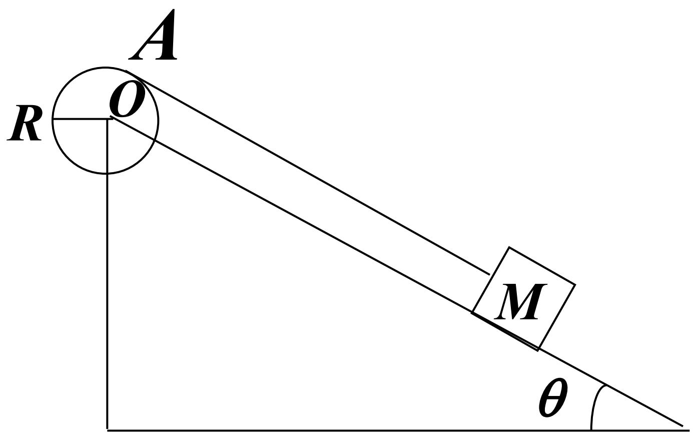
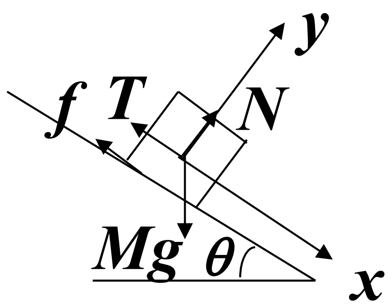
例4：在倾角为θ的斜面的顶端固定一定滑轮，用一根绳缠绕若干圈后引出，系一质量为M的物体，物体与斜面的摩擦系数为μ，如图所示。已知滑轮质量为m，半径为R，其$J=\frac{1}{2}mR^2$，滑轮轴无摩擦，求物体M沿斜面下滑的加速度a。



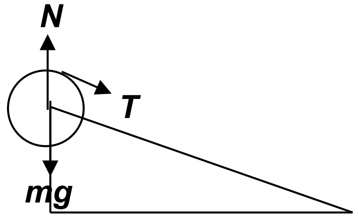
解：(1) 取物体M为研究对象，进行受力分析，如右图。设物体M沿斜面下滑的加速度为a，建立如图坐标系，由牛二定律得：



$$Mg\sin\theta - T - f = Ma$$

$$N - Mg\cos\theta = 0 \qquad f = \mu N$$

(2) 取定滑轮为研究对象，进行受力分析，如下图。由于mg和N都过转轴，所以没有力矩，只有拉力T对轴产生力矩。设定滑轮绕轴作变速转动的角加速度为α，选顺时针方向为正，根据转动定理：



$$M = J\alpha \qquad 得 TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

根据角量与线量关系，得： $a = R\alpha$

联立上述方程解得：

$$a = \frac{2Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{2M + m}$$

第5章 刚体的转动

§5-5 角动量守恒

质点系角动量定理的分量式： $M_Z = \frac{dL_Z}{dt}$

如果 $M_Z = 0$ ，则 $L_Z =$ 常量。

对定轴的角动量守恒定律：对于一个质点系，如果它受的对于某一固定轴的合外力矩为零，则它对这一固定轴的角动量保持不变。

注意：

- ✓ 这里的质点系可以不是刚体，其中的质点也可以组成1个或几个刚体。
- ✓ 刚体的角动量可以用 $J_Z\omega$ 求出。 $L_Z = \left(\sum \Delta m i r_i^2\right)\omega = J_Z\omega$
- ✓ 一个系统内的各个刚体或质点的角动量必须是对同一个固定轴而言。

