线性代数
Linear Algebra

基础介绍

一、研究对象

线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题，即线性空间、线性变换和有限维的线性方程组。线性关系意即数学对象之间的关系是以一次形式来表达的。例如，在解析几何里，平面上直线的方程是二元一次方程；空间平面的方程是三元一次方程，而空间直线视为两个平面相交，由两个三元一次方程所组成的方程组来表示。含有 n个未知量的一次方程称为线性方程。关于变量是一次的函数称为线性函数。线性关系问题简称线性问题。解线性方程组的问题是最简单的线性问题。

二、历史与发展

线性代数作为一个独立的分支在20世纪才形成，而它的历史却非常久远。“鸡兔同笼”问题就是一个简单的线性方程组求解的问题。最古老的线性问题是线性方程组的解法，在中国古代东汉年初成书的数学著作《九章算术·方程》章中，已经作了比较完整的叙述，其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵的行施行初等变换，消去未知量的方法。

由于法国数学家费马（1601-1665）和笛卡儿（1596-1650）的工作，现代意义的线性代数基本上出现于十七世纪。直到十八世纪末，线性代数的领域还只限于平面与空间。十九世纪上半叶才完成了到n维线性空间的过渡。

随着研究线性方程组和变量的线性变换问题的深入，在18～19世纪期间先后产生行列式和矩阵的概念，为处理线性问题提供了有力的工具，从而推动了线性代数的发展。

三、有重要贡献的数学家

- 17世纪，德国数学家-莱布尼兹

  ——历史上最早使用行列式概念。

- 1750年，瑞士数学家-克莱姆（克莱姆法则）

  ——用行列式解线性方程组的重要方法。

- 1772年，法国数学家-范德蒙

  ——对行列式做出连贯的逻辑阐述，行列式的理论脱离开线性方程组。

- 1841年，法国数学家-柯西
  ——首先创立了现代的行列式概念和符号。

德国数学家--高斯（1777-1855)
——提出行列式的某些思想和方法

英国数学家--西勒维斯特(1814-1897)
——首次提出矩阵的概念(矩型阵式)

英国数学家--凯莱(1821-1895)
——矩阵论的创立

向量概念的引入，形成了向量空间的概念。凡是线性问题都可以用向量空间的观点加以讨论。因此，向量空间及其线性变换，以及与此相联的矩阵理论，构成了线性代数的中心内容。

在十九世纪下半叶，因若当的工作而达到了它的顶点。1888年，意大利数学家皮亚诺（1858-1932）以公理的方式定义了有限维或无限维线性空间。托普利茨将线性代数的主要定理推广到任意体（domain）上的最一般的向量空间中。

“代数”这个词在中文中出现较晚，在清代时才传入中国，当时被人们译成“阿尔热巴拉”，直到1859年，清代著名的数学家、翻译家李善兰（ 1811-1882 **）才将它翻译成为“代数学”，之后一直沿用。**

学术地位及应用

线性代数在数学、物理学和技术学科中有各种重要应用，因而它在各种代数分支中占居首要地位。在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分。线性代数所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能是非常有用的。

随着科学的发展，我们不仅要研究单个变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系，各种实际问题在大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化了的问题又可以计算出来，线性代数正是解决这些问题的有力工具。

线性代数的含义随数学的发展而不断扩大。线性代数的理论和方法已经渗透到数学的许多分支，同时也是理论物理和理论化学所不可缺少的代数基础知识。

“以直代曲”是人们处理很多数学问题时一个很自然的思想。很多实际问题的处理，通常把非线性模型近似为线性模型，最后往往归结为线性问题，它比较容易处理。因此，线性代数在工程技术、科学研究以及经济、管理等许多领域都有着广泛的应用，是一门基本的和重要的学科。线性代数的计算方法是计算数学里一个很重要的内容。

什么是线性关系?

