第三章 动量与角动量

§3-1 冲量与动量定理

§3-2 动量守恒定律

§3-3 火箭飞行原理

§3-4 质心

质点 → 质点系

§3-5 质心运动定理

§3-6 质点的角动量和角动量定理

§3-7 角动量守恒定律

§3-8 质点系的角动量定理

§3-9 质心参考系中的角动量

§3-5　质心运动定理

将 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$ 两边对时间 t 求导

可得质心的运动速度： $\vec{v}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt} = \dfrac{\sum_i m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m}$

$$\Rightarrow \quad m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$m\vec{v}_C$即为质点系的总动量$\vec{p}$： $\vec{p} = m\vec{v}_C$

质点系的总动量$\vec{p}$ 等于其总质量与质心运动速度的乘积，也称质心的动量$\vec{p}_C$

质点系的总动量： $\vec{p}=\vec{p}_C=m\vec{v}_C$

两边对时间t求导: $$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{v}_C}{dt}=m\vec{a}_C$$

$\vec{a}_C$为质心的加速度

再由质点系动量定理 $$\underbrace{\left(\sum_i \vec{F}_i\right)}_{=\vec{F}}dt=d\underbrace{\left(\sum_i \vec{p}_i\right)}_{=d\vec{p}}$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}_C}$$ **质心运动定理**

质心运动定理

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_C$$

表明：一个质点系的质心的运动，就如同这样一个质点的运动：

该质点质量等于整个质点系的质量并且集中在质心处，而此质点所受的力是质点系所受的所有外力之和。

质心的重要性：质点系做平动时，质心的运动可代表整个质点系的运动。

质点系的动量守恒定律：当一质点系所受的合外力等于零时，其质心速度保持不变。

讨论

1）质点系动量定理微分和积分形式：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}_C}\qquad \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}d\,t=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$$

2) 质心的运动，该质点集中整个系统质量，并集中系统受的外力，代替质点系整体的平动。

3）质心运动状态取决系统所受外力， $\vec{F}_{外}=m\vec{a}_C$

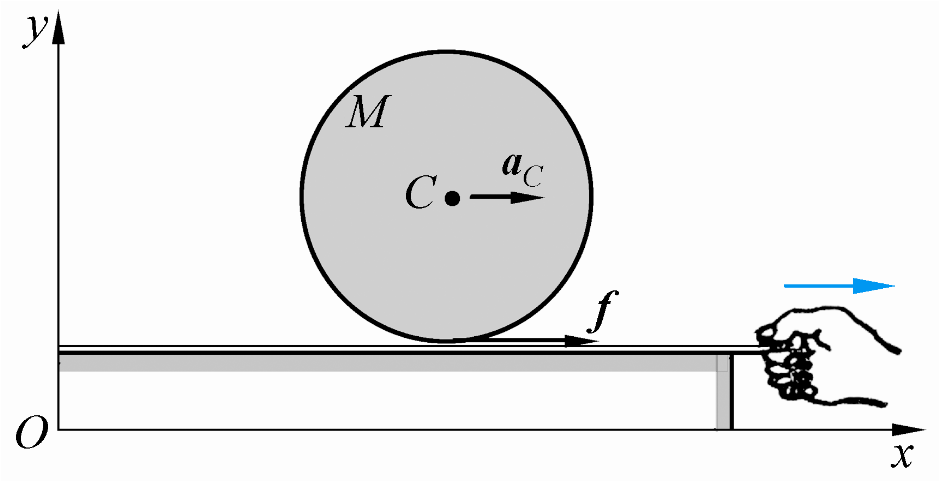
4）内力不能使质心产生加速度。

$\vec{F}_{外}=0$， $\vec{v}_C$不变。 质心速度不变和动量守恒是同义语。

5) 系统内力不会影响质心的运动。

（如抛掷的物体、跳水的运动员、爆炸的焰火等，其质心的运动都是抛物线）

例4 如图，水平桌上铺一张纸，纸上放一个均匀球，球的质量为M ＝0.5kg。将纸向右拉时会有f=0.1N的摩擦力作用在球上。求该球心加速度以及在从静止开始的2s内，球心相对桌面移动的距离sc。



解: 对球用质心运动定理，可得水平方向的分量式为

$$f = ma_c$$

因此

$$a_c = \frac{f}{M} = 0.2\mathrm{m/s^2}$$

$$s_c = \frac{1}{2}a_c t^2 = 0.4\mathrm{m}$$

复习： ■ 质点系的动量定理：

微分形式：$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right)$$

积分形式：$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, dt = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0}$$

■ 动量守恒定律：

如果 $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$， 则 $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i =$ 恒矢量

■ 近似动量守恒定律： （e.g. 碰撞、打击、爆炸）

如果 $\Delta t \to 0$， $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i =$ 恒矢量

■ **质心位置：**

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}\qquad\qquad \vec{r}_C=\int\frac{\vec{r}dm}{m}$$

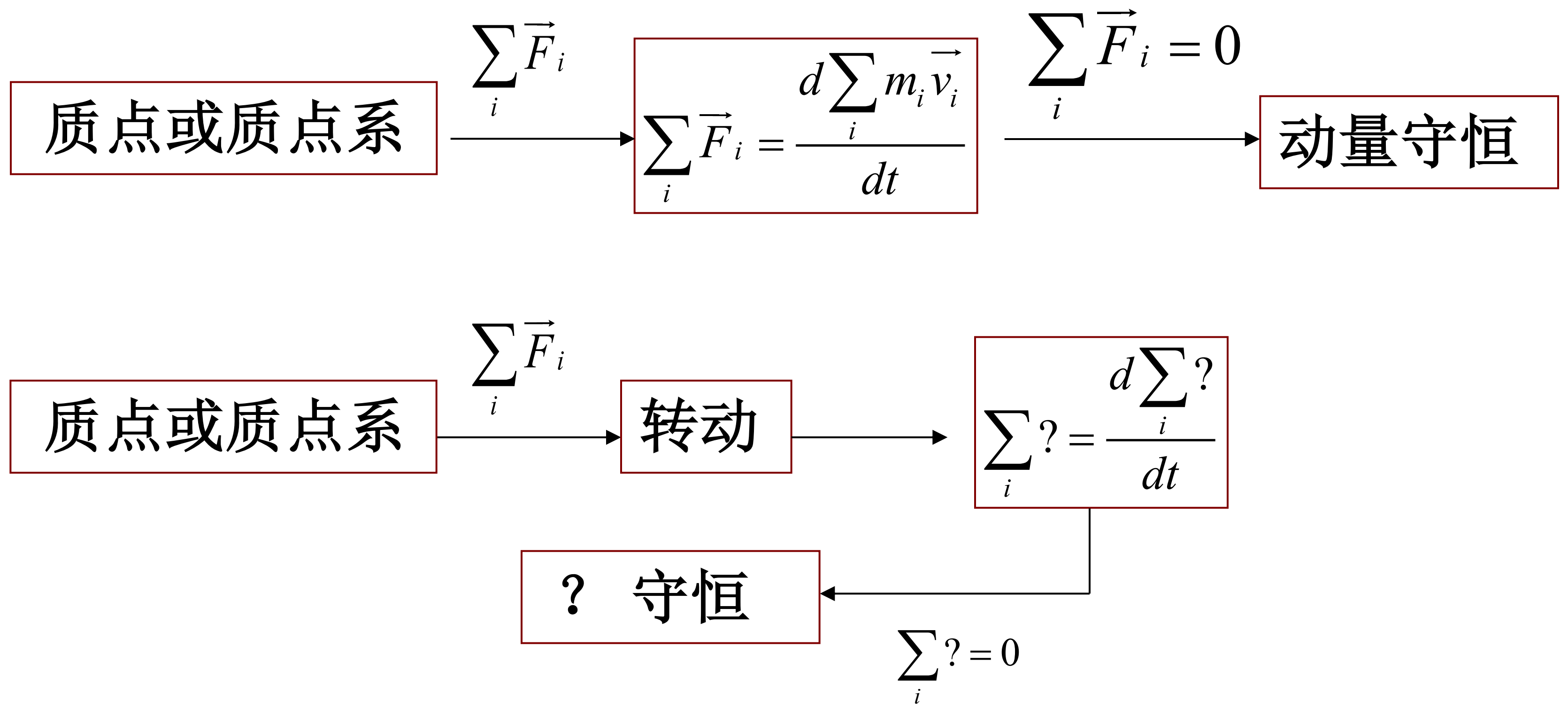
■ **质心运动定理：** $\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}_C}$

