第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

马金连
jlma2019@sdu.edu.cn

§3.1 矩阵的初等变换

引例

例　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{cases} \qquad (1)$$

解

$$(1) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & r_1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & r_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & r_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & r_4 \end{cases} \quad (B_1)$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_3\\ r_3-2r_1}} \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & r_1\\ 2x_2-2x_3+2x_4=0 & r_2\\ -5x_2+5x_3-3x_4=-6 & r_3\\ 3x_2-3x_3+4x_4=-3 & r_4 \end{cases} \qquad (B_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\\ r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & r_1\\ x_2-x_3+x_4=0 & r_2\\ 2x_4=-6 & r_3\\ x_4=-3 & r_4 \end{cases} \qquad (B_3)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & r_1\\ x_2-x_3+x_4=0 & r_2\\ x_4=-3 & r_3\\ 0=0 & r_4 \end{cases} \qquad (B_4)$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

其中 x_3 可任意取值，或令 $x_3 = c$，方程组的解可表示为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c 为任意常数

三种变换：

(i) 交换方程的次序 (i 与 j 相互替换)

(ii) 以不等于 0 的数 k 乘某个方程 (以 $i \times k$ 替换 i)

(iii) 一个方程 加上另一个方程的 k 倍 (以 $i + kj$ 替换 i)

变换前后的方程组同解

只有方程组的系数和常数参与运算

对原方程组增广矩阵进行行变换

增广矩阵 $$B=\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_3 \div 2}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)=B_1$$

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1 \\ \sim \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right) = B_2$$

$$\begin{array}{c} r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1 \\ \sim \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right) = B_2$$

$$\begin{array}{c} r_2 \div 2 \\ r_3 + 5r_2 \\ \sim \\ r_4 - 3r_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = B_3$$

$$B_3 = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \\ r_4 - 2r_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{array}\right) = B_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B_5$$

(B_5) 对应的方程组是 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3, \end{cases}$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_4$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_5$$

B_4, B_5 特点：

都可画出一条从第一行某元左方的竖线开始到最后一列某元下方的横线结束的阶梯线，其左下方的元全为 0；每段竖线的高度为一行，竖线的右方第一个元为非零元，称为该非零行的首非零元。具有这样特点的矩阵称为行阶梯形矩阵

定义 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**

(i) 对换两行 (对换 i，j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$) **换法变换**

(ii) 以不等于 0 的数 k 乘某一行中的所有元素 (第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$) **倍法变换**

(iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去 (第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$)

消法变换

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换。

三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换：

$$\left.\begin{array}{l} r_i \leftrightarrow r_j \\ r_i \times \dfrac{1}{k} \\ r_i - k r_j \end{array}\right\} \text{逆变换}$$

定义 如果矩阵 A 经有限次初等行变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **行等价**，记作 $A \overset{r}{\sim} B$

如果矩阵 A 经有限次初等列变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **列等价**，记作 $A \overset{c}{\sim} B$

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称矩阵 A 与 B **等价**，记作 $A \sim B$

性质：

（1）反身性：$A \sim A$；

（2）对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

（3）传递性：若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$。

定义 (1) 非零矩阵若满足 (i) 非零行在零行上面；(ii) 非零行的首非零元所在列在上一行 (如果存在的话) 的首非零元所在列的右面，则称此矩阵为**行阶梯形矩阵**

(2) 若 A 是**行阶梯形矩阵**，并且满足：(i) 非零行的首非零元为 1；(ii) 首非零元所在的列的其他元为 0，则称 A 为**行最简形矩阵**

结论 对于任何非零矩阵 A 总可经有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵

行阶梯形矩阵特点：

可画出一条阶梯线，线的下方全为 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

行最简形矩阵特点：

非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其它元素都为 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵

对于任一 $m\times n$ 矩阵A，总可经过初等变换（行变换和列变换）把它化为标准形：

$$F=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$

此标准形由m，n，r 三个数完全确定，其中r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数，它是唯一确定的。

所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，标准形 F 是其中最简单的矩阵。

定义　由单位阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**。

三种初等变换对应**三种**初等矩阵。

(i) 把**单位阵**中的**第 i，j 两行**（两列）对换，得初等矩阵

换法矩阵

$$E(i,j)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccccccc}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow \text{第}i\text{行}\\\\\\\\\leftarrow \text{第}j\text{行}\\\\\\\\\end{array}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，得

$$
E_m(i,j)A=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

用 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，得

$$
AE_n(i,j)=\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
\phantom{a_{11}} & & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & & \phantom{a_{1n}}
\end{array}
\end{array}
$$

