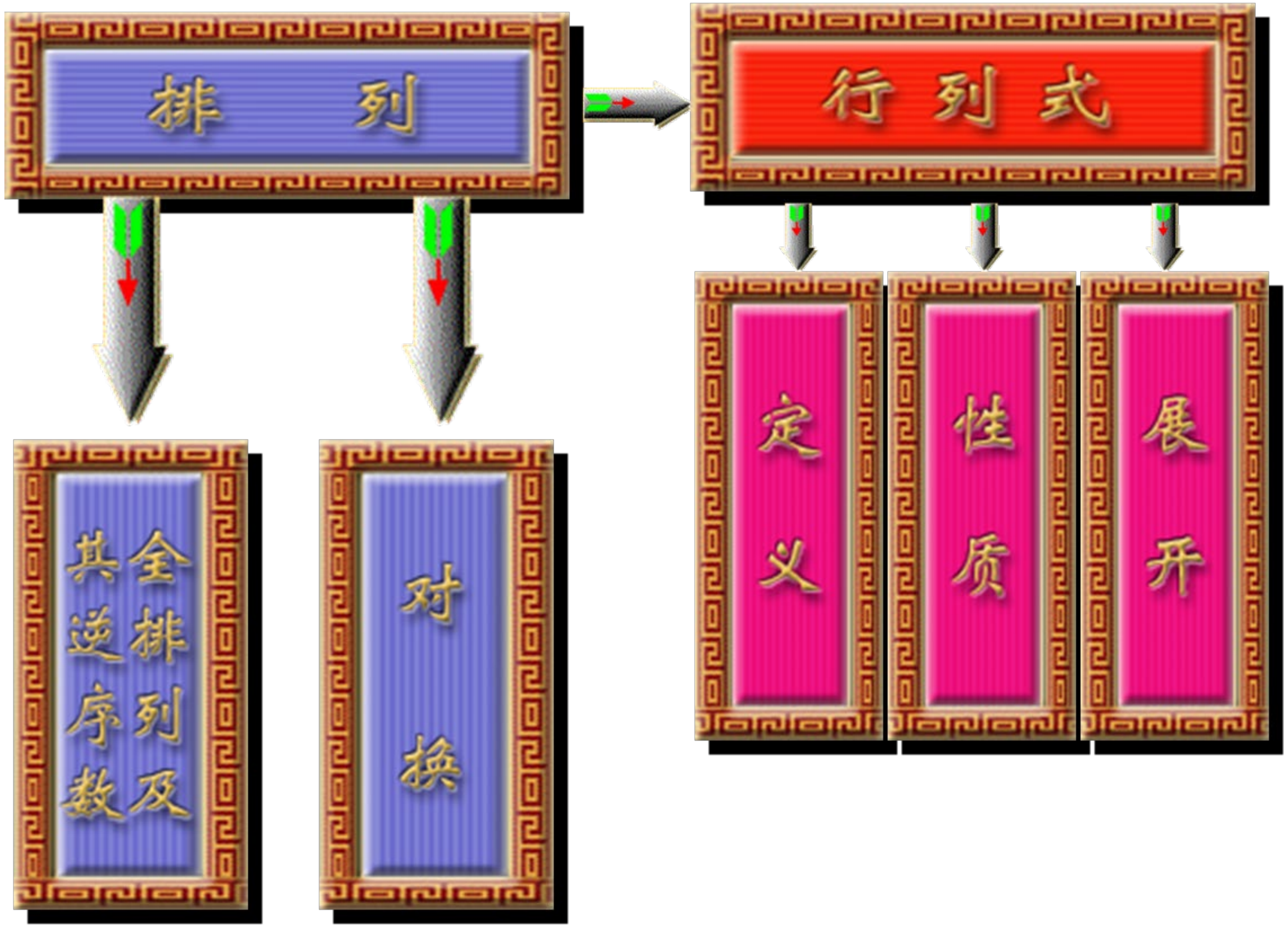
第一章　习题课



全排列

把 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的**全排列** (或**排列**)

n 个不同的元素的所有排列的种数用 P_n 表示, 且 $P_n=n!$

逆序数

在一个排列 ($i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$) 中, 若数 $i_s>i_t$, 则称这两个数组成一个逆序

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**

计算排列逆序数的方法

方法1

分别计算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码之和，即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个元素的逆序数，这 n 个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数