质点系角动量定理的分量式： $M_Z = \frac{dL_Z}{dt}$

如果 $M_Z = 0$ ，则 $L_Z =$ 常量。

刚体组绕同一转轴作定轴转动时，系统对转轴的<u>角动量保持恒定</u>，

$L_Z = J_Z\omega =$ 常量，有两种情形：

- ✓ 一是系统的J_Z和 ω 的大小均保持不变；
- ✓ 另一种是J_Z改变，ω的大小也同时改变，但两者的乘积保持不变。

注意：

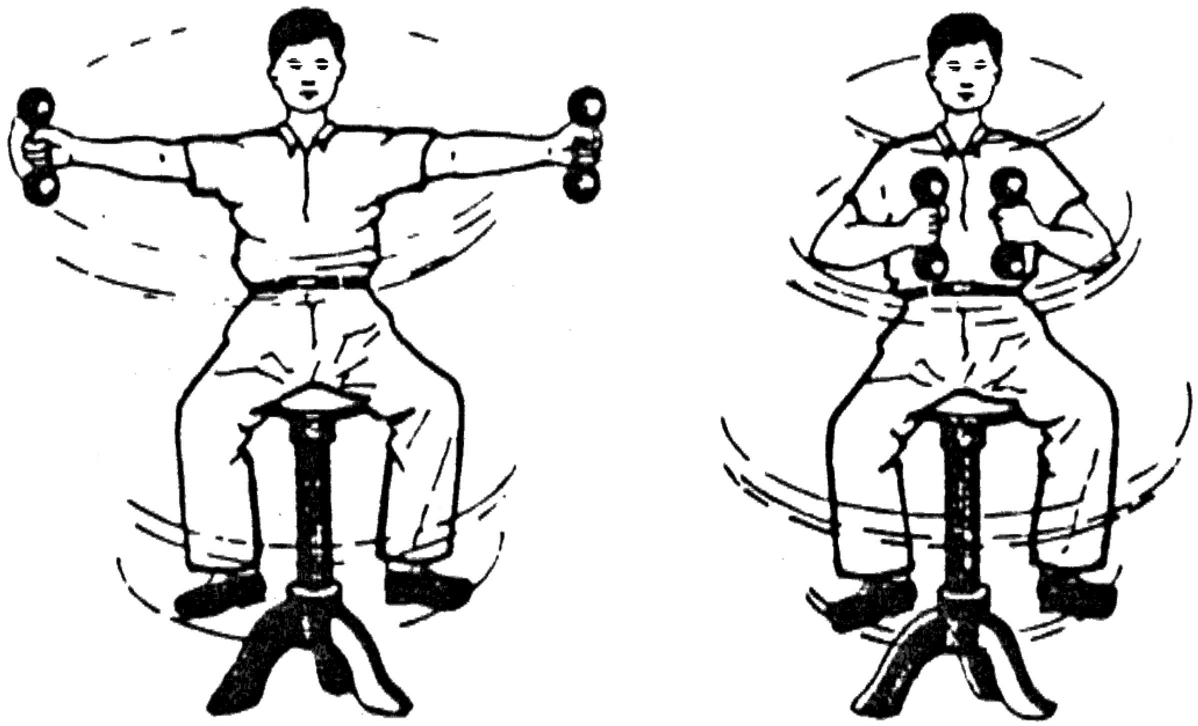
1. 该定律的应用条件，是刚体或刚体组必须满足所受外力的合力矩为零；

2. 角动量、转动惯量和角速度必须相对同一轴；

3. 若将该定律应用于刚体组，刚体组中各个刚体之间可以发生相对运动，但是它们必须是相对于同一转轴在转动；

4. 角动量守恒定律适用于宏观和微观领域。

刚体对转轴的角动量守恒是经常可以见到的，如人手持哑铃的转动，**芭蕾舞演员**和**花样滑冰运动员**作各种快速旋转动作，都利用了对转轴的角动量守恒定律。 惯性导航回转仪（陀螺）也是典型的应用例子。