线性（*linear*）指量与量之间按比例、成直线的关系，在数学上可以理解为一阶导数为常数的函数。

非线性（*non-linear*）则指不按比例、不成直线的关系，一阶导数不为常数。

线性代数

研究对象：

线性空间、线性变换和有限维的线性方程组。

研究工具：

行列式、矩阵与向量。

第一章　行列式

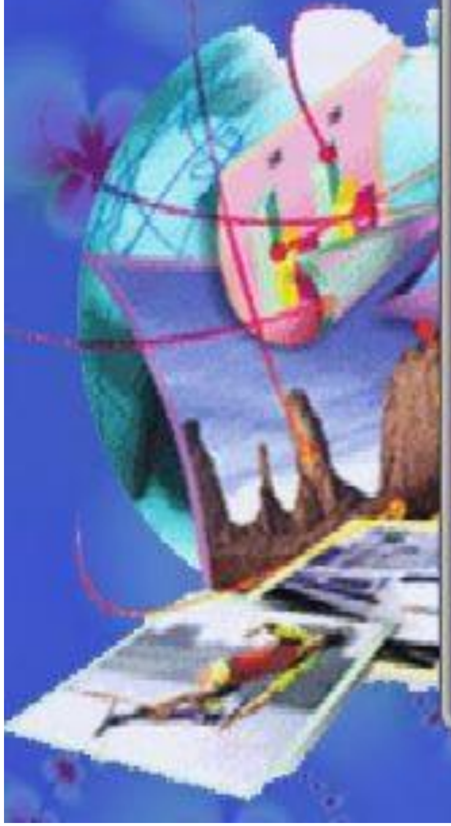
第二章　矩阵及其运算

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

第四章　向量组的线性相关性

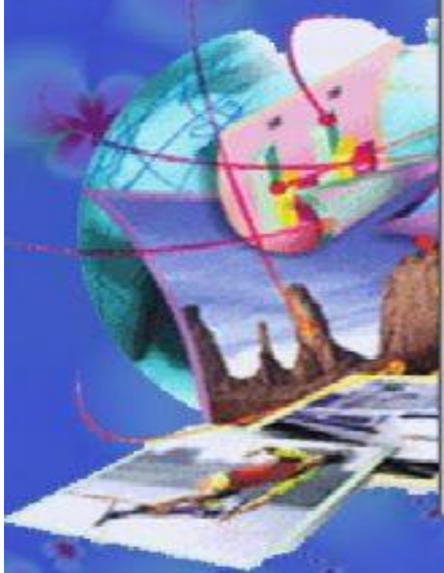
第五章　相似矩阵及二次型

第六章　线性空间与线性变换(选学)



在以往的学习中，我们接触过二元、三元等简单的线性方程组.

但是，从许多实践或理论问题里导出的线性方程组常常含有相当多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等.



我们先讨论未知量的个数与方程的个数相等的特殊情形.

在讨论这一类线性方程组时，我们引入行列式这个计算工具.

第一章　行列式（*Determinant*）

- **内容提要**

§1　二阶与三阶行列式
§2　全排列与对换
§3　n 阶行列式的定义

行列式的概念

§4　行列式的性质
§5　行列式按行（列）展开

行列式的性质及计算

⑩行列式是线性代数的一种工具！
⑩学习行列式主要就是要能计算行列式的值.

§1 二阶与三阶行列式

(*Determinent of order two or three*)

我们从最简单的二元线性方程组出发，探求其求解公式，并设法化简此公式.

一、二元线性方程组与二阶行列式

1. 二阶行列式的定义

二元线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得 $$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$$

求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \end{cases}$$

请观察，此公式有何特点?

- 分母相同，由方程组的四个系数确定.
- 分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得.

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 = b_2 \end{cases}$$

我们引进新的符号来表示"四个数分成两对相乘再相减".

数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ **记号** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

定义1 表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为由该数表所确定的**二阶行列式**（*determinant oforder two*），即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，$a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$称为**元素**（*element*）.

i 为**行标**，表明元素位于第i 行;

j 为**列标**，表明元素位于第j 列.

原则：横行竖列

2. 二阶行列式的计算 ——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即：主对角线上两元素之积 - 副对角线上两元素之积

根据定义 x_1, x_2 的分子也可以写成行列式形式如下：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 = b_2 \end{cases}$

若令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(方程组的系数行列式)

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

例1　求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解　因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2,\qquad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$

二、三阶行列式

1. 定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

原则：横行竖列

引进记号

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式.

