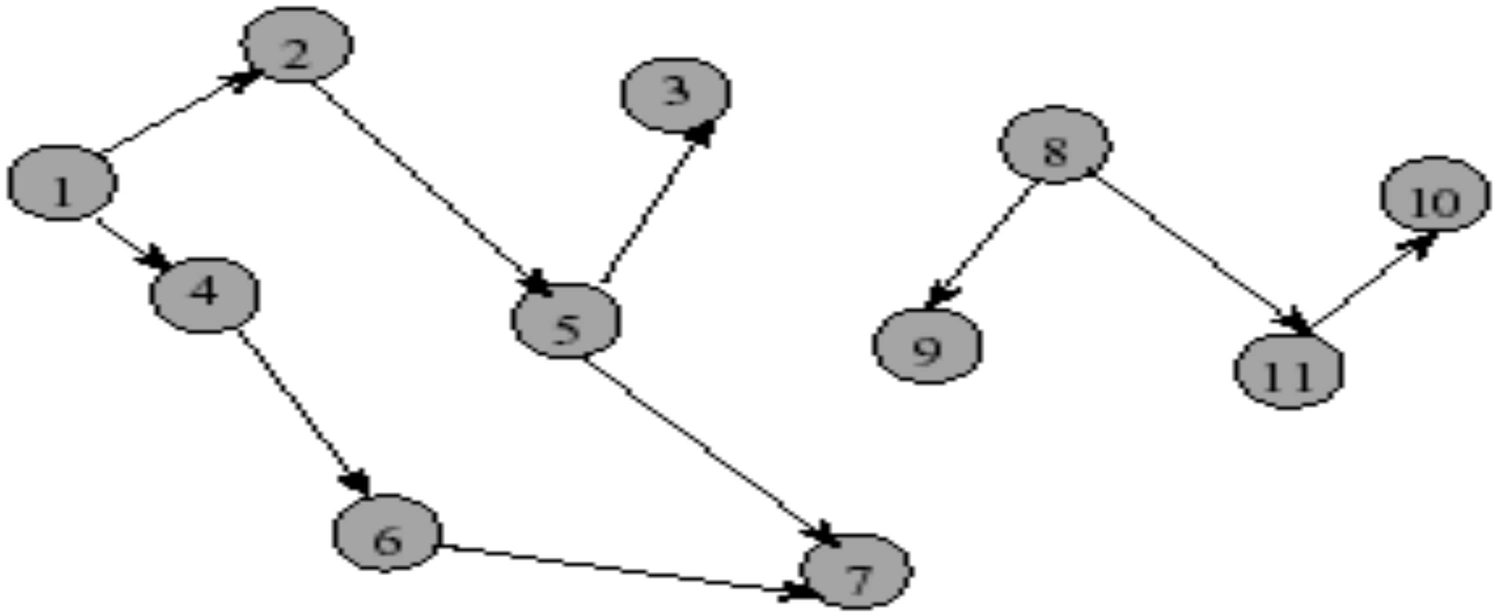
- **无向图**(Undirected graph) →图中所有的边都是无向边 .
- **有向图**(Directed graph) →图中所有的边都是有向边.

无向图



- 当(*i*,*j*)是图中的边时，
- 顶点*i*和*j*是**邻接的**(adjacent)。(*j*是i的**邻接点**； *i*是j的**邻接点.**)
- 边(*i*,*j*)**关联于**(incident)顶点*i*和*j*。

有向图



- 在有向图中，
  - **有向边(*i*, *j*)** 是关联至(incident to)顶点***j*** 而关联于(incident from)顶点***i***。
  - 顶点***i*** 邻接至(adjacent to)顶点***j***，顶点***j***邻接于(adjacent from)顶点***i***。

图

- **网络(Network):加权有向图(Weight digraph)或加权无向图(Weight graph)**，每一条边都赋予一个权值或耗费。
- 所有图都可以看作网络的一种特殊情况：
  - 一个无向(有向)图可以被看作是一个所有边具有相同权的无向(有向)网络。

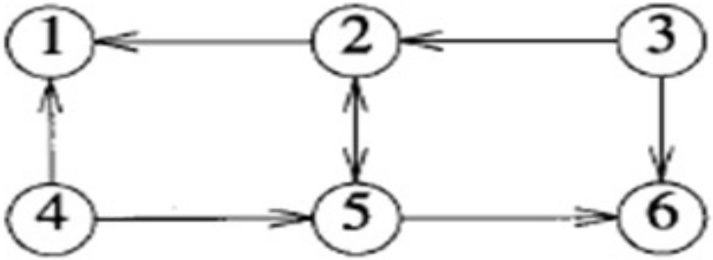
16.2 应用和更多的概念

- 例16-1 路径问题

- 例16-2 生成树

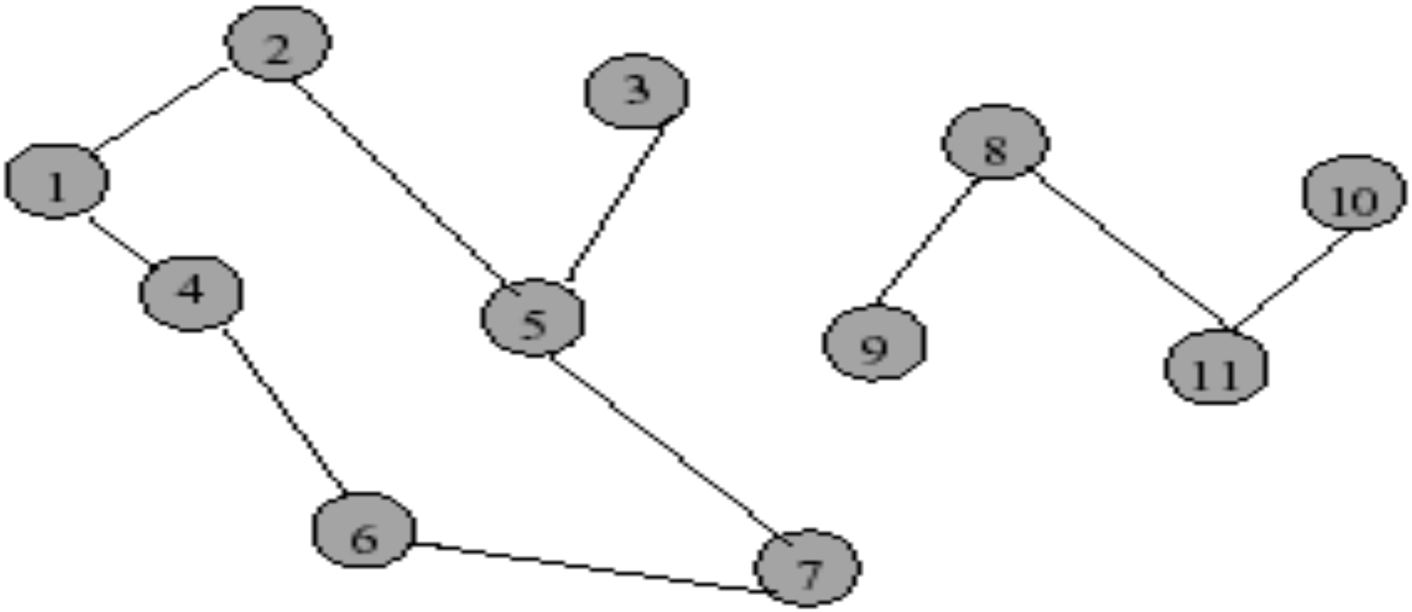
例16-1 路径问题

- 对于**顶点序列P=i_1, i_2, i_3, …i_k**，当且仅当对于每一个$j(1\le j\le k)$，边(i_j,i_{j+1})都在E中时，**顶点序列P=i_1, i_2, i_3, …i_k**,是图或有向图$G=(V, E)$中一条从i_1到i_k的**路径**。
- **简单路径**是这样一条路径：除第一个和最后一个顶点以外，路径中其他所有顶点均不同. 比如路径5,2,1是简单路径；而2，5，2，1不是
- **路径的长度**是路径上所有边的长度之和。
- **顶点*i* 到*j* 的最短路径**.



例16-2　生成树

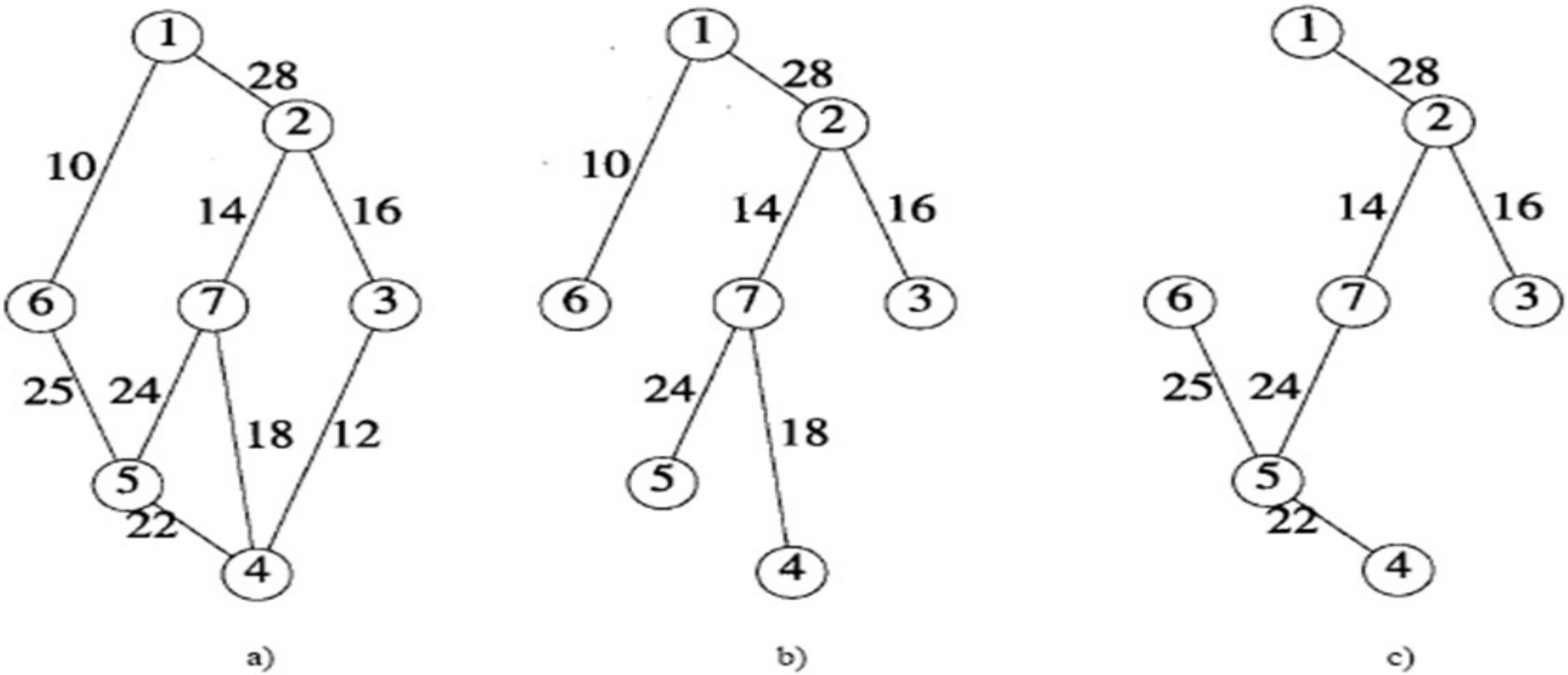
- 设$G=(V,E)$是一个无向图，当且仅当G中每一对顶点之间有一条路径时，可认为G是连通图(Connected Graph)。



