第二章 矩阵及其运算

马金连

jlma2019@sdu.edu.cn

2.1 线性方程组和矩阵

2.2 矩阵的运算

2.3 逆矩阵

2.4 克拉姆法则

2.5 矩阵分块法

§1 线性方程组和矩阵

一、线性方程组

定义1 设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

其中a_{ij} 表示第 i个方程第 j个未知数的系数(*coefficient*), b_i 是第 i个方程的常数项(*constant*)，$i=1,2,\cdots$， m，$j=1,2,\cdots$， n

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，方程组（1）称为 n 元非齐次线性方程组(*system of non-homogeneous linear equations*).

$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ 时，方程组（1）成为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0,
\end{cases}
\tag{2}
$$

称为 n 元齐次线性方程组(*system of homogeneous linear equations*)

n 元线性方程组通常简称为线性方程组或方程组

对于齐次线性方程组（2），$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，称为方程组（2）的零解(*null solution*)；如果存在不全为零的数是（2）的解，则称为其非零解(*non-zerou solution*).

非齐次方程组可能有解可能无解.

例如

$$(1)\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=2; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=1, \\ x+y=2; \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ 2x_1-2x_2=0, \\ 3x_1-3x_2=0; \end{cases}$$

（1）有唯一解，（2）无解，（3）有无穷多解.

线性方程组的研究内容：

- 是否有解?
- 有解时它的解是否唯一?
- 如果有多个解，如何求出其所有解?

问题的答案都取决与方程组（1）的 $m \times n$ 个系数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots, m, j=1,2,\cdots, n)$ 与常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 所构成的 m 行 $n+1$ 列的矩形数表

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

齐次方程组（2）的相应问题取决于m 行n列数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

矩阵(Matrix)的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵． 记作

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

主对角线

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

副对角线

矩阵 A 的 (m,n) 元

简记为 $A = A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 A 的**元素**，简称为**元**，数 a_{ij} 位于矩阵 A 第 i 行第 j 列，称为矩阵的 (i,j) 元

元素是实数的矩阵称为**实矩阵** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

元素是复数的矩阵称为**复矩阵** $\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

思考题

矩阵与行列式的有何区别?

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素	■行数可不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表
$\det(a_{ij})$	$(a_{ij})_{m \times n}$

特殊的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶方阵．可记作 A_n.

2. 只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵(或行向量) .

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量) .

3. 元素全是零的矩阵称为零距阵．可记作 O . 例如:

$$O_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{1\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为**对角阵** (diagonal matrix)

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

特别的，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为**单位阵**(unit matrix),

记作 E_n .

5. 形如下面矩阵的方阵称为上三角矩阵(upper triangular matrix).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. 形如下面矩阵的方阵称为**下三角矩阵(lower triangular matrix)**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7. 若方阵 $A=(a_{ij})_n$ 中 $a_{ij}=a_{ji}$, 则称为**对称矩阵**(*symmetric matrix*). 即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. 如果方阵 $A=(a_{ij})_n$ **中** $a_{ij}=-a_{ji}$ **,则 A 称为** **反对称矩阵**(*antisymmetric matrix*)**. 即**

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

9. 梯形阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若当 $i>j$ 时 ($i<j$) 时，恒有 $a_{ij}=0$ 且各行中第一个（最后一个)非零元素前 (后) 面零元素的个数随行数增大而增多 (减少)，则称为上 (下) 梯形矩阵。简称为上 (下) 梯形阵。它们统称为梯形阵

例
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. **两个矩阵的行数相等、列数相等时，称为同型矩阵.**

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ **为同型矩阵.**

2. **两个矩阵** $A=(a_{ij})$ **与** $B=(b_{ij})$ **为同型矩阵，并且对应元素相等，即** $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A **与** B **相等，记作** $A=B$.

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$，求 x，y，z

解 $\because\ A=B,$

$$\therefore x=2,\ \ y=3,\ \ z=2$$

应用举例

例1 **对于非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

有下列几个矩阵

系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

增广矩阵

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

未知数矩阵

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

常数项矩阵

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

例2 某航空公司在 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.

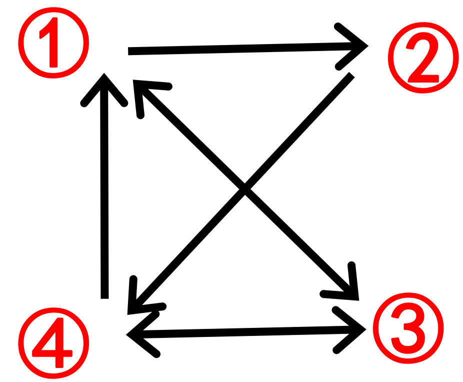


图2.1

第i 市到j市有单程航线 用1表示，无单程航线用0表示，则得到一个数表：

	①	②	③	④
①	0	1	1	0
②	0	0	0	1
③	1	0	0	1
④	1	0	1	0

若令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & 从i市到j市有一条单向航线, \\ 0, & 从i市到j市无单向航线,\end{cases}$

则图2.1中的航线可表示成下列矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

例3 某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij} 表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1} 表示第 i 种货物的单价，b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \cdots\cdots \qquad \downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

例4 线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换.