二阶行列式的对角线法则并不适用！

2. 三阶行列式的计算 ——对角线法则/三角形法则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积冠正号，

虚线上的三个元素的乘积冠负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意： 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三角形法

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解　按对角线法则，有

$$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$

$$-(-4)\times2\times(-3)-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)$$

$$=-4-6+32-24-4-8$$

$$=-14.$$

例3 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

解: $D = acb + bac + cba$

$\quad - c^3 - a^3 - b^3$

$\quad = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

例4 **求解方程**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 **方程左端**

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 得

$$x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

例5 求解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

解：令

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{18}{-6} = -3,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{-6} = -1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{-6} = 1,$$

课堂练习

计算下列行列式

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad B=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

小结

一、二阶、三阶行列式的概念

二、二阶、三阶行列式的计算方法

1. 二阶行列式——对角线法则/三角形法则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. 三阶行列式 ——对角线法则/三角形法则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积冠正号，

虚线上的三个元素的乘积冠负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三角形法

作业

- P21：1 (1)(4) 、2 (2)(6)

§2 全排列与对换

(*Permutation and Transposition*)

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解

1 2 3

百位 [1] ☐ ☐ [2] ☐ ☐ [3] ☐ ☐ 3种放法

十位 [1] [2] ☐ [1] [3] ☐ 2种放法

个位 [1] [2] [3] 1种放法

共有 $3\times 2\times 1=6$ 种放法.

所求六个三位数为

123，132，213，231，312，321

问题　把 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法?

定义1　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**(all permutation).　n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

显然　$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

即n 个不同的元素一共有$n!$ 种不同的排法.

3个不同的元素一共有3! =6种不同的排法

123，132，213，231，312，321

所有6种不同的排法中，只有一种排法（123）中的数字是按从小到大的自然顺序排列的，而其他排列中都有大的数排在小的数之前.

因此大部分的排列都不是“顺序”，而是“逆序”.

对于n 个不同的元素，可规定各元素之间的标准次序.

n 个不同的自然数，规定从小到大为标准次序.

定义2　一个排列中某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个**逆序**（*inverse sequence*）.

例如　在排列32514中，

逆序

3　2　5　1　4

逆序　　逆序

思考题：还能找到其它逆序吗？

答：2和1，3和1也构成逆序.

定义 3 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.(*inverse number*) 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记为 $t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：符合标准次序的排列是奇排列还是偶排列?

答：符合标准次序的排列（例如：123）的逆序数等于零，因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 1, 2, …, n 这 n 个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

例1 **求排列 32514 的逆序数.**

解： $t(32514)=0+1+0+3+1=5$

例2 **求下列排列 的逆序数,并说明奇偶性.**

1) 453162

解： $t=0+0+2+3+0+4 \ =9$ **奇排列**

2) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$

解： $t=2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$ **偶排列**

练习： 讨论1，2, 3所有全排列的奇偶性.

解： 123，132，213，231，312，321

$t(123)=0$，$t(132)=1$，$t(213)=1$，

$t(231)=2$，$t(312)=2$，$t(321)=3$，

故

123， 231，312 为偶排列，

132， 213，321 为奇排列.

二、对换

定义3 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换**.

将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l \; a \; b_1 \cdots b_m \, b \; c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l \; b \; b_1 \cdots b_m \, a \; c_1 \cdots c_n$$

2、对换与排列奇偶性的关系

定理1　对换改变排列的奇偶性.

例如　312 为偶排列,

321 为奇排列.

213 为奇排列.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,

偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理2 n 个元素的所有全排列中奇排列与偶排列数各占一半,即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

例如 1,2,3的所有排列中恰有3个偶排列和3个奇排列.

证: 设n 个元素的所有全排列中共有t个奇排列和s个偶排列.奇排列经一次对换都变成偶排列,于是t≤ s.同理得 s ≤ t, 故 s = t.

又因为s+t= $n!$, 所以s = t= $\frac{n!}{2}$.

§3 n 阶行列式的定义

一、概念的引入

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

规律：

1. 三阶行列式共有6项，即3!项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$（正负号除外），其中 $p_1p_2p_3$ 是1、2、3的某个排列.
4. 当 $p_1p_2p_3$ 是**偶排列**时，对应的项取**正号**；
   当 $p_1p_2p_3$ 是**奇排列**时，对应的项取**负号**.

所以，三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对1、2、3的所有排列求和.

二阶行列式有类似规律.下面将行列式推广到一般的情形.

