第一章　行列式

一 、全排列与对换

二 、行列式的定义与计算

三 、行列式的性质

四、行列式按行（列）展开

五、几个特殊类型的行列式

一、全排列与对换

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列, 叫做这 n 个元素的全排列(或排列).
n 个不同的元素的所有排列的种数有 $n!$.

2. 逆序数

在 n 个不同自然数的一个排列 $i_1\, i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中, 若数 $i_s > i_t$, 则称这两个数构成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数. $t\,(i_1 i_2 \cdots i_n)$.
逆序数为奇数的排列称为奇排列, 为偶数的排列称为偶排列.

n 个不同元素的所有排列中奇与偶排列各占一半, 即各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

3. 对换

在一个排列中，将任意两个元素的位置对调，其余元素的位置不变，这种处理叫做对换.

将相邻两个元素位置对调，叫做相邻对换.

一般的对换可以通过一系列（奇数次）的相邻对换来实现.

定理1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 奇排列变成标准排列所需对换的次数为奇数，偶排列为偶数.

二、行列式的定义与计算

1. 定义及其运算规律

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D \overset{\Delta}{=} |A| \overset{\Delta}{=} \det A$$

第Ⅰ种形式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

- n 阶行列式共有 $n!$ 项.

当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；

当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

- 每项（正负号除外）都被写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1, 2, …, n 的某个排列.

即，每项（正负号除外）都是不同行不同列 n 个元素的乘积.

2. 等价定义

n 阶行列式也可定义为 第Ⅱ种形式的定义

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

(行标) $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 某一个可能的排列，

$t(i_1i_2\cdots i_n)$为该排列的逆序数；

对 (列标) $1,2,\cdots,n$ 所有可能的排列求和.

或者

n阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

(列标) $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 某一个可能的排列，

$t(j_1j_2\cdots j_n)$为该排列的逆序数；

对 (行标) $1,2,\cdots,n$ 所有可能的排列求和.

3. 计算

- 定义（对角线法则）
- 行列式的性质
- 按行（列）展开法则
- 特殊行列式
- 递推的方法
- 数学归纳法
- ……

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积取正号;

虚线上的三个元素的乘积取负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三、行列式的性质

性质1: 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D^T = D$.

性质2: 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

推论: 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式为零.

性质3: 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数, 等于用该数乘此行列式.

推论: 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4: 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式为零.

性质5: 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和, 则该行列式等于两个行列式之和.

性质6: 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去, 行列式不变.

四、行列式按行(列)展开

定义 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去以后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

把 $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定理2 行列式等于它的任一行（列）的各元素与它们各自的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\left(\quad D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \quad \right)$$

推论 行列式任一行（列）的各元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

$$\left(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j \right)$$

综上所述，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

五、几个特殊的行列式

1. 对角与三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

2. 分块的对角与三角行列式

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}_1 & & & \\ & \hat{\boldsymbol{B}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\boldsymbol{B}}_n \end{vmatrix} = \left|\hat{\boldsymbol{B}}_1\right| \cdot \left|\hat{\boldsymbol{B}}_2\right| \cdots \left|\hat{\boldsymbol{B}}_n\right|$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}_1 & \boldsymbol{0} \\ * & \hat{\boldsymbol{B}}_2 \end{vmatrix} = \left|\hat{\boldsymbol{B}}_1\right| \cdot \left|\hat{\boldsymbol{B}}_2\right| \qquad \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}_1 & * \\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{B}}_2 \end{vmatrix} = \left|\hat{\boldsymbol{B}}_1\right| \cdot \left|\hat{\boldsymbol{B}}_2\right|$$

3. 范德蒙德行列式

$$
\begin{aligned}
&(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\\
&\qquad(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\qquad(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\\
&\qquad\qquad(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

n 阶范德蒙德行列式的特点：

1) 每一列，从第1行到第 n 行，依次是第2行相应元素的0次幂到 $(n\text{-}1)$ 次幂.（第一行全是1）

2) 总共 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个同类因子连乘.

第二章 矩阵及其运算

一、矩阵的运算（矩阵乘法）

二、矩阵的转置、方阵的行列式与伴随矩阵

三、逆矩阵

四、分块矩阵

五、克莱姆法则

六、其他

一、矩阵的运算

• 矩阵乘法

1. 定义

设$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定矩阵A与矩阵B的乘积

$C=AB=(c_{ij})$是$m\times n$矩阵，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

2. 矩阵乘法的运算规律

(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$

(2) 数乘和乘法的结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (λ 是数)

(3) 乘法对加法的分配律

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

(4) 单位阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

- 矩阵乘法不满足交换律.

3. 行分块矩阵与列分块矩阵的乘积

$m \times n$ 矩阵 A 有 m 行 n 列. 将第 i 行记作 $\alpha_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$.

