第五章
相似矩阵及二次型

5.1 向量的内积、长度及正交性

5.2 方阵的特征值与特征向量

5.3 相似矩阵

5.4 对称矩阵的对角化

5.5 二次型及其标准形

5.6 用配方法化二次型成标准形

§1 向量的内积、长度及正交性

向量的内积

定义： 设有n 维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

令 $$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \text{ ,}$$

则称 $[x, y]$ 为向量 x 和 y 的**内积**

※内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数.

※内积可用矩阵乘法表示：当x 和 y 都是列向量时，

$$[x, y] = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y$$

例：求向量 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的内积。

解：$[x, y] = 1\times(-4) + 0\times 2 + (-2)\times 3 = -10.$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- **对称性：** $[x, y] = [y, x]$.

$$\begin{aligned}[x, y] &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n \\ &= [y, x]\end{aligned}$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- **对称性：** $[x, y] = [y, x].$
- **线性性质：** $[\lambda x, y] = \lambda[x, y].$

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$[\lambda x, y] = (\lambda x)^T \cdot y = \lambda x^T \cdot y = \lambda(x^T y) = \lambda[x, y]$$

$$[x + y, z] = (x + y)^T \cdot z = (x^T + y^T) \cdot z = (x^T z) + (y^T z) = [x, z] + [y, z]$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- **对称性：** $[x, y] = [y, x]$.
- **线性性质：** $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
- 当 $x = 0$（零向量）时，$[x, x] = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$[x, x] > 0$.

$$\boxed{[x, x] = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0}$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y .$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- **对称性：** $[x, y] = [y, x]$.
- **线性性质：** $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$.

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

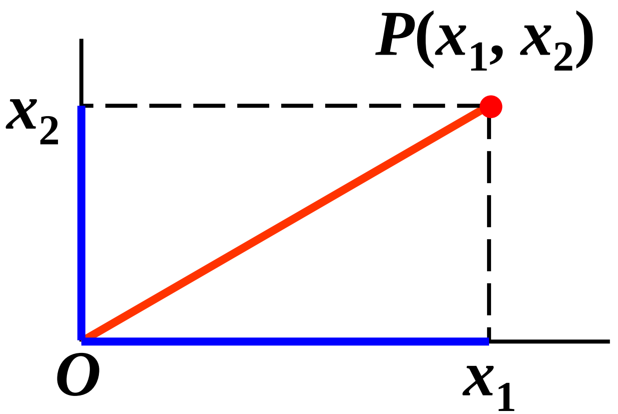
- **当 $x = 0$（零向量）时，** $[x, x] = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量）时， $[x, x] > 0$.
- **施瓦兹（Schwarz）不等式**

$$[x, y]^2 \leq [x, x]\,[y, y] .$$

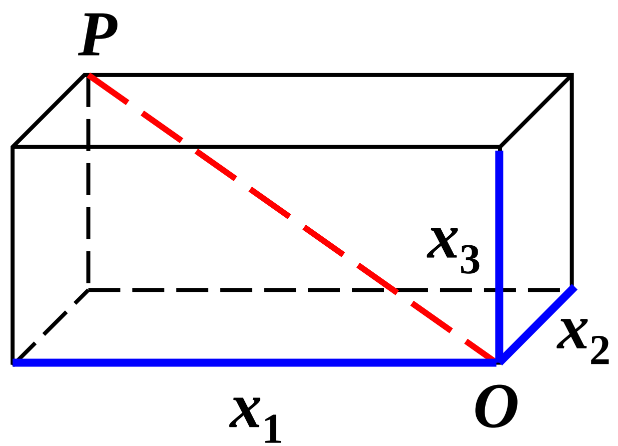
回顾：线段的长度

$[x, x] = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$



若令 $x = (x_1, x_2)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



若令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

向量的长度

定义： 令 $\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的**长度**（或**范数**）（*length*）.

当 $\|x\|=1$时，称 x 为**单位向量**(*unit vector*).

向量的长度具有下列性质：

- **非负性：** 当 $x=0$（零向量）时，$\|x\|=0$；
  当 $x\neq 0$（零向量）时，$\|x\|>0$.
- **齐次性：** $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$.

$$[\lambda x,\lambda x]=\lambda[x,\lambda x]=\lambda[\lambda x,x]=\lambda^2[x,x]$$

$$\|\lambda x\|=\sqrt{[\lambda x,\lambda x]}=\sqrt{\lambda^2[x,x]}=|\lambda|\sqrt{[x,x]}=|\lambda|\cdot\|x\|$$

向量的长度

定义：令 $\|x\| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的**长度**（或**范数**）．