例16-2　生成树

- *H*是**图*G*的子图**(subgraph)的充要条件是，***H*的顶点和边的集合是*G*的顶点和边的集合的子集**。
- **环路**(Cycle/回路):起始节点与结束节点是同一节点的简单路径。
- **树**(Tree):<u>**没有环路**</u>的<u>无向连通图</u>是一棵树。
- **树的耗费**(cost of tree/树的代价)：　树的耗费是所有边的耗费(weights/costs)之和 .
- **图G的生成树**(Spanning Tree of G):一棵<u>包含*G*中所有顶点并且</u>是<u>*G*的子图</u>的<u>树</u>是*G*的生成树。
- 一个*n*节点的连通图必须至少有*n*-1条边 .
- ⇒如果图*G*有 n 个顶点, 那么**图*G*的生成树有 n 个顶点和有*n*-1条边。**

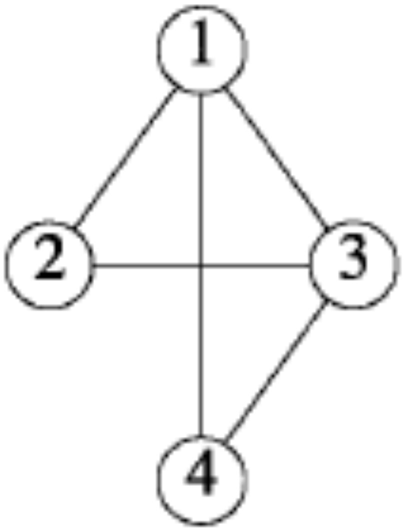
生成树示例



- 图a的两棵生成树:图b和图c
- 图b生成树耗费 = 100;.图c生成树耗费 = 129.
- **最小耗费生成树（最小代价生成树）：**生成树耗费（代价）达到最小的生成树.

16.3 特性

设*G*是一个无向图，顶点*i*的度(degree) d_i是与顶点*i*相连的边的个数。



$d_2 = 2, d_4 = 2, d_3 = 3$

16.3 特性

- 特性 16-1:
- 设G=(V,E) 是一无向图.令 |V|=n; |E| =e; d_i=顶点i的度，则.
-
- (a) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ =2e.
- (b) 0 ≤ e≤ n*(n-1)/2.

证明:

(a) 无向图的每一条边与两个顶点相连

⇒顶点的度之和等于边的数量(e)的2倍 = 2e

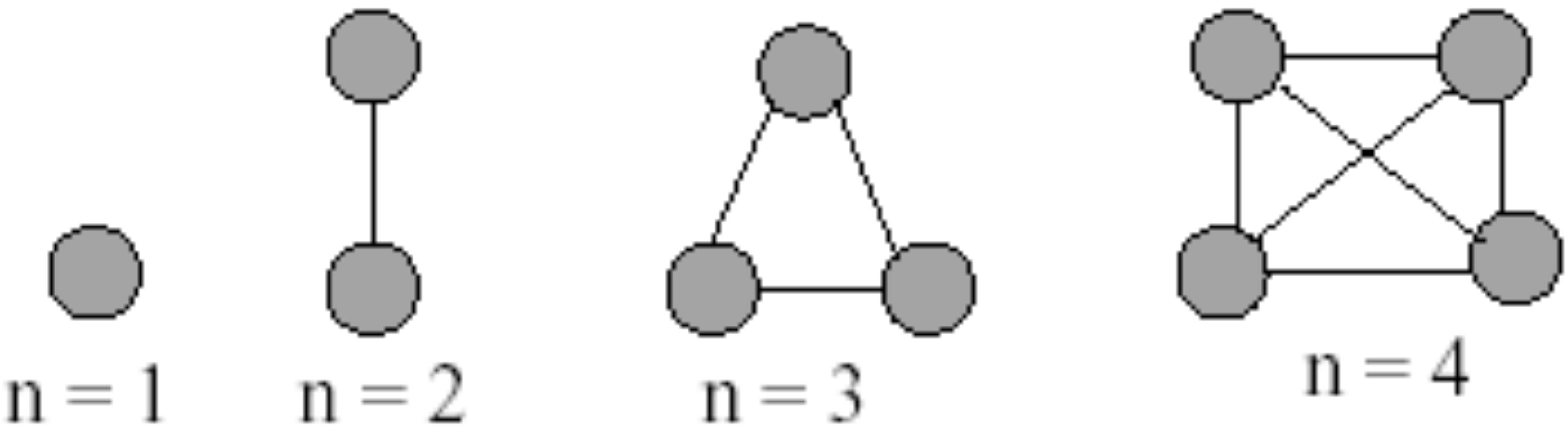
(b) $0 \le d_i \le n-1$

$\Rightarrow 0 \le \sum_{i=1}^{n} d_i \le n*(n-1)$

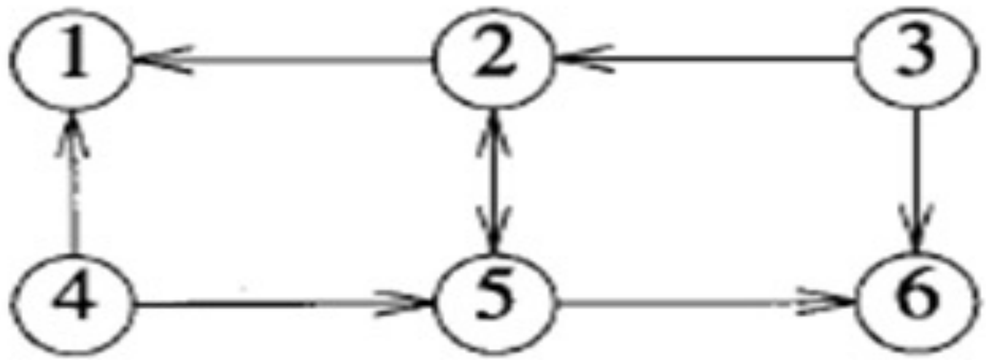
$\Rightarrow 0 \le e \le n*(n-1)/2$

完全(无向)图

- 一个具有n 个顶点， n(n-1)/2 条边的图是一个完全(无向)图.



顶点i的入度



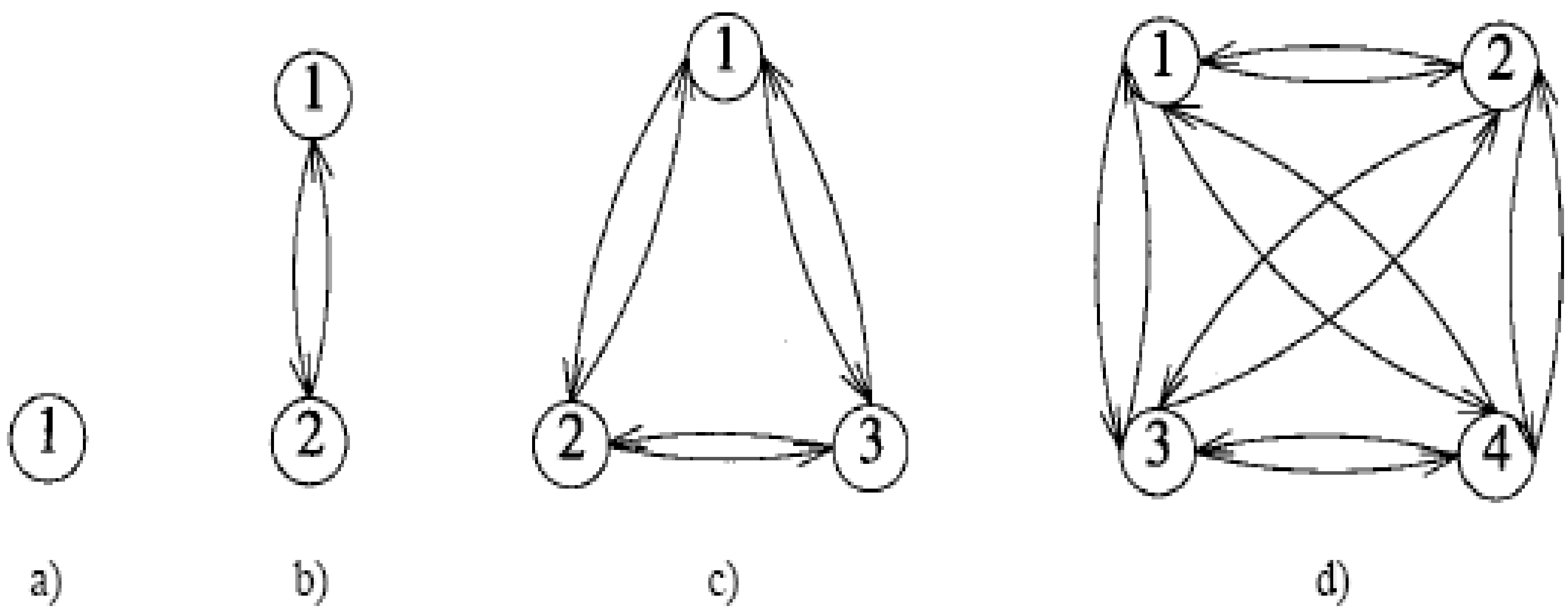
- 设G是一个有向图，**顶点i**的入度(in-degree) $\mathbf{d_i^{in}}$ 是指关联至**顶点i**的边的数量。
- $d_1^{in} = 2$, $d_3^{in} = 0$

- **顶点i** 的出度(out-degree) $\mathbf{d_i^{out}}$是指关联于该顶点的边的数量。
- $d_2^{out} = 2$, $d_6^{out} = 0$

- **特性 16-2:**
- 设G=(V,E) 是一有向图.令|V|=n; |E| =e;
- (a) $0 \le e \le n*(n-1)$.
- (b) $\sum_{i=1}^{n} d_i^{in} = \sum_{i=1}^{n} d_i^{out} = e$.