将第 j 列记作 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

列分块矩阵

行分块矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n\\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n\end{pmatrix}$$

即，$c_{ij}=\alpha_i^T\beta_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$

4. 矩阵乘积行（列）向量的结构

$$\boxed{\begin{aligned} c_i &= b_{1i}a_1 + b_{2i}a_2 + \cdots + b_{li}a_l \\ &\qquad (i = 1, \cdots, n) \end{aligned}}$$

若 $C_{m\times n} = A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{array}\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则

$$(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

结论： 乘积 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，

矩阵B 为该线性表示的系数矩阵.

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

c_i^T ？

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_l^T \end{pmatrix}$$

结论：乘积 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，矩阵 A 为该线性表示的系数矩阵.

二、矩阵的转置、方阵的行列式与伴随矩阵

1. 矩阵的转置

定义： 把矩阵 A 的行列互换得到的新矩阵，叫做 A 的**转置矩阵**，记作 A^T .

对于 $m \times n$ 的矩阵 A ，其转置矩阵 A^T 是 $n \times m$ 的.

性质： (1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

2. 方阵的行列式

定义： 由 n 阶方阵A的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作$|A|$ 或 $\det A$.

性质： (1) $\left|A^T\right| = |A|$;

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$; $\quad \Rightarrow |AB| = |BA|$.

(A、B 为同阶方阵)

2. 方阵的伴随矩阵

定义： 方阵 A 的行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵，称为 **A 的伴随矩阵.** $A_{11}\,A_{12}$ $\quad A_{1n}$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$|A|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}

位于 A^* 第 j 行第 i 列.

三、逆矩阵

定义： 假定 A 为 n 阶方阵，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

$\boxed{AB = E \text{ 或 } BA = E}$

（E 是 n 阶单位矩阵），则称 A 是可逆的；

并且，把 B 称作 A 的逆矩阵（逆阵）.

将A 的逆矩阵记作 A^{-1}，即 $B = A^{-1}$.

基本结论:

- 方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0.$

  (可逆矩阵 $\Leftrightarrow$ 非奇异矩阵) ($\Leftrightarrow$ 满秩矩阵)

- 若方阵A可逆(即$|A| \neq 0$)，则

  （1） $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*}.$　　（2） $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$

基本性质:

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$

(2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

几个公式:

(1) $A^* = |A| A^{-1}$

(2) $AA^* = A^*A = |A| E$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*}$$

(3) 与A^*相关的公式

$|A^*| = |A|^{n-1}$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

$(A^*)^T = (A^T)^*$

$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

$(kA)^* = k^{n-1} A^*$

初步应用：

（1）对角阵的性质

- 若$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$，则：

  $A^{-1}=diag(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_m^{-1})$

  $A^n=diag(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\cdots,\lambda_m^n)$

- 若 $A=diag(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,

  $B=diag(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，则：

  $A\pm B=diag(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_m\pm b_m)$,

  $\lambda A=diag(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_m)$,

  $AB=diag(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_mb_m)$.

(2）矩阵多项式

定义 A为n阶矩阵. 设$\phi(x)$是关于x的m次多项式

$$\phi(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (a_m\neq 0)$$

则，$\phi(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 E \quad (a_m\neq 0)$

称作矩阵A的m次多项式.

性质 (1) 若$A=P\Lambda P^{-1}$, 则$\phi(A)=P\phi(\Lambda)P^{-1}$

(2) 若$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)$, 则

$$\phi(\Lambda)=diag(\phi(\lambda_1),\phi(\lambda_2),\cdots,\phi(\lambda_s))$$

四、分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的运算：加法、数乘、乘法，转置.

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

分块对角阵的性质：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

- $|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_s|$
- 若$|A_i|\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,s)$，则$|A|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

五、克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A|$ 不等于零，那么线性方程组**有唯一解**，

且其解可以表示成

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

- 方程的个数与未知数的个数相等；$|A| \neq 0$（非奇异/满秩/可逆）.
- 也适用于齐次方程组(唯一零解).

其中，A_j是把系数矩阵 A 中第 j 列的元素用方程组右端常数项代替后所得到的 n 阶矩阵.

六、其他

- 可交换矩阵
- 方阵的幂
- 纯量阵

两个阶方阵A、B，若$AB=BA$，
则称A与B是可交换的.

$$(AB)^k = A^k B^k$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = diag(\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)$$

$$(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A$$

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

2. 应用行初等变换求逆矩阵及解矩阵方程

3. 矩阵的秩

4. 线性方程组解的判定

5.求解线性方程组

1. 矩阵的初等变换与初等矩阵

1.1 矩阵的初等变换

- 矩阵的初等行变换和初等列变换统称矩阵的初等变换.