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数 $k \neq 0$ 乘单位阵的第 i 行（$r_i \times k$）得初等矩阵

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 第 i 行 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

倍法矩阵

(iii) 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上去，得初等方阵：

消法矩阵

$$E(ij(k))=\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

左乘行变
右乘列变

初等矩阵的性质

1) 初等方阵的行列式

$$\left|E(i,j)\right|=-1 \quad \left|E(i(k))\right|=k\neq 0 \quad \left|E(ij(k))\right|=1$$

2) 初等矩阵都是可逆的，且其逆矩阵是同一类型的初等矩阵

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j) \quad E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$$

3) 初等矩阵的转置，且其转置为同一类型的初等矩阵

$$E(i,j)^{T}=E(i,j) \quad E(i(k))^{T}=E(i(k)) \quad E(ij(k))^{T}=E(ji(k))$$

定理1　设 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，对 A 施行一次行初等变换，相当于在 A 的左乘相应的 m 阶初等方阵；对 A 施行一次列初等变换，相当于在 A 的右乘相应的 n 阶初等方阵。

定理2 设 A 与 B 为 $m\times n$ 矩阵，则

(i) $A\overset{r}{\sim}B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P，使

$$PA=B$$

(ii) $A\overset{c}{\sim}B$ 的充要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$AQ=B$$

(iii) $A\sim B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使

$$PAQ=B$$

证 (i) 根据 $A\overset{r}{\sim}B$ 定义和初等矩阵性质有

$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow A$ 经有限次初等行变换变成 B

$\Leftrightarrow$ 存在有限个 m 阶初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $P_lP_2\cdots P_lA=B$

$\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 $P=P_1P_2\cdots P_l$，使 $PA=B$

(ii) 根据 $A\overset{c}{\sim}B$ 定义和初等矩阵性质有

$A\overset{c}{\sim}B \Leftrightarrow A$ 经有限次初等列变换变成 B

$\Leftrightarrow$ 存在有限个 n 阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$，使 $AQ_1Q_2\cdots Q_k=B$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_k$，使 $AQ=B$

(iii) 根据 $A\sim B$ 定义和初等矩阵性质有

$A\sim B \Leftrightarrow A$ 经有限次初等变换变成 B

$\Leftrightarrow$ 存在有限个 n 阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$ 与有限个 m 阶初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $P_1P_2\cdots P_lAQ_1Q_2\cdots Q_k=B$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_k, P=P_1P_2\cdots P_l$，使

$$PAQ=B$$

推论 方阵 A 可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$

证 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P，使得 $PA = E$

$$\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$$

注 如果 $A \overset{r}{\sim} B$，即 A 经一系列初等行变换变为 B，则有可逆矩阵 P 使 $PA = B$。如何求可逆矩阵 P?

$$PA = B \Leftrightarrow \begin{cases} PA = B \\ PE = P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P(A, E) = (B, P)$$

$$\Leftrightarrow (A, E) \overset{r}{\sim} (B, P)$$

$$\left(A \middle| E\right) \xrightarrow{\substack{\text{初等}\\\text{行变换}}} \left(E \middle| A^{-1}\right) \qquad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{初等}\\\text{列变换}}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

定理3　方阵A为可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵P_1，P_2，…，P_l，使$A=P_1P_2\cdots P_l$。

证　因$A\sim E$，故E经有限次初等变换可变成A，也就是存在有限个初等矩阵P_1，P_2，…，P_l，使

$$P_1P_2\cdots P_r E P_{r+1}\cdots P_l = A,$$

即

$$A = P_1P_2\cdots P_l。$$

推论　$m\times n$矩阵$A\sim B$的充分必要条件是：存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ=B$。

例1 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$，求其行最简形矩阵 F 及一个可逆矩阵 P，使得 $PA=F$

解

$$(A,E)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&0&0\\1&1&-2&0&1&0\\4&-6&2&0&0&1\end{pmatrix}\underset{r_2-2r_1}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2\atop r_3-2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&1&0\\0&-3&3&1&-2&0\\0&-4&4&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+4r_1}{\overset{r_2-r_3\atop r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-3&3&1\\0&1&-1&3&-2&-1\\0&0&0&10&-8&-3\end{pmatrix}$$