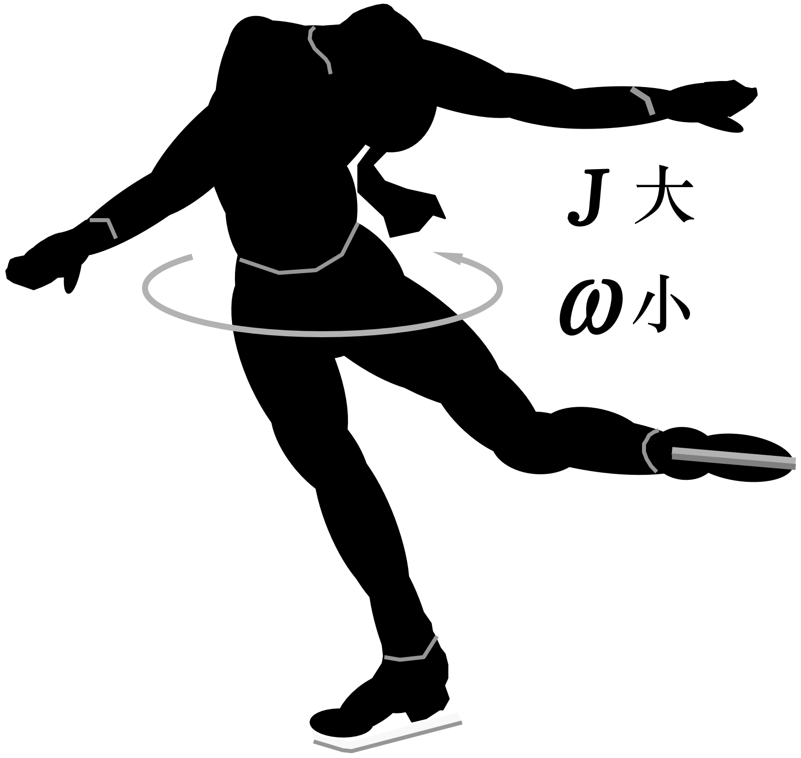


花样滑冰中常见的例子

先使自己转动起来

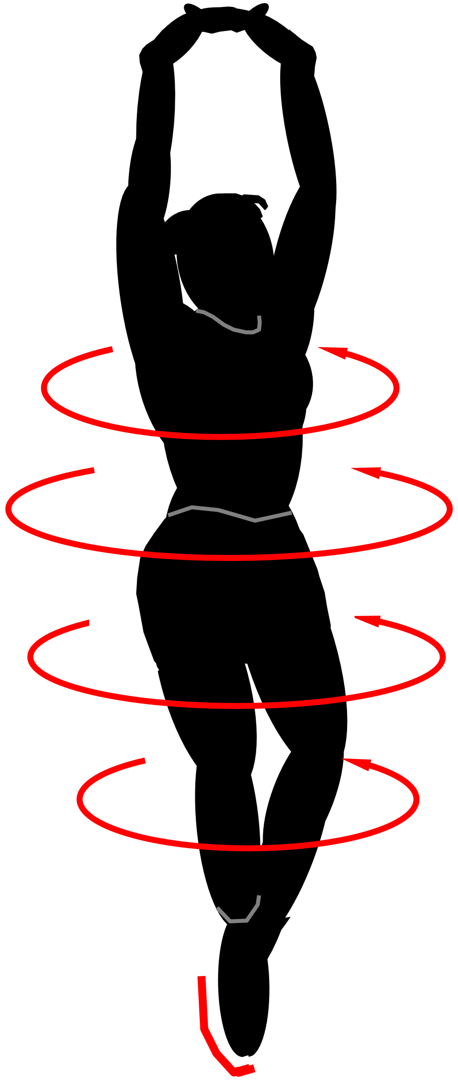
花 样 滑 冰

张臂 → 收臂



J 大 ω 小

J 小 ω 大



例1 一个质量为100kg的圆盘状平台，以1.05rad s^{-1}的角速度绕通过中心的竖直轴自由旋转，在平台的边缘站着一个质量为60kg的人。问当人从平台边缘走到盘的中心时，平台的转速是多少？

解：因为带人的平台是自由转动的，即不受外力矩的作用。若把人和平台看成一个系统，应满足角动量守恒定律，则

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

当人站在平台的边缘时，刚体组的转动惯量为：

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2$$

当人站在平台中心时，刚体组的转动惯量等于平台本身的转动惯量，即

$$J_2 = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

将J_1和J_2代入角动量守恒定律

$$(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2)\omega_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_2$$

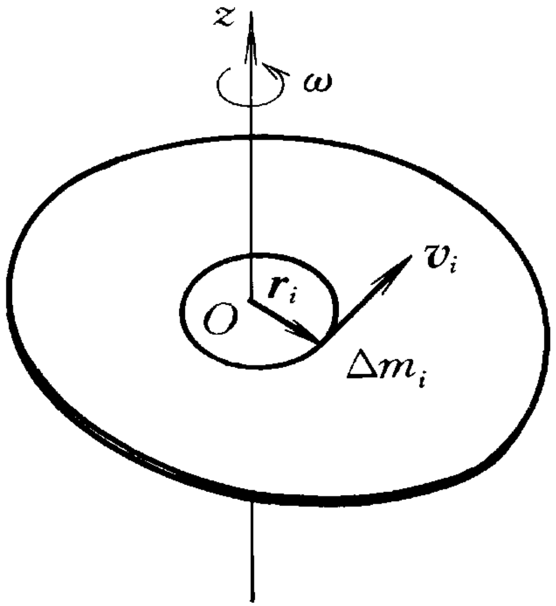
$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2}{\frac{1}{2} m_1 R^2}\omega_1 = \frac{\frac{1}{2} m_1 + m_2}{\frac{1}{2} m_1}\omega_1 = 2.31 rad \bullet s^{-1}$$

第5章 刚体的转动

证明：刚体的转动动能表达式 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

设刚体绕固定轴Oz以角速度ω转动,各体元的质量分别为Δm_1, Δm_2, … , Δm_n ,各体元到转轴Oz的距离依次是r_1 , r_2 , … , r_n。