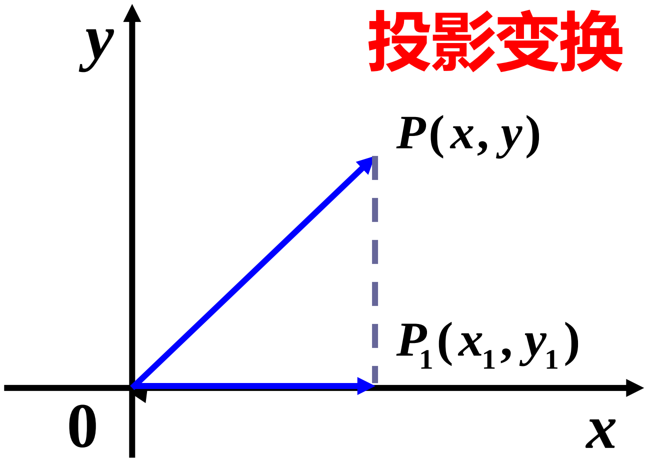
$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

恒等变换 $\xleftrightarrow{\text{对应}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 单位阵 E_n

例5 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

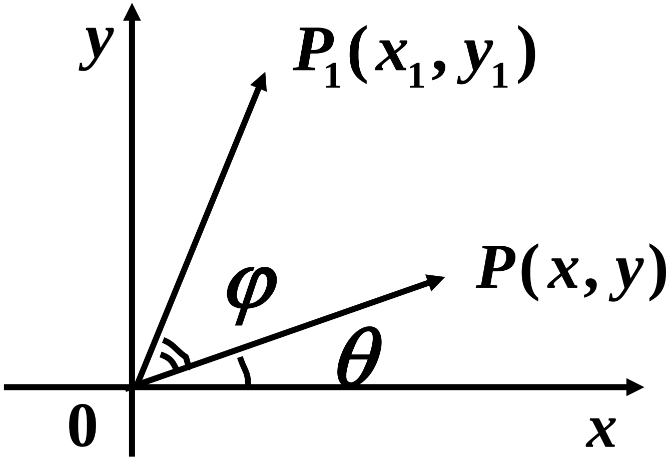
投影变换



例6 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



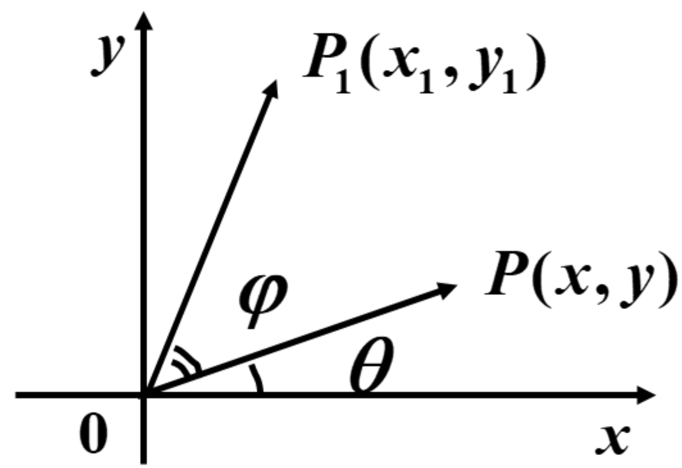
把 xOy 平面上的向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 变换为向量 $OP_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

设 $\overrightarrow{OP}$ 的长度为 r，辐角为 θ，即设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$x_1=r(\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta)=r\cos(\theta+\varphi)$$

$$y_1=r(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)=r\sin(\theta+\varphi)$$

表明 $\overrightarrow{OP_1}$ 的长度为 r，而辐角为 $\theta+\varphi$，是把向量 $\overrightarrow{OP}$ (依逆时针方向) 旋转 φ 角(即把点 P 以原点为中心逆时针旋转 φ 角) 的**旋转变换**



§2 矩阵的运算

例1 某工厂生产四种货物，它在上半年和下半年向三家商店发送货物的数量可用数表表示：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示上半年工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{matrix}$$

其中c_{ij}表示工厂下半年向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

试求：工厂在一年内向各商店发送货物的数量.