故

$$F=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}-3&3&1\\3&-2&-1\\10&-8&-3\end{pmatrix}$$

初等变换的应用

1. 求矩阵的逆矩阵

若 $|A| \neq 0$，$A = P_1 P_2 \cdots P_l$

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E \Leftrightarrow P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E = A^{-1}$$

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A, E)$$

$$= \left(P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A, P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} E \right)$$

$$= \left(E, A^{-1} \right)$$

$$P(A, E) \qquad |P| \neq 0$$

$$= (PA, P)$$

$$= \left(E, A^{-1} \right)$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}

解

$$(A,E)=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{\substack{r_3\times 3\\ r_3+2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+9r_1}{\overset{r_3\times 2}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12\\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\div(-2)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

故 $A\overset{r}{\sim}E$ 因此 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3\\ 9 & 4 & 6\end{pmatrix}$

初等变换的应用

2. 解矩阵方程 $AX = B$

若 $|A| \neq 0$，$X = A^{-1}B$，$A = P_1 P_2 \cdots P_l$

$$P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = E \Leftrightarrow P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} B = A^{-1}B = X$$

$$\begin{aligned} & P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} (A, B) \\ &= \left(P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A, P_l^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} B \right) \\ &= \left(E, A^{-1}B \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(A, B) \qquad |P| \neq 0 \\ &= (PA, PB) \\ &= \left(E, A^{-1}B \right) \end{aligned}$$

例3 求解矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

解 设可逆矩阵 P 使 $PA=F$ 为行最简形矩阵，则

$$P(A,B)=(F,PB)$$

因此对矩阵 (A,B) 作初等行变换把 A 变为 F，同时把 B 使 PB。若 $F=E$，则 A 可逆，且 $P=A^{-1}$，此时所给方程有唯一解 $X=PB=A^{-1}B$，由

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3+r_1}{\overset{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2-2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+3r_2}{\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_2\\ r_2\div 5}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

可见 $A\overset{r}{\sim}E$ **，因此** A **可逆，且**

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

即为所给方程的唯一解

例4 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

解 记此方程组为 $Ax = b$，则增广矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2 - 2r_1}{\underset{r_3 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-5r_2\\ r_3\times\frac{1}{3}}}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\underset{r_2+r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

可见 $A\overset{r}{\sim}E$ **，因此** A **可逆，于是方程组有唯一解，且**

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$$

§3.2 矩阵的秩

矩阵的秩的引入

任何矩阵 $\xrightarrow{\text{有限次初等行变换}}$ **行阶梯形矩阵**

$$
A_{m\times n} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r
$$

唯一确定

矩阵的秩(Rank of Matrix)的概念

定义： 在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k\leq m$，$k\leq n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 **k 阶子式**（ ）.

* $m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

例如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ 是矩阵 A 的一个**2 阶子式**

概念辨析： k 阶子式、矩阵的子块、余子式、代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

与元素a_{12}相对应的余子式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

相应的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子块

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

定义2 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有$r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

规定： 零矩阵的秩等于零.

问： 所有$r+1$ 阶子式全等于零，那么 矩阵A 的最高阶非零子式阶数恰好是r？

定义2 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

规定： 零矩阵的秩等于零.

- 根据行列式按行（列）展开法则可知，矩阵 A 中任何一个 $r+2$ 阶子式（如果存在的话）都可以用 $r+1$ 阶子式来表示.
- 如果矩阵 A 中所有 $r+1$ 阶子式都等于零，那么所有 $r+2$ 阶子式也都等于零 .
- 事实上，所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也都等于零 .

因此矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 2 阶子式

矩阵 A 的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

如果矩阵 A 中所有 2 阶子式都等于零，那么这个 3 阶子式也等于零．

例1 求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解： 在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$.

A 的 3 阶子式只有一个，即 $|A|$，而且

$$|A| = 3-40+42-36+35-4 = 0,$$

因此 $R(A)=2$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解（续）： B 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，因此其 4 阶子式全为零.

以非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}=24\neq 0$$，因此 $R(B)=3$.

还存在其它3 阶非零子式吗?