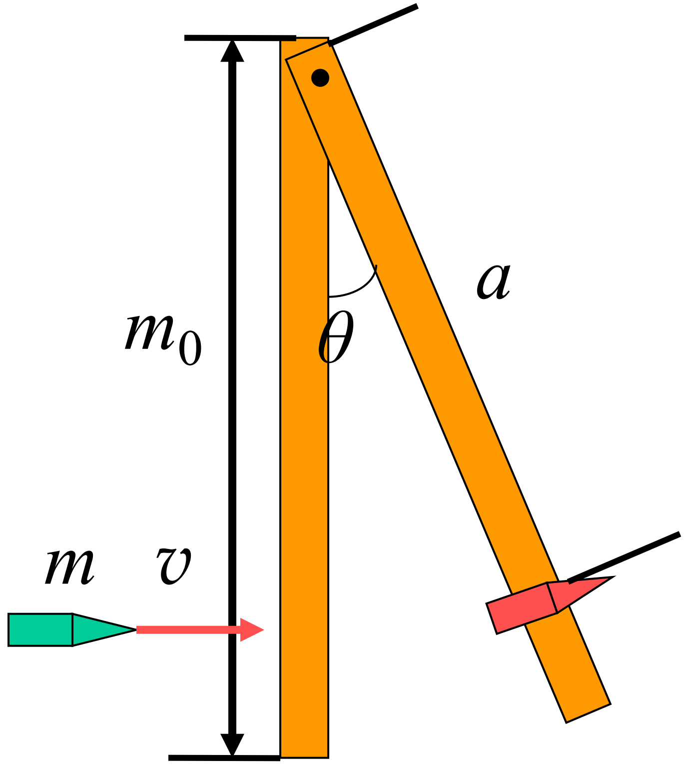
n 个体元绕Oz轴作圆周运动的动能的总和为



$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$

$$=\left(\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

例1 如图所示，一质量为m的子弹以水平速度射入一静止悬于顶端的长棒的a处，使棒偏转了30度角，已知棒长为l，质量为m_0，求子弹的初速度。



解　将子弹和棒看作一个系统，在极短时间内系统角动量守恒：

$$mva=\left(\frac{1}{3}m_0l^2+ma^2\right)\omega$$

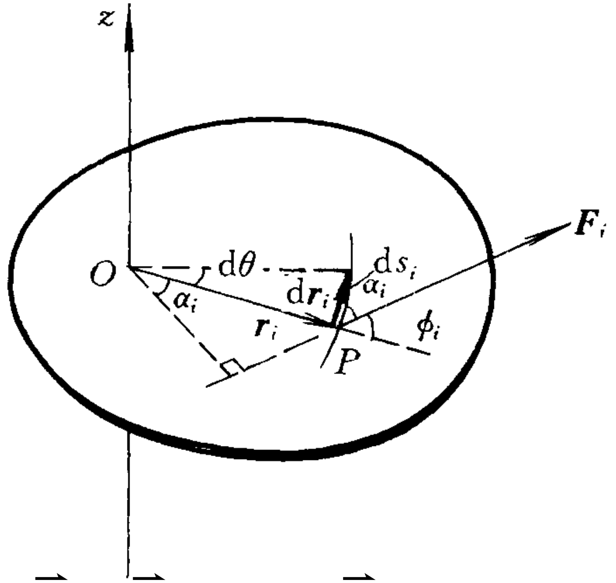
子弹射入棒后，以子弹、棒、地球为一系统，则机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0l^2+ma^2\right)\omega^2=mga(1-\cos\theta)+m_0g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

初速度　$$v=\frac{1}{ma}\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(m_0l+2ma\right)\left(m_0l^2+3ma\right)g/6}$$

§5-6 转动中的功和能

一、定轴转动的动能定理



在刚体转动中，如果力矩的作用使刚体发生了角位移，那么该力矩也作了功。

假设作用于以z轴为转轴的刚体上的多个外力分别是 $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\cdots,\vec{F}_n$ 。

在刚体转动中，外力$\vec{F}_i$所作的元功为：

$$dA_i=\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i=F_i|dr_i|\cos\alpha_i=F_i ds_i\cos\alpha_i$$

因为 $ds_i=r_i d\theta$，并且$\cos\alpha_i=\sin\phi_i$，所以

$$dA_i=F_i r_i\sin\phi_i\, d\theta=M_{iz}d\theta$$

$$dA_i = M_{iz}d\theta$$ 式中M_{iz}是外力F_i对转轴Oz的力矩。

在整个刚体转过dθ角的过程中，n个外力所作的总功为：

$$dA = \sum dA_i = \sum (M_{iz}d\theta) = \left(\sum M_{iz}\right)d\theta = M_z d\theta = M d\theta$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$ 再由转动定律 $M = J\alpha$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{d\omega}{dt}\omega dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

刚体的转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}}$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2=E_{k2}-E_{k1}}$$

定轴转动的动能定理：合外力矩对一个绕定轴转动的刚体作的功，等于它的转动动能的增量。

二、力矩作的功、功率

在刚体转动中，如果力矩的作用使刚体发生了角位移，那么该力矩也作了功。

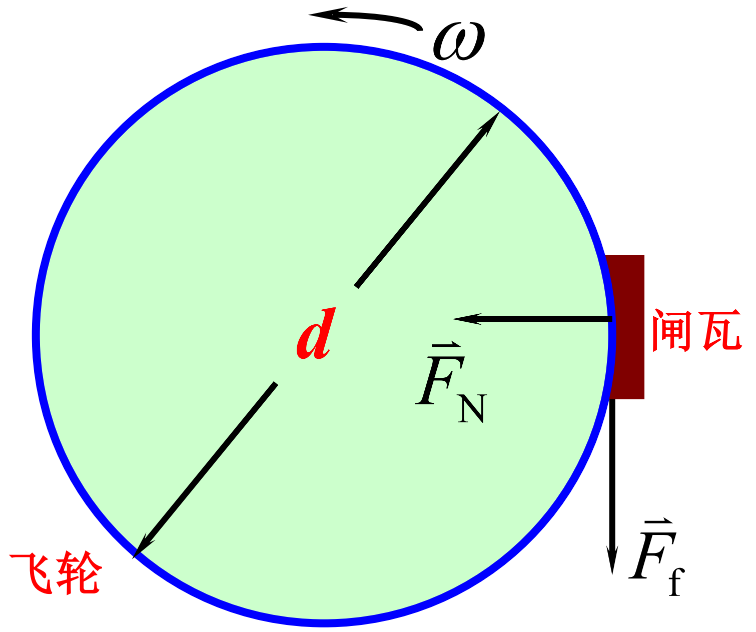
$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z \mathrm{d}\theta$$

