山东大学2017–2018学年上学期高等数学（1）课程试卷评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题（本大题包含5小题，每小题4分，共20分）。

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 $\varepsilon-\delta$ 的定义是_ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$_.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=$ _ 0 _.

3. 函数$\ln(1+x)$的带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$, $(x\to 0)$.

4. $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

5. 方程$y'+2y=1$的通解为$y=Ce^{-2x}+\frac{1}{2}$

得分	阅卷人

二、选择题(请将答案写入下面每题的空格里。本大题包含 5 小题，每小题4分，共20分)。

1.D 2. A 3. B 4. D 5. D

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}$ 在 $x=0$

A. 连续. B. 是可去间断点.
C. 是跳跃间断点. D. 是第二类间断点.

2. 设当$x\to 0$时, $\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)$是比x^2高阶的无穷小, 则

A. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{8}$. B. $a=0, b=1$. C. $a=\frac{1}{2}, b=1$. D. $a=1, b=-\frac{1}{8}$.

3. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内二阶导数存在, 且$f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x^2}=1$, 则

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值.

B. $f(0)$是$f(x)$的极小值.

C. $(0,f(0))$是$f(x)$的拐点.

D. $x=0$不是$f(x)$的极值点, $(0,f(0))$也不是$f(x)$的拐点.

4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 则下列论断不正确的是

A. 变上限积分函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

B. $f(x)$的两个原函数之差为常量函数.

C. $f(x)$的任意两个原函数之和必为$2f(x)$的原函数.

D. 若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数, $G(u)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数, 则$G(F(x))$必为$G(f(x))$的原函数.

5. 令$f(x)=x^3(1-x)^3$, 则$f'''(x)$在$(0,1)$内的零点个数为

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

得分	阅卷人

三、计算题(本大题包含8小题，前两小题每题5分，后六小题每题6分，共46分。请写出解答步骤)。

1. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

解

原式$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2$ ……………………(3分)

$=e^2$ ……………………(5分)

密 封 线

学院专业级 学号姓名

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解利用 Taylor 公式,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^2sinx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x}{x^2(x+o(x))}$$ ……………………(3 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=-\frac{1}{6}$$ ……………………(5 分)

也可利用 L'Hospital 法则.

3. 求函数 $y=\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$ 的微分.

解直接求导,得

$$dy=\frac{\frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}-(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}dx$$ ……………………(3 分)

$$=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$ ……………………(6 分)

也可利用微分形式的不变性.

4. 求高阶导数 $(x^2\sin 2x)^{(9)}\big|_{x=0}$.

解利用 Taylor 展开, 得

$$x^2sin2x=2x^3-\frac{2^3x^5}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-1}x^{2m+1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m+2}),$$ ……………………(3 分)

所以, $\frac{(x^2\sin2x)^{(9)}|_{x=0}}{9!}=(-1)^{4-1}\frac{2^7}{7!}$, 由此得, $(x^2\sin2x)^{(9)}|_{x=0}=-9\cdot2^{10}$ ……………(6 分)

也可利用 Leibnitz 公式, 先求出 $(x^2\sin2x)^{(9)}$.

5. 计算不定积分 $\int\arctan\sqrt{x}dx$.

解利用分部积分及凑微分,得

原式 $=x\arctan\sqrt{x}-\int xd\arctan\sqrt{x}$

$=x\arctan\sqrt{x}-\int\frac{x}{1+x}d\sqrt{x}$ ……………………(3 分)

$$=x\arctan\sqrt{x}-\int(1-\frac{1}{1+x})d\sqrt{x}$$

$=x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctan\sqrt{x}+C$ ……………………(6 分)

也可利用分部积分及换元积分法.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$, 计算定积分 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

解

$$\int_1^3 f(x-2)dx\overset{t=x-2}{=}\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0(1+t^2)dt+\int_0^1 e^{-t}dt$$ ……………………(3 分)

$$=(t+\frac{t^3}{3})\Big|_{-1}^0-e^{-t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$$ ……………………(6 分)

也可先计算 f(x-2), 后积分.