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解（续）： B 还有其它 3 阶非零子式，例如

$$\begin{vmatrix}2&0&3\\0&1&-2\\0&0&4\end{vmatrix}=8\qquad\begin{vmatrix}2&-1&-2\\0&3&5\\0&0&-3\end{vmatrix}=-18\qquad\begin{vmatrix}2&0&-2\\0&1&5\\0&0&-3\end{vmatrix}=-6$$

结论：行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

注:

(1) 若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geq s$；

若矩阵 A 中所有 t 阶子式等于零，则 $R(A) < t$.

(2) 若 A 为 n 阶矩阵，则 A 的 n 阶子式只有一个，即$|A|$.

当$|A| \neq 0$ 时， $R(A) = n$；可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为**满秩矩阵**（*full rank matrix*） .

当$|A| = 0$ 时， $R(A) < n$；不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为**降秩矩阵**（*reduced rank matrix*） .

(3) 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min(m, n)$.

(4) $R(A^T) = R(A)$.

矩阵的秩的计算

例 求矩阵 A 的秩，其中 $A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$.

分析： 在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix}2&0\\1&6\end{vmatrix}=12\neq 0$.

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3C_5^3=40$ (个)，
要从40个子式中找出一个非零子式是比较麻烦的.

一般的矩阵，当行数和列数较高时，按定义求秩是很麻烦的 .

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

一个自然的想法是用初等变换将一般的矩阵化为行阶梯形矩阵.

两个等价的矩阵的秩是否相等?

引理 设 $A\overset{r}{\sim}B$，则 A 与 B 中非零子式的最高阶数相等

证 先证 B 是 A 经过一次初等行变换而得的情形

设 D 是 A 中的 r 阶非零子式，当 $A\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\sim}B$ 或 $A\overset{r_i\times k}{\sim}B$ 时，B 中总能找到与 D 相对应的 r 阶子式 $D_1=D$ 或 $D_1=-D$ 或 $D_1=kD$，因此 $D_1\neq 0$

当 $A\overset{r_i+kr_j}{\sim}B$ 时，因对于变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 结论成立，只需考虑特殊情形 $A\overset{r_1+kr_2}{\sim}B$，分两种情形讨论：

(1) D 不包含 A 的第 1 行，这时 D 也是 B 的 r 阶非零子式

(2) D 包含 A 的第 1 行，B 中与 D 对应的 r 阶子式记作

$$D_1 = \begin{pmatrix} r_1 + kr_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix} = D + kD_2$$

若 $p = 2$，则 $D_1 = D \neq 0$ ，若 $p \neq 2$，则 D_2 也是 B 的 r 阶子式，由于 $D_1 - kD_2 = D \neq 0$，则 D_1 与 D_2 不同时为 0，总之 B 中存在 r 阶非零子式 D_1 或 D_2

设 A 和 B 中非零子式的最高阶数分别为 s 和 t，则上述表明 $s \leq t$ 。因 A 经一次初等行变换成为 B，B 也可经一次初等行变换成为 A，故又有 $t \leq s$，于是 $s = t$

经一次初等行变换结论成立，则经有限次初等行变换结论也成立

定理2 若 $A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

证 由引理只须证 A 经初等列变换变成 B 的情形。

设 A 经过初等列变换变为 B，则 A^{T} 经过初等行变换变为 B^{T}，从而由引理知

$$R(A^{\mathrm{T}}) = R(B^{\mathrm{T}})$$

又 $R(A) = R(A^{\mathrm{T}})$，$R(B) = R(B^{\mathrm{T}})$，因此

$$R(A) = R(B)$$

总之，若 A 经过有限次初等变换变为 B，即 $A \sim B$，则

$$R(A) = R(B)$$

定理2 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

应用：根据这一定理，为求矩阵的秩，只要用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩.

例2： 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解： 第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式．选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&5\\6&0&11\\2&0&5\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}6&11\\2&5\end{vmatrix}=-16\neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 及矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

分析： 对 B 作初等行变换变为行阶梯形矩阵，设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$，则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，因此可从中同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

解： $B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=2$
$R(B)=3$

矩阵的秩的性质

① 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\le R(A)\le\min(m, n)$.

② $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

③ 若 $A\sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

④ 若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.

⑤ $\max\{R(A), R(B)\}\le R(A, B)\le R(A) + R(B)$.

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A)\le R(A, b)\le R(A) + 1 .$$

⑥ $R(A + B)\le R(A) + R(B)$.

⑦ $R(AB)\le\min\{R(A), R(B)\}$.

⑧ 若 $A_{m\times n} B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B)\le n$.