质心的重要性：质点系做平动时，质心的运动可代表整个质点系的运动。

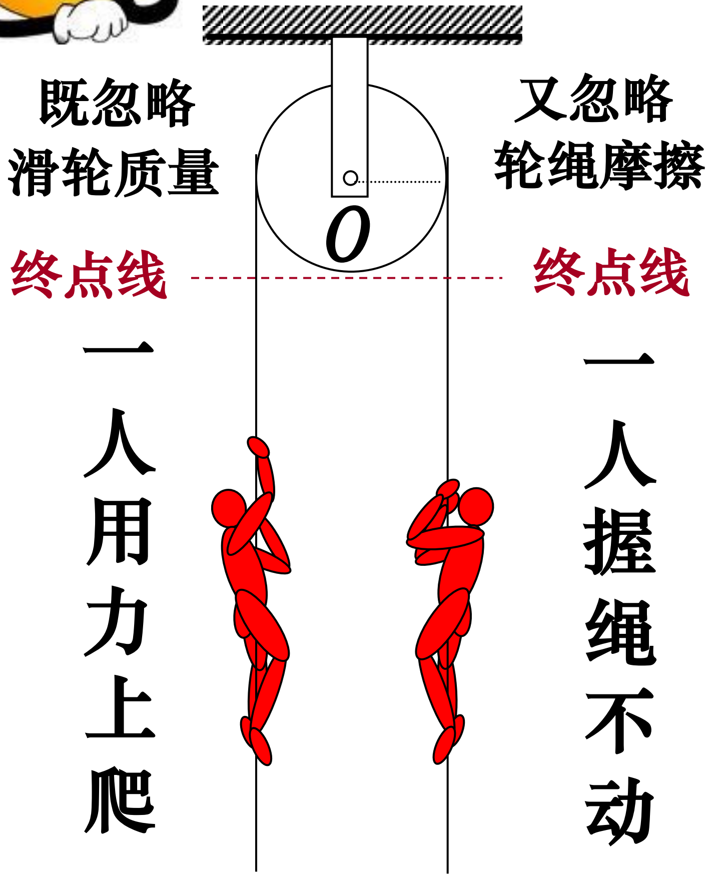
质点系的动量守恒定律：质点系所受合外力为零时，其质心速度保持不变。

$\vec{F}_{外}=0$，$\vec{v}_C$不变。 质心速度不变和动量守恒是同义语。

到目前为止，我们还从未涉及物体的另一种运动形式——**转动**。实际上，大到星云、星系，小至微观粒子，无不参与转动这一运动形式。



两人质量相等



可能出现的情况是

（1）两人同时到达；

（2）用力上爬者先到；

（3）握绳不动者先到；

（4）以上结果都不对。

§3-6 质点的角动量和角动量定理

一、力 矩 (moment of force)

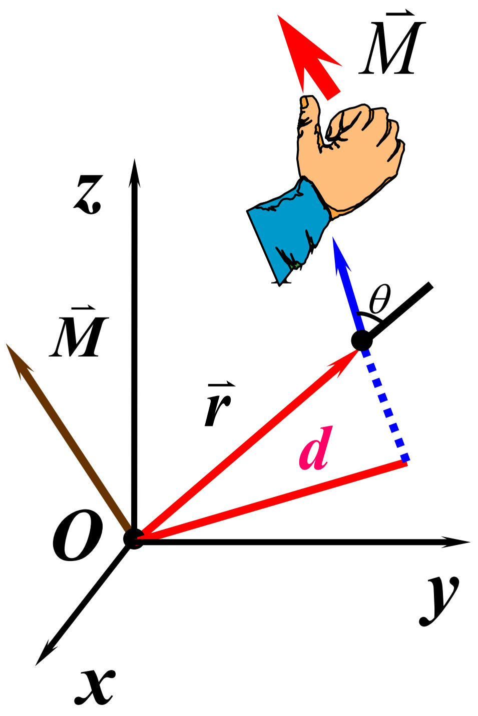
1、力矩的一般意义：**力对点的力矩**

力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小 $M = F r \sin\theta = F d$

方向 右手定则

单位 N·m (牛顿米)



注意：

（1） $\vec{r}$ 在前，$\vec{F}$ 在后。

（2）如果作用于质点上的力是多个力的合力, 即

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$$

代入力矩定义中, 得

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n\right)$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\cdots+\vec{r}\times\vec{F}_n$$

$$=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots+\vec{M}_n$$

合力对某参考点O的力矩等于各分力对同一点力矩的矢量和。

2、力对轴的力矩

在以参考点O为原点的直角坐标系中, $\vec{M}$ 表示为

$$\vec{M}=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$$

质点P的位置矢量 $\vec{r}$ 和作用力 $\vec{F}$ 可表示为:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\ ,\quad \vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

则 $$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(yF_z-zF_y\right)\vec{i}+\left(zF_x-xF_z\right)\vec{j}+\left(xF_y-yF_x\right)\vec{k}$$

分量式
$$\left.\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$
力矩是对确定的轴而言

力矩沿某坐标轴的分量通常称作力对该轴的力矩。

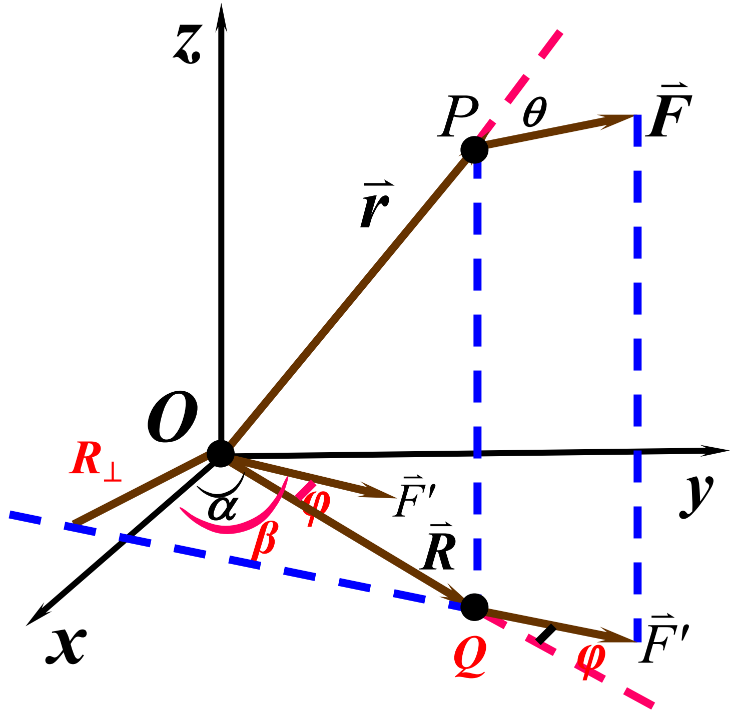
下面计算力对 z 轴的力矩

由图可见：

$$x = R\cos\alpha \qquad y = R\sin\alpha$$

$$F_x = F'\cos\beta \qquad F_y = F'\sin\beta$$

代入 M_z 式中可得



力对z轴的力矩

$$M_z = RF'(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)$$

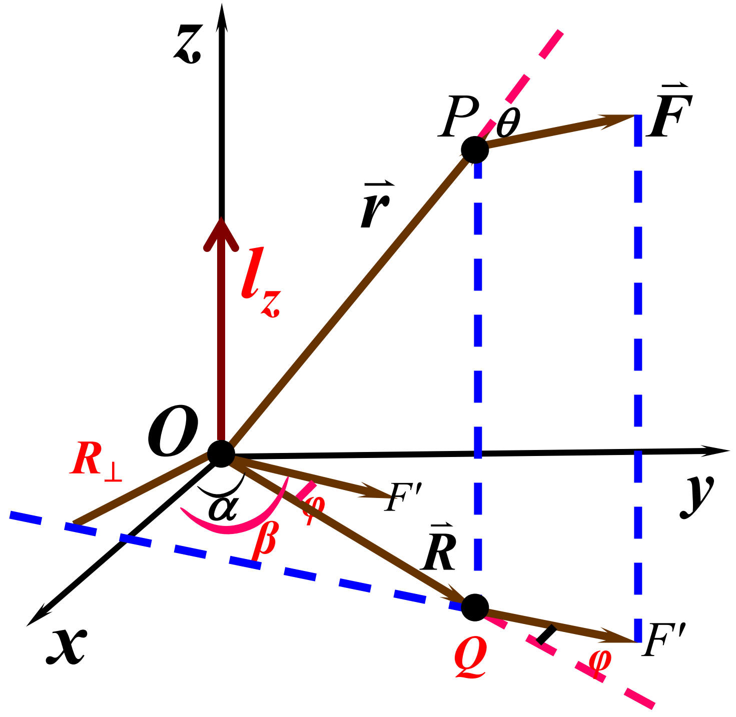
$$= RF'\sin(\beta-\alpha) = RF'\sin\phi$$