二、n 阶行列式的定义

定义1 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{matrix}
$$

和式 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为由上数表所确定的**n阶行列式**，

简记作 $\det(a_{ij})$. 其中 $t = t(p_1p_2\ldots p_n)$，a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

1. n 阶行列式共有 $n!$ 项.

2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.

3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（正负号除外），其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1, 2, …, n 的某个排列.

4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

思考题：$\left|-1\right| = -1$成立吗？

答：符号　可以有两种理解：

✓若理解成绝对值，则 $\left|-1\right| = +1$

✓若理解成一阶行列式，则 $\left|-1\right| = -1$

注意：当$n = 1$时，一阶行列式$|a| = a$，注意不要与绝对值的记号相混淆. 例如：一阶行列式 $\left|-1\right| = -1$.

例1 :写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解： 一般项为 $(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,

已知 $p_1=1, p_2=3$，根据行列式的定义

$p_3=2, p_4=4$ 或 $p_3=4, p_4=2$，于是

$$(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)}=(-1)^{t(1324)}=-1 \text{ 或 } (-1)^{t(1342)}=1,$$

故所求项为

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \text{ 和 } a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

例2:计算行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

解: D_3中元素的下标$i>j$时，$a_{ij}=0$.设可能

非零元素为a_{ip_i}，则下标$i\le p_i$，$i=1,2,3,4.$

即 $p_1\ge 1, p_2\ge 2, p_3\ge 3, p_4\ge 4.$ 又因 $p_i\le 4,$ 所以

$p_4\le 4,$ 于是 $p_4=4.$ 继而得 $p_3=3,$ $p_2=2,$

$p_1=1.$ 即可能的非零元素只有$a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}.$

故，$D_3=(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$

同理有

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{t(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-1)^{t(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ &= a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \end{aligned}$$

其中 $t(4321) = 0 + 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6.$

三、特殊行列式

(1) 对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{t(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 上三角形行列式 （主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 下三角形行列式 （主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例3 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解　含 x 的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \ +(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$$

故 x^3 的系数为 - 1.

四、行列式的等价定义

定理2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

定理3 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

四个结论:

(1) 对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \therefore & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{t(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(3) 上三角形行列式 （主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 下三角形行列式 （主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

练习:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

例3 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解　含 x 的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + (-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$　　故 x^3 的系数为 - 1.

因为数的乘法是可以交换的，所以 n 个元素相乘的次序是可以任意的，即

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

每作一次交换，元素的行标与列标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作一次对换，即 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时改变奇偶性，**但是这两个排列的逆序数之和的奇偶性不变.**

例4 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 下标的逆序数为

$$t(431265)=0+1+2+2+0+1=6$$

所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是六阶行列式中的项.

$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 行标和列标的逆序数之和

$$t(341526)+t(234156)=5+3=8$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.

例5　用行列式的定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n=(-1)^t a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$

$$=(-1)^t 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$$

$$=(-1)^t n!$$

$$t\left[(n-1)(n-2)\cdots 21n\right]$$

$$=(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1$$

$$=(n-1)(n-2)/2$$

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

例6： $(-1)^t a_{2x}a_{13}a_{y5}a_{34}a_{51}$ **是五阶行列式的一项, 求** x, y 和 $t.$

解： 将已知项按行标的标准次序排列得

$$(-1)^{t'} a_{13}a_{2x}a_{34}a_{y5}a_{51}$$

由此得

$$x = 2, y = \mathbf{4},$$

而

$$t = t(21435) + t(23541) = 2 + 5 = 7.$$

小结

一、排列与逆序数

- 排列
  - 奇排列
  - 偶排列
- 逆序
- 逆序数

对换

- 定义
- 性质
  - 改变变排列的奇偶
  - 所有排列中奇偶排列各一半.
  - 奇排列 $\xrightarrow{\text{奇数次对数}}$ 标准排列,
  - 偶排列 $\xrightarrow{\text{偶数次对数}}$ 标准排列.

二、n 阶行列式

- 定义
- 特殊行列式
  - 对角行列式
  - 三角行列式

2. 行列式的三种表示方法

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

§4 行列式的性质

一、行列式的性质

定义1 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 称为行列式 的**转置行列式**.