解 工厂在一年内向各商店发送货物的数量

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} & a_{14}+c_{14} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & a_{23}+c_{23} & a_{24}+c_{24} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32}+c_{32} & a_{33}+c_{33} & a_{34}+c_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明： 只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

例1 求A+B，其中

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & \mathbf{2} & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

解:

$$A+B=\begin{bmatrix} 4-1 & 3+2 & 1+1 \\ -2+3 & 1+0 & 5-2 \\ 0+6 & 7-4 & -1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

	$\forall a,b,c \in R$	设 A、B、C 是同型矩阵
交换律	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
其他	设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵. 显然 $A+(-A)=0,\ \ A-B=A+(-B)$	

例（续）该厂所生产的货物的单价及单件重量可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第 i 种货物的**单价**，
b_{i2}表示第 i 种货物的**单件重量**.

设工厂向某家商店发送四种货物各 λ 件，试求：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量.

解：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量

$$\lambda \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} \\ \lambda b_{41} & \lambda b_{42} \end{pmatrix}$$

其中 $b_{i\,1}$ 表示第 i 种货物的**单价**，

$b_{i\,2}$ 表示第 i 种货物的**单件重量**.

数与矩阵相乘

定义： 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律

	$\forall a,b,c \in R$	设 A、B是同型矩阵，λ, μ 是数
结合律	$(ab)c = a(bc)$	$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
分配律	$(a+b)\cdot c = ac+bc$ $c\cdot(a+b) = ca+cb$	$(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$ $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$
备注	矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为**矩阵的线性运算**.	

例2 已知
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

求 $2A,\ 2A-B$

解
$$2A=2\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$2A-B=2A+(-B)=2A+(-1)B$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&-4&4\\0&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&0\\-3&2&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&6\\1&-2&3\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

矩阵与矩阵相乘

设两个线性变换 $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$ (1)

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases} \quad (2)$$

若想求出从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换，可将 (2) 代入 (1)，则得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵与矩阵相乘

定义： 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

例3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}$ 的乘积 AB

解

$$C=AB=\begin{pmatrix}4&-1&2&1\\1&1&0&3\\0&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times1+(-1)\times0+2\times3+1\times(-1) & 4\times2+(-1)\times1+2\times0+1\times2 & \\ 1\times1+1\times0+0\times3+3\times(-1) & 1\times2+1\times1+0\times0+3\times2 & 0\\ 0\times1+3\times0+1\times3+4\times(-1) & 4\times2+3\times1+1\times0+4\times2 & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9&9\\-2&9\\-1&11\end{pmatrix}$$

例4

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

结论：

1. 矩阵乘法不一定满足交换律
2. 矩阵 $A \neq O,\ B \neq O$，却有 $AB = O$

   从而不能由 $AB = O$ 得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论

但也有例外，比如设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

对于两个 n 阶方阵 A、B，若 $BA=AB$，则称方阵 A 与 B 是**可交换**的

例5

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$AB=AC=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

结论：

矩阵乘法不一定满足消去律

矩阵 $A\neq O$，不能由 $AB=AC$ 得出 $B=C$ 的结论

矩阵乘法的运算规律

(1) **乘法结合律** $(AB)C = A(BC)$

(2) **数乘和乘法的结合律** $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ (其中 λ 是数)

(3) **乘法对加法的分配律**

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

(4) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

纯量阵不同于对角阵

推论： 矩阵乘法不一定满足交换律，但是纯量阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

(5) **方阵的幂** 若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然 $A^k A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式在什么时候成立?

$$\left.\begin{array}{l} (AB)^k = A^k B^k \\ (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \end{array}\right\} A、B\text{可交换时成立}$$

例6 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 为**系数矩阵**, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为未知数矩阵,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 是常数项矩阵

$b = 0$ 时得到 m 个方程的 n 元齐次线性方程组的矩阵形式 $A_{m\times n}x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$

线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{n1} \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (2)$$

$$y = Ax$$

其中 $A=(a_{ij})$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

列向量（列矩阵）x 表示 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，列向量 y 表示 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$。线性变换把 x 变成 y，相当于用矩阵 A 去左乘 x 得到 y

练习

已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

求 $A+2B$ **和** BC.

解： $A+2B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$;

$$BC=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 13 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置

定义： 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A的**转置矩阵**，记作 A^{T} .

例4

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\qquad A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},\qquad B^{T}=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A;$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T;$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T;$

(4) $(AB)^T = B^T A^T.$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

证 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，记 $AB=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，$B^T A^T = D=\left(d_{ij}\right)_{n\times m}$，于是根据矩阵乘积定义有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s} a_{jk} b_{ki}$$

而 B^T 的第 i 行为 $\left(b_{1i},\cdots,b_{si}\right)$，$A^T$ 的第 j 列为 $\begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{js} \end{pmatrix}$，因此

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}=c_{ij}\ \left(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m\right)$$

故 $D=C^T$，即

$$B^T A^T=(AB)^T$$

例7 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\ 求(AB)^T.$$

解法1

$$\because AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

例8 已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $A=\alpha\beta^T$ ，求 A^n

解 注意到

$$\beta^T\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

于是

$$\begin{aligned}A^n &= (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)\\ &= \alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T\\ &= \alpha 2^{n-1}\beta^T = 2^{n-1}\alpha\beta^T\\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

对称矩阵与反对称矩阵

定义 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为**对称阵**.