完全有向图

- 一个具有*n* 个顶点， n(n-1)条边的图是一个完全有向图.



n=1　　*n=2*　　*n=3*　　*n=4*

16.4 抽象数据类型graph

- ***graph：无向图、有向图、加权无向图、加权有向图***

抽象数据类型 *graph*
{实例
  顶点集合V和边集合E。
 操作:
  numberOfVertices()：返回图中顶点的数目
  numberOfEdges()：返回图中边的数目
  ExistsEdge (*i,j*)：如果边(*i,j*)存在,返回true，否则返回false
  insertEdge (*theEdge*)：向图中添加边*theEdge*
  eraseEdge (*i,j*)：删除边(*i,j*)
  degree(*i*)：返回顶点*i*的度，只能用于无向图
  inDegree(*i*)：返回顶点*i*的入度
  outDegree(*i*)：返回顶点*i*的出度
}

抽象类graph

```
template <class T>
class  graph
{public:
  ……
 //ADT方法操作:
 virtual int numberOfVertices() const=0;
 virtual int numberOfEdges() const=0;
 virtual bool existsEdge (int,int) const=0;
 virtual void insertEdge (edge<T> *) const=0;
 virtual void eraseEdge (int,int) const=0;
 virtual int degree(int) const=0;
 virtual int inDegree(int) const=0;
 virtual int outDegree(int) const=0;
 //其他方法
 virtual bool directed() const=0;//当且仅当是有向图时，返回值是true
 virtual bool weighted() const=0; //当且仅当是加权图时，返回值是true
 virtual vertexIterator<T>* iterator(int) = 0;//访问指定顶点的邻接顶点
}
```

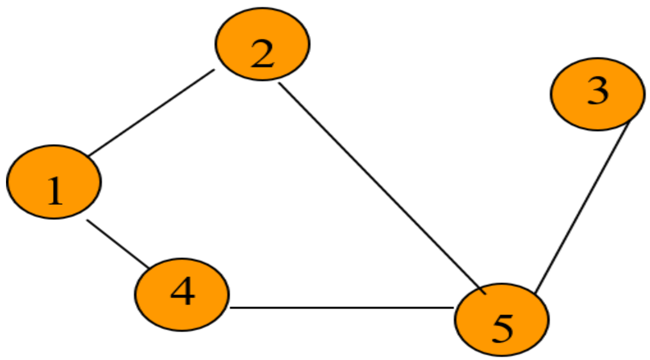
16.5 无权图的描述

- 邻接矩阵(adjacency matrix)
- 邻接链表(linked-adjacency-lists)
- 邻接数组

邻接矩阵

- 无权图G=(V,E)，令|V|=n; 假设： V={1,2,3,…,n}
- G的邻接矩阵：**0/1 n×n矩阵A**,
- G 是一无向图
  - $$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{如果}(i,j) \in E \text{ 或 } (j,i) \in E\,. \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$
- G是一有向图
  - $$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{如果}(i,j) \in E. \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

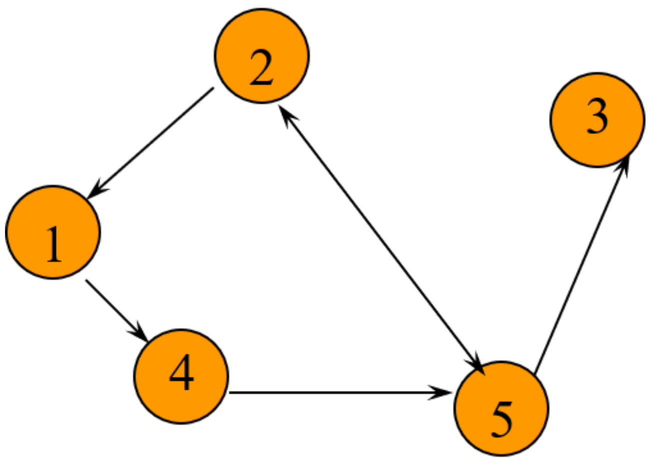
无向图的邻接矩阵-特性1/2



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1
5	0	1	1	1	0

- 对于*n*顶点的无向图，有
  - *1. A*(*i*,*i*)=0， 1≤*i*≤*n*
  - 2. 邻接矩阵是**对称的**，即 (A(i,j) = A(j,i)， 1≤*i*≤*n*，1≤*j*≤*n*)
  - 3. $$\sum_{j=1}^{n} A(i,j) = \sum_{j=1}^{n} A(j,i) = \mathbf{d}_i$$

有向图的邻接矩阵-特性



	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0

- 对于n顶点的有向图，有：

$$\sum_{j=1}^{n} A(i,j) = \mathrm{d}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{out}} ; \sum_{j=1}^{n} A(j,i) = \mathrm{d}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{in}} ; 1 \le i \le n$$

邻接矩阵的存储

- 使用$(n+1)\times(n+1)$的布尔型数组a，映射$A(i,j)=1$，当且仅当$a[i][j]$=true, $1=< i <=n, 1=< j <=n$
  - 需要$(n+1)^2$字节空间
- 减少存储空间：
  - 采用$n\times n$数组$a[n][n]$，映射$A(i,j)=1$，当且仅当$a[i-1][j-1]$=true
    - 需要n^2字节，比前一种减少了$2n+1$个字节
  - 不储存所有对角线元素(都是零)
    - 减少n个字节空间
  - 以上减少存储空间的办法，代码容易出错，某些操作代价大。
- 对无向图，只需要存储上三角(或下三角)的元素

思考-回到第七章

- **按行映射**，下三角矩阵L 映射到数组element

  $map(i,j) = ?$

  按列映射，下三角矩阵L 映射到数组element

  $map(i,j) = ?$

思考

- **按行映射**，下三角矩阵L 映射到数组element

$$L(i,j) = 0 \qquad i < j$$

$$L(i,j) = \text{element}[1+2+\ldots+(i-1)+(j-1)] \qquad i \geq j$$

$$= \text{element}[i(i-1)/2 + j-1]$$

$$map(i,j) = i(i-1)/2 + j-1 \qquad i \geq j$$

思考

- **按列映射**，下三角矩阵L 映射到数组element

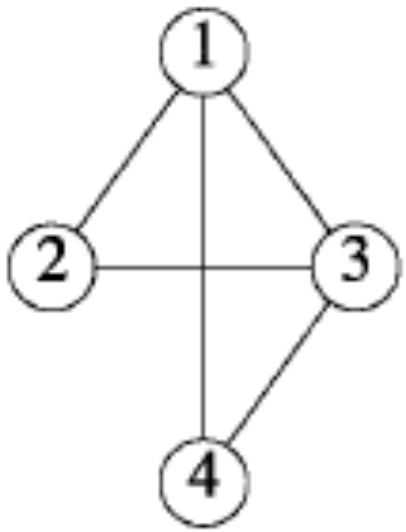
- 前j-1列元素个数：n, n-1, …, n-j+2
- 第j列之前元素：i-j

$$map(i,j)=(j-1)(2n-j+2)/2 + i-j \qquad i \geq j$$

比如： $map(4,2)=6$

16.5.2　邻接链表

- **顶点i的邻接表(adjacency list)：是一个邻接于顶点i的线性表,包含了顶点i的所有邻接点。**
- 每一个顶点都有一个邻接表



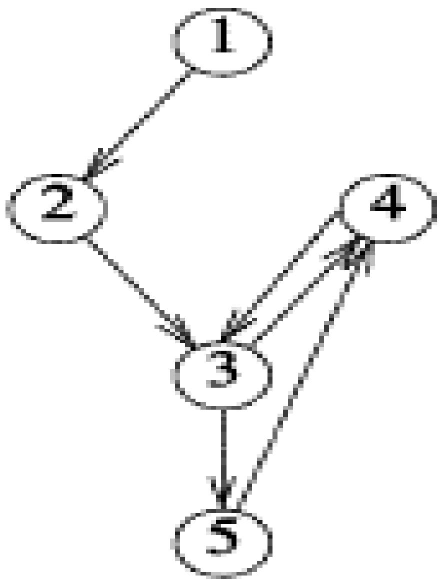
顶点1的邻接表＝(2，3,4)

顶点2的邻接表＝(1,3)

顶点3的邻接表＝(1，2，4)

顶点4的邻接表＝(1,3)

有向图邻接表示例



顶点1的邻接表 = (2)

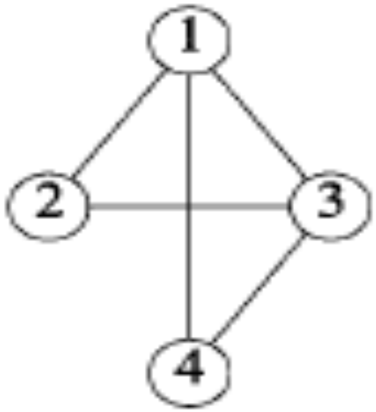
顶点2的邻接表 = (3)

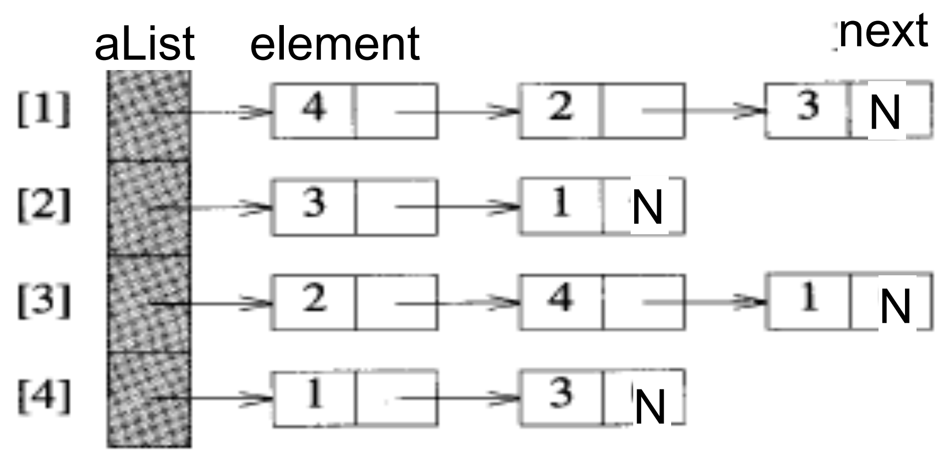
顶点3的邻接表 = (5,4)