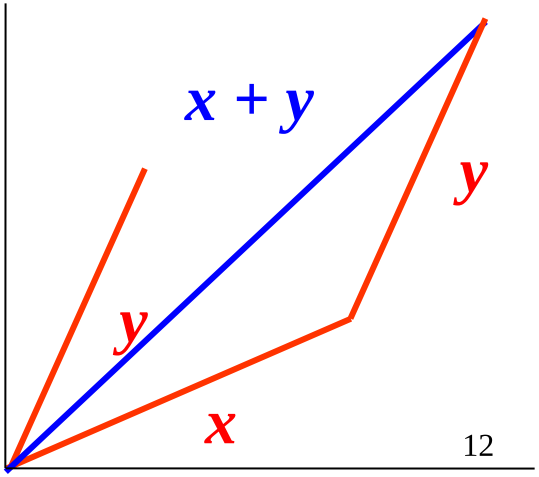
当 $\|x\| = 1$时，称 x 为**单位向量**.

向量的长度具有下列性质：

- **非负性**：当 $x = 0$（零向量）时，$\|x\| = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$\|x\| > 0$.

- **齐次性**：$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- **三角不等式**：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.



向量的正交(*orthogonal*)性

施瓦兹（Schwarz）不等式

$$[x, y]^2 \le [x, x]\,[y, y]$$

当 $x \ne 0$ 且 $y \ne 0$ 时， $\left|\dfrac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}\right| \le 1$

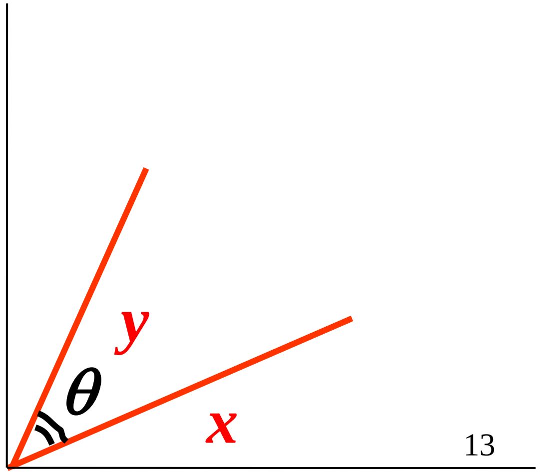
定义：当 $x \ne 0$ 且 $y \ne 0$ 时，把

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

称为 n 维向量 x 和 y 的**夹角**(*angle*).

当 $[x, y] = 0$，称向量 x 和 y **正交**.

结论：若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交.



定义： 两两正交的非零向量组成的向量组成为**正交向量组**.

定理： 若 n 维向量$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

证明： 设 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r = 0$（零向量），那么

$$0 = [a_1, 0] = [a_1, k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + k_2 [a_1, a_2] + \ldots + k_r [a_1, a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + 0 + \ldots + 0$$

$$= k_1 ||a_1||^2$$

从而 $k_1 = 0$.

同理可证，$k_2 = k_3 = \ldots = k_r = 0$.

综上所述， $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

例： 已知3维向量空间R^3中两个向量 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量a_3，使a_1, a_2, a_3两两正交.

分析： 显然$a_1 \perp a_2$.

解： 设$a_3=(x_1, x_2, x_3)^T$，若$a_1 \perp a_3$， $a_2 \perp a_3$，则

$$[a_1, a_3]=a_1^T a_3=x_1+x_2+x_3=0$$

$$[a_2, a_3]=a_2^T a_3=x_1-2x_2+x_3=0$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}$

从而有基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，令 $a_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

定义： n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间 $V \subset R^n$中的向量，满足

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间 V 中的一个基（最大无关组）；

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$两两正交；

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$都是单位向量，

则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个**规范正交基**(*normal orthogonal basis*)．

例： $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个规范正交基．

定义： n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间$V \subset R^n$中的向量，满足

(1)$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间 V 中的一个基（最大无关组）；

(2)$e_1, e_2, \ldots, e_r$两两正交；

则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个**正交基**(*orthogonal basis*).

定义： n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间$V \subset R^n$中**正交基**，且$e_1, e_2, \ldots, e_r$都是单位向量，则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个**规范正交基**(*normal orthogonal basis*).

例： (1) $$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个规范正交基.

(2) $$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

也是 R^4 的一个规范正交基.

(3) $$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个基，但不是规范正交基.