如果满足 $A = -A^T$，那么 A 称为**反对称阵**.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

对称阵　　　　反对称阵

例9 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X = 1$，E 为 n 阶单位阵，$H = E - 2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}} = E$.

证明:

$$H^T = (E - 2XX^T)^T = E^T + (-2XX^T)^T = E - 2(XX^T)^T$$

$$= E - 2(X^T)^T X^T = E - 2XX^T = H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T = H^2 = (E - 2XX^T)^2 = E^2 - 4XX^T + (-2XX^T)^2$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T XX^T = E - 4XX^T + 4X(X^T X)X^T$$

$$= E - 4XX^T + 4XX^T = E$$

方阵的行列式

定义 由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做**方阵 A 的行列式**，记作 $|A|$ 或 $\det A$

运算性质

(1) $\left|A^T\right| = |A|$;　　(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$;　　$\Rightarrow |AB| = |BA|$.

证 要使得 $|AB| = |A|\,|B|$ 有意义，A、B 必为同阶方阵，

假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

我们以 $n=2$ 为例，构造一个 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$D \overset{c_3+b_{11}c_1+b_{21}c_2}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3+b_{12}c_1+b_{22}c_2}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & X \\ -E & 0 \end{vmatrix}$$

其中二阶矩阵 $X=(x_{ij})$， $x_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}$，根据矩阵乘积定义得 $X=AB$

再对上式最后一个行列式作两次行对换：$r_1 \leftrightarrow r_3$，$r_2 \leftrightarrow r_4$ 得

$$D=(-1)^2\begin{vmatrix}-E & 0\\ A & X\end{vmatrix}=(-1)^2|-E||X|$$

$$=(-1)^2(-1)^2|X|$$

$$=|X|=|AB|$$

于是 $|AB|=|A||B|$

方阵的伴随矩阵

定义： 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**(*adjoint matrix*).

注： 1. 只有方阵才有伴随矩阵.

2. A^* 与 A 的阶数相同.

例 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解

$$M_{11}=-7,\quad M_{12}=-6,\quad M_{13}=3,$$

$$M_{21}=4,\quad M_{22}=3,\quad M_{23}=-2,$$

$$M_{31}=9,\quad M_{32}=7,\quad M_{33}=-4,$$

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证 令 $A=(a_{ij}), AA^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i=j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

§3 逆矩阵

概念的引入

对于 n 阶单位矩阵 E 以及同阶的方阵 A，都有

$$A_n E_n = E_n A_n = A_n$$

从乘法的角度来看，n 阶单位矩阵 E 在同阶方阵中的地位类似于 1 在复数中的地位． 一个复数 $a \neq 0$的倒数 a^{-1}可以用等式 $a a^{-1} = 1$ 来刻划

逆矩阵的定义

定义 n 阶方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵. 如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为 A 的**逆矩阵**(*inverse matrix*), 记作 A^{-1}

- 根据矩阵的乘法法则，只有方阵才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是唯一的（如果有的话）.

矩阵可逆的条件

下面要解决的问题是：

⑩在什么条件下，方阵 A 是可逆的?

⑩如果 A 可逆，怎样求 A^{-1}？

复习：行列式的按行展开定理

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

结论：$AA^* = A^*A = |A|E$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

当 $|A| \neq 0$ 时，上式改写为 $A\dfrac{1}{|A|}A^* = \dfrac{1}{|A|}A^*A = E$

令 $B = \dfrac{1}{|A|}A^*$，则存在方阵 B 使得 $AB = BA = E$

定理1 若方阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$

证 由于A 可逆，即存在 A^{-1} 使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

故

$$|A||A^{-1}| = |A^{-1}||A| = |E| = 1$$

因此

$$|A| \neq 0$$

定理2 若$|A|\neq 0$，则方阵A可逆，而且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

证 由于$AA^{*}=A^{*}A=\left|A\right|E$，$|A|\neq 0$，故有

$$A\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}A^{*}A=E$$

根据逆矩阵定义，可知A可逆，且有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

当$|A|=0$时，A称为**奇异矩阵**，否则称为**非奇异矩阵**

A可逆的**充要条件**是$|A|\neq 0$，即可逆矩阵就是非奇异矩阵

推论1 若 $AB=E$（或 $BA=E$），则 $B=A^{-1}$

证 由题设条件得

$$|A||B|=|E|=1$$

故 $|A|\neq 0$，从而 A 可逆，则

$$B=EB=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}\left(AB\right)=A^{-1}E=A^{-1}$$

推论2 若 $|A|\neq 0$，则 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

证： 由 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，得 $|AA^{-1}|=|A^{-1}A|=|E|$，

即 $|A||A^{-1}|=|A^{-1}||A|=1$，故结论成立.