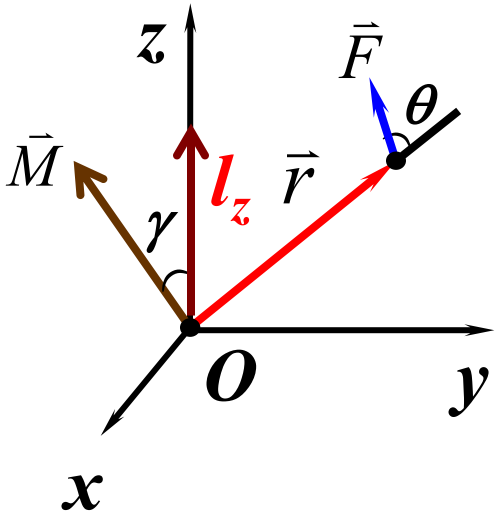
式中R、F' 为 $\vec{r}$、$\vec{F}$在xy平面上的投影。

如果知道力矩矢量的大小和它与 z 轴之间的夹角γ，那么力对z轴的力矩也可按下式求得：

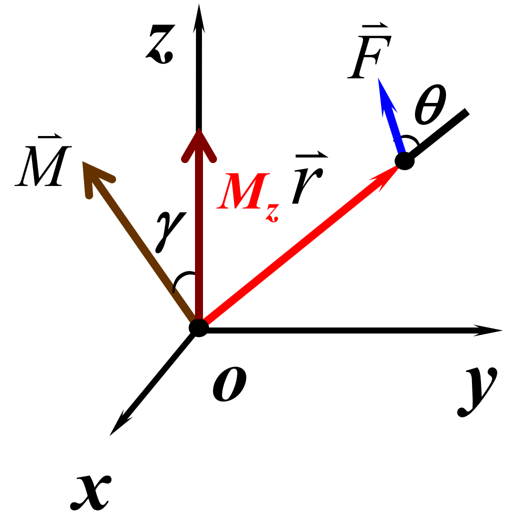
$$\boldsymbol{M_z = M\cos\gamma}$$

$$= rF\sin\theta\cos\gamma$$





注意：（1）力对轴的力矩表达式：



$$M_z = xF_y - yF_x$$

$$M_z = R\,f\,\sin(\beta-\alpha) = \boldsymbol{Rf}\ \mathbf{sin}\,\phi$$

$$M_z = r\,F\sin\theta\ \cos\gamma$$

（2）力矩与参考点的选取有关，那么对轴的力矩是否也与参考点的选取有关？

$$M_z = xF_y - yF_x$$

M_z与参考点O取在z轴的什么位置上无关。

(3) 如果物体同时受到多个力的作用，合力矩为

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{zi}$$

注意：无论M_z还是M_{zi}，都是相对于同一转轴的

例1 质量为1.0 kg的质点在力$\vec{f}=(2t-3)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}$ 的作用下运动，其中 t 是时间，单位为s，$\vec{f}$ 的单位是N，质点在$t=0$ 时位于坐标原点，且速度等于零。求此质点在 $t=2.0$ s时所受的相对坐标原点O的力矩。

解 质点的加速度为
$$\vec{a}=\frac{\vec{f}}{m}=(2t-3)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}$$

速度为
$$\vec{v}=\int_0^t\vec{a}dt=\int_0^t[(2t-3)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}]dt$$
$$=(t^2-3t)\vec{i}+\left(\frac{3}{2}t^2-2t\right)\vec{j}$$

位矢为
$$\vec{r}=\int_0^t\vec{v}dt=\int_0^t\left[(t^2-3t)\vec{i}+\left(\frac{3}{2}t^2-2t\right)\vec{j}\right]dt$$
$$=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}t^3-t^2\right)\vec{j}\ \mathrm{m}$$

$$\vec{r}=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}t^3-t^2\right)\vec{j} \qquad \vec{f}=(2t-3)\vec{i}+(3t-2)\vec{j}$$

质点在 $t=2.0$ s时所受的相对坐标原点O的力矩为：

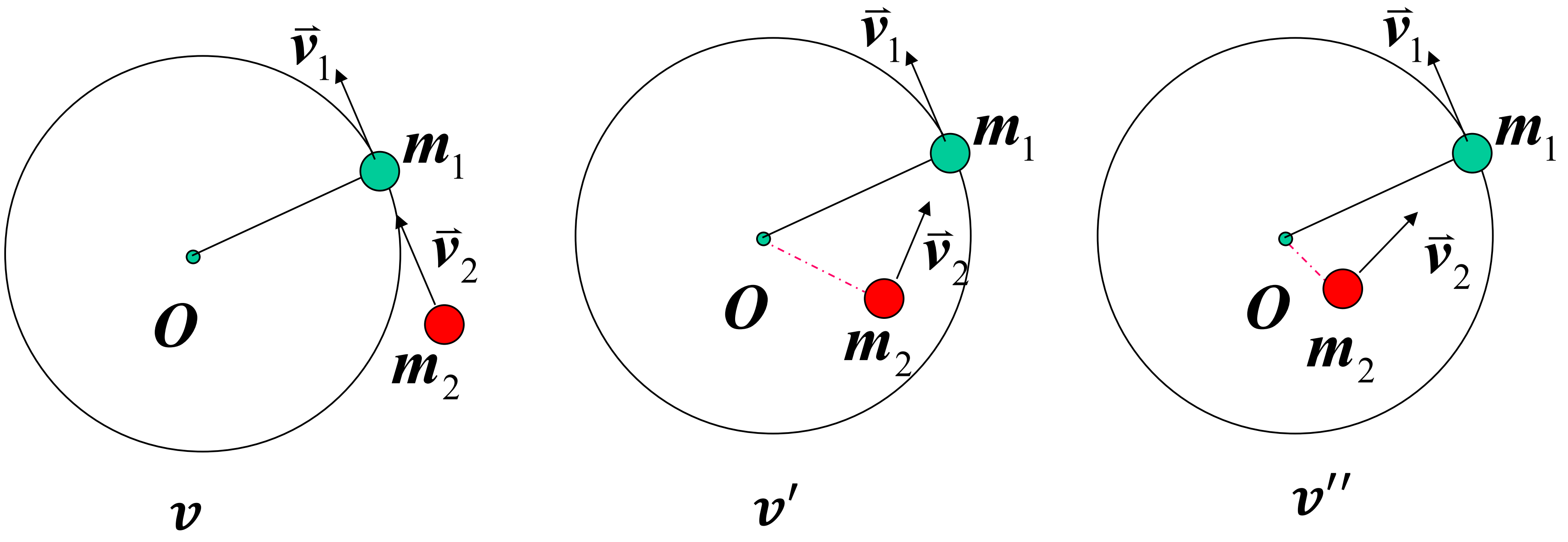
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3-t^2 & 0 \\ 2t-3 & 3t-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right)(3t-2)-\left(\frac{1}{2}t^3-t^2\right)(2t-3)\right]\vec{k}$$

$$=-\frac{40}{3}\vec{k}\ \mathrm{N\cdot m}\approx-13.3\,\vec{k}\ \mathrm{N\cdot m}$$