若记 $D=\det(a_{ij}),\ D^T=\det(b_{ij}).$ 则 $b_{ij}=a_{ji}$

注：行列式 D 也是行列式 D^T 的转置行列式,即

$$(D^T)^T=D$$

例1 写出下列行列式的转置行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & -8 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:

$$D_1^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & -8 \end{vmatrix}, \quad D_2^T = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 若记 $D=\det(a_{ij})$, $D^T=\det(b_{ij})$, 则

$$b_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$$

根据行列式的定义，有

$$D^T=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$=D$$

行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2 互换行列式的两行（列）,行列式变号.

备注：交换第 i 行（列）和第 j 行（列），记作 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$

验证

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -196 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 196$$

于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有 $D = -D$，所以 $D = 0$

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个倍数 ，k等于用数 乘以此行列式.

备注： 第i行（列）乘以 k 记作 $r_i \times k (c_i \times k)$

验证 我们以三阶行列式为例. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

根据三阶行列式的对角线法则，有 $D_1 = kD$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(ka_{22})a_{33} + a_{12}(ka_{23})a_{31} + a_{13}(ka_{21})a_{32}$$

$$- a_{13}(ka_{22})a_{31} - a_{12}(ka_{21})a_{33} - a_{11}(ka_{23})a_{32}$$

$$= k\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= kD$$

推论　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

备注：第 i 行（列）提出公因子 k 记作 $r_i \div k \,(c_i \div k)$

性质4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

验证 我们以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

性质5 **若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和,即**

$$D=\begin{vmatrix} a_{\mathbf{11}} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{\mathbf{11}} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一个倍数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

备注： 以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$.

验证 我们以三阶行列式为例. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1$.

证:由性质5和性质4

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{k}a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & \mathrm{k}a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & \mathrm{k}a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{D} + 0 = \mathrm{D}$$

二、应用举例

例1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

计算行列式常用方法：利用行列式性质将给定行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

解：

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{1 & 1 & 0 & 0} \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \times\frac{1}{3}$$

$$\overset{r_3+\frac{1}{3}r_2}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{3}{10}r_3}{=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{10} \end{vmatrix}$$

$$\oplus \quad \times\frac{3}{10}$$

$$= 1 \bullet 3 \bullet \frac{10}{3} \bullet \frac{43}{10} = 43$$

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值．

例2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2 + 3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-2) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal{r_2-2r_1}\begin{matrix} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 4r_1]{r_3 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{-2} \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-5} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{-5} & \boxed{3} \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\overset{r_3 + r_2}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\overset{r_4 + r_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2) \oplus$$

$$\underline{\underline{r_5 - 2r_3}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \; \oplus$$

$$\underline{\underline{r_5 + 4r_4}} \; -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

练习 P_{21} 4（1）

$$= -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例3 计算 n 阶行列式 $$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$
=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
$$

$$
=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{O} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.
$$

例4 设 $D=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2.$

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$，把 D_1 化为下三角形行列式

设为 $$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$，把 D_2 化为下三角形行列式

设为 $$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$，把 D 化为下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{matrix}} & & 0 & \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{matrix}} \end{vmatrix},$$

故 $D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2.$

例5 计算行列式

$$
\mathrm{D}_{2n}=\begin{vmatrix}
a & & & & & b \\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a & b & & \\
& & c & d & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
c & & & & & d
\end{vmatrix}
$$

解：把 D_{2n} 的第2n 行依次与第2n-1行、…、第2行对调（作2n-2次相邻兑换），第2n 列依次与第2n-1列、…、第2列对调，得

$$\mathbf{D_{2n}} = \left|\begin{array}{cc|cccccc}
a & b & & & & & & \\
c & d & & & & & & \\
\hline
 & & a & & & & & b \\
 & & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & & & & a & b & & \\
 & & & & c & d & & \\
 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\
 & & c & & & & & d
\end{array}\right|$$

2 (n-1)

$$D_{2n} = D_2 D_{2(n-1)} = (ad - bc) D_{2(n-1)}$$

以此作递推公式，即得

$$D_{2n} = (ad - bc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2$$

$$= (ad - bc)^n.$$

例6 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

三线型/爪型

行列式 特点：第一 行、列及对角线元素

除外，其余元素全为0

常用方法： 行列式第一列 加其它 各列一定倍数，化为三角形行列式.