证： 5） $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$.

因 A 的最高阶子式总是 (A, B) 的非零子式，**故** $R(A) \le R(A, B)$.

同理可证 $R(B) \le R(A, B)$. **于是** $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B)$.

设 $R(A)=r$, $R(B)=t$. **则通过列初等变换**

$$A \overset{c}{\sim} \tilde{A} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_r, 0, \cdots, 0),$$

$$B \overset{c}{\sim} \tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_t, 0, \cdots, 0),$$

$(\tilde{A}, \tilde{B})$ **中只含** $r+t$ **个非零列**，$R(\tilde{A}, \tilde{B}) \le r + t$，**即**

$$R(A, B) \le R(A) + R(B) .$$

⑥ $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$.

设A，B都是 $m \times n$ 矩阵 . 对矩阵$(A+B，B)$ 做列初等变换

$c_i - c_{n+i} (i = 1,2,\cdots,n)$, 即得 $(A+B，B) \sim (A，B)$, 于是

$$R(A+B) \leq R(A+B，B) = R(A，B) \leq R(A)+R(B) .$$

例4 设 A 为 n 阶矩阵， 证明 $R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

证明： 因为 $(A+E)+(E-A)=2E$,

由性质“$R(A+B)\leq R(A)+R(B)$”有

$$R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)=n\ .$$

又因为$R(E-A)=R(A-E)$，所以

$$R(A+E)+R(A-E)\geq n\ .$$

例5 证明若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$．

因为 $R(A)=n$， 所以 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$，

设 m 阶可逆矩阵 P，满足 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$．

于是
$$PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix},$$

因为 $R(C)=R(PC)$，而$R(B)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$，故$R(B)=R(C)$．

附注：

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为**列满秩矩阵**.
- 当一个矩阵的秩等于它的行数时，这样的矩阵称为**列满秩矩阵**.
- 特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.
- 例4中，当 $C = O$，这时结论为：

  设 $AB = O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B = O$.

  设 $AB = O$，若 B 为行满秩矩阵，则 $A = O$.

例6 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{pmatrix}$，已知R(A)=2, 求 λ 与 μ 的值.

解： 将 A 化为行阶梯型矩阵

$$A \overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-5r_1}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & 8 & \mu-5\end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1\end{pmatrix}$$

因为R(A)=2, 所以 $\begin{cases}5-\lambda=0,\\ \mu-1=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}\lambda=5,\\ \mu=1.\end{cases}$

§3.3 线性方程组的解

线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组可简化为 $AX = b$.

线性方程组的解的判定

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

m、n 不一定相等！

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

定义1 线性方程组如果有解，就称它是**相容的**（*Consistent*）；如果无解，就称它是**不相容的**（*inconsistent*）．

问题1： 方程组是否有解?

问题2： 若方程组有解，则解是否唯一?

问题3： 若方程组有解且不唯一，则如何表示解的全体?

定理3 n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$

①无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

②有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$ ；

③有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

分析：只需证明条件的充分性，即

❿ $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解；

❿ $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解；

❿ $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

那么

✓ 无解 $\Rightarrow R(A) < R(A, b)$；

✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) = n$；

✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明：设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A,b)$ 的**行最简形矩阵**为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A)\le R(A,b)\le R(A)+1}$$

第一步：往证 $R(A)<R(A,b)\ \Rightarrow$ 无解.

若 $R(A)<R(A,b)$，即 $R(A,b)=R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是 第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1=d_1, \\ x_2=d_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n=d_n. \end{cases}$$

第二步： 往证 $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$， 则 $d_{r+1}=0$ 且 $r=n$, 从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

第二步： 往证 $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$， 则 $d_{r+1}=0$ 且 $r=n$, 从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$
\tilde{B} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{前 } r \text{ 列}} & & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{后 } n-r \text{ 列}} & & & 0
\end{pmatrix}_{m\times(n+1)}
$$

第三步： 往证 $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A) = R(A, b) < n$， 即 $r < n$，则 $d_{r+1} = 0$.