设 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个**正交基**，则V 中任意一个向量可唯一表示为 $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r$

于是

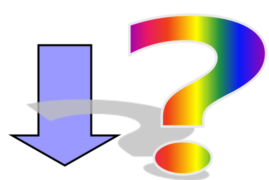
$$\lambda_i = \frac{[x, e_i]}{[e_i, e_i]} = \frac{[x, e_i]}{\| e_i \|^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

特别地，若 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个**规范正交基**，则

$$\lambda_i = [x, e_i], \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

问题： 向量空间 V 中的一个基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$

最



向量空间 V 中的一个规范正交基 $e_1, e_2, \ldots, e_r$

求规范正交基的方法　基 ⇨ 正交基 ⇨ 规范正交基

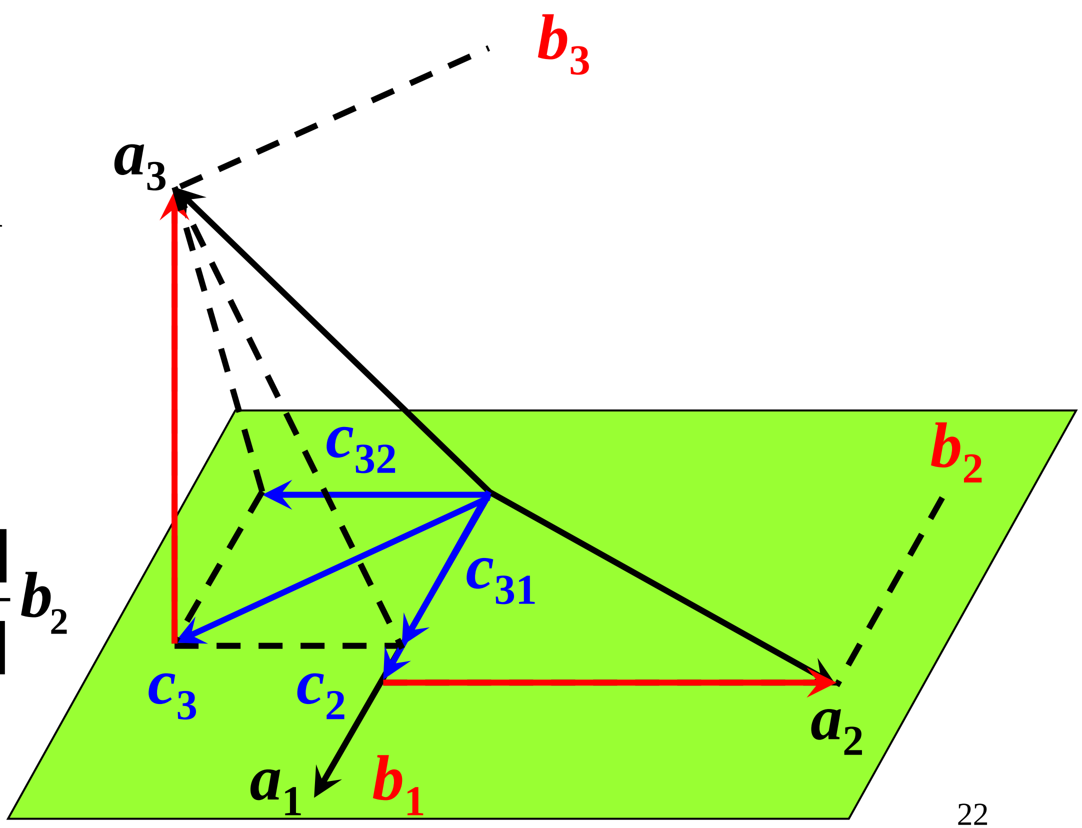
第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

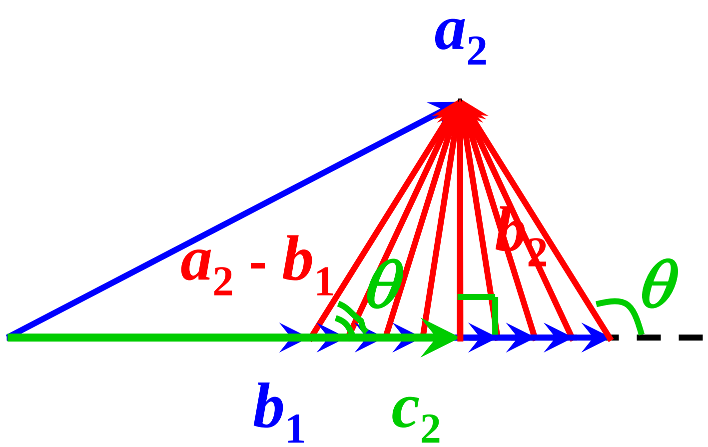
设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - c_3 \\ &= a_3 - c_{31} - c_{32} \\ &= a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 \end{aligned}$$





令 c_2 为 a_2 在 b_1 上的投影，则 $c_2 = \lambda b_1$，

若令 $b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \lambda b_1$，则 $b_1 \perp b_2$.

下面确定λ的值．因为

$$0 = [b_2, b_1] = [a_2 - \lambda b_1, b_1] = [a_2, b_1] - \lambda [b_1, b_1]$$

所以 $\lambda = \dfrac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]}$，从而 $b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \lambda b_1 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$

第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

……

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

于是 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 两两正交，并且与 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 等价，即 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基.