解： 作 $c_1 + (-\frac{c}{a_1})\ c_2 + (-\frac{c}{a_2})\ c_3 + \cdots + (-\frac{c}{a_{n-1}})\ c_n$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c^2}{a_i} & c & c & \cdots & c \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c^2}{a_i}) a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

小结

行列式的主要性质：

性质1　行列式D与其转置 D' 值相等。

性质2　互换行列式的某两行（列），行列式的值变号。

推论　行列式中有两行（列）完全相同，则其值为零。

性质3　行列式中某一行（列）的公因子可提到行列式符号的前面。

推论1 若行列式的某一行（列）中所有元素全为零，则此行列式的值为零。

性质4 若行列式的某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零。

性质5 若行列式的某一行（列）中所有元素都是两个元素的和，则 此行列式等于两个行列式的和。

性质6 行列式某一行（列）k 倍加到另一行(列)上，行列式的值不变。

作业

- P21 4(2)(6)

§5 行列式按行(列)展开

⑩对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.
⑩本节主要考虑如何用低阶行列式来表示高阶行列式.

一、引言

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

结论 三阶行列式可以用二阶行列式表示.

思考题 任意一个行列式是否都可以用较低阶的行列式表示?

定义 在n 阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第 i行和第 j列划后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素 a_{ij}的**余子式**（cofacter），记作 M_{ij}. 把 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

注：1) 行列式中每一个元素对应着一个余子式和代数余子式.

2) 一个元素的余子式和代数余子式只与该元素的位置有关.

引理 一个n阶行列式，如果其中第 i行所有元素除a_{ij}外都为零，那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{33}A_{33}=(-1)^{3+3}a_{33}M_{33}$$

$$=(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

分析　当 a_{ij}位于第1行第1列时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即有 $D=a_{11}M_{11}$.

又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,

从而 $D=a_{11}A_{11}$.

下面再讨论一般情形.

我们以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{a_{34}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} (-1)^{\color{red}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \color{red}{a_{34}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\color{red}{(3-1)}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \color{red}{a_{34}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

思考题： 能否以$r_1 \leftrightarrow r_3$代替上述两次行变换?

思考题：能否以$r_1 \leftrightarrow r_3$代替上述两次行变换?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

答：不能.

$$=(-1)^{(3-1)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3\leftrightarrow c_4 \\ c_2\leftrightarrow c_3 \\ c_1\leftrightarrow c_2}}{=} (-1)^{(3-1)}(-1)^{3}\begin{vmatrix} a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(3-1)}(-1)^{(4-1)}\begin{vmatrix} a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

a_{34}被调换到第1行，第1列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+4-2}a_{34}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}=(-1)^{3+4}a_{34}M_{34}=a_{34}A_{34}$$

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5&3&-1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&-2&3&1&0\\0&-4&-1&4&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}$

解 $D=\begin{vmatrix}5&3&-1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&-2&3&1&0\\0&-4&-1&4&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+5}\,2\begin{vmatrix}5&3&-1&2\\0&-2&3&1\\0&-4&-1&4\\0&2&3&5\end{vmatrix}$

$$=\left(-1\right)^{2+5}2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\frac{r_2+(-2)r_1}{r_3+r_1}}}-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=-10\cdot(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=20\cdot(-42-12)=-1080.$$

例2 用按行（列）展开法计算下列行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_3]{c_1+(-2)c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

二、行列式按行（列）展开法则

定理3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \left(i = 1,2,\cdots,n \right)$$

$$(D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2,\cdots,n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0+0 & 0+a_{12}+0 & 0+0+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

同理可得 $= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

例3 **证明范德蒙德(Vandermonde)行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \quad (1)$$

证明 **用数学归纳法**

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

所以n=2时(1)式成立.

假设(1)对于n - 1阶范德蒙行列式成立，从第n行开始，后行减去前行的x_1倍：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按照第1列展开，并提出每列的公因子$(x_i - x_1)$，就有

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶范德蒙德行列式

$$\therefore \quad D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

分析 我们以3阶行列式为例.