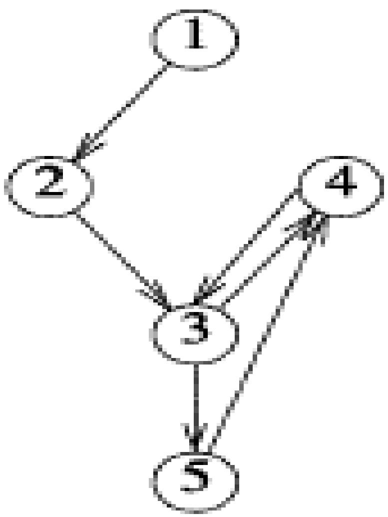
顶点4的邻接表 = (3)

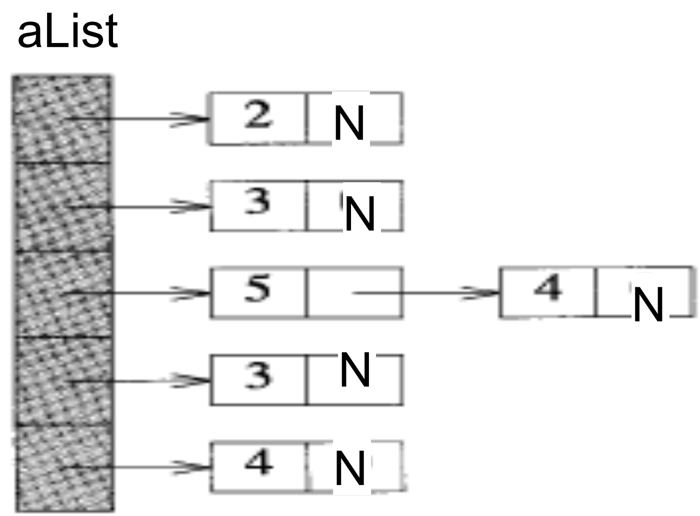
顶点5的邻接表 = (4)

邻接链表



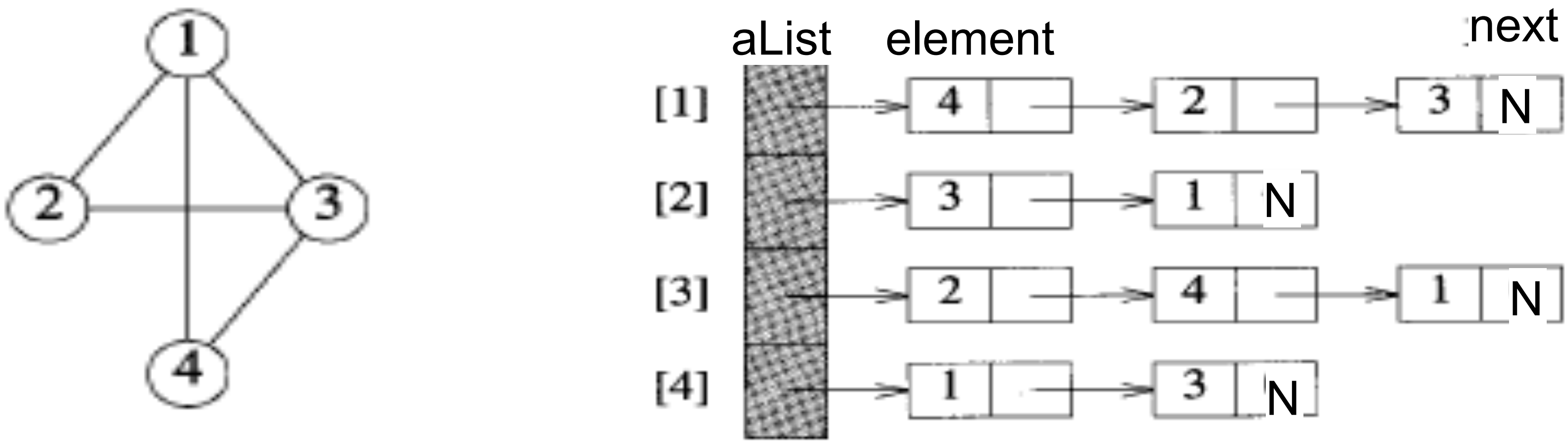






类型为链表的数组aList来描述， aList[i].firstNode指向顶点i的邻接表的第一个顶点

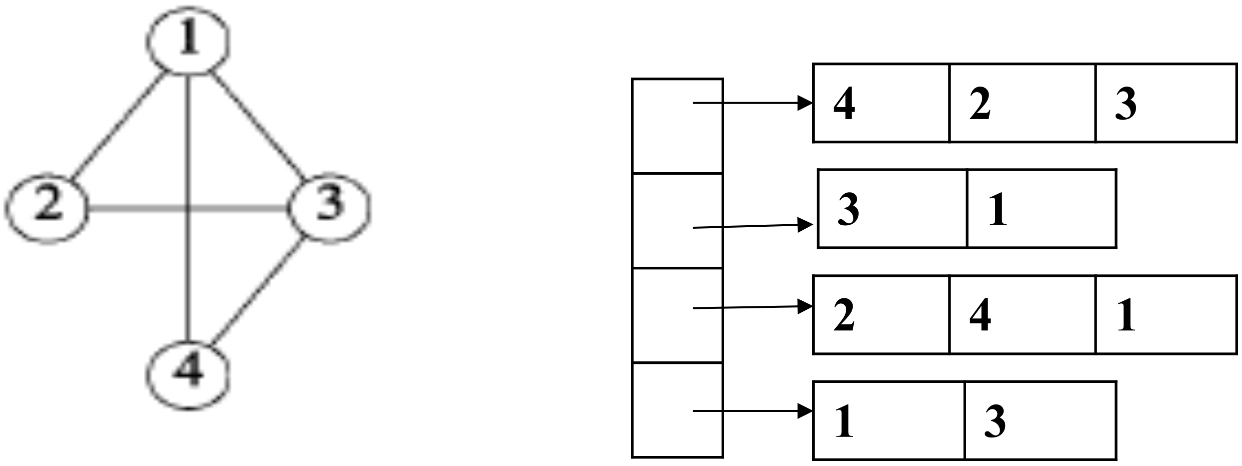
邻接链表

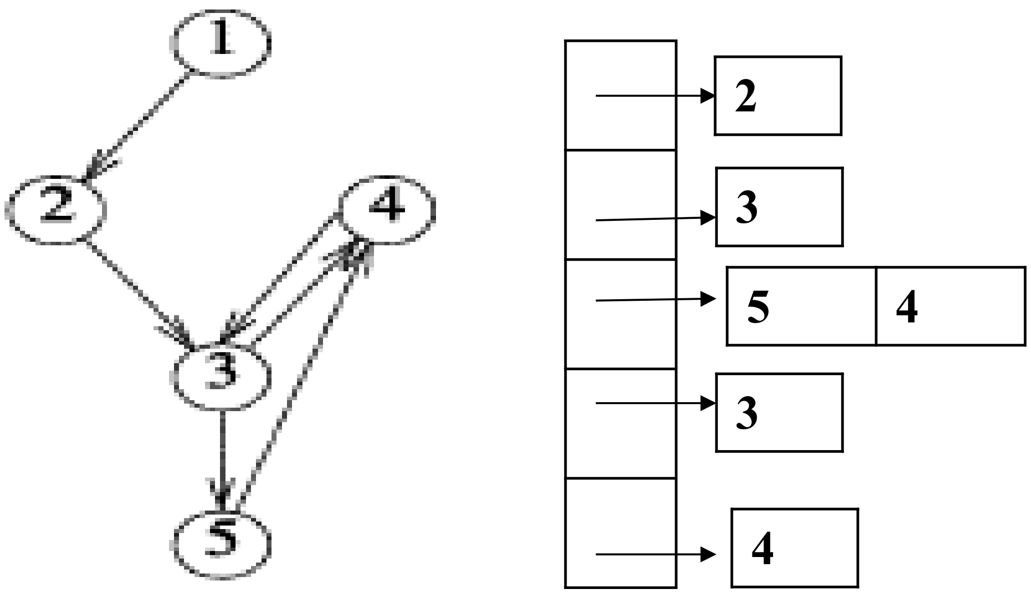


一个指针和一个整数各需要4字节的存储空间，因此用邻接链表描述一个n顶点图需要8(n+1)字节存储n+1个firstNode指针和aList链表的listSize域

需要4*2*m字节存储m个链表节点，对于有向图m=e; 对于无向图，m=2e

邻接数组





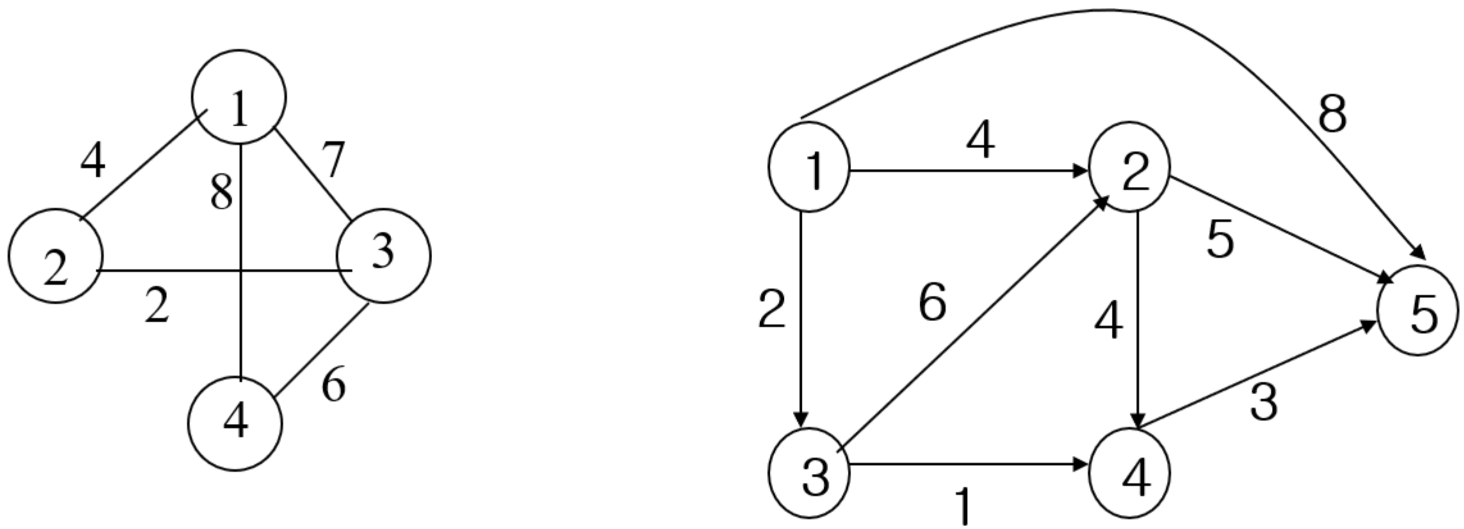
在邻接数组中，每个顶点的邻接表使用一个数组描述.

