第4章 功和能

§4-1 功

§4-2 动能定理

§4-3 势能

§4-4 引力势能

§4-5 由势能求保守力

§4-6 功能原理和机械能守恒定律

§4-7 守恒定律的意义

§4-8 碰撞

§4-10 流体的稳定流动***

§4-11 伯努利方程***

主要内容

1、引入功、动能和势能等概念

2、阐述力对物体做功与物体能间的关系

——功能原理

3、从机械能的角度揭示自然界中的普遍规律之一

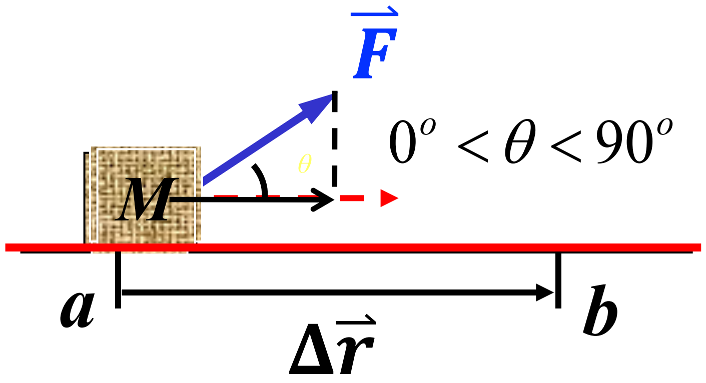
——机械能守恒定律

4、了解流体力学规律***

——伯努利方程***

§4-1 功

功（work）：力在物体移动过程中的空间效果。



1. 恒力作的功

$$A = F\cos\theta\,\Delta r$$　　矢量表达式：$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

点乘→标量积：功为标量。

✓ $A = 0$　的条件：$\vec{F} = 0$ 或 $\Delta\vec{r} = 0$ 或 $\theta = 90^o$ $(\vec{F}\perp\Delta\vec{r})$，力不做功。

✓ $A > 0$　的条件：$\theta < 90^o$，力做正功。

✓ $A < 0$　的条件：$\theta > 90^o$，力做负功。

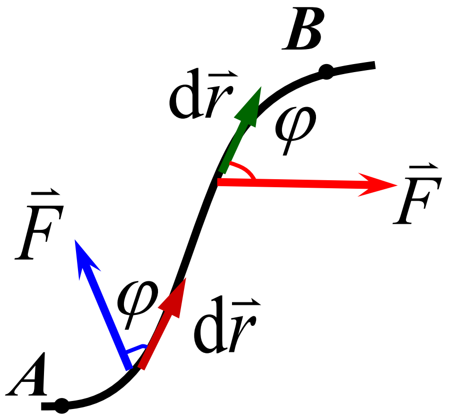
位移无限小时：$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F|d\vec{r}|\cos\theta = F ds\cos\theta$

(dA 称为元功)

2. 变力所作的功

如果力是位置的函数，设质点在力的作用下沿一曲线运动，则功为：

元功： dA　　元位移： $d\vec{r}$　　总位移：$\Delta\vec{r} = \int_P^Q d\vec{r}$



在位移元中将力视为恒力，力沿P、Q所作的功为所有无限小段位移上的元功积分：

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F|d\vec{r}|\cos\varphi = F ds\cos\varphi$$

$$A = \int_A^B dA = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F ds\cos\varphi$$

$$A = \int_A^B \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

3. 合力所作的功

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n\right) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \quad = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

结论：合力的功为各分力的功的代数和

注意：

(1) 功是描述力作用于物体的空间积累效应的物理量，是过程量。

(2) 功是物体运动状态变化的一种量度

力使物体的运动状态发生变化，所以力对物体作功，必定改变物体的运动状态。

(3) 力$\vec{F}$和力的作用点沿力的方向的位移$d\vec{r}$，是功的两个不可缺少的因素。

实际问题中，物体的位移和力的作用点的位移并不是一回事，这时计算功必须考察力的作用点的位移。注意区别力的作用点的变更与力的作用点的位移这两种情况。

例如，人走路时虽然鞋底对路面有静摩擦力作用，但是随着人的走动，受力点不断在路面上更换，而没有发生位移，所以静摩擦力不作功。

(4)合外力作的功，等于各分力沿共同位移所作功的代数和

$$A=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B (\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_A^B \vec{F}_1\cdot d\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_2\cdot d\vec{r}+\cdots+\int_A^B \vec{F}_n\cdot d\vec{r}$$

$$=A_i+A_2+\cdots+A_n$$

(5) 力和位移都是矢量，而功是标量，但它有正、负之分。

当功为正值时，表示力对质点作功；当功为负值时，表示质点克服此力而作功。

(6) 由于位移与参考系的选择有关，所以功也与参考系的选择有关。

4、功 率（power）：P

定义：力在单位时间内所作的功

公式为： $P = \frac{dA}{dt}$

另一种形式： $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

功率等于力在运动方向的分量与速率的乘积，或等于力的大小与速度在力的方向的分量的乘积。

SI制中功的单位：J (焦耳，简称焦)，**1 J = 1 N·m**

功率的单位：$J\cdot s^{-1}$ (焦耳/秒) 或 W (瓦特, 简称瓦)