特别地，$b_1, \ldots, b_k$ 与 $a_1, \ldots, a_k$ 等价（$1 \le k \le r$）.

第二步：单位化

设 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基，那么令

$$e_1 = \frac{1}{\| b_1 \|} b_1,\ e_2 = \frac{1}{\| b_2 \|} b_2, \cdots,\ e_r = \frac{1}{\| b_r \|} b_r$$

因为

$$[e_1, e_1] = \left[\frac{1}{\| b_1 \|} b_1, \frac{1}{\| b_1 \|} b_1 \right] = \frac{1}{\| b_1 \|^2} \left[b_1, b_1 \right] = \frac{\| b_1 \|^2}{\| b_1 \|^2} = 1$$

$$\| e_1 \| = \sqrt{[e_1, e_1]} = 1$$

从而 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个规范正交基.

例： 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解： 第一步正交化，取

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例： 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解： 第二步单位化，令

$$e_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\|b_3\|} b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例： 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，试求非零向量$a_2, a_3$，使$a_1, a_2, a_3$两两正交.

解： 若$a_1 \perp a_2$， $a_1 \perp a_3$，则

$$[a_1, a_2] = a_1^{\mathrm{T}} a_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$[a_1, a_3] = a_1^{\mathrm{T}} a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

即a_2, a_3 应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

把基础解系正交化即为所求. (以保证 $a_2 \perp a_3$ 成立)

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，**即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，**
则称矩阵 A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

于是
$$[a_i, a_j] = a_i^T a_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

从而可得

⑩ 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的**列向量**都是单位向量，且两两正交．即 A 的**列向量组**构成R^n 的规范正交基．

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，**即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，**
则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

⑩ 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的**列向量**都是单位向量，且两两正交．即 A 的**列向量组**构成R^n 的规范正交基.

因为$A^{\mathrm{T}}A = E$ 与$AA^{\mathrm{T}} = E$ 等价，所以

$$AA^T = \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} b_1^T b_1 & b_1^T b_2 & \cdots & b_1^T b_n \\ b_2^T b_1 & b_2^T b_2 & \cdots & b_2^T b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^T b_1 & b_n^T b_2 & \cdots & b_n^T b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[b_i, b_j] = b_i^T b_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{T}A = E$，**即 $A^{-1} = A^{T}$，**
则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

- ⑩ 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的**列向量**都是单位向量，且两两正交．即 A 的**列向量组**构成R^n 的规范正交基．

- ⑩ 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的**行向量**都是单位向量，且两两正交．即 A 的**行向量组**构成R^n 的规范正交基.

例： 正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

R^4 的一个规范正交基

$$e_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

正交矩阵具有下列性质：

✓ **若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且$|A| = 1$ 或 - 1.**

✓ **若 A 和B是正交阵，则 A 和 B 也是正交阵.**

定义：若 P 是正交阵，则线性变换 $y = Px$ 称为正交变换.

$\|y\|$

经过正交变换，线段的长度保持不变（从而三角形的形状保持不变），这就是正交变换的优良特性.

§2 方阵的特征值与特征向量

引言

- 纯量阵 λE 与任何同阶矩阵的乘法都满足交换律，即

$$(\lambda E_n)A_n = A_n(\lambda E_n)$$

- 矩阵乘法一般不满足交换律，即$AB \neq BA$.
- 数乘矩阵是可交换的，即

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

- $Ax = \lambda x$?

例：$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

一、基本概念

定义： 设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维**非零向量** x 满足

$$Ax = \lambda x,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**（*eigenvalue*），非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的**特征向量**(*eigenvector*).

例：
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $\lambda = 1$ 为 $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值，

一、基本概念

定义：设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维**非零向量** x 满足

$$Ax = \lambda x,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的**特征向量**.

$$Ax = \lambda x = \lambda E x$$

$\Leftrightarrow$ 非零向量 x 满足 $(A-\lambda E)x = 0$（零向量）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|A-\lambda E| = 0$

特征方程

特征多项式

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- **特征方程** $|A-\lambda E| = 0$
- **特征多项式** $|A-\lambda E|$

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解： A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时， 对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{即}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $k\,p_1$ （$k\neq 0$）就是对应的特征向量.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

当 $\lambda_2=4$ 时，对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-4 & -1\\ -1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}，\text{即}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$. $k\,p_2$ （$k\neq 0$）就是对应的特征向量.

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解（续）： 当 $\lambda_1=-1$ 时，因为

$$A-\lambda_1 E=A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解方程组 $(A+E)x=0$.

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $k\,p_1$ $(k\neq 0)$ 就是对应的特征向量.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解（续）：当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，因为

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解方程组 $(A-2E)\,x=0$.

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$

$k_2\,p_2+k_3\,p_3$ 就是对应的特征向量.