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=M_z\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M_z\omega$$

例2 一个转动惯量为2.5 $\mathrm{kg \cdot m^2}$、直径为60cm的飞轮，正以130 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 的角速度旋转。现用闸瓦将其制动， 如果闸瓦对飞轮的正压力为 500 N，闸瓦与飞轮之间的摩擦系数为0.50。求：

(1) 从开始制动到停止, 飞轮转过的角度；（已讲解）

(2) 闸瓦对飞轮施加的摩擦力矩所作的功。



解 为了求得飞轮从制动到停止所转过的角度θ和摩擦力矩所作的功A, 须先求得摩擦力、摩擦力矩和飞轮的角加速度。

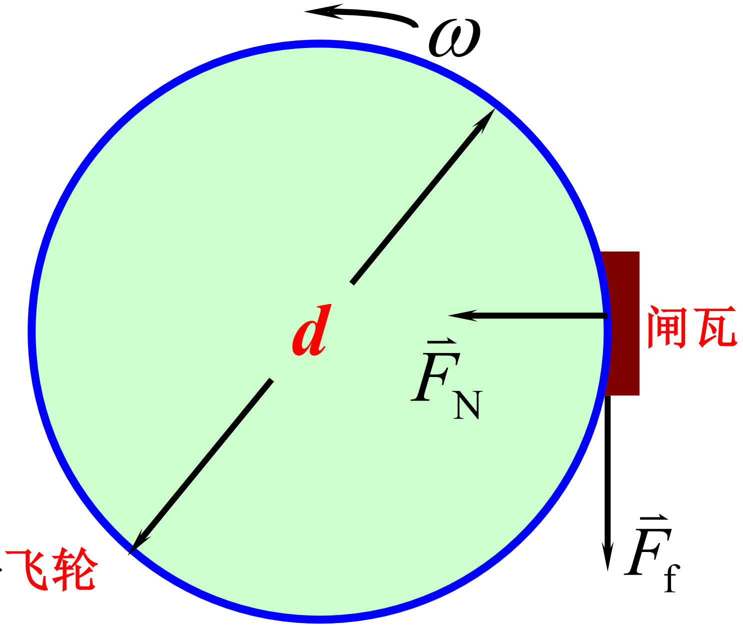
闸瓦对飞轮施加的摩擦力的大小等于摩擦系数与正压力的乘积

$$F_f = \mu F_N = 0.50 \times 500\mathrm{N} = 2.5 \times 10^2 \mathrm{N}$$

方向如图所示。

摩擦力相对z轴的力矩就是摩擦力矩, 所以

$$M_z = -F_f \frac{d}{2} = -2.5\times 10^2 \times 0.30\,\mathrm{N\cdot m} = -75\,\mathrm{N\cdot m}$$



摩擦力矩的方向沿z轴的负方向, 故取负值。

根据转动定理，可以求得飞轮受到摩擦力矩作用时的角加速度为:

$$\alpha = \frac{M_z}{J} = -\frac{75}{2.5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}} = -30\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

对于匀变速转动, 从开始制动到停止, 飞轮转过的角度θ可由下式求得:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

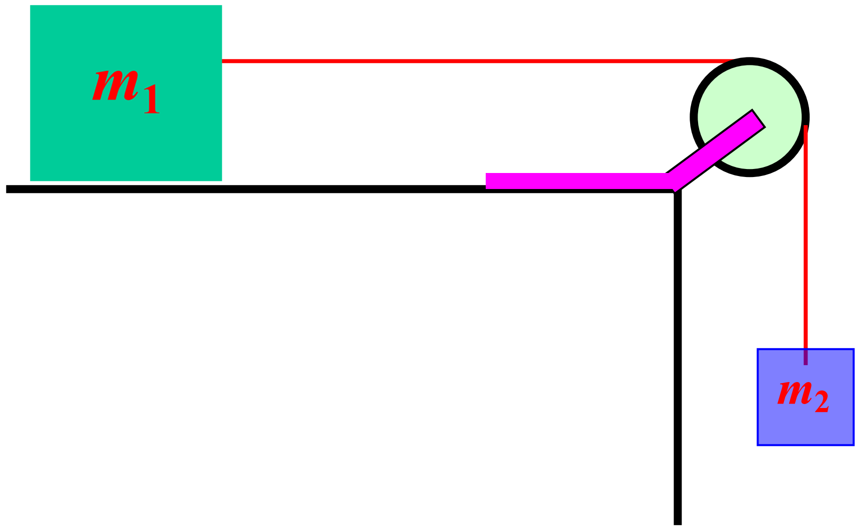
所以

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{0 - 130^2}{-2\times 30}\,\mathrm{rad} = 2.8\times 10^2\,\mathrm{rad}$$