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\
x_2 + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\
\cdots\cdots \\
x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r;
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \quad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\quad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

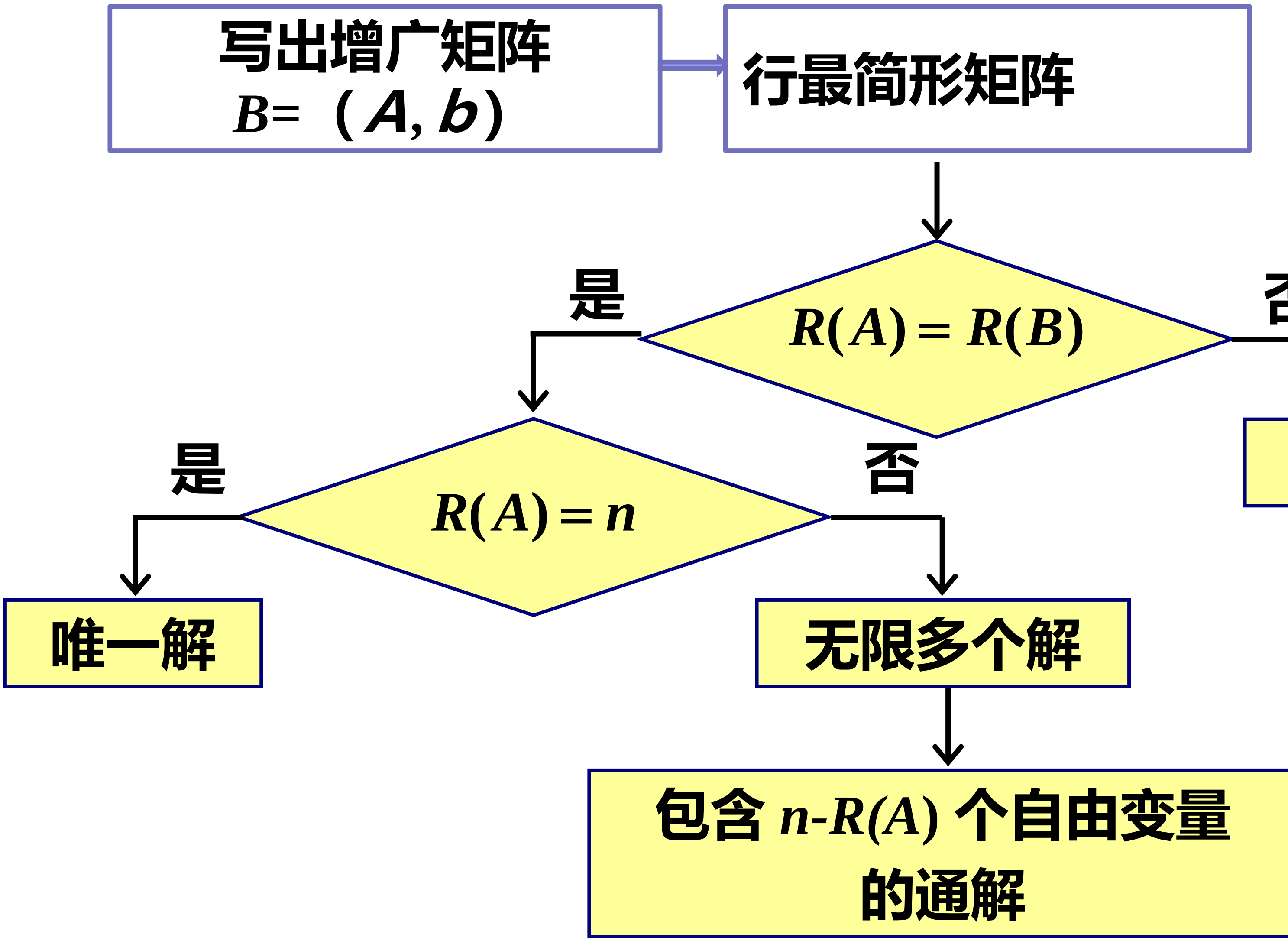
$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

线性方程组的通解

再令 $x_{r+1} = c_1,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

求解线性方程组的步骤



例1　**求解齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

分析：只需对系数矩阵 A 进行初等行变换变为行最简形矩阵。为什么?

答：因为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的常数项都等于零，于是必有 $R(A, 0) = R(A)$，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组的解的情况.

解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -4 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -5/3\\ 0 & 1 & 2 & 4/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\because R(A)<4,$ $\quad\therefore$ 方程组有无穷多解.