二、特征值的基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

例如 **设 *A* 是二阶方阵则**

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22})=0$$

设 λ_1,λ_2 是此二次方程的两个根，则

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$$

$$\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=|A|$$

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

- 若 λ 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系就是对应于特征值为 λ 的全体特征向量的最大无关组.

例： 设 λ 是方阵 A 的特征值，证明

(1) λ^2 是 A^2 的特征值;

(2) 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值.

结论： 若非零向量 p 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则

- λ^2 是 A^2 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值，对应的特征向量仍然是 p .

证： 设 λ, p 是 A 的特征值和特征向量，则 $Ap = \lambda x,$

$$A^2 p = A(Ap) = A(\lambda p) = \lambda(Ap) = \lambda^2 p.$$

$$Ap = \lambda x \Rightarrow p = \lambda A^{-1} p,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow A^{-1} p = \frac{1}{\lambda} p.$$

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有n 个特征值（重根按重数计算）．
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

- 若 λ 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系就是对应于特征值为 λ 的全体特征向量的最大无关组.
- 若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\varphi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_m \lambda^m$ 是矩阵多项式 $\varphi(A) = a_0 + a_1 A + \ldots + a_m A^m$ 的特征值.

例： 设3 阶方阵 A 的特征值为1, −1, 2，求

$$A^* + 3A - 2E$$

的特征值.

解： $A^* + 3A - 2E = |A|\,A^{-1} + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E = \varphi(A)$

其中$|A| = 1\times(-1)\times 2 = -2$.

设 λ 是 A 的一个特征值，令

$$\varphi(\lambda) = -\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2$$

则所求特征值为 $\varphi(1) = -1, \varphi(-1) = -3, \varphi(2) = 3.$

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

例： 设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2， 证明 $p_1 + p_2$不是 A 的特征向量.

解： 由已知 $Ap_1 = \lambda_1 x,\ Ap_2 = \lambda_2 x,$ 而

$$A(p_1 + p_2) = Ap_1 + Ap_2 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2,$$

假设 $p_1 + p_2$ 是A 的特征向量，则必有

$$A(p_1 + p_2) = \lambda(p_1 + p_2),$$

于是

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda(p_1 + p_2),$$

由 $$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda(p_1 + p_2),$$

有 $$(\lambda_1 - \lambda) p_1 + (\lambda_2 - \lambda) p_2 = 0,$$

而 p_1, p_2 线性无关，所以

$$\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = 0,$$

于是 $$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾. 故 $p_1 + p_2$ 不是A的特征向量.

例：设3 阶方阵 A 的特征值为1, 2, 3，求$|A^3-5A^2+7A|$.

解：令 $$\varphi(A)=A^3-5A^2+7A,$$

则其特征值为 $$\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$$

又因为 $\varphi(1)=3, \varphi(2)=2, \varphi(3)=3,$ 是 $\varphi(A)$ 全部特征值，故

$$|\varphi(A)|=\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)=3\times 2\times 3=18.$$

§3 相似矩阵

一、基本概念

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为矩阵 A 的**相似矩阵**（*similar matrix*），或称矩阵A 和 B 相似，记作$A \sim B$. 对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行**相似变换**(*similar transformation*).称可逆矩阵 P 为把 A 变成 B 的**相似变换矩阵**.

2. 相似性满足：

反身性： $A \sim A$;

对称性： $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

传递性： $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

即矩阵之间的相似关系是一种等价关系.

注： 1. $A \sim B \Longrightarrow A$与$B$等价，反之不然.

2. $A \sim B$，并且A可逆 $\Longrightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$.

二、相似矩阵的性质

定理： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同.

证明： 根据题意，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$.

于是

$$|B-\lambda E| = |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}(A-\lambda E)P|$$

$$= |P^{-1}||A-\lambda E||P| = |A-\lambda E| .$$

注：特征多项式相同的矩阵不一定相似.

例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

两个矩阵的特征多项式均为 $(\lambda-1)^2$.

若$P^{-1}AP=B$, **则** $A=PBP^{-1}=E$ **，矛盾.**

从上面这个例子可知，两个矩阵的特征值相同，或迹相同，或行列式相同，并不能得到他们是相似.

定理： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同.

推论： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似.

证明： 设存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，则 $P^{-1}A^kP = B^k$.

设 $\varphi(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$，那么

$$
\begin{aligned}
& P^{-1}\varphi(A)P \\
&= P^{-1}(c_m A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \dots + c_1 A + c_0 E)P \\
&= c_m P^{-1}A^m P + c_{m-1}P^{-1}A^{m-1}P + \dots + c_1 P^{-1}AP + c_0 P^{-1}EP \\
&= c_m B^m + c_{m-1}B^{m-1} + \dots + c_1 B + c_0 E \\
&= \varphi(B).
\end{aligned}
$$

定理： 设 n 阶矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，则$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

证明：

$$|\Lambda - \lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同.

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似.