二、 角动量和角动量定理

1、角动量 *(angular momentum)*



$$v'' < v' < v$$

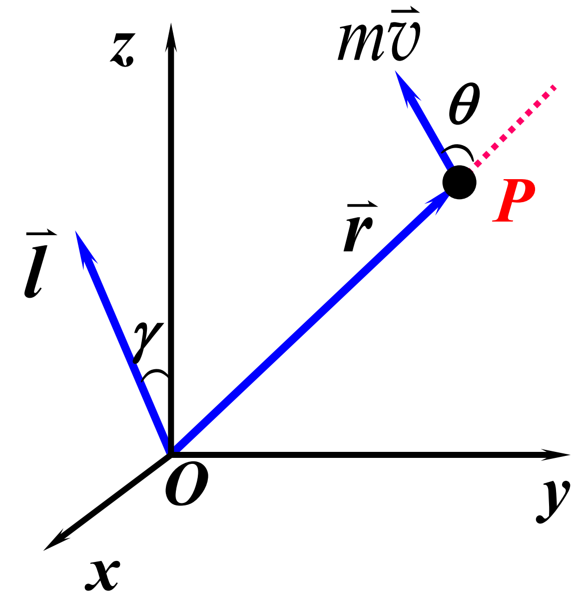
实验表明：在这种情况的碰撞，物体m_2所传递的 “运动的量” ，不但与m_2v_2有关，而且还与定点O到m_2v_2的距离有关。

1、角动量 (动量矩)

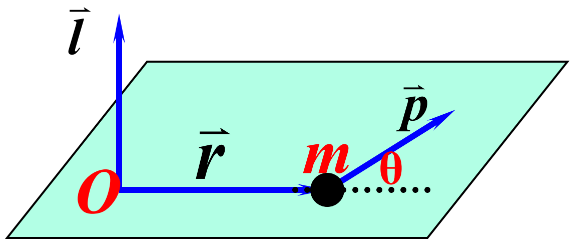
质点质量m、位矢$\vec{r}$ 、速度$\vec{v}$ 、动量$\vec{p}$

✓ 质点相对参考点O的角动量定义为

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



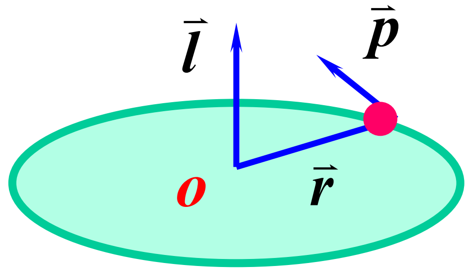
大小 $l = rmv\sin\theta$



方向 右手螺旋定则判定

单位 $kg \cdot m^2/s$

作圆周运动的质点的角动量



$$l = m\,r\,v$$

注意：

(1) 因为质点的位置矢量r与参考点O的选取有关，所以质点相对于参考点的角动量也与参考点的选取有关

(2) 在直角坐标系中质点角动量可以表示为

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$= (ymv_z - zmv_y)\vec{i} + (zmv_x - xmv_z)\vec{j} + (xmv_y - ymv_x)\vec{k}$$

$$= l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}$$

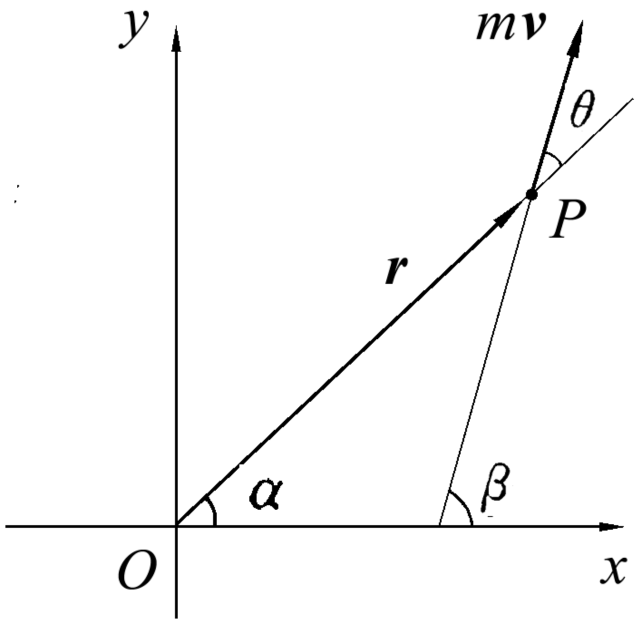
如果质点是在一个平面上运动，可以将此平面取为xy平面，则：

$$\vec{l} = (xmv_y - ymv_x)\vec{k} = l_z\vec{k}$$

质点的角动量只具有z分量，或者说质点的角动量的方向垂直于该平面。

$$l_z = xmv_y - ymv_x$$

假如质点是在xy平面上运动的，在某时刻到达点P



$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

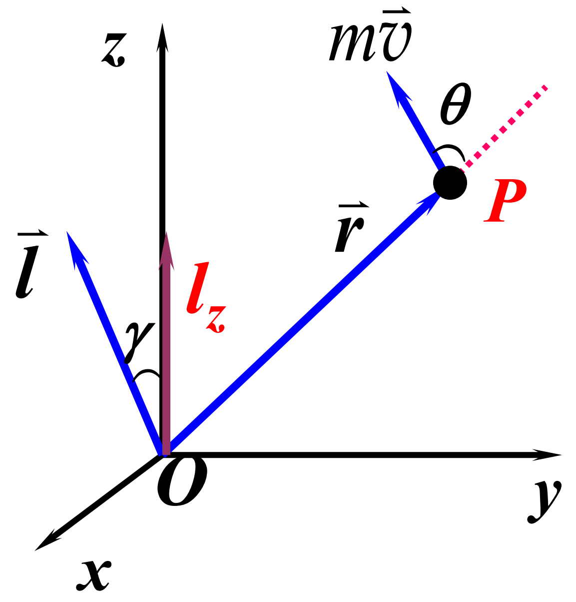
$$v_x = v\cos\beta \qquad v_y = v\sin\beta$$

$$l_z = rmv(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = rmv\sin(\beta - \alpha)$$

$$= rmv\sin\theta$$

（3）质点对通过参考点O 的任意轴线Oz 的角动量l_z, 是质点相对于同一参考点的角动量l沿该轴线的分量。

$$l_z = l\cos\gamma$$

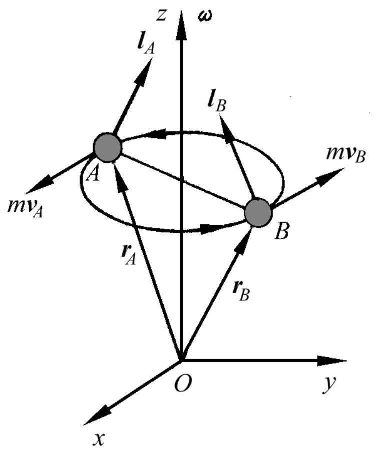


如果质点始终在Oxy平面上运动，质点对Oz 轴的角动量与对参考点O的角动量的大小是相等的，即

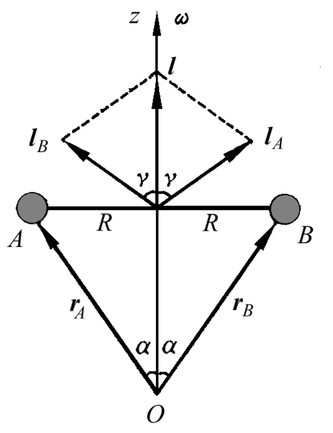
$$l_z = l = rmv\sin\theta$$

注意: 规定面对 z轴观察, 由$\vec{r}$ 方向沿逆时针转向 $m\vec{v}$的方向所形成的角才是θ角。

如果两个质量相等的质点A和B在同一个固定的平面内以相同的角速度绕着它们连线的中点作圆周运动



(a)



(b)