推论3 若 A 可逆，且 $AB=AC$，则 $B=C$

逆矩阵满足的运算规律

(i) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(ii) 若 A 可逆，数 $\lambda \neq 0$，则 λA 亦可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

(iii) 若 A、B 为同阶可逆矩阵，则 AB 亦可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

证 $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

由推论1 可知 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(iv) 若 A 可逆，则 A^T 亦可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

证 $AA^{-1}=A^{-1}A=E \Rightarrow A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$

由推论1 可知 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

例1 求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $|A|=ad-bc$, $A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$,

故 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

例2 求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $|A|=1,\ M_{11}=-7,\ M_{12}=-6,\ M_{13}=3,$

$$M_{21}=4,\ M_{22}=3,\ M_{23}=-2,$$

$$M_{31}=9,\ M_{32}=7,\ M_{33}=-4,$$

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

几个常用公式

1. $AA^* = A^*A = |A|E$

2. $A^* = |A|A^{-1}$

3. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

4. 若 $|A| \neq 0$，则 ① $|A^*| = |A|^{n-1}$；

② $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$； ③ $(A^*)^T = (A^T)^*$；

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$； ⑤ $(kA)^* = k^{n-1}A^*$；

证： 设 A 是 n 阶的方阵.

(1) $|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

(2) $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}$

$$=\frac{1}{|A|}A$$

$$(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

即 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

③ $(A^*)^T = (A^T)^*$;

$$(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T$$

$$= |A^T|(A^T)^{-1} = (A^T)^*$$

④ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$;

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}$$

$$= |A|^{n-2}A$$

⑤ $(kA)^* = k^{n-1}A^*$;

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|k^{-1}A^{-1}$$

$$= k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$$

对角阵的性质

性质1 若 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$

则 $\Lambda = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_m^n)$

即

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

性质2 若 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$

则 $\Lambda^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_m^{-1})$

即

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\lambda_m} \end{pmatrix}$$

性质3 若 $A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_m)$

$$B = diag(b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

则 $A \pm B = diag(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_m \pm b_m)$

$$\lambda A = diag(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_m)$$

$$AB = diag(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_m b_m)$$

逆矩阵的应用

例3 设线性变换的系数矩阵是一个 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$

记 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 则上述线性变换可记作 $Y=AX$.

求变量 y_1, y_2, y_3 到变量 x_1, x_2, x_3的线性变换。

分析：求变量 y_1, y_2, y_3 到变量 x_1, x_2, x_3的线性变换相当于求 A 的逆矩阵.

解： 由例2已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 6 & 3 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$，于是 $X=A^{-1}Y$，

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 6 & 3 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{cases}x_1=-7y_1-4y_2+9y_3,\\ x_2=\ \ 6y_1+3y_2-7y_3,\\ x_3=\ \ 3y_1+2y_2-4y_3.\end{cases}$$

例4 设A为3阶矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^{*}|$.

解 方法一：$\because |A|=\dfrac{1}{2}\neq 0,\quad \therefore A^{-1}$ 存在.

由于 $AA^{*}=|A|E \Rightarrow A^{*}=|A|A^{-1}$

$$\therefore \left|(2A)^{-1}-5A^{*}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}-5A^{*}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}\right| = \left|(\frac{1}{2}-\frac{5}{2})A^{-1}\right|$$

$$=\left|(-2)A^{-1}\right| = (-2)^{3}|A^{-1}|$$

$$=(-8)\frac{1}{|A|}=(-8)\times 2=-16.$$

解　方法二　$\because |A| = \dfrac{1}{2} \neq 0, \quad \therefore A^{-1}$ 存在.

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*} = 2A^{*}$$

$$\therefore \left|(2A)^{-1} - 5A^{*}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1} - 5A^{*}\right|$$