工程上，常用：功：1 kW.h = 3.6 × 10^6 J

注意： $$P=\frac{dA}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

（1） 功率是描述力做功快慢的物理量，是由状态决定的量。

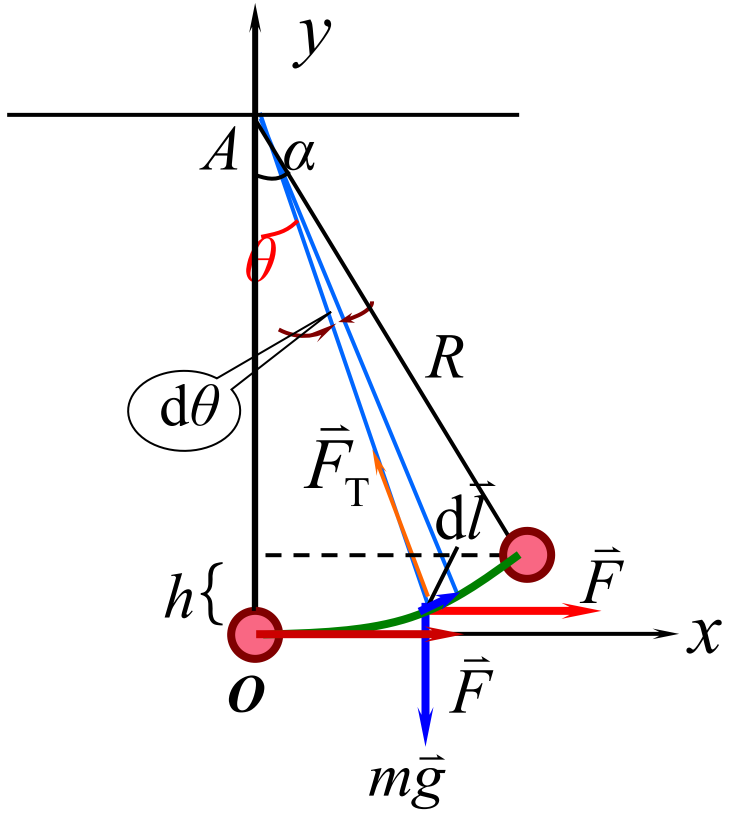
（2）通常所说某机械的功率，多指它的额定功率，即机械正常工作时的最大瞬时功率。

思考题：为什么汽车爬坡时，要低速行驶？

爬坡时需要的牵引力较大。汽车发动机功率是恒定的，减小速度，可获得更大的驱动力。

例1 质量为m的小球系在长度为R的细绳末端，细绳的另一端固定在点A，将小球悬挂在空间。现小球在水平推力$\vec{F}$的作用下，缓慢地从竖直位置移到细绳与竖直方向成α角的位置。求水平推力$\vec{F}$所作的功(不考虑空气阻力)。（用m、g、R、α表示）

解：取如图所示的坐标系,



小球受推力 $\vec{F}$、细绳的张力$\vec{F}_T$ 和小球所受重力$m\vec{g}$三个力始终是平衡的, 即

$$\vec{F}+\vec{F}_T+m\vec{g}=0$$

其分量式为:

在x方向：$F_T\sin\theta = F$

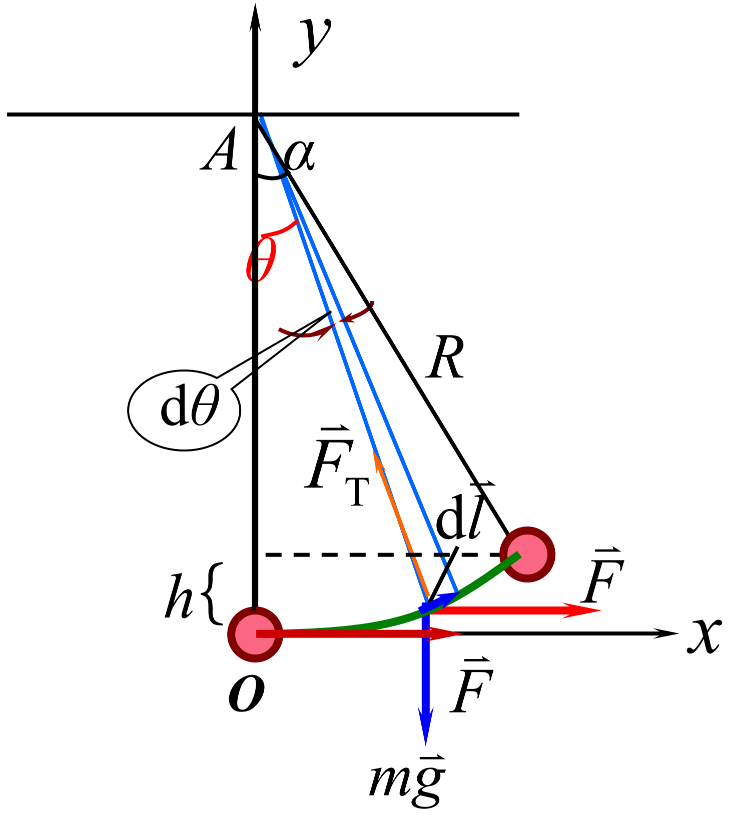
在y方向：$F_T\cos\theta = mg$

$$\Rightarrow F = mg\tan\theta$$

$$F = mg\tan\theta$$

取元位移 $d\vec{l}$ ，变力 $\vec{F}$ 所作的元功为：

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F ds\cos\theta = F\cos\theta\, R d\theta$$

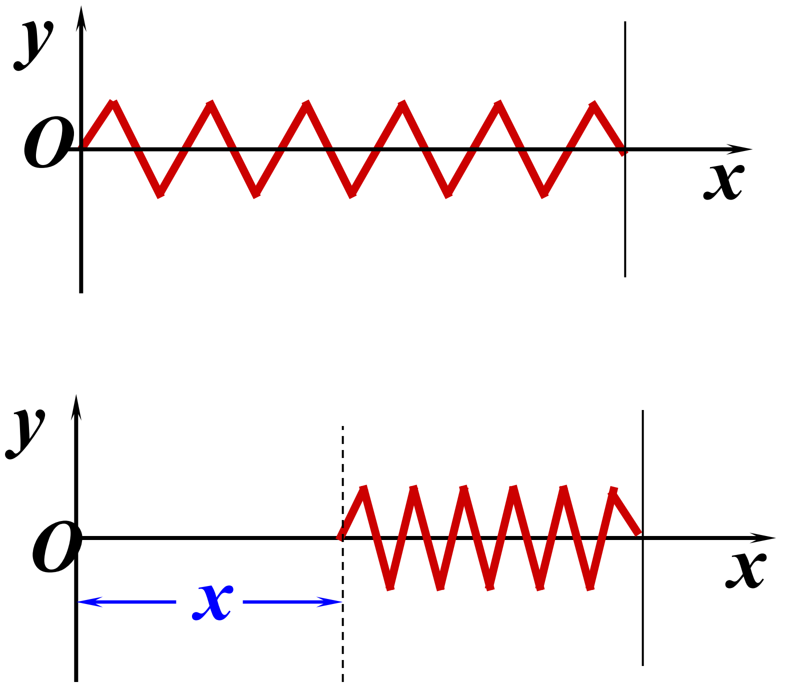


偏转α角的过程中的总功为:

$$A = \int dA = \int_0^{\alpha} F\cos\theta\, R d\theta = \int_0^{\alpha} mg\tan\theta\cos\theta\, R d\theta$$

$$= mgR\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta \quad = mgR(1-\cos\alpha)$$

例2 已知弹簧的劲度系数 $k = 200\mathrm{N \cdot m^{-1}}$，若忽略弹簧的质量和摩擦力,求将弹簧压缩10 cm，弹性力所作的功和外力所作的功。



解：取如图所示的坐标系

弹簧的弹力为 $\vec{F} = -kx\vec{i}$

在x 处取元位移 $\mathrm{d}x$, 弹力所作元功

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} = -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} = -kx\mathrm{d}x$$

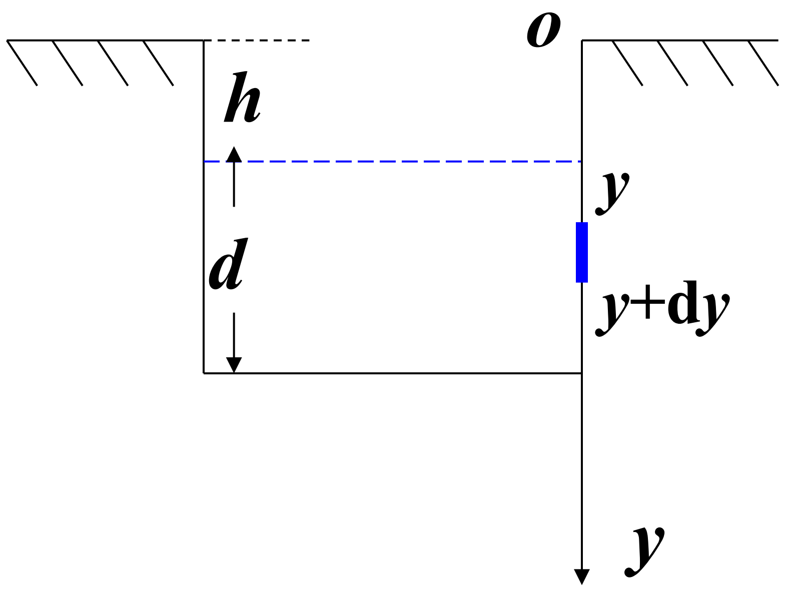
弹性力所作的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^{0.1} -kx\,\mathrm{d}x = -1.0\ \mathrm{J}$$