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

把第1行的元素换成第2行的对应元素，则

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

定理3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D\left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

综上所述，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

同理可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

例4 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij} 求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \text{ 及 } M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

分析 利用

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_4+r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_3}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

练 习

P22 8（1）（7）

小结

一、余子式与代数余子式的定义与联系

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

二、按行（列）展开定理

引理 一个n 阶行列式，如果其中第 i行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

定理2 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D\left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

综上所述，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

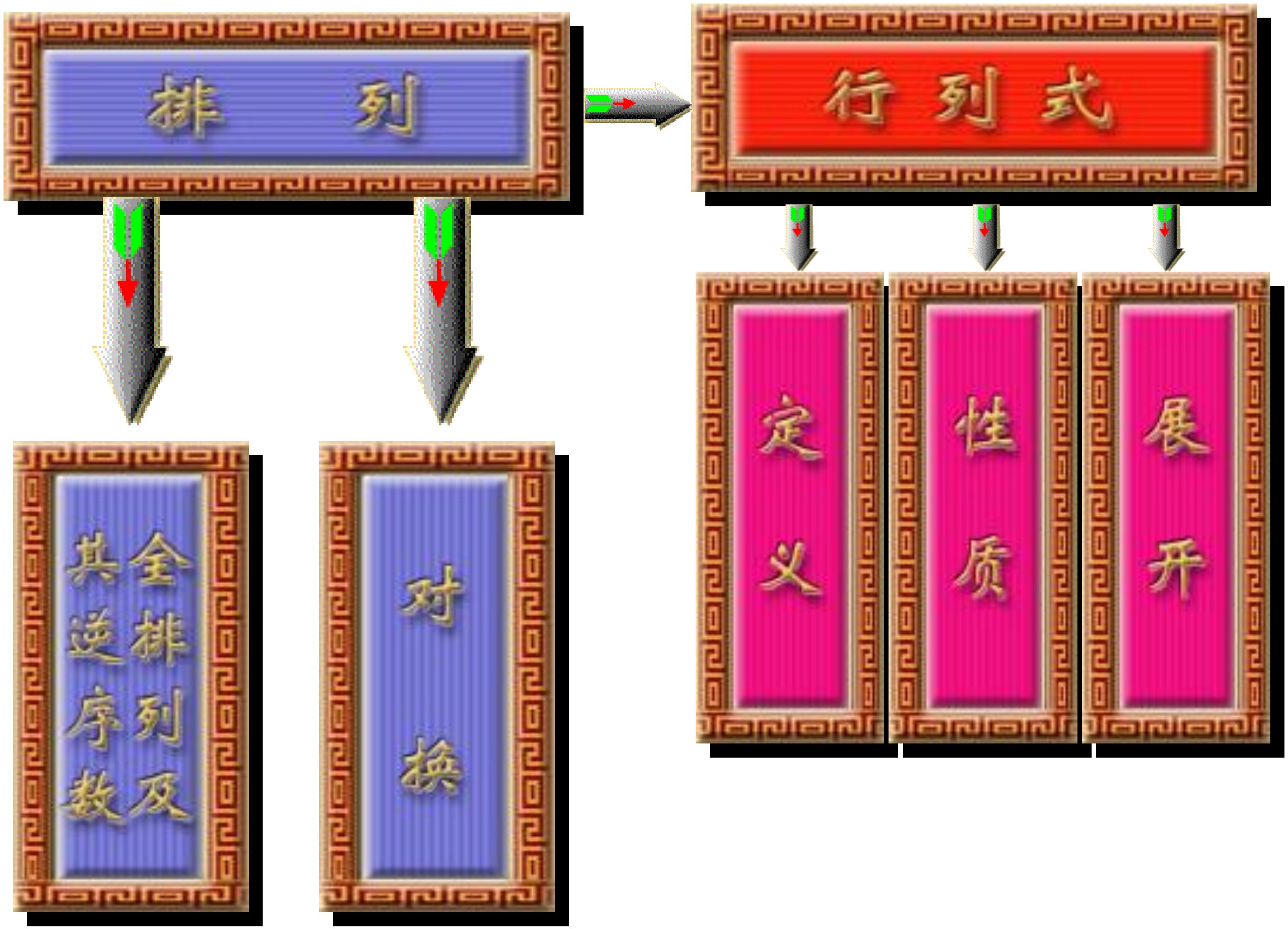
同理可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

作业

P22 8（2），9

第一章　习题课



1. 全排列

把n个不同的元素排成一列, 叫做这n个元素的全排列(或排列).

n个不同的元素的所有排列的种数用P_n表示, 且$P_n=n!$.