1. $r_i \leftrightarrow r_j$

   $\left(c_i \leftrightarrow c_j\right)$

2. $r_i \times k \qquad \left(k \neq 0\right)$

   $\left(c_i \times k\right)$

3. $r_i + kr_j$

   $\left(c_j + kc_i\right)$

如果矩阵A经有限次的初等变换变成矩阵B，则称矩阵A与B等价，记作$A \sim B$.

$A \overset{r}{\sim} B$

$A \overset{c}{\sim} B$

- 行阶梯形矩阵与行最简形矩阵

任何矩阵总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵或行最简形矩阵.

$$B_4=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad B_5=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行阶梯形矩阵的特点：

- ✓ 阶梯线下方全为 0；
- ✓ 每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的阶数；
- ✓ 阶梯线的竖线（每段竖线的长为一行）后面的第一个元素为每个非零行的第一个非零元.

行最简形矩阵的特点：

- ✓ 非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其它元素都为 0 .

1.2 初等矩阵

- 单位阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

1. $E(i,j)$

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \left(c_i \leftrightarrow c_j\right)$$

2. $E(i(k))$

$$r_i \times k \quad \left(c_i \times k\right)$$

3. $E(ij(k))$

$$r_i + kr_j \quad \left(c_j + kc_i\right)$$

$A_{m\times n}$

$$E_m(i,j)\cdot A, \qquad A\cdot E_n(i,j)$$

$$E_m(i(k))\cdot A, \qquad A\cdot E_n(i(k))$$

$$E_m(ij(k))\cdot A, \qquad A\cdot E_n(ij(k))$$

□ 初等矩阵的性质

性质1:

设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则：

对 A 施行一次行初等变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等方阵；

对 A 施行一次列初等变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等方阵。

性质2:

方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵

$P_1, P_2, \cdots, P_l$，使 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

基本结论

定理1　设 A 与 B 为 $m\times n$ 的矩阵，则

(1)　$A\overset{r}{\sim}B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P，使 $PA=B$;

(2)　$A\overset{c}{\sim}B$ 的充要条件是存在 n 阶可逆矩阵 Q，使 $AQ=B$;

(3)　$A\sim B$ 的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ=B$.

推论　方阵A可逆的充要条件是 $A\overset{r}{\sim}E$.

2. 应用行初等变换求逆矩阵及解矩阵方程

(1) 求P.

如果A经过一系列的行初等变换变为B (即 $A\overset{r}{\sim}B$),

则有可逆矩阵P，使$PA=B$.

$$(A, E) \overset{r}{\sim} (B, P)$$

(2) 求A^{-1}.

$$(A, E) \overset{r}{\sim} (E, \ *)$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}$$

(3) 求解矩阵方程$AX = B$.

$$(A,\ B) \overset{r}{\sim} (E,\ *)$$

$$\Downarrow$$

$$X$$

(4) 求解$Ax = b$.

$$(A,\ b) \overset{r}{\sim} (E,\ *)$$

$$\Downarrow$$

$$x$$

(5) 求解矩阵方程$XA = B$.

$$(A^T, B^T) \overset{r}{\sim} (E,\ *)$$

$$\Downarrow$$

$$X \Leftarrow X^T$$

3. 矩阵的秩

3.1 定义

设矩阵 A 中存在一个不等于零的 r 阶子式（记为 D），而所有的 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零， D 称为矩阵A的最高阶非零子式，阶数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

规定：零矩阵的秩等于零.

若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geq s$；

若矩阵 A 中所有 t 阶子式都等于零，则 $R(A) < t$.

3.2 应用行初等变换计算矩阵的秩

若可逆矩阵P和Q使$PAQ = B$，则 $R(A)= R(B)$.

定理2：若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

- 初等变换不改变矩阵的秩.
- 用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵，其非零行的行数就是矩阵的秩.

3.3 矩阵秩的性质

① 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.

② $R(A^T) = R(A)$.

③ 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

④ 若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.

⑤ $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A) \leq R(A, b) \leq R(A) + 1 .$$

⑥ $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$.

⑦ $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

⑧ 若 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \leq n$.

4. 线性方程组解的判定

4.1 n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

4.2 相关定理

向量方程形式：

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $Ax = b$
- $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$
- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$

定理3 n 元线性方程组 $Ax=b$

①无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

②有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

③有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

定理5 线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)$

定理4 n元齐次线性方程组 $Ax=0$ $R(A)=R(A,0)$

① 只有唯一解（零解）的充分必要条件是 $R(A)=n$;