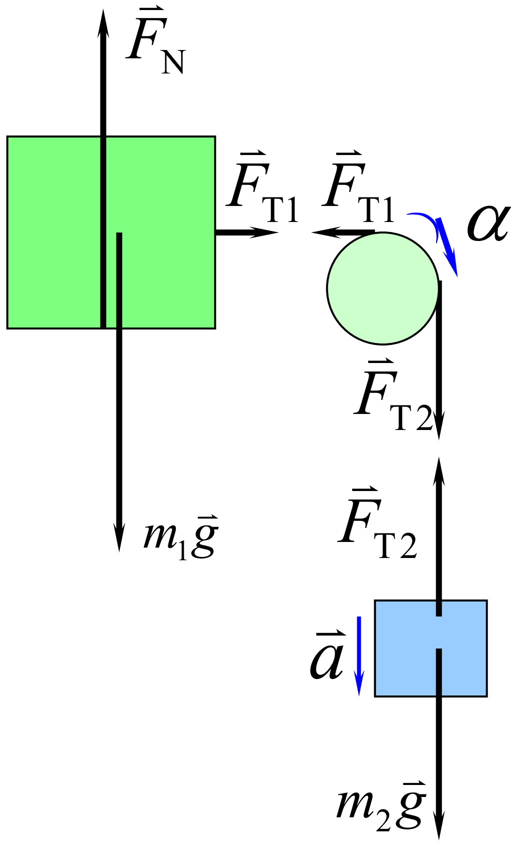
(2) 摩擦力矩所作的功

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_z\theta = -75 \times 2.8 \times 10^2\,\mathrm{J} = -2.1 \times 10^4\,\mathrm{J}$$

例2 质量为 m_1 的物体置于完全光滑的水平桌面上，用一根不可伸长的细绳拉着，细绳跨过固定于桌子边缘的定滑轮后，在下端悬挂一个质量为 m_2 的物体，如图所示。已知滑轮是一个质量为 m_0 ,半径为r 的圆盘, 轴间的摩擦力忽略不计。求滑轮与 m_1 之间的绳子的张力$\vec{F}_{T1}$ 、滑轮与 m_2 之间的绳子的张力$\vec{F}_{T2}$以及物体运动的加速度$\vec{a}$ 。



解 物体m_1、m_2和滑轮的受力情况如图所示。



列方程 $F_{T1} = m_1 a$ （1）

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a \quad （2）$$

对于滑轮

$$F_{T2} r - F_{T1} r = J\alpha = \frac{1}{2} m_0 r^2 \alpha \quad （3）$$

辅助方程

$$r\alpha = a \quad （4）$$

解以上四个联立方程式， 可得

$$a=\frac{m_2g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_0}\qquad F_{T1}=\frac{m_1m_2g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_0}$$

$$F_{T2}=\frac{(m_1+\frac{1}{2}m_0)m_2g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_0}$$

此题还可以用能量的方法求解。在物体m_2下落了高度h时，可以列出下面的能量关系

$$m_2gh=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (5)$$

式中v是当m_2下落了高度 h 时两个物体的运动速率，ω是此时滑轮的角速度。

$$m_2 gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad \textbf{（5）}$$

因为 $J = \frac{1}{2}m_0 r^2$, $\omega = \frac{v}{r}$,所以得

$$m_2 gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_0)v^2$$

由此解得 $$v^2 = \frac{2m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_0}h \qquad \textbf{（6）}$$

将 v^2**= 2*ah*** 代入 **(6)** 式, 可以求得两个物体的加速度 $a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_0}$

根据 $F_{T1}h=\frac{1}{2}m_1v^2$，立即可以求得张力

$$F_{T1}=\frac{1}{2}m_1v^2\frac{1}{h}=\frac{m_1m_2g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_0}$$

根据 $(m_2g-F_{T2})h=\frac{1}{2}m_2v^2$ 或 $F_{T2}r-F_{T1}r=J\alpha$

可以立即算出张力

$$F_{T2}=\frac{(m_1+\frac{1}{2}m_0)m_2g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_0}$$