即得与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1 \quad -2x_3 \quad -5/3x_4=0,\\ x_2 \quad +2x_3 \quad +4/3x_4=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1= \ 2x_3+5/3x_4,\\ x_2=-2x_3+4/3x_4,\end{cases}$$

取 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ **得**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 5/3c_2 \\ -2c_1 - 4/3c_2 \end{pmatrix},$$

即, 线性方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 5/3c_2 \\ -2c_1 + -4/3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例2 **求解非齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解： $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$R(A) = 2$，$R(A, b) = 3$，故原线性方程组无解.

练习 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解 $$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(A, b) = 3 < 4$，故原线性方程组有无穷多解.

解

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

即得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1 - x_3 = 4,\\ x_2 - x_3 = 3,\\ x_4 = -3.\end{cases}$$

令 x_3 **做自由变量，则**

$$\begin{cases}x_1 = x_3 + 4,\\ x_2 = x_3 + 3,\\ x_4 = -3.\end{cases}$$

于是，方程组的通解可表示为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

例3　设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda. \end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有(1) 唯一解；(2) 无解；(3) 有无限多个解？并在有无限多解时求其通解.

定理3　n 元线性方程组 $AX = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法1 **对增广矩阵作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵.**

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

分析：

- **讨论方程组的解的情况，就是讨论参数 λ 取何值时，r_2、r_3 是非零行.**
- **在 r_2、r_3 中，有 5 处地方出现了λ，要使这 5 个元素等于零，$\lambda = 0$，3，- 3，1 .**
- **实际上没有必要对这 4 个可能取值逐一进行讨论，先从方程组有唯一解入手.**

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

(1)当 $-\lambda$（ $3+\lambda$ ）$\neq 0$，即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq$ 一3 时， r_2、r_3 是非零行．故 $R(A) = R(B) = 3$ ，方程组有唯一解．

(2)当 $\lambda = 0$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 1$， $R(B) = 2$ ，方程组无解.

(3)当 $\lambda = -3$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(B)=2$，方程组有无限多个解，解同解方程

$$\begin{cases}x_1-x_3=-1,\\ x_2-x_3=-2,\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}x_1=x_3-1,\\ x_2=x_3-2,\end{cases}$$

故，方程组通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}.$

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法2　因为系数矩阵 A 是方阵，所以方程组有唯一解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$．而

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$$

于是当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，方程组有唯一解．

当 $\lambda = 0$ 时，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = 1$， $R(B) = 2$，方程组无解.

当 $\lambda = -3$ 时，$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = R(B) = 2$，方程组有无限多个解，其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基本结论

定理3 n 元线性方程组 $AX = b$

①无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

②有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$ ；

③有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

定理4 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$

①只有零解的充分必要条件是$R(A) = n$ ；

②有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$.

定理5 线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, b) \ .$$

分析： 因为对于 $AX = 0$ 必有 $R(A, 0) = R(A)$ ，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组的解的情况.

定理6 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, B) .$$

证明： 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $m\times l$ 矩阵， X 是 $n\times l$ 矩阵.

把 X 和 B 按列分块，记作

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_l) ,\ B = (b_1, b_2, \ldots, b_l)$$

则 $AX = A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) = B$

即矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i = b_i$ 有解

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, b_i)$$

设 $R(A)=r$，A 的行最简形矩阵为 $\tilde{A}$，则 $\tilde{A}$ 有 r 个非零行，且 $\tilde{A}$ 的后 $m-r$ 行全是零.

再设 $(A,B)=(A,b_1,b_2,\cdots,b_l)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$

从而 $(A,b_i)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_i)$

矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i=b_i$ 有解

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b_i)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{b}_i$ 的后 $m-r$ 个元素全是零

$\Leftrightarrow$ $(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$ 的后 $m-r$ 行全是零

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.

定理7 设 $AB = C$，则 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$．

证明： 因为 $AB = C$，所以矩阵方程 $AX = C$ 有解 $X = B$，于是 由定理4 得，$R(A) = R(A, C)$．

再由矩阵秩的性质5，有 $R(C) \le R(A, C)$，故 $R(C) \le R(A)$．又 $(AB)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$，即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}$，所以矩阵方程 $B^{\mathrm{T}}X = C^{\mathrm{T}}$ 有解 $X = A^{\mathrm{T}}$，同上证明可得，$R(C^{\mathrm{T}}) \le R(B^{\mathrm{T}})$，又因$R(B^{\mathrm{T}}) = R(B)$、$R(C^{\mathrm{T}}) = R(C)$，所以 $R(C) \le R(B)$．

综上所述，可知 $R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$．