7. 求初值问题 $\begin{cases}xy'-\sqrt{x^2-y^2}=y\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

解

原微分方程可化为

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}dx$$

即

$$\frac{d(\frac{y}{x})}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}=\frac{sgn(x)}{x}dx$$

所以有

$\arcsin\frac{y}{x}=sgn(x)ln|x|+C$ ……………………(5 分)

特解为 $\arcsin\frac{y}{x}=sgn(x)ln|x|$ ……………………(6 分)

学院专业级 学号姓名

密 封 线

也可用常规方法化为齐次微分方程

8. 求微分方程 $y''-2y'+y=x(1+2e^x)$ 的通解.

解

对应的齐次线性方程的特征方程为$r^2-2r+1=0$，特征根为$r_{1,2}=1$

对应的齐次方程的通解为$\bar{y}=(c_1x+c_2)e^x$……(3 分)

对应于自由项 x 的特解$y_1^*=x+2$

对应于自由项$2xe^x$的特解为$y_2^*=\frac{1}{3}x^3e^x$

原方程通解为$y=\bar{y}+y_1^*+y_2^*=(c_1x+c_2)e^x+x+2+\frac{1}{3}x^3e^x$……(6 分)

得分	阅卷人

四、综合题(本大题包含 2 小题，第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分,请写出解答步骤)。

1. 设一容器是由曲线$x=1+0.5y-\sin y$（$0\le y\le 4\pi$ 米）绕 y 轴旋转而成的旋转体，现向此空容器中以每分钟 $1\,m^3$ 的速度向里注水，问何时水面上升的速度最慢？何时注满水？

解

容器由底面到高为 y 的容积

$$V(y)=\int_0^y \pi x^2dy=\int_0^y \pi(1+0.5y-siny)^2dy$$

$$=\pi(\frac{3}{2}y+\frac{1}{12}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}sin2y+2\cos y+y\cos y-\sin y-2)$$

t 分钟后注水的体积 V(y), $t=V(y)$，$V'(y)=\pi(1+0.5y-\sin y)^2$,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\frac{dV}{dy}}=\frac{1}{\pi(1+0.5y-\sin y)^2}$$

……(4 分)

求$f(y)=1+0.5y-\sin y$在$[0,4\pi]$的最大值

$$f'(y)=\frac{1}{2}-cosy=0,y=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$$

$f_{max}=\max\{f\left(\frac{\pi}{3}\right),f\left(\frac{5\pi}{3}\right),f\left(\frac{7\pi}{3}\right),f\left(\frac{11\pi}{3}\right),f(0),f(4\pi)\}=f\left(\frac{11\pi}{3}\right)=1+\frac{11\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，即注水到高为$\frac{11\pi}{3}$时水面上升的速度最慢。

注满水用的时间为 V（4π）=π（$10\pi+\frac{16}{3}\pi^3+8\pi^2$）分钟……(8 分)

2. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，且满足 $f'(x)>f(x)+e^x, f(0)=1$，证明对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>(1+x)e^x$.

证

由 $f'(x)>f(x)+e^x$ 可得

$$-e^{-x}f(+e^{-x}f'(x)>1,$$

即$(e^{-x}f(x))'>1$……(3 分)

当 x>0 时，

$$\int_0^x(e^{-t}f(t))'dt>x$$

即$e^{-x}f(x)-f(0)>x$,

所以$f(x)>(1+x)e^x$……(6 分))

密　封　线

学院专业级　学号姓名

学院 专业 级 学号 姓名

密 封 线

山东大学 2016--2017 学年上学期 高等数学（1）课程试卷评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题（本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。只要与下列答案等价即得满分，其他酌情给分.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 的 $\varepsilon-N$ 的定义是对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时总有 $|a_n|<\varepsilon$

2. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$ 此题不写 $x\neq 0$ 不扣分.

3. 函数 $\sqrt{1+x}$ 的带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式是 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2 2!}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n+o(x^n)$，$(x\to 0)$. 此题不写 $(x\to 0)$ 扣 1 分.