外力所作的功为 $A' = -A = 1.0\mathrm{J}$

例3： 一蓄水池，面积为 S，所蓄的水比地面低 h，水深为 d。用抽水泵把池里的水抽到地面上，抽水机需要作多少功？

解：建立坐标系



$$dv = sdy \quad dm = \rho dv = \rho sdy$$

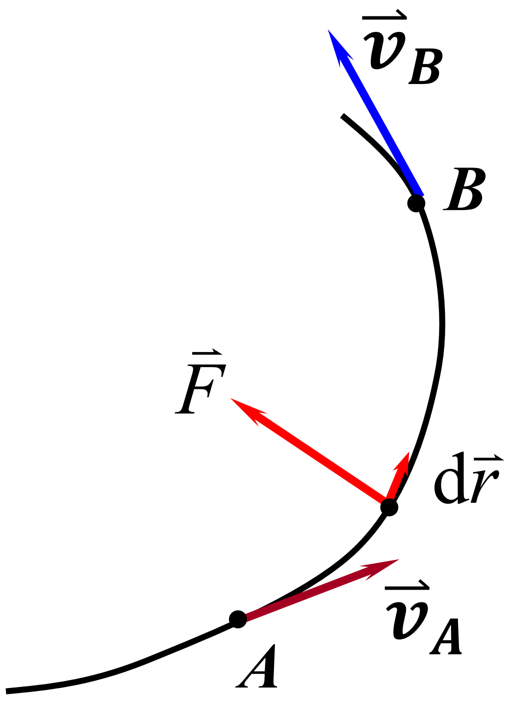
元功： $dw = \rho gsydy$

积分：

$$w = \int dw = \int_h^{h+d} \rho gsydy$$

$$= \frac{1}{2}\rho gsy^2\Big|_h^{h+d} = \frac{1}{2}\rho gs(2hd + d^2)$$

§4-2 动能定理



质点由点A运动到点B，合力对质点所作的功为

$$A = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\because \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad d\vec{r} = \vec{v}dt,$$

$$\therefore A = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

质点的动能(kinetic energy)定义：质点质量与运动速率平方的乘积的一半。

用E_k表示，即 $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

所以有 $\boxed{A = E_{kB} - E_{kA}}$

动能定理：作用于质点的合力所作的功，等于质点动能的增量。

✓ $\Delta A > 0$ ，表示合力$\vec{F}$对质点做正功， $E_{kB} - E_{kA} > 0$ ，质点的动能增大；

✓ $\Delta A < 0$ ，表示合力$\vec{F}$对质点做负功， $E_{kB} - E_{kA} < 0$ ，质点的动能减小；

结论：对于一个运动质点，合力所做的功（正值或负值），在数值上等于该质点动能的改变（增大或缩小）。

动能是质点自身的运动速率所决定的对外做功的能力，是质点能量的一种形式。

所以说，功是质点能量改变的量度。

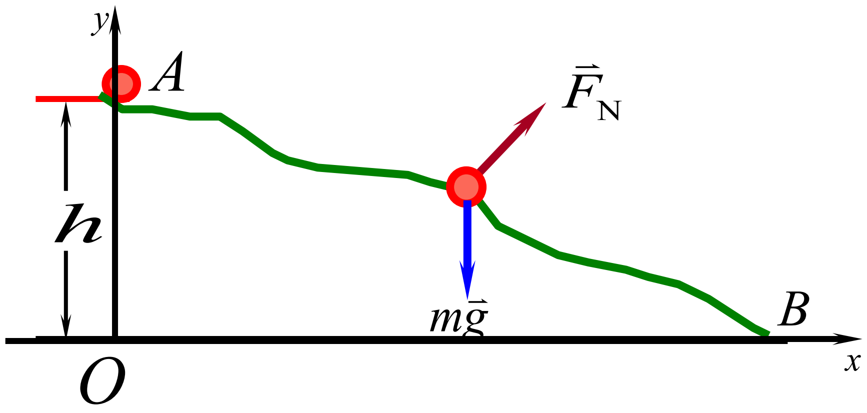
动能定理讨论：

（1）动能定理反映的是某一力学过程中，物体运动状态变化与力的空间累积效应的关系。动能和运动状态相联系，功和运动过程相联系，运动过程中动能的变化由功来量度。对功的认识就从物体在力的作用下发生位移这种现象，深入到改变物体动能这一本质。