相比邻接链表，不需要next指针域

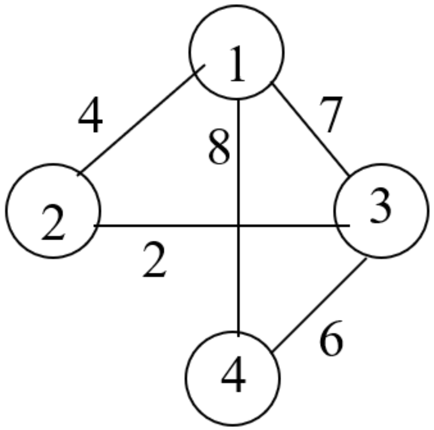
16.6 加权图(网络)描述

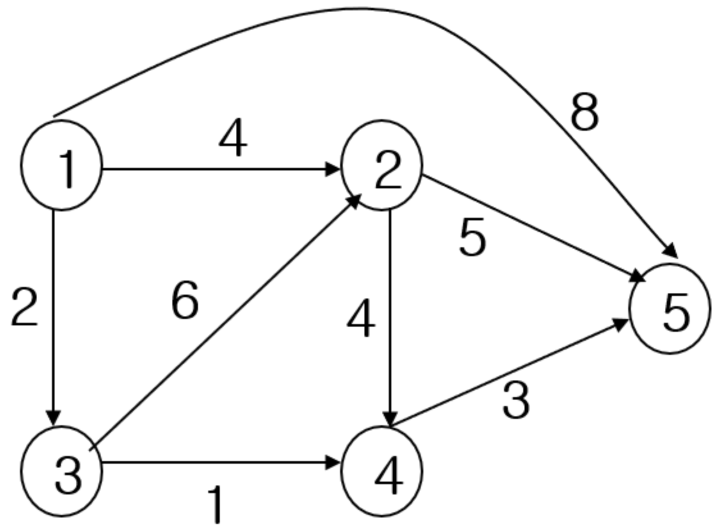
- 耗费/代价/成本(cost)邻接矩阵：
- G 是一加权无向图
  - $$C(i,j) = \begin{cases} \text{边 } (i,j) \text{的耗费(或权)} & \text{如果}(i,j) \in E \text{ 或 } (j,i) \in E \\ \text{- 或 } \infty & \text{其它} \end{cases}$$
- G是一加权有向图
  - $$C(i,j) = \begin{cases} \text{边 } (i,j) \text{的耗费(或权)} & \text{如果}(i,j) \in E. \\ \text{- 或 } \infty & \text{其它} \end{cases}$$
- -或 ∞：用noEdge表示

加权图邻接矩阵描述示例



加权图邻接矩阵描述示例

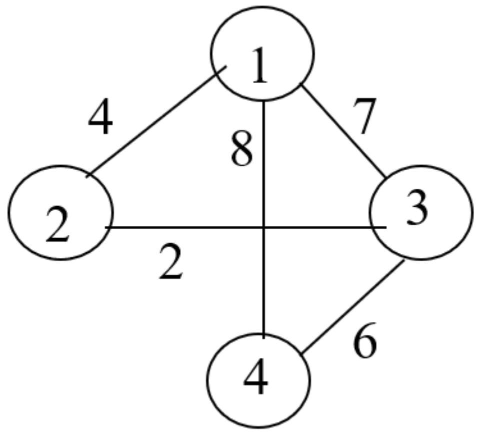


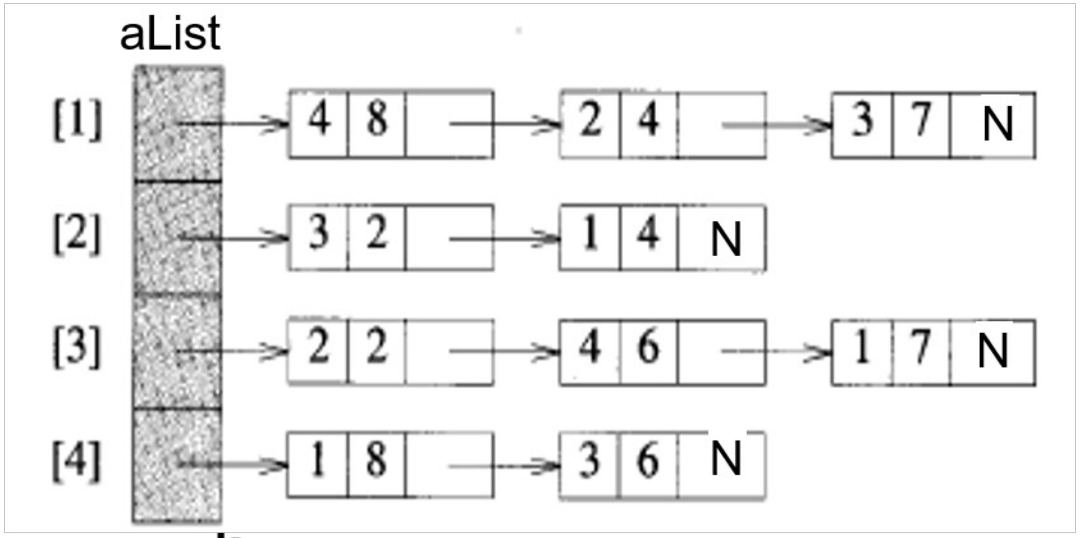


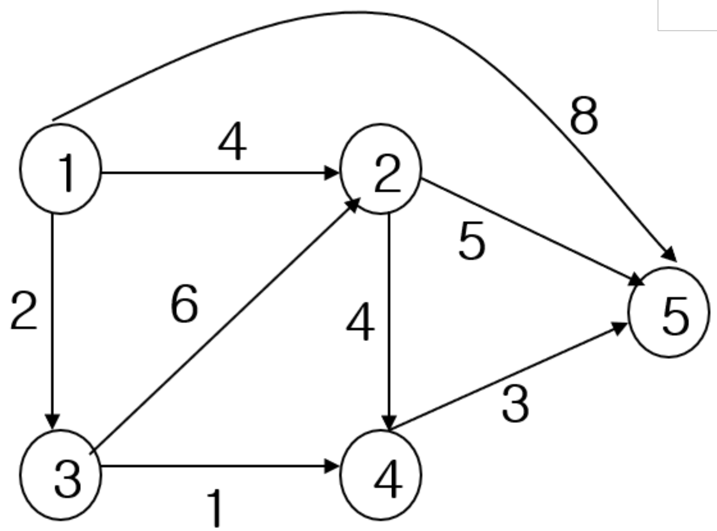
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & \infty & 4 & 7 & 8 \\
2 & 4 & \infty & 2 & \infty \\
3 & 7 & 2 & \infty & 6 \\
4 & 8 & \infty & 6 & \infty
\end{array}
$$

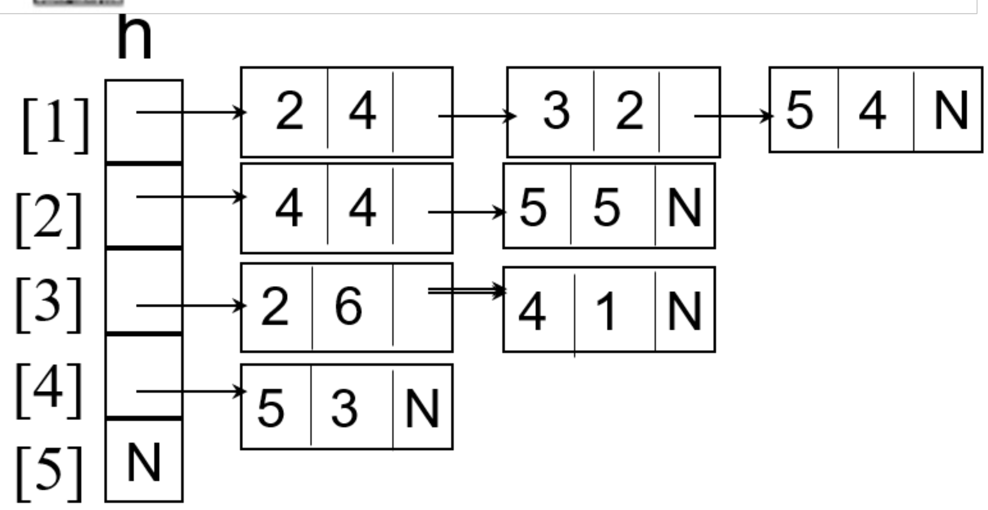
$$
\begin{bmatrix}
\infty & 4 & 2 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & 4 & 5 \\
\infty & 6 & \infty & 1 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty
\end{bmatrix}
$$