两个质点对z轴上任意一点的角动量，为

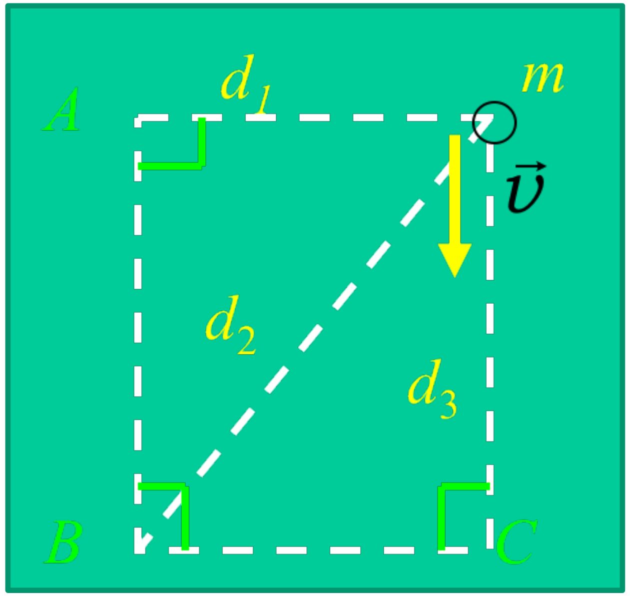
$$l = l_z$$

无论参考点O取在z轴的什么位置，上式都成立。

由于对称性，质点A和B对于z轴上任意一点O的角动量 $\vec{l}_A$ 和 $\vec{l}_B$, 不仅大小相等、与z轴的夹角(即γ角)相同，并且处于同一个平面内，它们对点O的总角动量

$$\vec{l} = \vec{l}_A + \vec{l}_B$$

例　一质点m，速度为v，如图所示，A、B、C分别为三个参考点,此时m相对三个点的距离分别为d_1、d_2、d_3



求　此时刻质点对三个参考点的角动量

解

$$L_A = d_1 m\upsilon$$

$$L_B = d_1 m\upsilon$$

$$L_C = 0$$

2、角动量定理 (theorem of angular momentum)

角动量 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$，两边对 t 求导

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{}$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \qquad = \vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\therefore \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$，为合外力对同一固定点的力矩。

角动量定理：

微分式：$$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

积分式：$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,dt = \vec{l}_2 - \vec{l}_1$$

描述：

- ✓ 作用于质点的合力对某参考点力矩，等于质点对同一参考点的角动量随时间的变化率。
- ✓ 质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

§3-7 角动量守恒定律

质点的角动量定理： $\vec{M} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$

若作用于质点的合力对参考点的力矩 $\vec{M} = 0$，

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{l}}{dt} = 0$ 即，$\vec{l} =$ 恒矢量

若作用于质点的合力对参考点的力矩（合外力矩）始终为零, 则质点对同一参考点的角动量将保持恒定。——**角动量守恒定律**

$\vec{M} = 0$可以是 $\vec{r} = 0$,也可以是 $\vec{F} = 0$, 还可能是 $\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 同向或反向，例如有心力情况。

如果作用于质点的合力矩不为零, 而合力矩沿Oz轴的分量为零,则

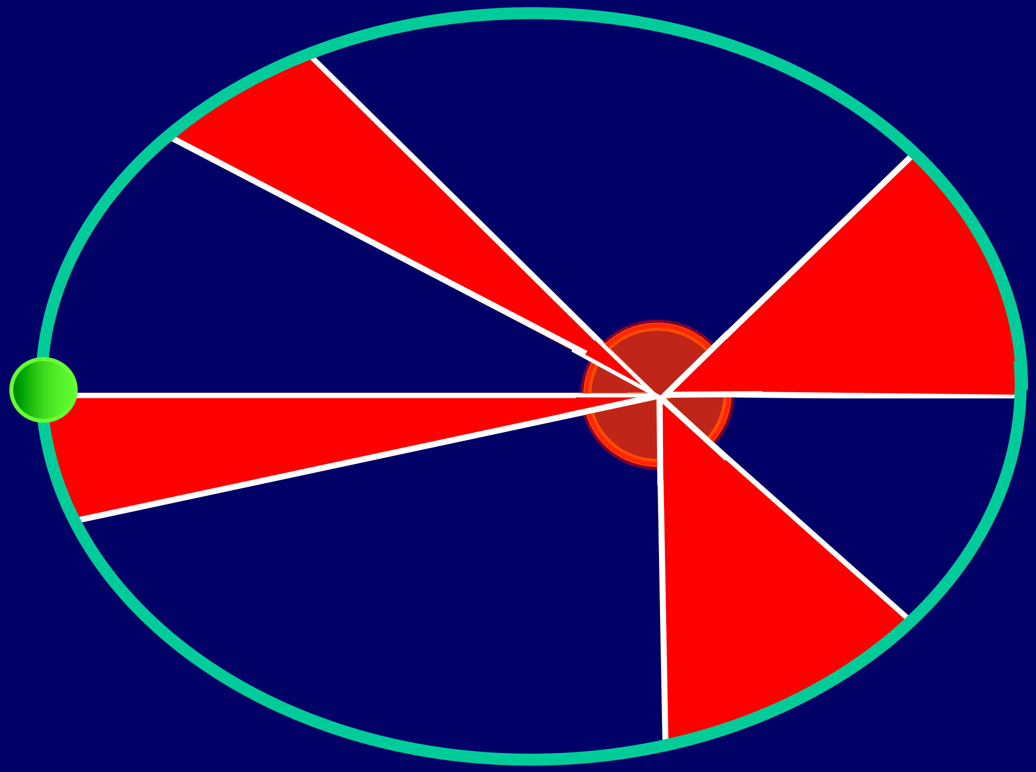
$$l_z = \text{恒量} \quad （当 M_z = 0 时）$$

当质点所受对Oz轴的力矩为零时,质点对该轴的角动量保持不变。此结论称为**质点对轴的角动量守恒定律**。

例2：行星运动的开普勒第二定律认为, 对于任一行星, 由太阳到行星的径矢在相等的时间内扫过相等的面积。试用角动量守恒定律证明之。

例题2 应用质点的角动量守恒定律可以证明

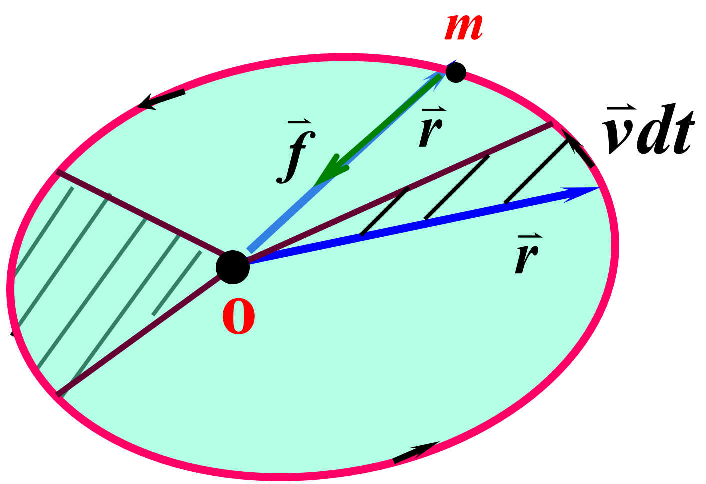
开普勒第二定律



行星与太阳的连线在相同时间内扫过相等的面积

解：将行星看为质点，在$\mathrm{d}t$ 时间内以速度 $\vec{v}$ 完成的位移为$\vec{v}\mathrm{d}t$，矢径$\vec{r}$在$\mathrm{d}t$ 时间内扫过的面积为$\mathrm{d}S$（图中阴影）。

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}t\right|$$



根据质点角动量的定义

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

则 $\mathrm{d}S = \frac{l}{2m}\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m}$

矢径在单位时间内扫过的面积（称为掠面速度）

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{2m}$$

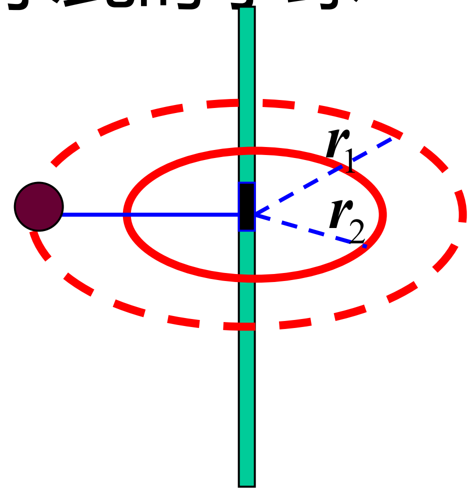
万有引力属于有心力，$\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 反平行，因此对中心 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$

行星相对于太阳所在处的点O的角动量是守恒的, 即 $\vec{l}$ = 恒矢量，故有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{2m}\ = \text{恒量}$$