若 n 阶矩阵 A 和 n 阶对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似，则

$$\varphi(A) = P^{-1}\varphi(\Lambda)P = P^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

从而通过计算 $\varphi(\Lambda)$ 可方便地计算 $\varphi(A)$.

若 $\varphi(\lambda) = |A-\lambda E|$,

§4 对称矩阵的对角化

定义： 若矩阵A 与对角阵相似，则称矩阵 A 可以对角化.

问1： 什么样的矩阵与对角阵相似?

问2： 如果矩阵 A 与对角阵相似, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，那么 $P=$？ P 与A 有何联系?

可逆矩阵 P，满足 $P^{-1}AP = \Lambda$ （对角阵）

矩阵 P 的列向量组线性无关

?

$AP = P\Lambda$

$Ap_i = \lambda_i p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ $(A-\lambda_i E)\, p_i = 0$

A 的特征值

对应的特征向量

其中

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

一、矩阵可对角化的条件

定理： n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量．（P.123定理4）

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关．（P.120定理2）

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似．

说明：当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化． （P.118例6）

二、实对称矩阵的特征值与特征向量

定义： 若 实矩阵$A=A^T$ 则称A是对称矩阵.

定理: 实对称矩阵的特征值都是实数 .

推论： n 阶实对称矩阵有n个实特征值 . (重根按重数计算)

推论2 实对称矩阵 A 的特征向量都是实向量 .

这是因为A 的特征向量都是 $(A\text{-}\lambda_i E)X=0$ 的非零解向量,

而 A 的特征值 λ_i 是实数.

定理： 设 λ_1 和 λ_2 是对称阵 A 的特征值， p_1, p_2 是对应的特征向量，如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 p_1, p_2 正交

证明： $A p_1 = \lambda_1 p_1$， $A p_2 = \lambda_2 p_2$， $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 p_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 p_1)^{\mathrm{T}} = (A p_1)^{\mathrm{T}} = p_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = p_1^{\mathrm{T}} A$ （A 是对称阵）

$\lambda_1 p_1^{\mathrm{T}} p_2 = p_1^{\mathrm{T}} A p_2 = p_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^{\mathrm{T}} p_2$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\ p_1^{\mathrm{T}} p_2 = 0$

因为$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $p_1^{\mathrm{T}} p_2 = 0$，即 p_1, p_2 正交

三、实对称矩阵的相似对角化

定理5 对任一实n阶对称矩阵A，都存在一个n阶正交矩阵P，使

$$P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的特征值.

说明：当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化.

推论：设 A 为 n 阶对称阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则

- 矩阵 $A-\lambda E$ 的秩等于 $n-k$，
- 恰有 k 个线性无关的特征向量与特征值 λ 对应.

推论：设 A 为 n 阶对称阵，则 A 的 n 个特征向量必线性无关，故A 必可对角化.

利用正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法

具体步骤为：

1.求A的特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

2. 求$(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系；

3. 将基础解系正交化;

4. 再将其单位化.

这样共可得到 n 个两两正交的单位特征向量

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

5. 以 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为列向量构成正交矩阵

$$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

有
$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注　对角阵中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的顺序

要与特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的排列顺序一致。

四、举例

例： 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求正交阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$ 对角阵.

解： 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时，解方程组 $(A+2E)x=0$.

$$A+2E=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\text{得基础解系 } \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\text{得 } \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

- 当 $\lambda_1 = -2$ 时，对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

- 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，对应的特征向量为 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

显然，必有 $\xi_1 \perp \xi_2$， $\xi_1 \perp \xi_3$，但 $\xi_2 \perp \xi_3$ 未必成立.

于是把 ξ_2, ξ_3 正交化：

$$\eta_2 = \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \xi_3 - \frac{[\xi_3, \eta_2]}{[\eta_2, \eta_2]}\eta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

此时 $\xi_1 \perp \eta_2$， $\xi_1 \perp \eta_3$， $\eta_2 \perp \eta_3$.

单位化:

- 当 $\lambda_1 = -2$时，对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，对应的特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\eta_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

于是 p_1, p_2, p_3 构成正交阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

从而 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

问题：这样的解法对吗？

例： 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n .

分析：

- **数学归纳法**

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^n=A^{n-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{n-1} & 1-3^{n-1} \\ 1+3^{n-1} & 1+3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

定理： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，从而 A 和 B 的特征值也相同．

推论： 若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似．

若 n 阶矩阵 A 和 n 阶对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似，则

$$\varphi(A) = P^{-1}\varphi(\Lambda)P$$

从而通过计算 $\varphi(\Lambda)$ 可方便地计算 $\varphi(A)$.

若 $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$,

例：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n .

分析：

- 数学归纳法
- 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2+1=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Lambda^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的可逆矩阵 P .

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的可逆矩阵 P .