加权图邻接链表描述


1
2
3
4
4
8
7
2
6


aList
[1]
[2]
[3]
[4]
4 8
2 4
3 7 N
3 2
1 4 N
2 2
4 6
1 7 N
1 8
3 6 N


1
2
3
4
5
4
8
2
6
4
5
3
1


h
[1]
[2]
[3]
[4]
[5]
N
2 4
3 2
5 4 N
4 4
5 5 N
2 6
4 1 N
5 3 N

16.7 类实现

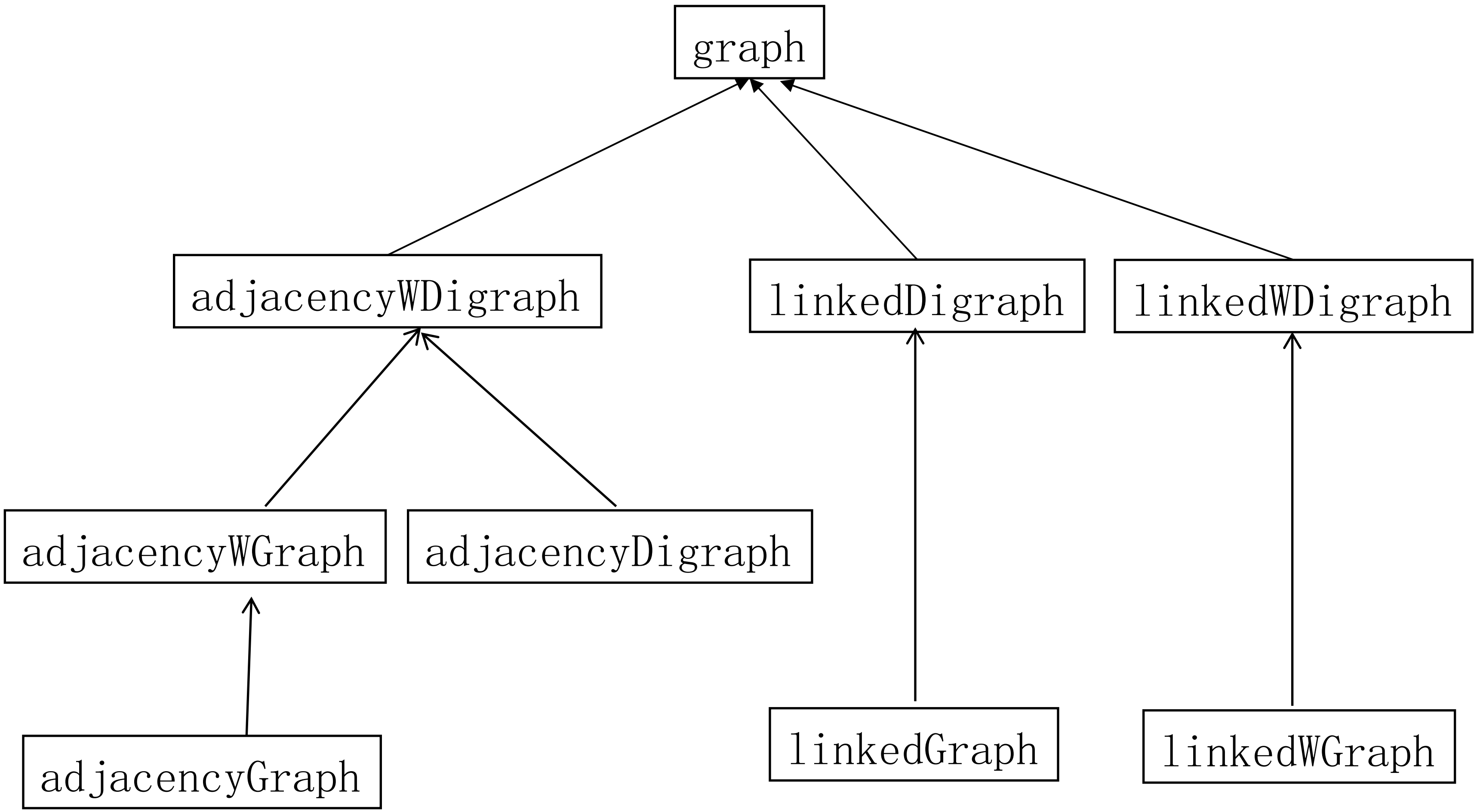
- 图的描述：
  - 邻接矩阵Adjacency Matrix
  - 邻接链表Linked Adjacency Lists
  - 邻接数组
  - 3 种描述
- 图的类型
  - 有向图、无向图。
  - 加权有向图、加权无向图。
  - 4种类型
- 3 x 4 = 12 个类

- 邻接矩阵(Adjacency Matrix)
  - 邻接矩阵描述的无向图(adjacencyGraph)
  - 邻接矩阵描述的加权无向图(adjacencyWGraph)
  - 邻接矩阵描述的有向图(adjacencyDigraph)
  - 邻接矩阵描述的加权有向图(adjacencyWDigraph)
- 邻接链表(Linked Adjacency Lists)
  - 邻接链表描述的无向图(linkedGraph)
  - 邻接链表描述的加权无向图(linkedWGraph)
  - 邻接链表描述的有向图(linkedDigraph)
  - 邻接链表描述的加权有向图(linkedWDigraph)

- **无权**有向图和无向图可以看作每条边的权是1的加权有向图和无向图。

- 无向图,边(i, j)存在可以看作边(i, j) 和边(j,i)都存在的有向图。

类的派生结构


graph
adjacencyWDigraph
linkedDigraph
linkedWDigraph
adjacencyWGraph
adjacencyDigraph
adjacencyGraph
linkedGraph
linkedWGraph

16.7.2 邻接矩阵类

```
template <class T>
class adjacencyWDigraph : public graph<T>
{
  protected:
    int n;          //顶点数目
    int e;          //边数
    T **a;          // 邻接数组
    T noEdge;       // 表示不存在的边
```

adjacencyWDigraph类

```
adjacencyWDigraph(int numberOfVertices=0, T theNoEdge=0)
    {// 构造函数.
     // 确认顶点数的合法性
      if (numberOfVertices < 0)  throw    ..........
      n = numberOfVertices;
      e = 0;
      noEdge = theNoEdge;
      make2dArray(a, n + 1, n + 1);
      for (int i = 1; i <= n; i++)
        // 初始化邻接矩阵
        fill(a[i], a[i] + n + 1, noEdge);
    }
~adjacencyWDigraph() {delete2dArray(a, n + 1);}
```

adjacencyWDigraph::insertEdge

```
void insertEdge(edge<T> * theEdge)
  {// 在图中插入边theEdge; 如果该边已经存在，
   //则theEdge中的权值更新该边权值
    int v1 = theEdge->vertex1();
    int v2 = theEdge->vertex2();
    if (v1 < 1 || v2 < 1 || v1 > n || v2 > n || v1 == v2)
       {……//输出出错信息，抛出异常}
    if (a[v1][v2] == noEdge)  // 新的边
          e++;

    a[v1][v2] = theEdge->weight();
  }
```

adjacencyWGraph ::insertEdge

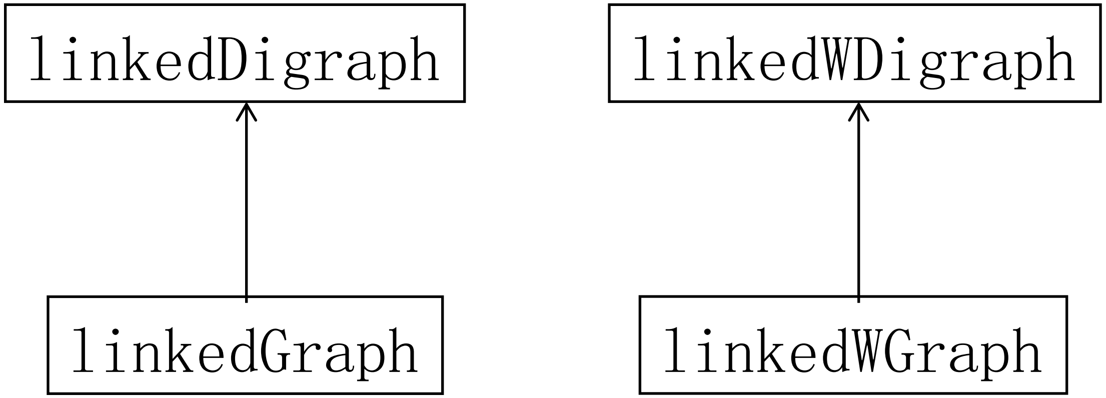
```
void insertEdge(edge<T> * theEdge)
{
  int v1 = theEdge->vertex1();
   int v2 = theEdge->vertex2();
   ……..//确认参数有效性
if (a[v1][v2] == noEdge)
          e++;

a[v1][v2] = theEdge->weight();
a[v2][v1] = theEdge->weight();
}
```

adjacencyWGraph :: eraseEdge

```
void eraseEdge(int i, int j)
    {// 删除边(i,j).
      if (i >= 1 && j >= 1 && i <= n && j <= n && a[i][j] !=
noEdge)
      {
        a[i][j] = noEdge;
        a[j][i] = noEdge;
        e--;
      }
```

邻接链表类

- 邻接链表描述的无向图(linkedGraph)
- 邻接链表描述的加权无向图(linkedWGraph)
- 邻接链表描述的有向图(linkedDigraph)
- 邻接链表描述的加权有向图(linkedWDigraph)



邻接链表类linkedDigraph

```
class linkedDigraph : public graph<bool>
  {
    protected:
      int n;                    // 顶点数目
      int e;                    // 边数目
     graphChain<int> *aList;    // 邻接链表
  …….
```

- *graphChain* 是类*Chain* 的扩展
  - 增加了*eraseElement(theVertex)*：删除顶点等于*theVertex*的元素

邻接链表类linkedDigraph

```
class linkedDigraph : public graph<bool>
  {
    public:
        bool existsEdge(int i, int j) const
        {//返回true,当且仅当（i，j）是一条边
          if(i<1 || j < 1 || i > n || j >n ||
  aList[i].indexOf(j)==-1)
              return false;
          else
              return true;
  }
```

邻接链表类linkedDigraph

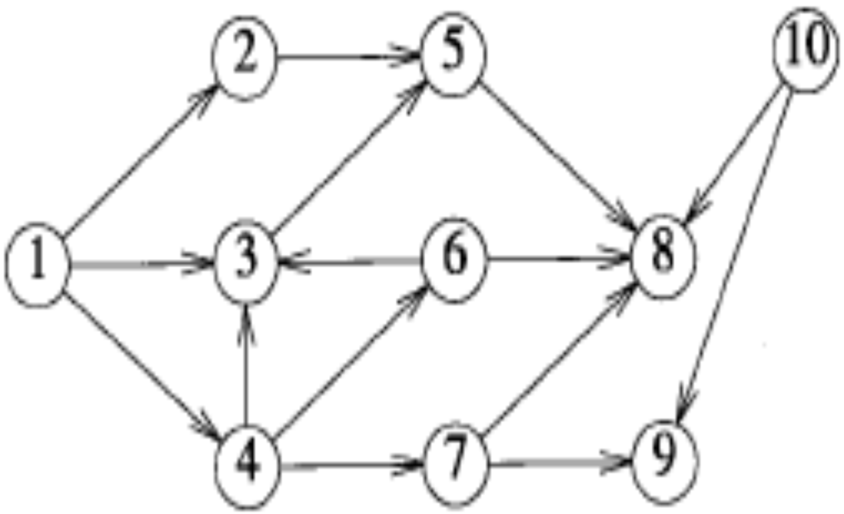
```
class linkedDigraph : public graph<bool>
  {
    public:
        bool insertEdge(edge<bool> *theEdge)
        {//插入一条边；设置v1和v2， 并检验其合法性，此处代码与adjacencyDisgraphino相同
         if(aList[v1].indexOf(v2)==-1)
         {
            aList[v1].insert(0, v2);
            e++;
         }
  }
```

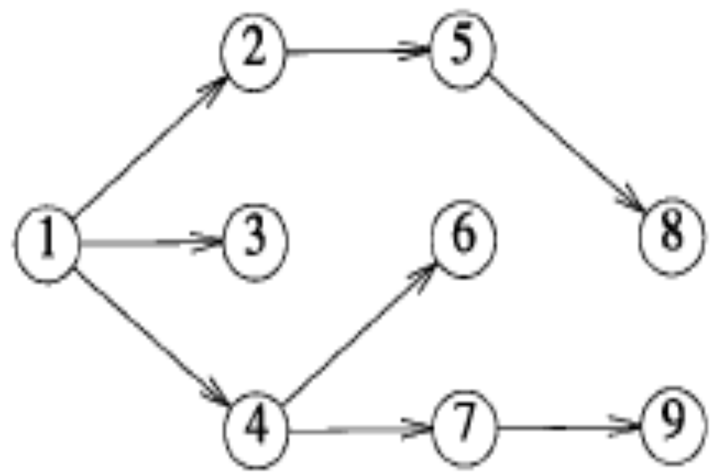
16.8 图的遍历

- 图的许多函数(寻找路径，寻找生成树，判断无向图是否连通等)都要求**从一个给定的顶点开始，访问能够到达的所有顶点。**
- 当且仅当存在一条从v到u的路径时，顶点v可到达顶点u。
- 图的搜索：从一个已知的顶点开始，搜索所有可以到达的顶点。
- 两种搜索方法：
  - 广度优先搜索 (BFS----Breadth-First Search).（又称宽度优先搜索）
  - 深度优先搜索(DFS----Depth-First Search).