以上两种方法，都是求解这类问题的基本方法，都应该理解和掌握。

三、机械能守恒

✓ 如果刚体受到保守力做功，也可以引入势能的概念。

✓ 刚体的重力势能 —— 质点系的重力势能，即各质元重力势能的总和。

$$E_p = \sum_i \Delta m_i g h_i = g \sum_i \Delta m_i h_i$$

根据质心定义，刚体质心的高度应为： $h_C = \dfrac{\sum_i \Delta m_i h_i}{m}$

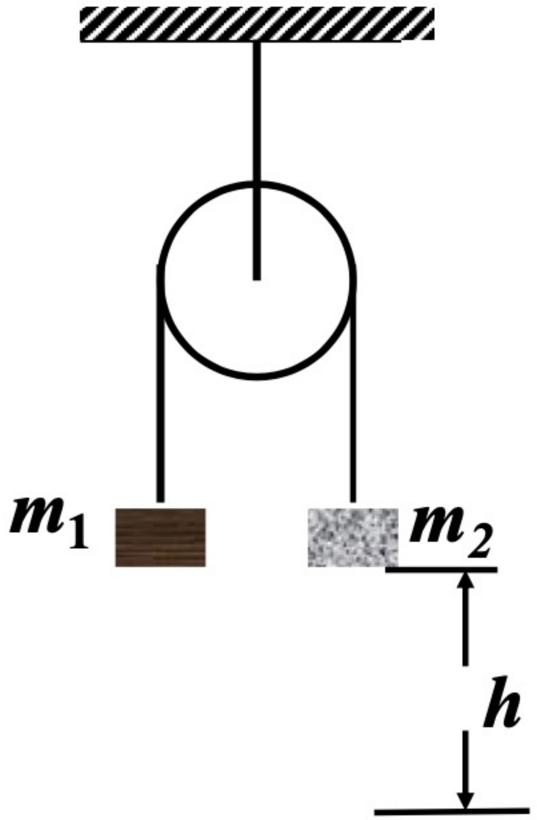
$\Rightarrow$ $E_p = mgh_C$ 即，刚体势能可用质心势能表示。

✓ 系统-- 刚体 + 地球

机械能守恒的条件仍为 $A_{外力} + A_{非保内力} = 0$

机械能守恒： $E = E_k + E_p =$ 常量 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C =$ 常量

例1 在阿特武德机中装在光滑水平轴承的滑轮半径为 $R = 5 \times 10^{-2}$ m，一边挂一 的物体 m_1 =0.46 kg，另一边挂 m_2 =0.5 kg 。当 m_2 由静止释放后，在 5 s 内下降了 h = 0.75 m ，试用转动定理与能量关系两种方法确定滑轮的转动惯量。



解 用机械能守恒：以初始时位置的势能为零

$$0 = m_1 gh - m_2 gh + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

又 $\because v_1 = v_2 = v, \quad v = R\omega$

$h = \frac{1}{2}at^2$, 而 $v = at$, ⇒ $v = \frac{2h}{t}$

⇒ $$(m_2 - m_1)gh = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}(m_2 + m_1)\,v^2$$

$$= \left(\frac{J}{R^2} + m_2 + m_1\right)\frac{2h^2}{t^2}$$

$$(m_2 - m_1)gh = \left(\frac{J}{R^2} + m_2 + m_1\right)\frac{2h^2}{t^2}$$

$$\Rightarrow \quad J = R^2\left[\frac{(m_2 - m_1)gt^2}{2h} - m_1 - m_2\right]$$

$$= 0.05^2\left[\frac{(0.5 - 0.46)\times 9.8\times 5^2}{2\times 0.75} - 0.46 - 0.5\right]$$

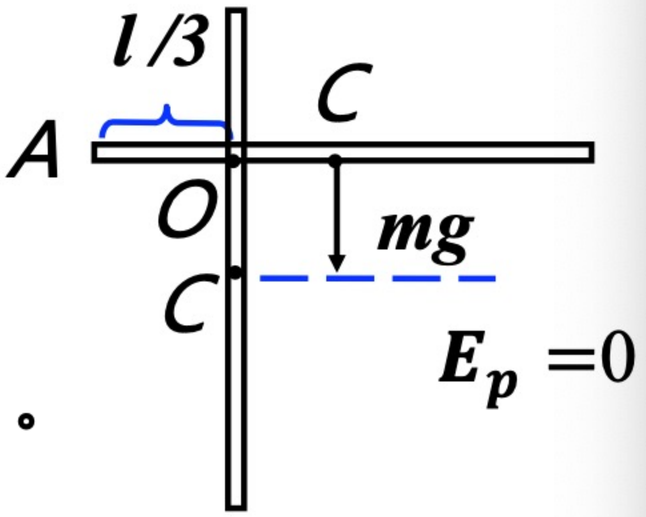
$$= 1.39\times 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

例2 已知质量为m 长为 l 细棒，绕过O点的水平光滑轴在竖直面内转动，A点距 O 点 $l/3$，棒由静止位置开始释放，求：

（1）棒在水平位置刚释放时的角加速度。

（2）杆转到竖直位置时的角速度和角加速度。

（3）棒在竖直位置时，棒的两端和中点的速度和加速度。



解 分析棒受力：mg（有力矩），O点的支撑力 N（无力矩）。

（1）求α 有转动定理：$M_O = J_O\alpha$

由平行轴定理: $J_O = J_C + m\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{36}=\frac{ml^2}{9}$