$A^{-1} = 2A^{*}$

$$= \left|A^{*} - 5A^{*}\right|$$

$|A^{*}| = |A|^{n-1}$

$$= \left|-4A^{*}\right| = (-4)^{3}\,|A^{*}|$$

$$= -64 \times |A|^{3-1}$$

$$= -64 \times \frac{1}{4} = -16.$$

解　解法三　先左乘A的行列式

$$AA^* = |A|E$$

$$|A|\cdot|(2A)^{-1}-5A^*| = |A\cdot(2A)^{-1}-5A\cdot A^*|$$

$$|A||B| = |AB|$$

$$(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$$

$$= \left|\frac{1}{2}AA^{-1}-5|A|E\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}E-5\times\frac{1}{2}E\right| = \left|\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)E\right|$$

$$= \left|(-2)E\right| = (-2)^3|E| = (-2)^3.$$

$$\therefore |(2A)^{-1}-5A^*| = \frac{(-2)^3}{|A|} = (-2)^3\times 2 = -16.$$

例5 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$$

求矩阵 X 使其满足 $AXB=C$

解 若 A^{-1}, B^{-1} 存在，则用 A^{-1} 左乘上式，B^{-1} 右乘上式得 $A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$，即

$$X=A^{-1}CB^{-1}$$

由题设条件知 $|A|=2\neq 0, |B|=1\neq 0$，故 A、B 均可逆，且根据题设条件可计算得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}$$

例6 **设** $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $AB=B\Lambda$, **求** A^n.

解 因 $|B|=2\neq 0$, 故 B可逆，且 $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

于是 $AB=B\Lambda \Leftrightarrow ABB^{-1}=B\Lambda B^{-1} \Leftrightarrow A=B\Lambda B^{-1}$

$$A^2=B\Lambda B^{-1}B\Lambda B^{-1}=B\Lambda^2 B^{-1}$$

$$A^3=A^2A=B\Lambda^2 B^{-1}B\Lambda B^{-1}=B\Lambda^3 B^{-1}$$

$$\cdots \quad A^n=B\Lambda^n B^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^3 = \Lambda^2\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \qquad \Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = B\Lambda^n B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4-2^{n+1} & -2+2^{n+1} \\ 4-2^{n+2} & -2+2^{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

矩阵多项式（*polynomial of matrix*）

定义　设$\varphi(x)$ 是复数域上的多项式，

$$\varphi(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (a_m\neq 0)$$

则
$$\varphi(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 E$$
$$(A\in C^{n\times n},a_m\neq 0)$$

称 $\varphi(A)$ 为矩阵 A 的 m 次多项式

矩阵 A 的两个多项式 $\varphi(A)$ 和 $f(A)$ 可交换

$$\varphi(A)f(A)=f(A)\varphi(A)$$

矩阵 A 的几个多项式可进行相乘或分解因式，例如

$$(E+A)(2E-A)=2E+A-A^2$$
$$(E-A)^3=E-3A+3A^2-A^3$$

性质 **设** $\varphi(x)$ **是复数域上的多项式，**

$$(1)\text{若}A = P\Lambda P^{-1},\text{则}\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

证 $\because A^m = P\Lambda^m P^{-1}$

$$\therefore \varphi(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

$$= a_m P\Lambda^m P^{-1} + \cdots + a_1 P\Lambda P^{-1} + a_0 PEP^{-1}$$

$$= P(a_m \Lambda^m + \cdots + a_1 \Lambda + a_0 E)P^{-1}$$

$$= P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

(2)若$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s)$,则

$$\varphi(\Lambda) = diag(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \cdots, \varphi(\lambda_s))$$

证 $\because \Lambda^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_s^n)$

$$\therefore \varphi(\Lambda) = a_m \Lambda^m + \cdots + a_1 \Lambda + a_0 E$$

$$= a_m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s^m \end{pmatrix} + \cdots + a_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} a_m\lambda_1^m + \cdots + a_1\lambda_1^m + a_0 & & & \\ & a_m\lambda_2^m + \cdots + a_1\lambda_2^m + a_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m\lambda_s^m + \cdots + a_1\lambda_s^m + a_0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_s) \end{pmatrix}
$$

例7 设 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$

求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$

解 $|P|=6\neq 0$，故 P 可逆，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}，\ \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

而 $\varphi(1)=0,\varphi(2)=10,\varphi(-3)=0$

于是

$$\varphi(\Lambda)=diag(0,10,0)$$

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&10&\\&&0\end{pmatrix}\frac{1}{|P|}P^*$$

$$=\frac{10}{6}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{11}&P_{21}&P_{31}\\P_{12}&P_{22}&P_{32}\\P_{13}&P_{23}&P_{33}\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}P_{12}&P_{22}&P_{32}\\0&0&0\\P_{12}&P_{22}&P_{32}\end{pmatrix}$$

而

$$P_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}=3,\ P_{22}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0,\ P_{32}=-\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=3$$

于是

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix}5&0&5\\0&0&0\\5&0&5\end{pmatrix}$$

练习 设 $AP=P\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，

求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解 由于 $\varphi(\Lambda)=\Lambda^8(5E-6\Lambda+\Lambda^2)$

$=diag(1,1,5^8)[diag(5,5,5)-diag(-6,6,30)+diag(1,1,5^2)]$

$=diag(1,1,5^8)diag(12,0,0)=12diag(1,0,0)$.