2. 逆序数

在一个排列($i_1\, i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$)中, 若数 $i_s>i_t$, 则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3. 计算排列逆序数的方法

依次计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数并求和, 即算出排列中每个元素的逆序数, 则所有元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

4. 对换

定义: 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的过程叫做对换.

将相邻两个元素对调, 叫做相邻对换.

定理1: 一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

推论: 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

5. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_nq_1q_2\cdots q_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)+t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

6. n 阶行列式的性质

性质1: 行列式与它的转置行列式相等, 即$D^T = D$.

性质2: 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

推论: 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式为零.

性质3: 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k, 等于用数k乘此行列式.

推论: 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4: 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式为零.

性质5: 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和, 则该行列式等于两个行列式之和.

性质6: 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去, 行列式不变.

7．行列式按行(列)展开

在 n 阶行列式D中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素划去后, 留下来的 n–1 阶行列式叫做(行列式D的关于)元素a_{ij}的余子式, 记作 M_{ij} . 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为元素 a_{ij} 的代数余子式.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D & \text{当} i = j \\ 0 & \text{当} i \neq j \end{cases}$$

典　型　例　题

例1: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{42} & a_{43} \\ 0 & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = 0.$$

例2: 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}.$$

解: D_n中各行元素分别是同一个数的不同方幂, 方幂的次数自左至右按递升次序排列, 但不是从0到 n–1, 而是从1递升至 n. 若提出各行的公因子, 则方幂的次数便是从0升到 n–1, 于是得:

$$D_n=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

上面等式右端行列式为 n 阶范德蒙行列式的转置, 由范德蒙行列式知

$$D_n = n! \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!\,1!.$$

评注: 本题所给行列式各行(列)都是某元素的不同方幂, 而其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同, 需要利用行列式的性质(如提取公因子, 调换各行(列)的次序等)将此行列式化成范德蒙行列式.

例3: 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: 将第2, 3, ⋯ , n+1列都加到第1列, 得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子, 得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

$c_{j+1}+(-a_j)c_1$, $j=2, 3, \cdots, n+1$. 得

$$D_{n+1}=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

评注: 本题利用行列式的性质, 采用“化零”的方法，逐步将所给行列式化为三角形行列式. 化零时一般尽量选含有 1 的行(列)及含零较多的行(列); 若没有1, 则可适当选取便于化零的数, 或利用行列式性质将某行(列)中的某数化为1; 若所给行列式中元素间具有某些特点, 则应充分利用这些特点, 应用行列式性质, 以达到化为三角形行列式之目的.

例5: 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

解: 依第n列把D_n拆成两个行列式之和,

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

将上式右端第一个行列式的第n列的(–1)倍分别加到第1, 2, ⋯, n–1列上去; 将上式右端第二个行列式按第n列展开. 得,

$$D_n = \begin{vmatrix} x_2 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + x_n D_{n-1},$$

从而得递推公式:

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_n D_{n-1}.$$

故 $$D_{n-1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a + x_{n-1} D_{n-2}.$$

于是 $$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + x_{n-1} x_n D_{n-2}.$$

如此继续下去, 可得

$$D_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} a + x_1 x_2 \cdots x_{n-2} a x_n + \cdots + x_1 x_2 a x_4 \cdots x_n + x_3 \cdots x_{n-1} x_n D_2.$$

而 $$D_2 = \begin{vmatrix} a+x_1 & a \\ a & a+x_2 \end{vmatrix} = ax_1 + ax_2 + x_1x_2$$

所以, $D_n = x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + \cdots + x_1x_2ax_4\cdots x_n$

$+ x_1ax_3\cdots x_n + ax_2x_3\cdots x_n + x_1x_2x_3\cdots x_n.$

$=a\,(x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \cdots + x_1x_3\cdots x_n$

$+ x_2x_3\cdots x_n) + x_1x_2x_3\cdots x_n.$

当$x_1x_2x_3\cdots x_n \neq 0$时, 可改写为:

$$D_n = x_1x_2\cdots x_n\left[1 + a\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right].$$

评注: 本题是利用行列式的性质和所给行列式的特点, 导出所给n 阶行列式D_n的递推公式, 从而求出D_n.递推公式方法是求有规律性n 阶行列式D_n的常用方法.