（2）功和动能都是与参照系有关的量。在一般情况下，如无特别声明，就是指以地面为参照系。

$$\begin{cases}\text{功是过程量}\\ \text{动能是状态量}\end{cases}$$

例3 小球以初速率v_A沿光滑曲面向下滚动, 如图所示。问当小球滚到距出发点A的垂直距离为h的B处时, 速率为多大？



解 建立右图的坐标系，

小球在滚动过程中受到

$m\vec{g}$ 和 $\vec{F}_N$ 两个力的作用。

合力为 $\vec{F}=m\vec{g}+\vec{F}_N$

根据动能定理有 $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$

即 $\int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_N\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$

因$\vec{F}_{\mathrm{N}}$始终垂直于$\mathrm{d}\vec{r}$， 所以 $\int_A^B \vec{F}_{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

于是有 $$\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

而重力加速度的分量式 $g_y = -g$， $g_x = 0$

所以 $$\int_A^B m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -mg\,\mathrm{d}y = \int_h^0 -mg\,\mathrm{d}y = mgh$$

即 $$mgh = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2$$

解得末速率为 $v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2gh}$

§4-3 势能、 §4-4 引力势能

势能（Potential Energy）：由物体间的相互作用和相对位置决定的能量。

动能可以属于某个物体本身所有，而势能只能属于相互作用着的物体构成的系统所有。

1、引力势和重力势能

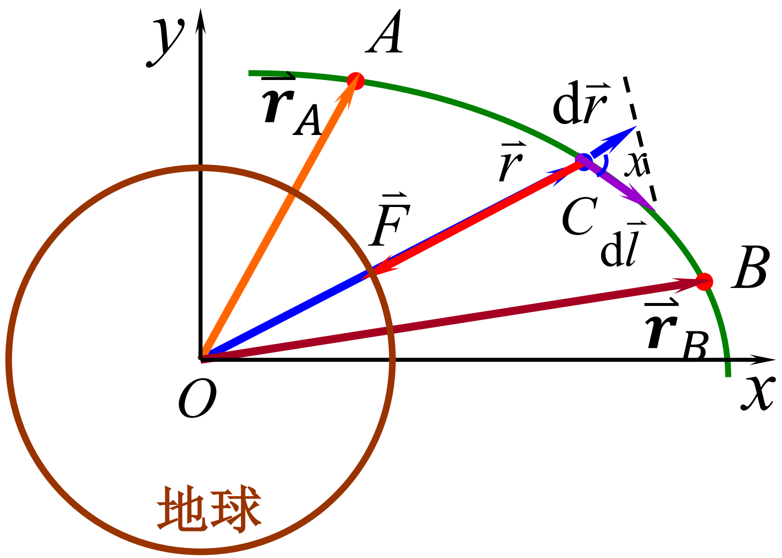
由物体间的万有引力和相对位置所决定的势能，称为万有引力势能，简称**引力势能**。

重力势能是处于地球附近的物体与地球之间万有引力作用结果的特例。

1、引力势和重力势能

物体沿一曲线从点A移到点B。当物体在任一点C时，所受地球引力为

$$\vec{F} = -G\frac{mm_e}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

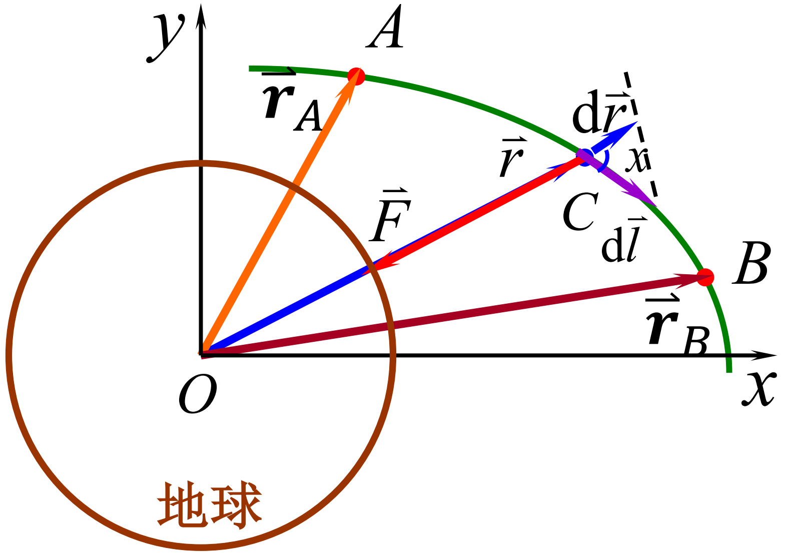


取元位移$d\vec{l}$ ，则有 $|d\vec{l}|\cos\alpha = d|\vec{r}| = dr$

引力$\vec{F}$所作的元功为：

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = -G\frac{mm_e}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot d\vec{l} = -G\frac{mm_e}{r^2}dr$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -G\frac{mm_e}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot d\vec{l} = -G\frac{mm_e}{r^2}dr$$