行星对太阳所在点O的角动量守恒，不仅角动量的大小不随时间变化, 而且角动量的方向也是不随时间变化的。

例3：质量为m的小球系于细绳的一端，绳的另一端缚在一根竖直放置的细棒上，小球被约束在水平面内绕细棒旋转，某时刻角速度为ω_1，细绳的长度为r_1。当旋转了若干圈后，由于细绳缠绕在细棒上，绳长变为r_2，求此时小球绕细棒旋转的角速度ω_2。



解：小球受力 —————————— 对轴的力矩分析：

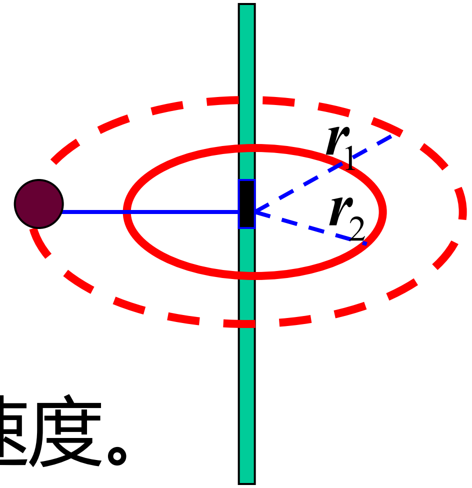
- ✓ 绳子的张力$\vec{T}$，指向细棒； $\vec{T}$与绳子平行，力矩 = 0；
- ✓ 重力$\vec{W}$，竖直向下；
- ✓ 支撑力$\vec{N}$，竖直向上。

$\vec{N}$与$\vec{W}$平衡，力矩和 = 零。

⇒ 作用于小球的力对细棒的合力矩始终等于零

⇒ 小球对细棒的角动量守恒

根据质点对轴的角动量守恒定律



$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

式中v_1是半径为r_1时小球的线速度，v_2是半径为r_2时小球的线速度。

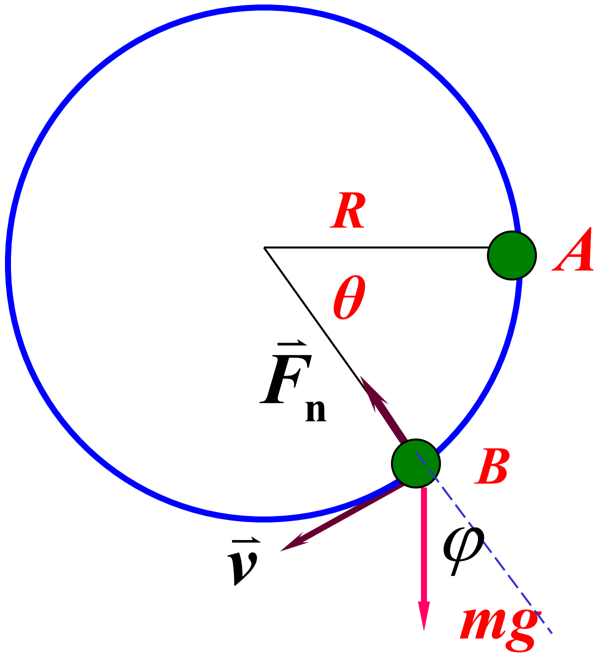
由 $v_1 = \omega_1 r_1$，$v_2 = \omega_2 r_2$

代入上式得 $mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$

解得 $\omega_2 = (\frac{r_1}{r_2})^2\omega_1$

可见, 由于细绳越转越短, $r_2 < r_1$, 小球的角速度必定越转越大, 即 $\omega_2 > \omega_1$。

例4：半径为R的光滑圆环上A点有一质量为m的小球，从静止开始下滑，若不计摩擦力，求小球到达B点时的角动量和角速度。



解：小球受重力矩作用

$$M = mgR\sin\varphi = mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, l = mRv = mR^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{l}{mR^2}$$

$$\therefore \mathrm{d}t = \frac{mR^2\,\mathrm{d}\theta}{l}$$

得到： $$l\,\mathrm{d}l = m^2 g R^3 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

利用初始条件对上式积分：

$$\int_0^l l\,\mathrm{d}l = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$l = mR^{3/2}\left(2g\sin\theta\right)^{1/2}$$

$$\because\quad l = mR^2\omega \qquad \therefore\quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}\sin\theta}$$

小结：

力 → 动量的时间变化率 $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

力距 → 角动量的时间变化率 $$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

§3-8 质点系的角动量定理

1、质点系的角动量定理

设质点系由n个质点组成

质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ 位矢 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$

力矩 $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \cdots, \vec{M}_n$ 角动量 $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \cdots, \vec{l}_n$

对每个质点，根据角动量定理列方程

$$\vec{M}_1 = \frac{d\vec{l}_1}{dt}, \quad \vec{M}_2 = \frac{d\vec{l}_2}{dt}, \cdots \quad \vec{M}_n = \frac{d\vec{l}_n}{dt}$$

$$\vec{M}_1=\frac{d\vec{l}_1}{dt},\quad \vec{M}_2=\frac{d\vec{l}_2}{dt},\cdots\quad \vec{M}_n=\frac{d\vec{l}_n}{dt}$$

质点系的角动量$\vec{L}$为所有质点的角动量的矢量和

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

n个方程相加

$$\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots+\vec{M}_n=\frac{d}{dt}\boxed{\left(\vec{l}_1+\vec{l}_2+\cdots+\vec{l}_n\right)}$$

或 $$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

考虑质点间的相互作用 $\sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_{外} + \sum \vec{M}_{内}$

$$\sum \vec{M}_{外} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \sum \vec{M}_{内} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij} \right)$$

由牛三：$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ ，对质点i和j，它们相互作用的力矩之和：

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \underline{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \times \underline{\vec{f}_{ij}} = 0$$

两矢量共线

$$\Rightarrow \quad \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_{外}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum \vec{M}_i &= \frac{d\vec{L}}{dt}\\ \sum \vec{M}_i &= \sum \vec{M}_{外}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum \vec{M}_{外} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

可直接表示为： $\boxed{\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ ——**质点系的角动量定理**

质点系的角动量定理：一个质点系所受的合外力矩$\vec{M}$等于该质点系的角动量$\vec{L}$对时间的变化率（ $\vec{M}$和$\vec{L}$ 都相对于惯性系中同一定点）。