当 $\lambda_1=1$ 时， 解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=3$ 时， 解方程组 $(A-3E)x=0$.

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

问题：是否需要单位化?

于是 $Ap_1=p_1$， $Ap_2=3p_2$，即 $A(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}(p_1,p_2)$.

若 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

于是 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\Lambda$ 即 $A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1+3^n & 1+3^n\end{pmatrix}$$

练习 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ (1)求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角形

(2)求正交矩阵C，使$C^{-1}AC$为对角形

解: (1) 由 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda+7) = 0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7.$

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$时，

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -2x_2 + 2x_3}$ **基础解系** $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=-7$时,

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{pmatrix}$$

$$(A+7E)=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1=-x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$$ **基础解系** $$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -7.$$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{使} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$$

可逆矩阵

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-7.$

将α_1,α_2正交化： $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{(-4)}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7.$

将α_1,α_2正交化： $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{(-4)}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

将β_1,β_2,α_3单位化： $\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},\qquad \gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -7.$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5\sqrt{5}}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix},$$

使$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$

正交矩阵

例 求 a, b 的值与正交矩阵 C，使

$C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角矩阵, $A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

解 $\because\ A\sim\Lambda$,

$$a+1+1=\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}\Lambda=0+1+4=5,\ \Rightarrow a=3,$$

$$|A|=|\Lambda|=0$$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1&b&1\\b&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b&1\\b&3&1\\0&1-b&0\end{vmatrix}=(1-b)^2=0$$

$$\Rightarrow b=1,$$

A的特征值：$\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

求$\lambda_1=0$的特征向量:

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

同样可得 $\lambda_2=1$的特征向量为: $\alpha_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$

$\lambda_3=4$的特征向量为: $\alpha_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

$$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

因 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$ 所以上三个向量两两正交.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化：$\gamma_1=\dfrac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $C=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)$，则 C 为正交矩阵且

$$C^{-1}AC=diag(0,1,4).$$

例

设 $\lambda_1 = 12$ 是矩阵, $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$

的一个特征值, 求 A 的其余特征值.

解: $|A - \lambda_1 E| = |A - 12E| = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & a & -8 \end{vmatrix}$

$$= -(9a + 36) = 0$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{a = -4}.$$

$$\boxed{|A - \lambda E| = 0}$$

法1 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -1 \\ 4 & 7-\lambda & -1 \\ -4 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$$=-(\lambda+4)(\lambda-3)^2$$

其余特征值为 $\lambda_2=\lambda_3=3$.

$$A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$$

法2 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$

$$=7+7+4=18,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=\begin{vmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{vmatrix}=108,$$

将 $\lambda_1=12$ 代入

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=18\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=108\end{cases},\quad \text{得}\quad \lambda_2=\lambda_3=3.$$

例 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3,

A 对应于特征值 1, 2 的特征向量分别是：

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}.$$

求 (1) A 对应于特征值 3 的特征向量,

(2) 求矩阵 A.

解 (1) 设 A 对应于 3 的特征向量是

$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$(\alpha_1,\alpha_3)=-x_1-x_2+x_3=0$$
$$(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2-x_3=0,$$

$$x_1=x_3$$
$$x_2=0$$

$$\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

A 的特征值是 1, 2, 3,

$$\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

设 $P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(1,2,3),\quad \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\-3&0&3\end{pmatrix},\qquad =\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}.$$

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Lambda$ 为对角矩阵,

求 x 与 y 应满足的条件.

解 $$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda_1 = 1\,(二重), \quad \lambda_2 = -1.$$

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda_1$ 有两个线性无关的特征向量.

$$\Leftrightarrow R(\lambda_1 E - A) = 1.$$

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \boldsymbol{y} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda_1 E - A) = 1 \Leftrightarrow -x - y = 0,$$