物体从点A到点B，引力$\vec{F}$ 所作的总功为：

$$A = \int_A^B dA = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{mm_e}{r^2}dr = G\frac{mm_e}{r_B} - G\frac{mm_e}{r_A}$$

若选择无限远处引力势能为零，引力势能表达式为

$$E_P = -G\frac{mm_e}{r}$$

物体在点A 和点B 的引力势能分别为：$E_{PA} = -G\frac{mm_e}{r_A}$ $\quad E_{PB} = -G\frac{mm_e}{r_B}$

所以 $A = G\frac{mm_e}{r_B} - G\frac{mm_e}{r_A} = -(E_{PB} - E_{PA})$

万有引力所作的功等于系统引力势能增量的负值，即引力势能的降低。

$$A = G\frac{mm_e}{r_B} - G\frac{mm_e}{r_A} = -(E_{PB} - E_{PA})$$

在地球表面附近时，近似有$r_A r_B = R^2$， $g = \frac{Gm_e}{R^2}$

$$A = -Gmm_e\left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B}\right) = -mgR^2\left(\frac{r_B - r_A}{R^2}\right)$$

$$A = -mg(r_B - r_A) = -mg(h_B - h_A)$$

式中$h_A = r_A - R$，$h_B = r_B - R$，分别为点A和点B 距地面的高度。

若选择$h_A = 0$ 处的重力势能为零, 则 重力势能表达式 $E_P = mgh$

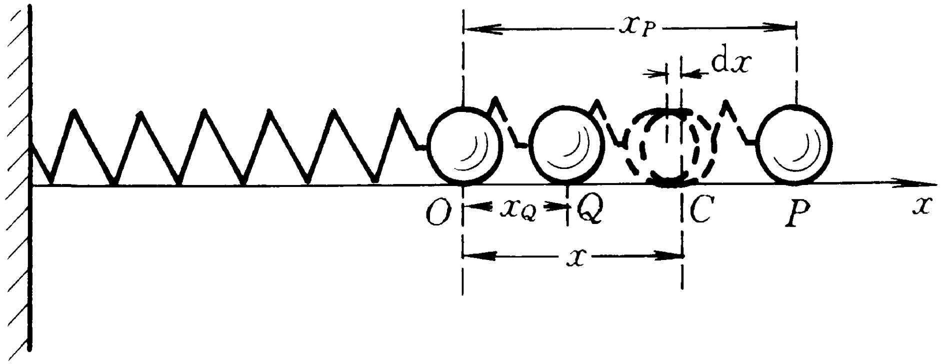
$$\Rightarrow A = -mg(h_B - h_A) = -(E_{PB} - E_{PA})$$

$$A = -mg(h_B - h_A) = -(E_{PB} - E_{PA})$$

此式表明，重力所作的功等于系统重力势能增量的负值，即重力势能的降低。

由以上讨论知：万有引力、重力所作的功，决定于质点的始、末位置，而与质点运动的路径无关。

2、弹力势能



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

元功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -kx\,\mathrm{d}x$

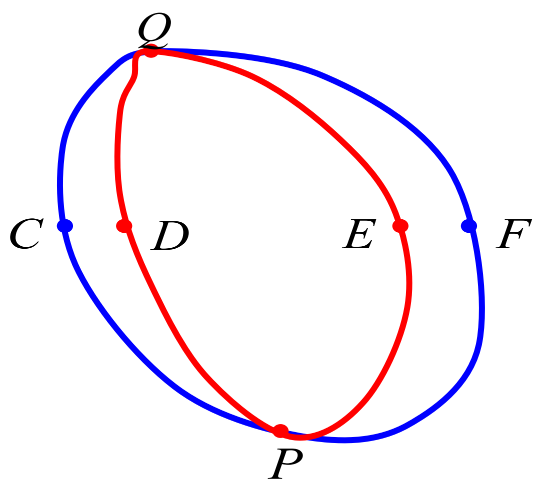
总功 $A = \int \mathrm{d}A = \int_{x_P}^{x_Q} -kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_P^2 - \frac{1}{2}kx_Q^2$

选择平衡位置处弹力势能为零，弹力势能表达式为

$\boldsymbol{E}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{kx}^2$ 所以 $A = -(E_{\mathrm{p}Q} - E_{\mathrm{p}P})$

此式表示，弹性力所作的功等于弹簧系统弹力势能增量的负值，即弹力势能的减少量。

3、保守力 (conservation force)