广度优先搜索BFS

- 广度(或宽度)优先搜索方法:





首先确定邻接于1的节点集合：{ 2, 3, 4}, 然后再确定邻接于{ 2, 3, 4}的节点集合：{5，6，7}，再之后是 {8，9}

宽度优先搜索伪码

```
breadthFirstSearch(v)
//从顶点v 开始的宽度优先搜索
把顶点v标记为已到达顶点;
初始化队列Q，其中仅包含一个元素v;
while (Q不空)
    {从队列中删除顶点w;
     令u 为邻接于w 的顶点;
     while (u!=NULL)
        {if ( u 尚未被标记) {
            把u 加入队列;
            把u 标记为已到达顶点; }
        u = 邻接于w 的下一个顶点;
        }
    }
```

似曾相识?

宽度优先搜索特性

- 定理16-1
  - 设G是一个任意类型的图，*v*是G中的任意顶点。上述breadthFirstSearch(v)的伪代码**能够标记从*v*出发可以到达的所有顶点(包括顶点*v*)**。

graph::bfs实现

```
void bfs (int v, int reach[], int label)
{   //广度优先搜索，   reach[i] = label用来标记顶点i
     arrayQueue<int> q(10);
     reach[v] = label;
     q.push(v);
     while (!q.empty())
       {int w=q.front(); // 获取一个已标记的顶点
         q.pop(); // 从队列中删除一个已标记过的顶点
         // 标记所有邻接自w的没有到达的顶点
         vertexIterator<T> *iw=iterator(w);//顶点w的迭代器
         int u;
         while ( u = iw->next()!=0)//w的下一个邻接点u
         //访问w的下一个邻接点u
         if (reach[u]==0) //u未到达过
              {q.push(u); reach[u] = label; //标记顶点u为已到达}
       delete iw;
      }
}
```

方法graph::bfs复杂性分析

- 从顶点*v*出发，可到达的每一个顶点都被加上标记，且每个顶点只加入到队列中一次，也只从队列中删除一次。
- 当一个顶点从队列中删除时，需要考察它的邻接点
  - 当使用邻接矩阵时，它的邻接矩阵中的行只遍历一次。 $\Theta(n)$.
  - 当使用邻接链表时，它的邻接链表只遍历一次。 Θ(顶点的出度) .
- 总时间(如果有*s* 个顶点被标记)
  - 当使用邻接矩阵时， $\Theta(sn)$
  - 当使用邻接链表时， $\Theta(\Sigma d_i^{out})$ (对于无向图／网络来说，顶点的出度就等于它的度。)

为AdjacencyWDigraph定制的BFS的实现

```
void bfs (int v, int reach[], int label)
{   //广度优先搜索， reach[i] = label用来标记顶点i
     arrayQueue<int> q(10);
     reach[v] = label;
     q.push(v);
     while (!q.empty()) {
          int w=q.front(); // 获取一个已标记的顶点
          q.pop(); // 从队列中删除一个已标记过的顶点
          //标记所有没有到达的 ,w的邻接点
          for (int u = 1; u <= n; u++)
          if (a[w][u] != noEdge && reach[u]==0) { //u未到达过
               q.push(u);
               reach[u] = label;}
     }
}
```

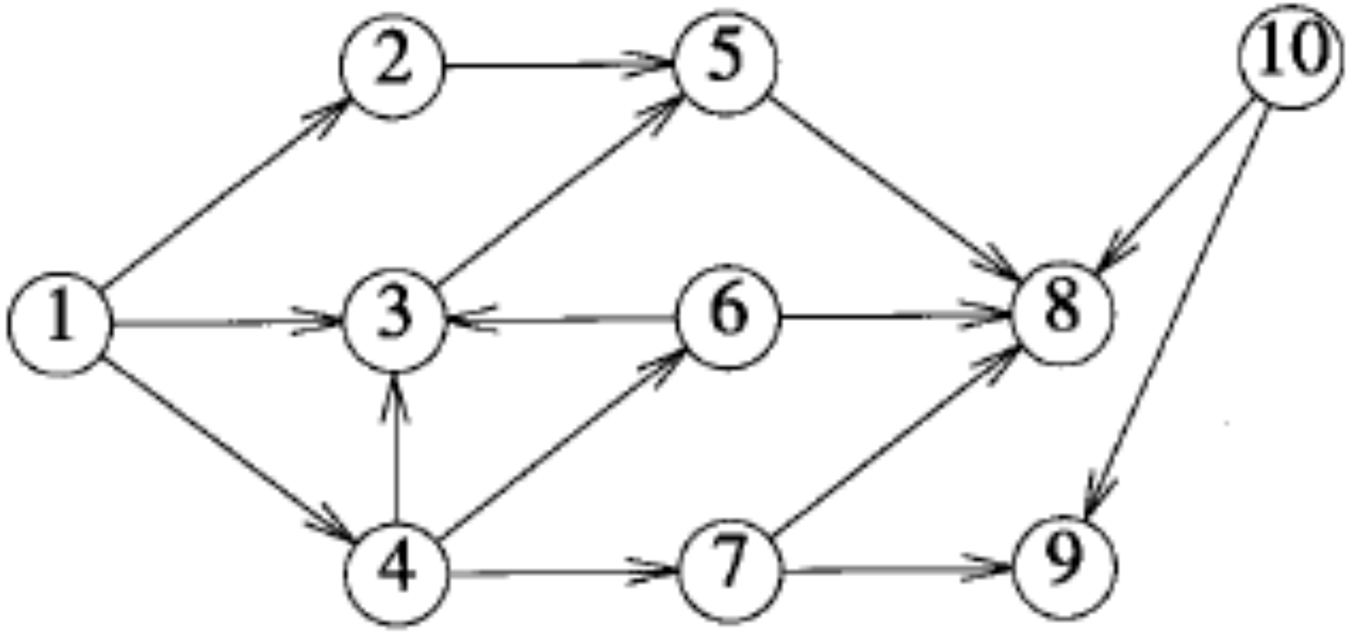
为linkedDigraph定制的BFS的实现

```
void bfs (int v, int reach[], int label)
{   //广度优先搜索，   reach[i] = label用来标记顶点i
     arrayQueue<int> q(10);
     reach[v] = label;
     q.push(v);
     while (!q.empty())
       {int w=q.front(); // 获取一个已标记的顶点
          q.pop(); //从队列中删除一个已标记过的顶点
          //标记所有 没有到达的、邻接自w的顶点
          // 使用指针u沿着邻接表进行搜索
          for (ChainNode<int> *u = aList[w].FirstNode;
                u!=NULL; u = u->next)
               {if (reach[u->element]==0) {// 一个尚未到达的顶点
                    q.push(u->element);
                    reach[u->element] = label;}
               }
     }
}
```

深度优先搜索

- 深度优先搜索(DFS—Depth-First Search)
- 从顶点v 出发，首先将v 标记为已到达顶点，然后选择一个与v 邻接的尚未到达的顶点u，
  - 如果这样的u 不存在，搜索中止。
  - 假设这样的u 存在，那么从u 又开始一个新的DFS。
  - 当从u 开始的搜索结束时，再选择另外一个与v 邻接的尚未到达的顶点，如果这样的顶点不存在，那么搜索终止。而如果存在这样的顶点，又从这个顶点开始DFS，如此循环下去。

深度优先搜索示例



- 从顶点1开始进行DFS。
- 1，2，5，8，4，6，3，7，9

深度优先搜索的实现

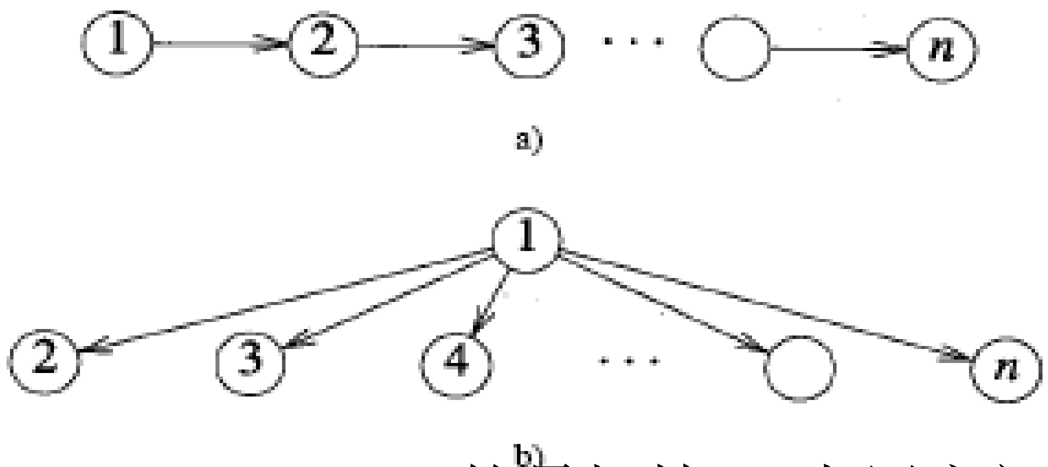
```
void dfs(int v, int reach[], int label)
{// dfs—— graph的public 成员方法
//深度优先搜索， reach[i] = label用来标记顶点i
    graph<T>::reach=reach;
    graph<T>::label=label;
    rDFs(v);//执行dfs
}
void  rDFs (int v)
{// dfs— 保护成员方法，深度优先搜索递归方法
    reach[v] = label;
    vertexIterator<T> *iv=iterator(v);//顶点v的迭代器
    int u;
    while ( u = iv->next()!=0)  //v的下一个邻接点u
         //访问v的下一个邻接点u
        if (reach[u]==0)   //u未到达过
             rDFs (u);
        delete iv;
}
```