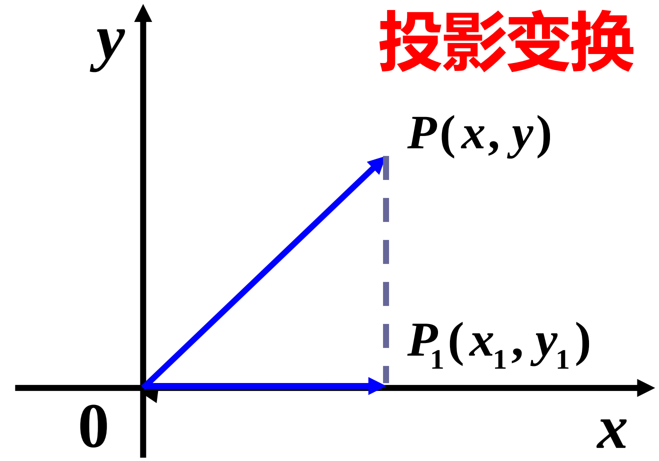
即 $x + y = 0.$

§5 二次型及其标准形

例 2阶方阵

投影变换

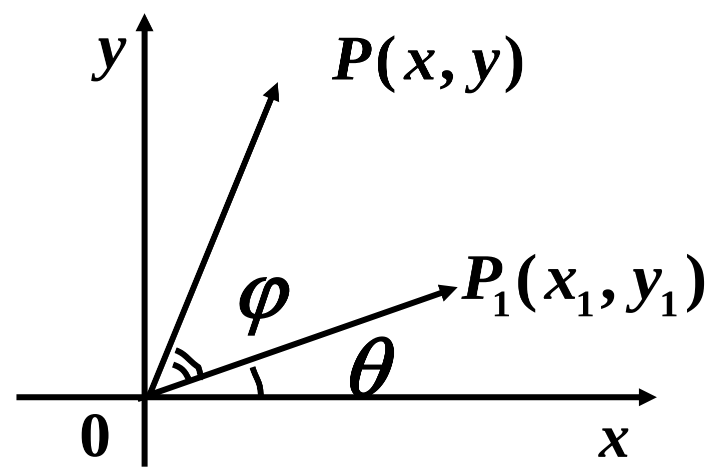
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$



例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的**旋转变换**



- 解析几何中，二次曲线的一般形式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

通过选择适当的的旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

使得 $mx'^2 + ny'^2 = 0$.

定义： 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为**二次型**.

令 $a_{ij} = a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j$，于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boxed{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2}$$

$$\boxed{+2a_{12}x_1x_2} + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots$$

$$+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {} & x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
& + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
& + \cdots \\
& + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)
\end{aligned}
$$

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
$$

对称阵

$$
= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$
= x^T A x
$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

对称阵的二次型

$$\Updownarrow$$

二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称阵 A 的秩也叫做二次型 f 的秩.

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

对于二次型，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{m2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

简记为 $x = C\,y$，

于是 $f = x^T A x$

$= (C\,y)^T A\,(C\,y)$

$= y^T \boxed{(C^T A C)}\, y$

使二次型只含平方项，即

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2$$

定义：只含平方项的二次型称为二次型的标准形（或法式）.

如果标准形的系数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 只在$-1, 0, 1$三个数中取值,

即 $$f = k_1 y_1^2 + \ldots + k_p y_p^2 - k_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - k_r y_r^2$$

则上式称为二次型的规范形.

说明：这里只讨论实二次型，所求线性变换也限于实数范围.

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B\ ,$$

则称矩阵A 和 B **相似**.　(P.121定义7)

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 C 满足

$$C^{\mathrm{T}}AC = B\ ,$$

则称矩阵A 和 B **合同**.　(P.129定义9)

显然，

- $B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$

  即若 A 为对称阵，则 B 也为对称阵.
- $R(B) = R(A)$.

经过可逆变换后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$，且二次型的秩不变.

若二次型 f 经过可逆变换 $x = Cy$ 变为标准形，即

$$
\begin{aligned}
f &= x^T A x \\
&= (Cy)^T A (Cy) \\
&= y^T (C^T A C) y \\
&= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

问题：对于对称阵 A，寻找可逆矩阵 C，使 $C^T A C$ 为对角阵，

（把对称阵合同对角化）．

定义： 如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，

则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

定理： 设 A 为 n 阶对称阵，则必有**正交阵** P，使得

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda,$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵（不唯一）.

定理： 任给二次型 $f(x) = x^TAx$ （其中$A = A^T$），总存在**正交变换** $x = Py$，使 f 化为**标准形**

$$f(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值.

推论： 任给二次型 $f(x) = x^TAx$ （其中$A = A^T$），总存在**可逆变换** $x = Cz$，使 $f(Cz)$ 为**规范形**.

推论： 任给二次型 $f(x)=x^TAx$ （其中$A=A^T$），总存在**可逆变换** $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

证明： $f(Py)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$

若$R(A)=r$，不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ 不等于零， $\lambda_{r+1}=\ldots=\lambda_n=0$,

令 $K=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$，其中$k_i=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r, \\ 1, & i>r. \end{cases}$

则 K 可逆，变换 $y=Kz$ 把 $f(Py)$ 化为

$$f(PKz)=(PKz)^T A(PKz)=z^TK^TP^TAPKz=z^TK^T\Lambda Kz$$

其中

$$K^T\Lambda K=diag\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|},\cdots,\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|},0,\cdots,0\right)$$

例： 求一个正交变换 $x = Py$，把二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形.

解： 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

根据P.125例12的结果，有正交阵 $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是正交变换 $x = Py$ 把二次型化为标准形

$$f = -2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果要把 f 化为规范形，令

$$\begin{cases} y_1 = 1/\sqrt{2}z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_2 = z_2 \end{cases} \text{，即} \quad K = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 f 的规范形：$f = -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$