2、质点系的角动量守恒定律

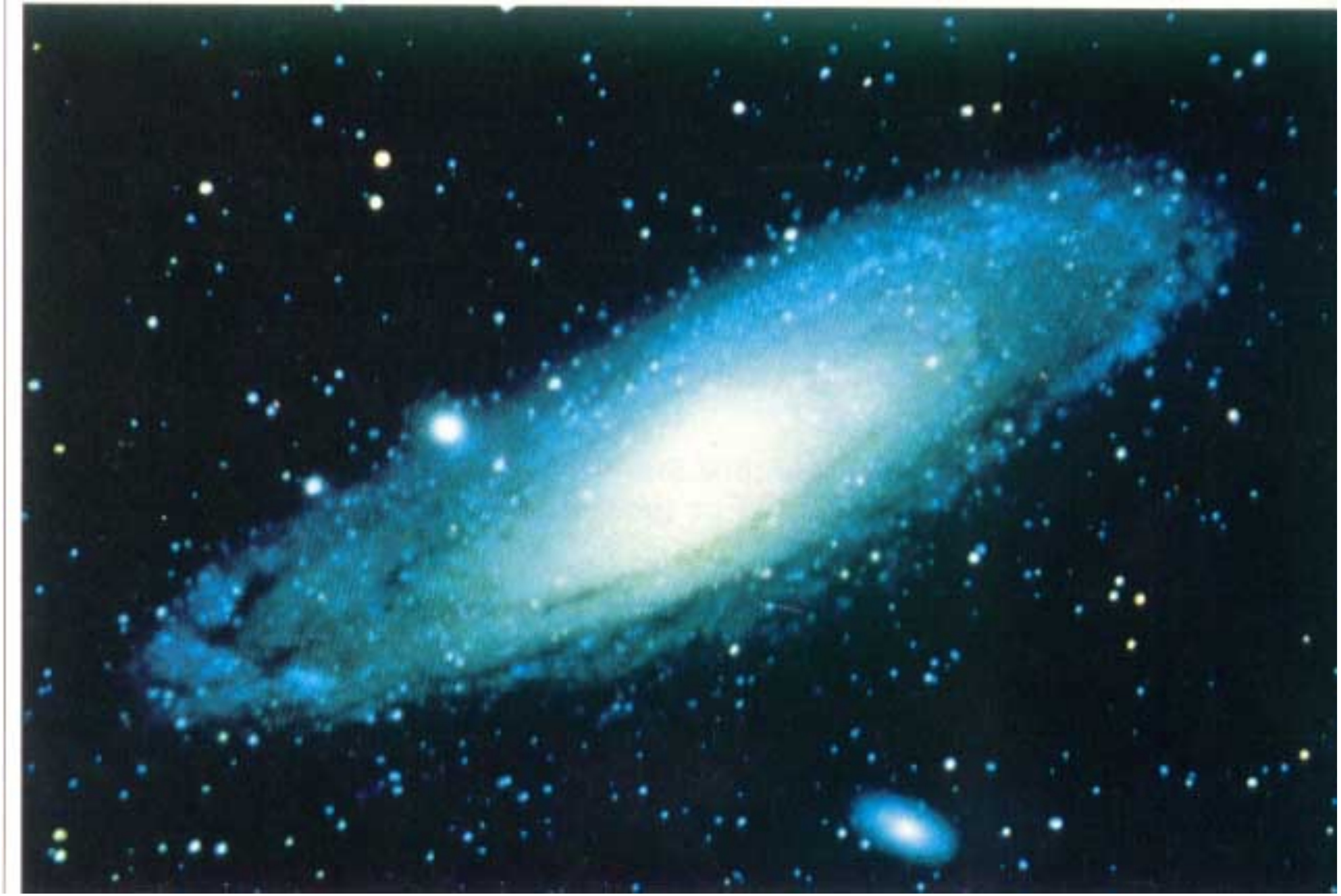
质点系的角动量定理：
$$\boxed{\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