方法2

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数

对换

定义: 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的过程叫做**对换**

将相邻两个元素对调, 叫做**相邻对换**

定理1: 一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性

推论: 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数

n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

或 $$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{t(p_1+p_2+\cdots+p_n)+t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

n 阶行列式的性质

性质1: 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D^T = D$

性质2: 互换行列式的两行 (列), 行列式变号

推论: 如果行列式有两行 (列) 完全相同, 则此行列式为零

性质3: 行列式的某一行 (列) 中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式

推论: 行列式的某一行 (列) 中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面

性质4: 行列式中如果有两行 (列) 元素成比例, 则此行列式为零

性质5: 若行列式的某一列 (行) 的元素都是两数之和, 则该行列式等于两个行列式之和

性质6: 把行列式的某一列 (行) 的各元素乘以同一数然后加到另一列 (行) 对应的元素上去, 行列式不变

行列式按行 (列) 展开

1）余子式与代数余子式

在 n 阶行列式 D 中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素划去后, 留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (行列式 D 的关于) 元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} 。

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式

2）关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

典 型 例 题

- 计算排列的逆序数
- 计算（证明）行列式

计算排列的逆序数

例 求排列 $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$ 的逆序数，并讨论其奇偶性

解 分别算出排列中每个元素前面比它大的数码之和，即算出排列中每个元素的逆序数

$2k$ 排在首位，故其逆序数为 0；

1 前面比 1 大的数有一个 $2k$，故其逆序数为 1；

$(2k-1)$ 前面比 $(2k-1)$ 大的数有一个 $2k$，故其逆序数为 1；

2 前面比 2 大的数有 2 个$2k$，$(2k-1)$，故其逆序数为 2；

$(2k-2)$ 前面比 $(2k-2)$ 大的数有 2 个$2k$，$(2k-1)$ 故其逆序数为 2；

…… ……

$(k-1)$ 前面比 $(k-1)$ 大的数有 k-1 个$2k$，$(2k-1)$，…，$k+2$，故其逆序数为 k-1；

$(k+1)$ 前面比 $(k+1)$ 大的数有 k-1 个$2k$，$(2k-1)$，…，$k+2$，故其逆序数为 k-1；

k 前面比k 大的数有 k 个 $2k$，$(2k-1)$，…，$k+1$，故其逆序数为 k；

于是排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k$$

$$= \frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2} + k$$

$$= k^2$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列

当 k 为奇数时，排列为奇排列

计算（证明）行列式

1. 用定义计算（证明）

例 用行列式定义计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 设 D_5 中第 1, 2, 3, 4, 5 行的元素分别为

$$a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}, a_{5p_5}$$

则由 D_5 中第 1, 2, 3, 4, 5 行可能的非零元素分别得到

$$p_1 = 2,3 \qquad p_2 = 1,2,3,4,5$$

$$p_3 = 1,2,3,4,5 \qquad p_4 = 2,3 \qquad p_5 = 2,3$$

因为 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 在上述可能的取值中，一个 5 元排列也不能组成，故

$$D_5 = 0$$

2. 利用范德蒙行列式计算

利用范德蒙行列式计算行列式，应根据范德蒙行列式的特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后根据范德蒙行列式计算出结果。

例 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

解: D_n 中各行元素分别是同一个数的不同方幂，方幂的次数自左至右按递升次序排列，但不是从 0 到 $n-1$，而是从 1 递升至 n。若提出各行的公因子，则方幂的次数便是从 0 升到 $n-1$，于是得到:

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

上面等式右端行列式为 n 阶范德蒙行列式的转置, 由范德蒙行列式知

$$D_n = n!\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i - x_j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!\,1!.$$

3. 化三角形行列式计算

例1 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

例2 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & c & c & \cdots & c \\ c & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

三线型/
爪(伞)型

行列式特点：第一行、列及对角线元素除外，其余元素全为0

常用方法：行列式第一列加其它各列一定倍数，化为三角形行列式

4. 全一行 (列) 法

例　计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

5. 拆成行列式之和（积）计算

例 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & b & b & \cdots & b \\ c & x & a & \cdots & a \\ c & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

6. 递推法

例1 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

例2 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & & & & \\ 2 & 7 & 5 & & & \\ & 2 & 7 & 5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 7 & 5 \\ & & & & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

7. 加边法（升阶法/镶边法）

例 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

8. 用数学归纳法

例 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$=\cos n\alpha$$

小结

认清元素，分析结构

先看特殊，再想一般

熟用性质，必要展开