4. $|x|$ 的一个原函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2, x<0\end{cases}$

5. 方程 $y'+y=1$ 的通解为 $y=1+Ce^{-x}$

得分	阅卷人

二、选择题(请将答案写入下面每题的空格里。本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）。

1.A 2.B 3.B 4.B 5.B

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-nx^2}{1+nx}$，则其定义域为

   A. $(-\infty,+\infty)$. B. $\{x\,|\,x\neq-\frac{1}{n}, n=1,2,3,\cdots\}$.

   C. $\{x\,|\,x\neq 0, x\in R\}$. D. 以上皆不正确.

2. 设当 $x\to 0$ 时，$\sin x-(ax^2+bx)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

   A. $a=\frac{1}{6}, b=1$. B. $a=0, b=1$. C. $a=-\frac{1}{6}, b=1$. D. $a=-1, b=0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶导数存在，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^2}=1$，则

   A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

   B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

   C. $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

   D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $f(x)=\int_0^x t^2 e^{-t^2}dt$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上

   A. 单调增加，凸的. B. 单调增加，凹的.

   C. 单调减少，凸的. D. 单调减少，凹的.

5. $\int_{-1}^{1}(1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx=$

   A. π. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2π. D. $\frac{\pi}{4}$.

得分	阅卷人

三、计算题(本大题包含 8 小题，前两小题每题 5 分，后六小题每题 6 分，共 46 分。请写出解答步骤)。

1. 计算微分 $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 原式 $=\dfrac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$ ……………………(4 分)

$=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ……………………(5 分)

2. 计算高阶导数 $(x^2e^{2x})^{(10)}$.

解 由莱布尼兹公式得

$$(x^2e^{2x})^{(10)}=\sum_{n=0}^{10}C_{10}^{n}(x^2)^{(n)}(e^{2x})^{(10-n)}$$

$=x^2(e^{2x})^{(10)}+C_{10}^{1}(x^2)'(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^{2}(x^2)''(e^{2x})^{(8)}$ ……………… (3 分)

$=(2^{10}x^2+10\cdot 2^{10}x+45\cdot 2^9)e^{2x}$ ……………………(5 分)

学院　专业　级　学号　姓名　密　封　线

山东大学 2016–2017 学年上学期 高等数学（1） 课程试卷

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+(x-1)}$.

解　此极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{-1}{e-x}+1}\text{ ......(3 分)}$$

$$=\frac{2e}{e-1}\text{ ......(6 分)}$$

或利用 Taylor 公式，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))-(1-x+o(x))}{(1-\frac{1}{e}x+o(x))+(x-1)}\text{ ......(3 分)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{(1-\frac{1}{e})x+o(x)}$$

$$=\frac{2e}{e-1}\text{ ......(6 分)}$$

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{2}-1)^n$.

解 原极限 $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(2\sqrt[n]{2}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}}$， ......(2 分)

利用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2\cdot 2^x-1)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\cdot 2^x\ln 2}{2\cdot 2^x-1}=\ln 4\text{， ......(5 分)}$$

所以由海涅定理，知原极限 $=e^{\ln 4}=4$ ......(6 分)

或

$$原极限=\lim_{n\to\infty}(2e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}[2(1+\frac{1}{n}\ln 2+o(\frac{1}{n}))-1]^n\text{ ......(2 分)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n}))^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n})\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}\ln 4+o(\frac{1}{n})}}\right)^{\ln 4+o(1)}\text{ ......(5 分)}$$

$$=e^{\ln 4}=4\text{ ......(6 分)}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解 做变换 $t=x-1$，则

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{2-x}dx+\int_0^1\sin x\,dx\text{ ......(3 分)}$$

$$=-\ln|2-x|\Big|_{-1}^0-\cos x\Big|_0^{-1}$$

$$=1-\cos 1-\ln 2+\ln 3\text{ ......(6 分)}$$

6. 求积分 $\int\dfrac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 做变换 $x=2\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$原式=\int\frac{4\sin^2 t}{(4-4\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}2\cos t\,dt$$

$$=\int\tan^2 t\,dt\text{ ......(3 分)}$$

$$=\int(\sec^2 t-1)dt$$

$$=\tan t-t+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\frac{x}{2}+C\text{ ......(6 分)}$$

或 $原式=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{xd(4-x^2)}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int xd\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$ ......(3 分)

$$=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

学院 专业 级 学号 姓名 密 封 线

$=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\dfrac{x}{2}+C$ ……………………………………(6 分)

7. 求初值问题 $\begin{cases} y'-2xy=e^{x^2} \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解.