所以 $\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=\dfrac{1}{|P|}P\varphi(\Lambda)P^*$

$$=-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

例6 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$, 求B.

解： 由 $\boldsymbol{AB+E=A^2+B}$ 得

$$\boldsymbol{AB-B=A^2-E},$$

即

$$\boldsymbol{(A-E)B=(A-E)(A+E)}.$$

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 **$A-E$ 可逆**, 从而

$$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

§ 2.3 逆矩阵（续）

线性变换
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

的系数矩阵为n 阶方阵 A，若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则上述线性变换可记作 $Y = AX$.

§4 克拉默法则

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ （方程组的系数行列式）

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} =$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} =$$

非齐次线性方组与齐次线性方程组的概念

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**，否则称为**非齐次线性方程组**.

克拉默法则（*Gramer's Rule*）

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解并且解是唯一的，解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \qquad (2)$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 阶行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \color{red}{b_1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \color{red}{\vdots} & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \color{red}{b_n} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 线性方程组 (1) 可以表示成矩阵方程

$$Ax = b$$

其中 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 n 阶矩阵，因 $\left|A\right| = D \neq 0$ ，故 A^{-1} 存在

令 $x = A^{-1}b$，则有

$$Ax = AA^{-1}b = b$$

故 $x = A^{-1}b$ 是方程组 (1) 的解向量

由 $Ax = b$ 有 $x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$ ，根据逆矩阵的唯一性，

知 $x = A^{-1}b$ 是方程组 (1) 的唯一解向量

由逆矩阵公式 $A^{-1} = \dfrac{1}{\left|A\right|}A^{*} = \dfrac{1}{D}A^{*}$ 有 $x = A^{-1}b = \dfrac{1}{D}A^{*}b$

于是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

即

$$x_j = \frac{1}{D}\left(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\right) = \frac{D_j}{D}\left(j=1,2,\cdots,n\right)$$

克拉默法则的等价命题

设
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

定理3　如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，则该线性方程组一定有解,而且解是唯一的 .

定理3′ 如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

例1 **解线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\underset{r_4 - r_2}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{8} & 1 & -5 & 1 \\ \boxed{9} & -3 & 0 & -6 \\ \boxed{-5} & 2 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{8} & -5 & 1 \\ 1 & \boxed{9} & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{8} & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例2 分别用克莱姆法则和逆矩阵方法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解 (1) 用克莱姆法则

方程组系数矩阵行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

由克莱姆法则，它有唯一解，且

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

(2) 用逆矩阵法

方程组系数矩阵 A 行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

故 A 可逆，于是

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

练习 **用克莱姆法则解线性方程组**

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11/6 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5/6 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 67 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 11/6 & 1 & 1 & 1 \\ 5/6 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{3} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 11/6 & 1 & 1 \\ 1 & 5/6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 11/6 & 1 \\ 1 & -1 & 5/6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{67}{2} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 11/6 \\ 1 & -1 & -3 & 5/6 \end{vmatrix} = 67$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{67/3}{67} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{67} = 0$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{67/2}{67} = \frac{1}{2} \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{67}{67} = 1$$

齐次线性方程组的相关定理

齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理4　如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解，没有非零解.

定理4′ 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

例3 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0,\end{cases}$$

有非零解?

解 $$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

如果齐次方程组有非零解，则必有 $D=0$

所以 $\lambda=0$、2、3 时齐次方程组有非零解.

§5 矩阵分块法

问题一：为什么提出矩阵分块法?

答：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时采用分块法，可以使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，体现了化整为零的思想.

问题二：什么是矩阵分块法?

分块矩阵的概念

定义 用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为**对矩阵进行分块**(*matrix partition*)；

每一个小块称为**矩阵的子块**（*block*）；

矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**(*block matrix/partitioned matrix*).

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是2阶方阵吗?

分块矩阵的运算

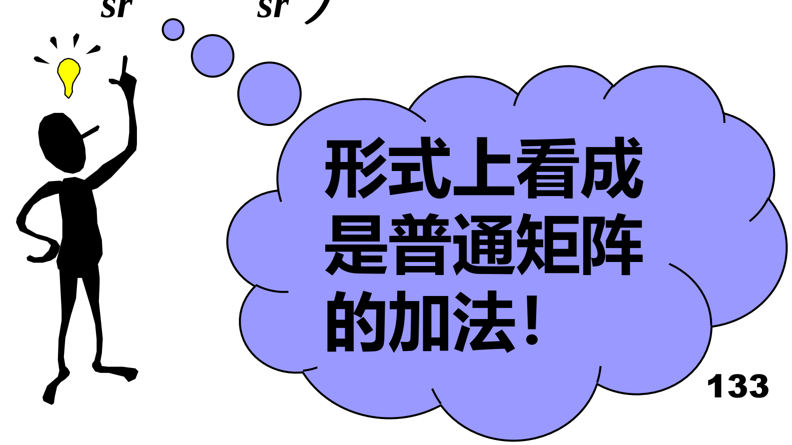
1、分块矩阵的加法
2、分块矩阵的数乘运算
3、分块矩阵的乘法

分块矩阵的加法

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有 $$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$