深度优先搜索特性

- 定理16-2
  - 设G是一个任意类型的图，v是G中任意顶点。depthFirstSearch(v)可以标记所有从顶点v可到达的顶点(包括v) 。

方法graph::dfs的复杂性分析

- dfs与bfs有相同的时间和空间复杂性。



- (a) depthFirstSearch(1)的最坏情况(占用空间最大，因为不断压栈);
  breadthFirstSearch(1)的最好情况(占用空间最小，因为队列使用最小)
- (b) depthFirstSearch(1)的最好情况
  breadthFirstSearch(1)的最坏情况（因为队列存满其它所有元素）

16.9 应用

- 16.9.1　寻找路径
- 16.9.2　连通图及其构件
- 16.9.3　生成树

16.9.1 寻找路径

- 找一条从顶点theSourse 到达顶点theDestination 的路径
  - 从顶点theSourse开始搜索(宽度或深度优先)且到达顶点theDestination时终止搜索

    如何得到路径?
  - 路径是一顶点序列，path[0]记录路径中的边数(路径长度) ;用数组 path[1:path[0]+1]记录路径中的顶点; length记录顶点的个数=path[0]+1;path[1]= theSourse；path[length]= theDestination

Graph::findPath实现1/2

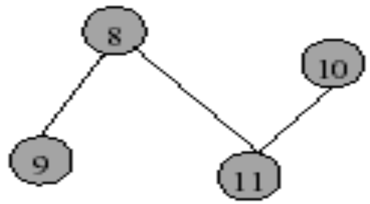
```
int* findPath(int theSource, int theDestination)
   {//寻找一条顶点theSourse到达顶点theDestination的路径，
    // 返回一个数组path， path[0]表示路径长度，
    //path[1] 开始表示路径，如果路径不存在，返回NULL.

    //为调用递归函数 rFindPath(theSourse)初始化
     int n = numberOfVertices();
     path = new int [n + 1];
     path[1] = theSource;      // 路径中的第一个顶点
     length = 1;               // 当前路径长度+ 1
     destination = theDestination;
     reach = new int [n + 1];
     for (int i = 1; i <= n; i++)
          reach[i] = 0;
```

Graph::findPath实现2/2

```
// 搜索路径
    if (theSource == theDestination || rFindPath(theSource))
      // 找到一条路径
      path[0] = length - 1;
    else
      { //路径不存在
        delete [] path;
        path = NULL;
      }

    delete [] reach;
    return path;
}
```

grapg::rFindPath实现

```
bool rFindPath(int s)
{//寻找顶点s到达顶点destination的路径，s≠destination
  //找到一条路径，返回true; 否则，返回false
        reach[s] = 1; //将s标记为已到达顶点
        vertexIterator<T>* is = iterator(s);
        int u;
        while ((u = is->next()) != 0)
         {// 访问s的一个未到达邻接点
           if (reach[u] == 0)   // u 未到达
             {// 移到顶点u
              path[++length] = u; // 将 u 加入路径
              if (u == destination || rFindPath(u))
                     return true;
              // 从u 到 destination没有路径
             length--;    // 从路径中删除 u
             }
         }
        delete is;
        return false;
    }
```



16.9.2 连通图及其构件

- 一个无向图是连通图吗?
- 从任意顶点开始执行DFS或BFS
- 一个无向图是连通图 *当且仅当* 所有顶点被标记为已到达顶点.
  - 所有n个顶点被标记为已到达顶点.
  - ⇒任意两个顶点u和v之间存在路径.

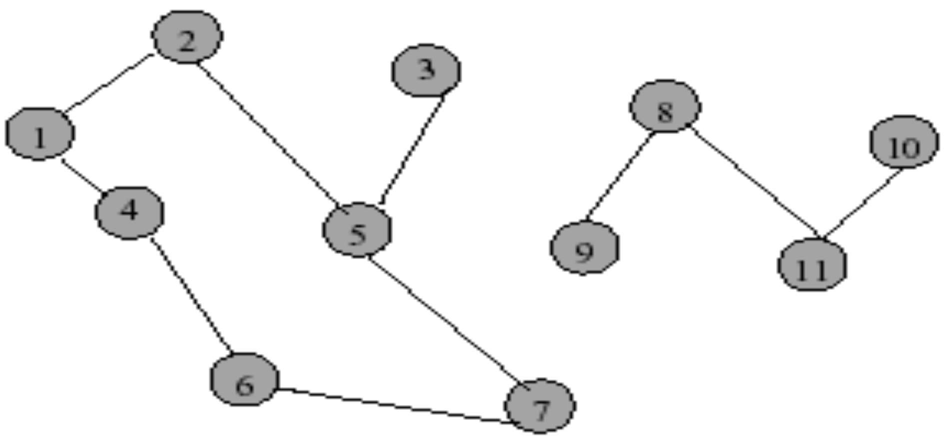
判断无向图是否是连通图的实现

```
bool connected()
{ //当且仅当图是连通的，则返回true
   if (directed()) throw  ……//如果图不是无向图， 抛出异常;
  int n =numberofVertices();//图中顶点数
  //置所有顶点为未到达顶点
  int *reach = new int [n+1];
  for (int i = 1; i <= n; i++)
        reach[i] = 0;
  //对从顶点1出发可到达的顶点进行标记
   dfs(1, reach, 1);
   //检查是否所有顶点都已经被标记
   for (int i = 1; i <= n; i++)
      if (reach[i]==0) return false;
   return true;
}
```

连通构件

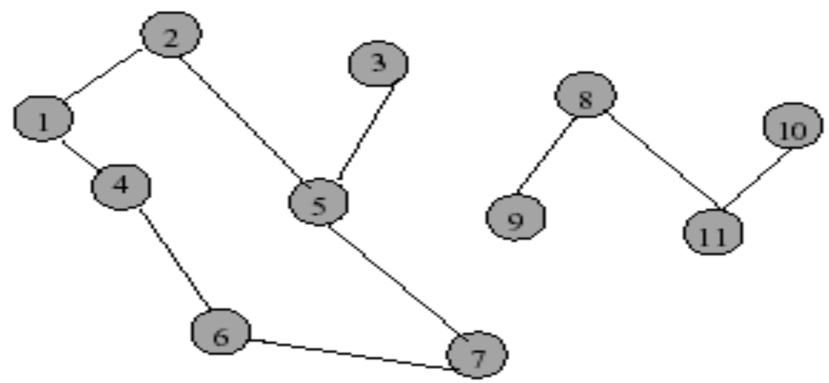
从顶点i 可到达的顶点的集合C与连接C中顶点的边称为连通构件(connected component)。

构件标记问题：给无向图中的顶点做标记，两个顶点具有相同的标记，*当且仅当* 两个顶点属于同一个构件。



标记连通构件的实现

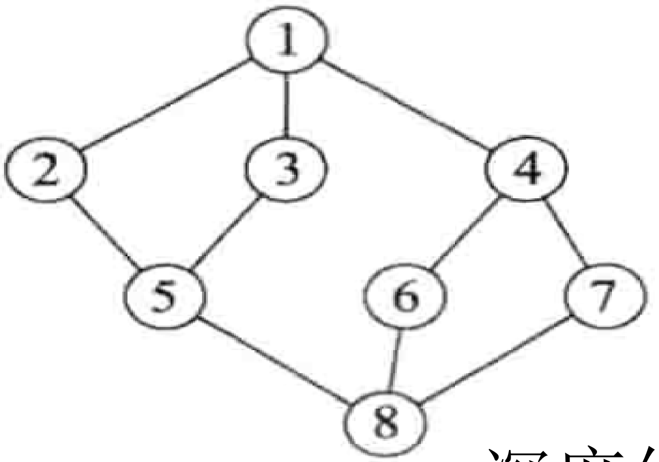
```
int labelcomponents(int c[])
{ // 构件标识, 返回构件的数目,并用c[1:n]表示构件编号
   if (directed()) throw  ……//如果图不是无向图， 抛出异常；
  int n = numberofVertices();//图中顶点数
  // 初始时， 所有顶点都不属于任何构件
  for (int i = 1; i <= n; i++)
        c[i] = 0;
  int label = 0;
     // 识别构件
  for (int i = 1; i <= n; i++)
     if (c[i]==0) //顶点i未到达
      // 顶点i 属于一个新的构件
     {label++ ;
      bfs(i, c, label);} // 标记新构件
 return label;
}
```



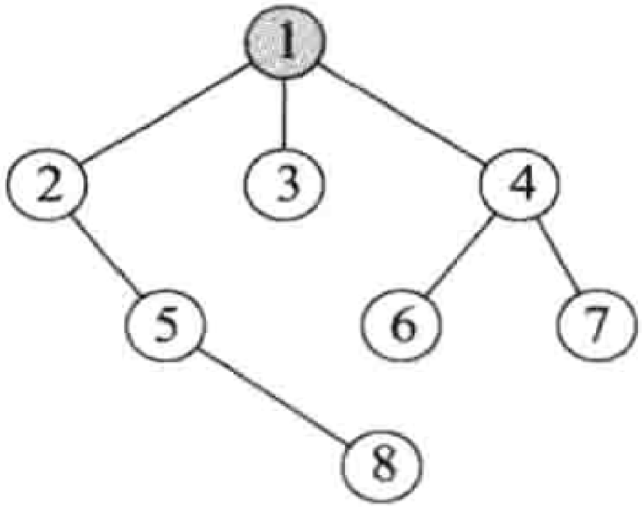
16.9.3 生成树

- 在一个n 顶点的**连通无向图**中，如果从任一个顶点开始进行BFS (DFS)，有n - 1个顶点是可到达的。
- 通过一条边到达一个新顶点u
  - ➔用来到达n - 1个顶点的边的数目正好是n - 1。
- 用来到达n - 1个顶点的边的集合中包含从v 到图中其他每个顶点的路径，因此它构成了一个连通子图，该子图即为G的生成树。➔宽度优先生成树(深度优先生成树)。

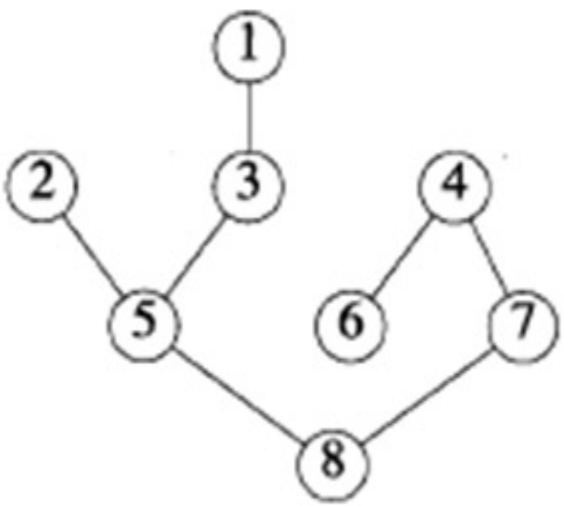
生成树示例



宽度优先生成树



深度优先生成树



作业

P399 练习 21

P412练习 41 前3问