物体在某种力的作用下，沿任意闭合路径绕行一周所作的功恒等于零，即

$$\oint \vec{F}\cdot \mathbf{d}\vec{l} \equiv 0$$

具有这种特性的力，称为**保守力**；不具有这种特性的力称为**非保守力**。

势能小结：

1、只有对保守力，才能引入相应的势能，而且规定保守力做功等于系统势能的减小。

2、势能是状态函数。质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

3、势能仅有相对意义，所以必须指出零势能参考点，势能是质点间相对位置的单值函数。两点间的势能差是绝对的（与参考系无关）。

4、势能是属于具有保守力相互作用的质点系统的。

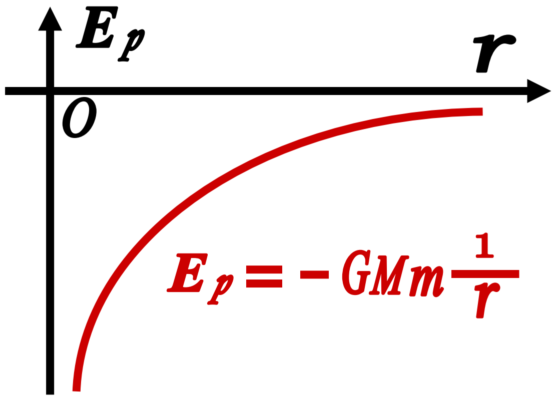
几种常见保守力的势能与势能曲线

万有引力势能

选 $r_b = \infty$
为势能零点 $E_{pb} = 0$

$$E_p = \int_r^{\infty} -GMm\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= -GMm\frac{1}{r}$$