分块矩阵的数乘

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$

分块矩阵的乘法

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m$$
$$l_1+l_2+\cdots+l_t=l$$
$$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$$

设 A为$m\times l$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵，把 A、B 分块如下：

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \end{array},\quad B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_r \end{array} \\ \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_t \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},\quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$$

$$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

例1 **设有**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB

解 把 A、B 分块为

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

而

$$A_1 B_{11} + B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

练习 设有

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

求 $-4A+B$ 和 AB.

解 用分块矩阵运算，令

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-1\end{pmatrix}, \text{则 } A=\begin{pmatrix}A_1&\mathrm{O}\\E&A_2\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}3&6\\-1&2\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&5\end{pmatrix}, \text{则 } B=\begin{pmatrix}B_1&\mathrm{O}\\4E&B_2\end{pmatrix},$$

于是 $$-4A+B=\begin{pmatrix}-4A_1&\mathrm{O}\\-4E&-4A_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1&\mathrm{O}\\4E&B_2\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}-4A_1+B_1&O\\O&-4A_2+B_2\end{pmatrix}$$

$$-4A_1+B_1=-4\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$-4A_2+B_2=-4\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & -17\\ -3 & 9\end{pmatrix},$$

故 $$-4A+B=\begin{pmatrix} -4A_1+B_1 & O \\ O & -4A_2+B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

2)

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 & \mathrm{O} \\ E & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & \mathrm{O} \\ 4E & B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 + 4OE_2 & A_1 O + OB_2 \\ E_2 B_1 + 4E_2 A_2 & E_2 O + A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 B_1 & O \\ B_1 + 4A_2 & A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

而 $$A_1B_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_2B_2=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 11\\ 1 & -6\end{pmatrix},$$

$$B_1+4A_2=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 22\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & O \\ B_1+4A_2 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 22 & 0 & 11 \\ 3 & -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

按行分块以及按列分块

$m\times n$ 矩阵 A 有m 行 n 列，若将第 i 行记作$\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$

若将第 j 列记作 $\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$,

行分块矩阵

列分块矩阵

则 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n).$

于是设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，若把 A 按行分块，把 B 按列块，则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \hline \cdots & & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} \quad B=\left(\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{array}\right)$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n\\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n\end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\alpha_i^T\beta_j=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}\right)\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

分块矩阵的转置

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

例如：$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$$A^T=\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ \hline a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ \hline a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵

定义： 设 A 是 n 阶矩阵，若A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，对角线上的子块都是方阵，那么称 A 为**分块对角矩阵**。

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵的性质

分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

- $|A|=|A_1||A_2|\ldots|A_s|$
- **若**$|A_s|\neq 0$，**则** $|A|\neq 0$，**并且**

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

证

$$(1)\ A=\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{c|ccc} A_1 & & & \\ \hline & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{array}\right|$$

$$=|A_1|\left|\begin{array}{c|ccc} A_2 & & & \\ \hline & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{array}\right|=|A_1||A_2|\begin{vmatrix} A_3 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$$

$$(2)\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1A_1^{-1} & & & \\ & A_2A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sA_s^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_s \end{pmatrix}=E_n$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),\ A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\ A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c|cc}1/5&0&0\\\hline 0&1&-1\\0&-2&3\end{array}\right)$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|A^5|$ 和 A^4.

解:

$$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

则

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, |A|=|A_1||A_2|,$$

因

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

所以 $|A^5| = |A|^5 = 40^5$

因 $$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix},$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$

所以 $$A_1^4 = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 10^2 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{\,2}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

$$A_2^{\,4}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ -32 & 16\end{pmatrix}$$

或 $$A_2^{\,4}=\begin{pmatrix}2^4 & 0\\ -2^6 & 2^4\end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^{\ 4} & O \\ O & A_2^{\ 4} \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 10^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & -2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

例4 证 $A_{m\times n}=O_{m\times n}$的充分必要条件是方阵 $A^TA=O_{n\times n}$.

证明 把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

于是 $$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=O$$

那么

$$\alpha_j^T\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^{\ 2}+a_{2j}^{\ 2}+\cdots+a_{mj}^{\ 2}=0$$

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$$

即 $A=O$.

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

矩阵乘积形式 $A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$

把 A 按列分块，把 x 按行分块，由分块矩阵乘法有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$$

故方程组 (1) 表示成 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$