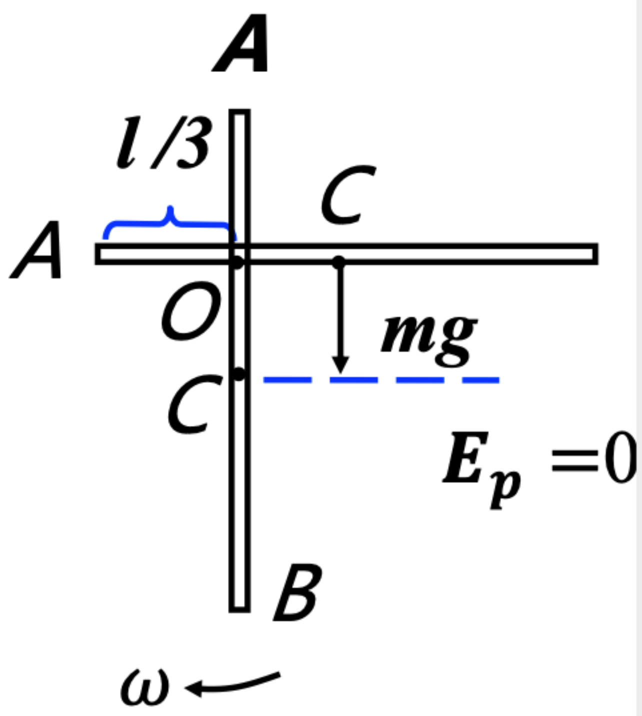
水平位置: $M_O = mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)=\frac{mgl}{6}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{M_O}{J_O} = \frac{3g}{2l}$$

（2） 系统：棒+ 地球， $A_{外力}+A_{非保内力}=0$， 机械能守恒：

设竖直位置重力势能为0，

$$mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)=\frac{1}{2}J_O\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{mgl}{3J_O}}=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$



有转动定理：$M_O=J_O\alpha$

竖直位置重力矩 $M_O=0$， $\Rightarrow$ $\alpha=0$

（3） 两端： $v_A=\omega\frac{l}{3}=\sqrt{\frac{gl}{3}}$ $\qquad a_A=\omega^2\frac{l}{3}=g$

$v_B=\omega\frac{2l}{3}=\sqrt{\frac{4gl}{3}}$ $\qquad a_B=\omega^2\frac{2l}{3}=2g$

中心： $v_C=\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{2}}-\frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{3}}\right)=\sqrt{\frac{\boldsymbol{gl}}{\mathbf{12}}}$

$$a_C=\boldsymbol{\omega}^2\left(\frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{2}}-\frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{3}}\right)=\frac{\boldsymbol{g}}{\mathbf{2}}$$

小　结

一. 力矩作的功　　$dA = M_z \mathrm{d}\theta$

若$\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{C}$(常数),则$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_z\boldsymbol{\theta}$

$$\theta_1 \to \theta_2 \qquad A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z \mathrm{d}\theta$$

二. 转动定理　　$\boldsymbol{M}_z = \boldsymbol{J}\alpha$

在定轴转动中,刚体相对于某转轴的转动惯量与角加速度的乘积等于作用于刚体的外力相对同一转轴的合力矩。

三. 刚体对转轴的角动量

$$L_z = \sum l_{zi} = (\sum r_i^{\ 2} \Delta m_i)\omega = J\omega$$

四. 刚体对转轴的角动量定理

$$\boldsymbol{M}_z = \frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{J\omega})}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{L}_z}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}}$$

$$M_z \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z$$

$\boldsymbol{M}_z\mathbf{d}\boldsymbol{t}$ 称为冲量矩

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_z \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}\omega_2 - \boldsymbol{J}\omega_1$$

五. 刚体对转轴的角动量守恒定律

在定轴转动中,如果 $M_z = 0$, 则

$$\mathrm{d}L_z = \mathrm{d}(J\omega) = 0 \quad \text{或} \quad L_z = J\omega = \text{恒量}$$

六. 刚体定轴转动的动能定理

合外力矩对一个绕定轴转动的刚体作的功，等于它的转动动能的增量。

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

课后作业

请在异步SPOC上完成

1. 第五章作业： 已发布

- ✓ 04.23日（周日） 23:30之前完成作业提交
- ✓ 04.30日（周日） 23:30之前完成作业互评

理解自然、理解生活、更具智慧！

勤于思考，悟物穷理

(1) 徒手抓子弹是真的吗?

(2) 扔铅球：怎样抛出最远距离？

(3) 卫星的发射速度有什么要求？

(4)小蜥蜴为什可在水上跑？

(5) 荷叶上的水珠是怎么回事？

(6) 黑洞的力学原理？

(7) 花样滑冰：怎样控制身体实现转速快/慢？

……

同学们，再见！