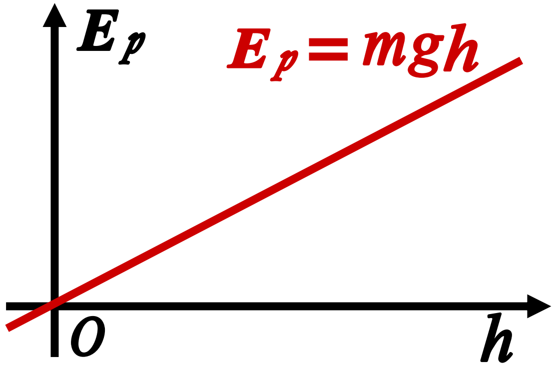
重力势能

选地面 $z_b = 0$
为势能零点 $E_{pb} = 0$

$$E_p = \int_{z_a}^{0} -mg\,\mathrm{d}z$$

$$= mgz_a = mgh$$

h：离地面高度

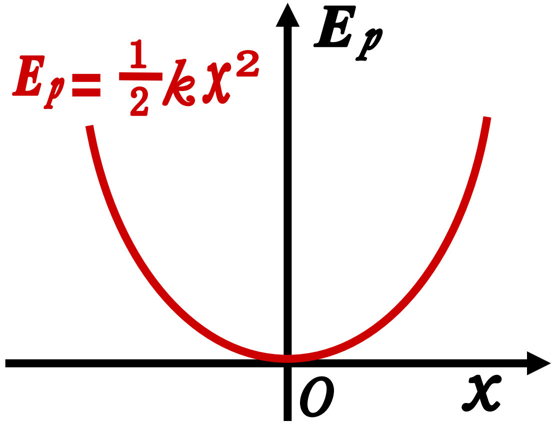


弹性势能

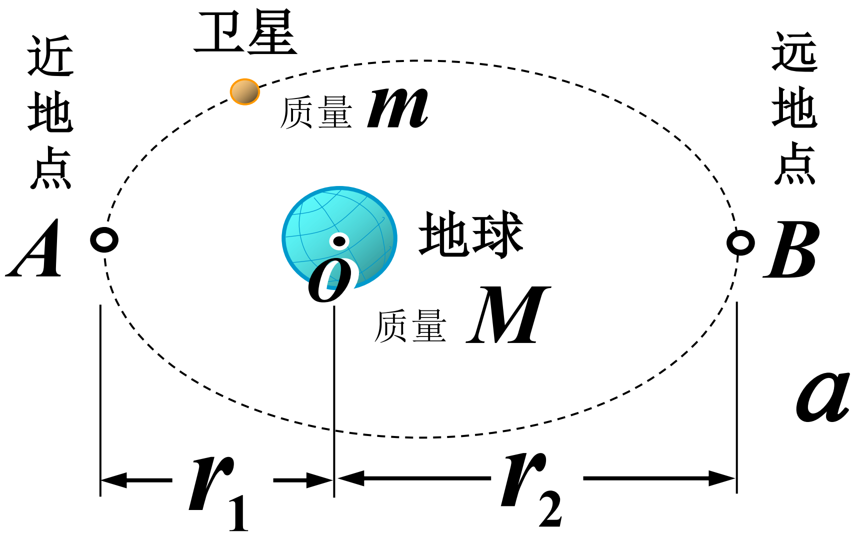
选无形变处 $x_b = 0$
为势能零点 $E_{pb} = 0$

$$E_p = \int_x^0 -kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2$$



随堂小议



上图中，

卫星在A，B两点处

的势能差为

（请点击你要选择的项目）

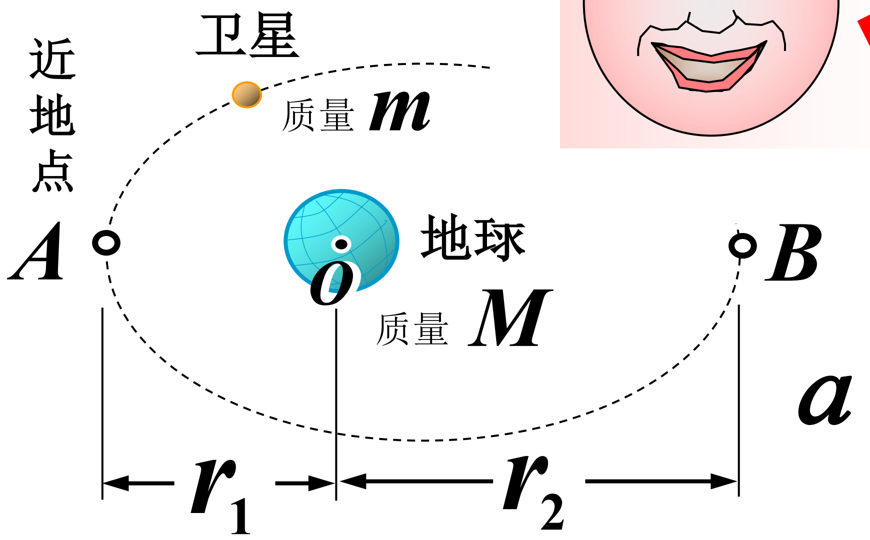
（1） $GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1r_2}$

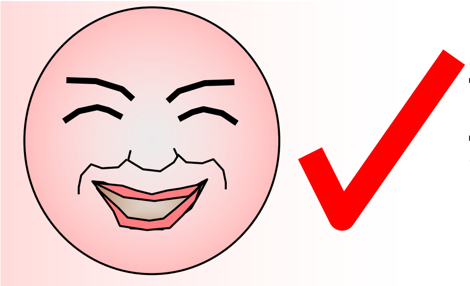
（2） $-GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1r_2}$

（3） $GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1}$

（4） $-GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_2}$

随堂小





上图中，

卫星在A，B两点处

的势能差为

（请点击你要选择的项目）

（1） $GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$

（2） $-GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$

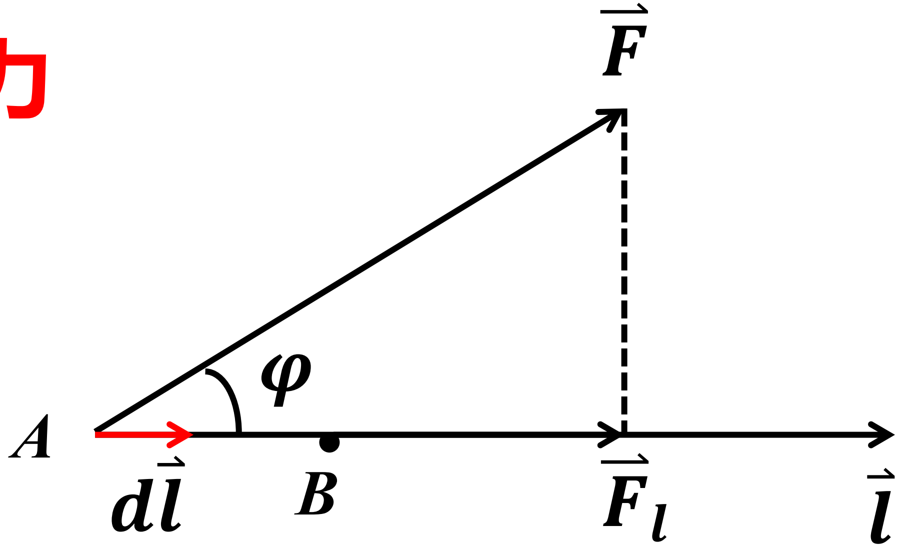
（3） $GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_1}$

（4） $-GMm\dfrac{r_2-r_1}{r_2}$

§4-5 由势能求保守力

✓ 保守力对路径的积分 → 势能

✓ 势能函数对路径的导数 → 保守力



$d\vec{l}$：质点在保守力$\vec{F}$作用下沿着给定方向$\vec{l}$，从A到B的元位移。

$$dE_P = -A = -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -F\,dl\cos\varphi$$

$$\because F\cos\varphi = F_l\,, \qquad \therefore -dE_P = F_l dl$$

$$\Rightarrow \quad F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

保守力沿某一给定的$\vec{l}$方向的分量，等于此保守力相应的势能函数沿$\vec{l}$方向的空间变化率的负值。

$$F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

三维直角坐标系中：

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\Bigg(\underbrace{\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}}_{\text{势能梯度}}\Bigg)$$

直角坐标系中求保守力的最一般的公式

保守力等于相应的势能函数的梯度的负值。