如果 $\sum \vec{M} = \mathbf{0}$ ， 则有 $\vec{L}$ **=恒矢量**

当质点系相对于某一定点所受的合外力矩$\sum \vec{M}$为零时，该质点系相对于该定点的角动量不随时间改变。——**质点系的角动量守恒定律**

如果 $\sum \vec{M}_Z = \mathbf{0}$ ，则有 $\vec{L}_Z$ **=恒矢量**

——质点系对轴的角动量守恒定律



盘状星系　角动量守恒的结果

（有心力，$\sum \vec{M} = 0$ ）

比较　动量定理　角动量定理

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\Delta\vec{p}$$

$$\vec{F}=0,\Delta\vec{p}=0$$

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\Delta\vec{L}$$

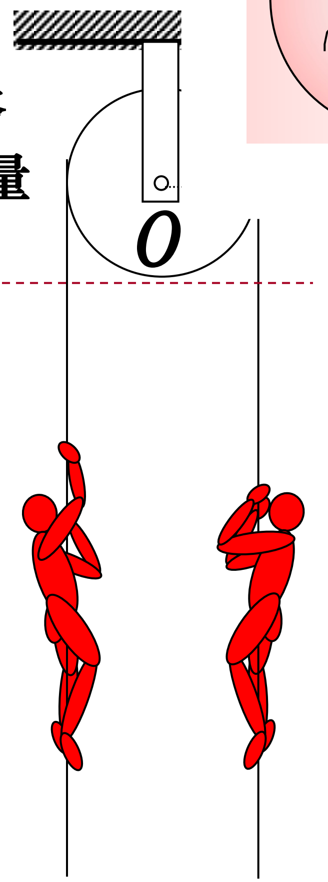
$$\vec{M}=0,\Delta\vec{L}=0$$

形式上完全相同，所以记忆上就可简化。从动量定理变换到角动量定理，只需将相应的量变换一下，名称上改变一下。

（趣称 头上长角　尾部添矩）

随堂小议 两

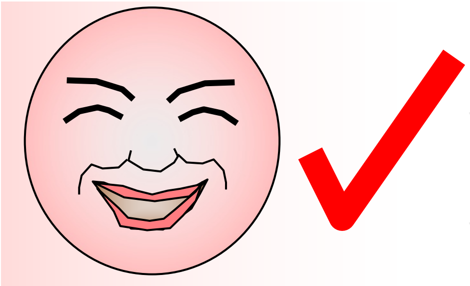
既忽略滑轮质量



终点线 终点线

一人用力上爬

一人握绳不动



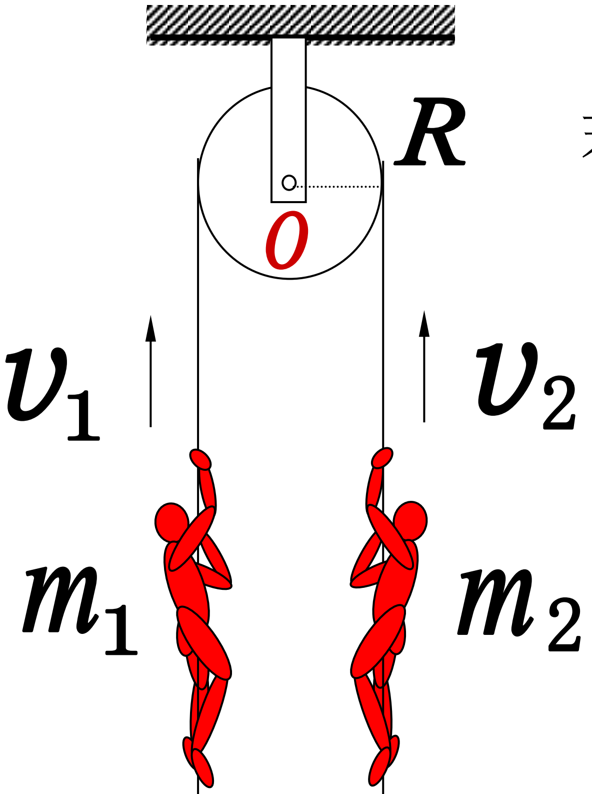
可能出现的情况是

（1）两人同时到达；

（2）用力上爬者先到；

（3）握绳不动者先到；

（4）以上结果都不对。



同高从静态开始往上爬

质点系 m_1、m_2，忽略轮、绳质量及轴摩擦

若 $m_1 = m_2$ 系统受合外力矩为零，**角动量守恒**。

系统的末态角动量 $m_2 v_2 R - m_1 v_1 R = 0$ 系统的初态角动量

得 $v_2 = v_1$ 不论体力强弱，两人等速上升。

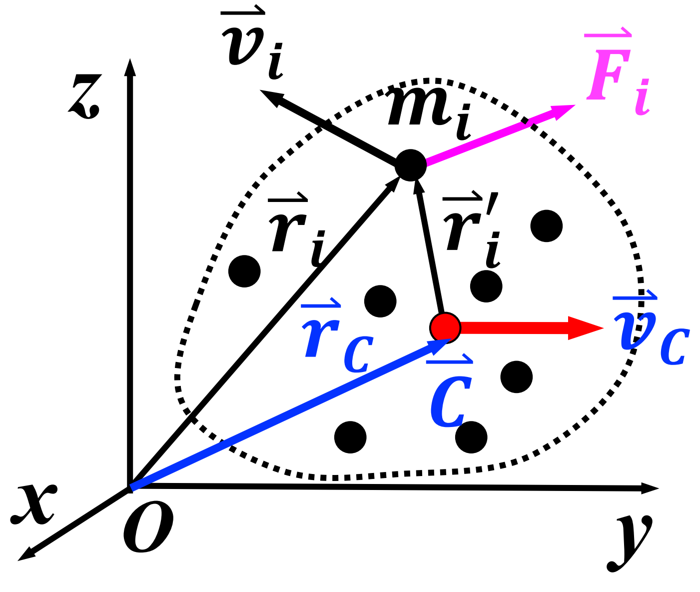
若 $m_1 \neq m_2$

系统受合外力矩不为零，角动量不守恒。

可应用**质点系角动量定理**进行具体分析讨论。

§3-9 质心参考系中的角动量

一、质心系



*O*系为惯性系

讨论天体运动及碰撞等问题时常用到质心系。

（质心系不一定是惯性系。）

✓ **解质点系的复杂运动通常可分解为：**

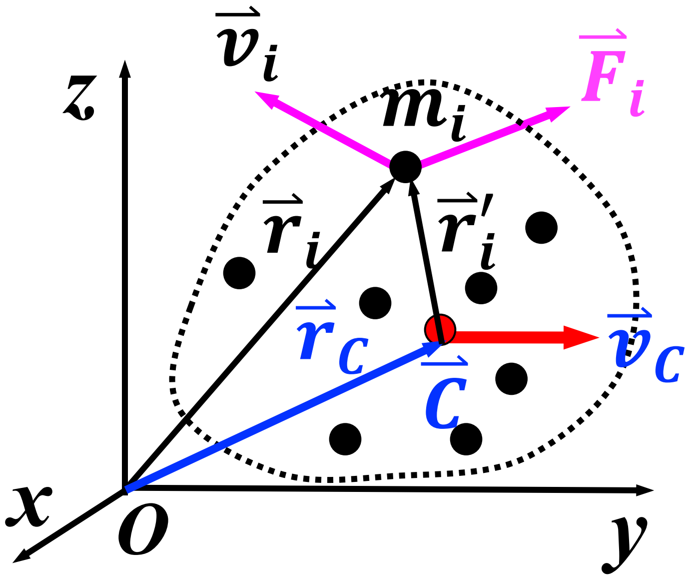
$\left\{\begin{array}{l}\text{质点系整体随质心的运动} \\ \text{各质点相对于质心的运动}\end{array}\right.$ ——在质心系中考察质点系的运动。

质点系对于*O*点的角动量：

$$\boxed{\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{Oi} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)}$$

质点系对于质心的角动量：

二、质心系中的角动量（质点系相对于质心的角动量）



O 是惯性系中的一个定点/惯性系坐标原点；

C 是质心/质心坐标系原点。

质心 ***C*** 的位矢为 $\vec{r}_C$ ，速度为 $\vec{v}_C$ 。（相对于惯性系 *O* 系）

第 i 个质点：相对于质心的位矢为 $\vec{r}'_i$，速度为 $\vec{v}'_i$，则：

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i} \qquad \boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i}$$

利用上述两式和下列关系：

$$\sum(m_i\vec{r}_i) = \left(\sum m_i\right)\vec{r}_C = \sum(m_i\vec{r}_C)$$

$$\sum(m_i\vec{v}_i) = \left(\sum m_i\right)\vec{v}_C = \sum(m_i\vec{v}_C)$$

对 *O* 点 $\boxed{\vec{L}_O = \sum(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)}$

对质心 $\boxed{\vec{L}' = \sum(\vec{r}'_i \times m_i\vec{v}'_i)}$

C* 对 *O $\boxed{\vec{L}_C = \vec{r}_C \times \left(\sum m_i\right)\vec{v}_C}$

$$\sum m_i\vec{r}'_i = \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_C) = \sum(m_i\vec{r}_i) - \sum(m_i\vec{r}_C) = 0$$

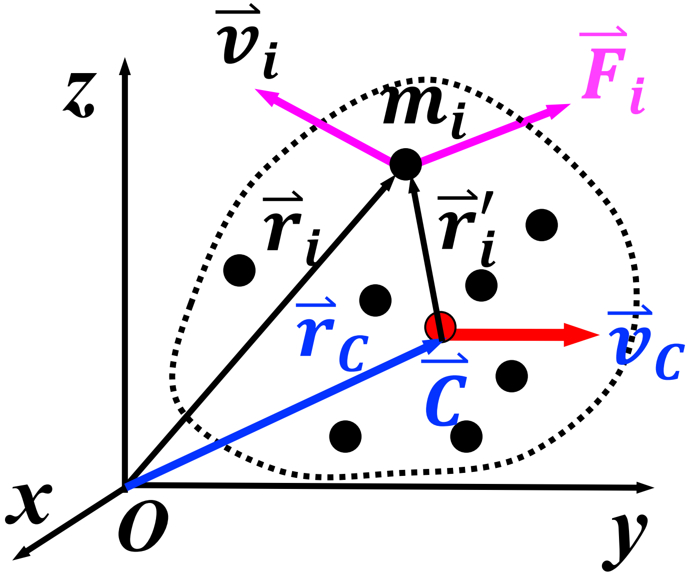
$$\sum m_i\vec{v}'_i = \sum m_i(\vec{v}_i - \vec{r}_C) = \sum(m_i\vec{v}_i) - \sum(m_i\vec{v}_C) = 0$$

三、质心系的基本特征

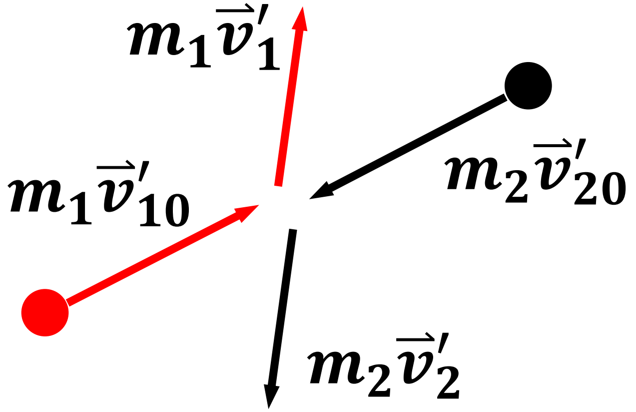
$$\sum m_i\vec{v}'_i = 0 \qquad \sum m_i\vec{r}'_i = 0$$

——质心系是零动量参考系。

两质点系统在其质心系中，
总是具有等值、反向的动量。



质心系中看两粒子碰撞



$$\sum m_i\vec{r}'_i = 0$$

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum [(\vec{r}_C + \vec{r}'_i)] \times m_i\vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_C \times \sum m_i\vec{v}_i + \vec{r}'_i \times \sum m_i\vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_C \times \left(\sum m_i\right)\vec{v}_C + \vec{r}'_i \times \sum m_i(\vec{v}_C + \vec{v}'_i)$$

$$= \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \sum m_i\vec{r}'_i \times \vec{v}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i\vec{v}'_i)$$

$$= \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i\vec{v}'_i)$$

$\vec{L}_C$ $\vec{L}'$

说明：

$$\vec{L}_O=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C+\sum(\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i')$$

(1) 质点系的动量矩(角动量)可分为两项。

第一项：只包含系统的总质量、质心的位矢和质心的速度

——**轨道角动量$\vec{L}_C$**

第二项：是质点系各质点相对于质心的角动量的矢量和

——**自旋角动量$\vec{L}'$**

$$\vec{L}_O=\vec{L}_C+\vec{L}'$$

$$\boxed{\vec{L}_C=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C=\vec{r}_C\times\vec{P}}$$

$$\boxed{\vec{L}'=\sum(\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i')}$$

(2) 质点系的轨道角动量等于质点系的全部质量集中于质心处的一个质点对于参考点O的角动量。它反映了整个质点系绕参考点的旋转运动。

(3) 质点系的自旋角动量是以质心为参考点的角动量。与质心运动无关。它只代表系统的内禀性质 。

四、 质点系对质心的角动量定理

$$\boxed{M\vec{v}_C = \vec{P}}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{L}_C) = \frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{r}_C \times \vec{P})$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times \vec{P} - \vec{r}_C \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i - 0 - \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_i$$

$$= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \vec{M}_C'$$

$$\boxed{\vec{M}_C' = \frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}_C}{dt}}$$

- ✓ 尽管质心系可能不是惯性系，但对质心系来说，角动量定理仍然成立。
- ✓ 表明了质心的特殊之处，同时也表明了选择质心系来讨论问题的优点。

质点系所受的对质心的合外力矩等于质心参考系中该质点系对质心的角动量的变化率。

课后作业

请在异步SPOC上完成

1. 第三章作业： 已发布（3月31日23:30发布）
   - ✓ 04.08日（周四） 23:30之前完成作业提交
   - ✓ 04.15日（周四）23:30之前完成作业互评
2. 单元测验（第一、二、三章内容）：已发布（3月31日23:30发布）
   - ✓ 04.29日（周四）23:30之前完成作业提交