解 此是一阶线性非齐次常微方程, 可利用常数变易法或通解公式, 得通解为

$y=e^{x^2}(x+C)$ ……………………………………(4 分)

代入初始条件, 得 $C=1$, 所以特解为 $y=e^{x^2}(x+1)$ ……………………(6 分)

或 用凑微分法, 原方程等价于

$e^{-x^2}dy-2xye^{-x^2}dx=dx$,

即 $e^{-x^2}dy+yde^{-x^2}=dx$,

所以 $d(ye^{-x^2})=dx$,

因此 $ye^{-x^2}=x+C$, 下略.

8. 求微分方程 $y''+2y'+y=\sin x$ 的通解.

解 对应的特征方程为 $r^2+2r+1=0$, 得特征根 $r=-1,-1$ ……………………(2 分)

令原方程的特解 $y=a\sin x+b\cos x$, 代入方程, 得 $a=0, b=-\dfrac{1}{2}$ ……………(4 分)

所以所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}-\dfrac{1}{2}\cos x$ ……………………(6 分)

得分	阅卷人

四、综合题(本大题包含 2 小题，第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分，请写出解答步骤)。

1. 要设计一垃圾桶: 下底面是半径为 r 的圆盘, 侧面是高为 h 的圆柱形, 上底面是向上凸的半球面. 当表面积一定时, 问 $\dfrac{h}{r}$ 为何值时桶的体积最大?

解 由题设, 桶的表面积 $S=\pi r^2+2\pi rh+2\pi r^2=3\pi r^2+2\pi rh$,

由此得 $h=\dfrac{S}{2\pi r}-\dfrac{3}{2}r$.

注意到 $h>0$, 可知 $0<r<\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ ……………………………………(2 分)

而桶的容积 $V(r)=\pi r^2h+\dfrac{2}{3}\pi r^3=\dfrac{S}{2}r-\dfrac{5}{6}\pi r^3$, ……………………(4 分)

由 $V'(r)=\dfrac{S}{2}-\dfrac{5}{2}\pi r^2=0$, 得唯一驻点 $r=\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}}\in(0,\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}})$, ……………(6 分)

$V''(\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}})=-\sqrt{5\pi S}<0$, 所以, $V(\sqrt{\dfrac{S}{5\pi}})$ 是 $V(r)$ 的最大值…,

此时 $h=r$, 即 $\dfrac{h}{r}=1$. ……………………………………(8 分)

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意的 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)>\int_0^x f(t)dt$，证明对任意的 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)>0$.

证 首先注意到 $f(0)>\int_0^0 f(t)dt=0$ ……………………………………(1 分)

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0$，$F(x)$ 在 $[0.1]$ 连续，且在 $(0,1)$ 上可导，$F'(x)=f(x)$.

所以 在 $(0,1)$ 上，$F'(x)>F(x)$,.

由此得 $(e^{-x}F(x))'=e^{-x}(F'(x)-F(x))>0$ ……………………………(3 分)

对任意的 $x\in(0,1]$，$G(t)=e^{-t}F(t)$ 在 $[0,x]$ 连续，且在 $(0,x)$ 上可导，

利用拉格朗日中值定理，可得 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得 $G(x)-G(0)=G'(\xi)x>0$，

因此 $G(x)>G(0)=F(0)=0$，即 $e^{-x}F(x)>0$，

所以 $F(x)>0$ 因此有 $f(x)>F(x)>0$ ……………………………(6 分)

总之结论成立.