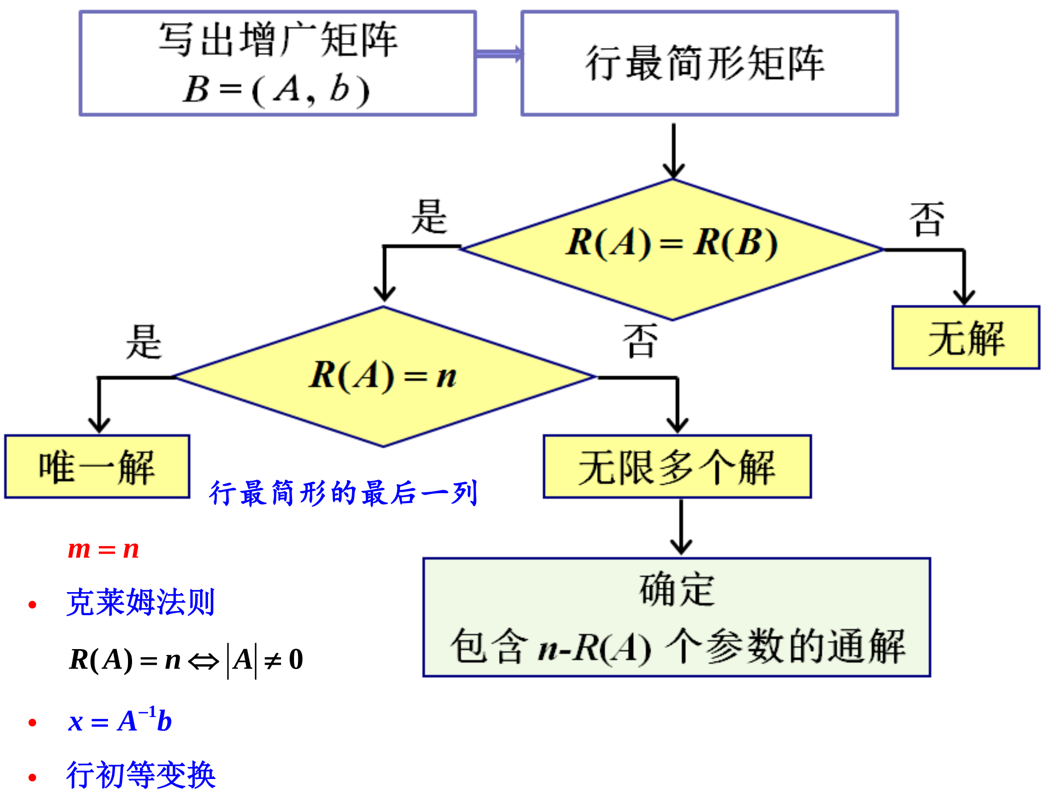
② 有无穷多解（非零解）的充分必要条件是 $R(A)<n$.

定理6 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

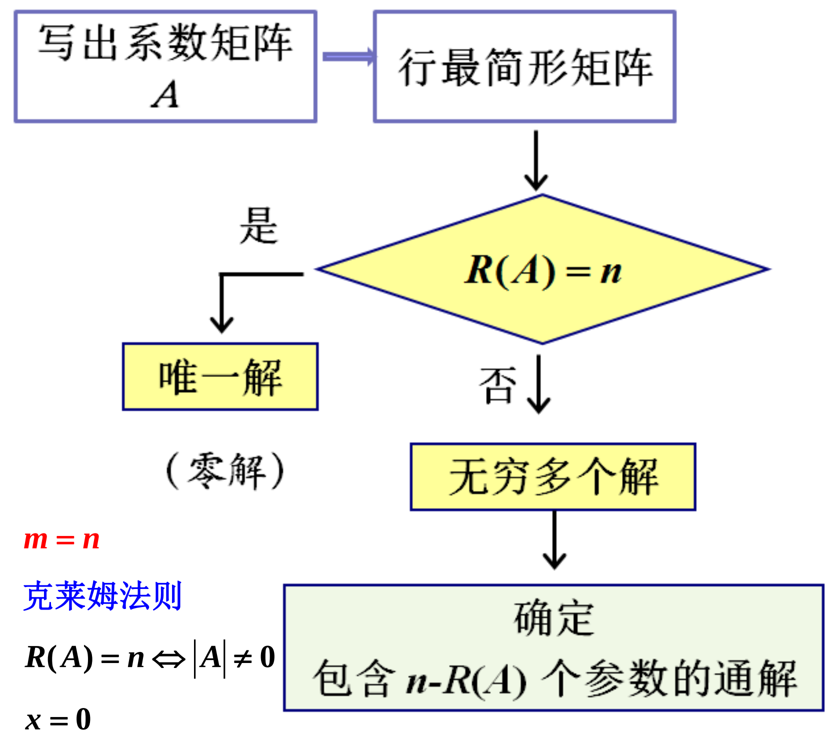
5. 求解线性方程组

无穷多解时，利用**线性方程组解的结构**中的结论？

求解非齐次线性方程组（$Ax=b$）的一般步骤



求解齐次线性方程组（$Ax=0$）的一般步骤



① 由行最简形矩阵写出同解方程组（I）；

② 选择自由未知量得同解方程组（II）- 非自由未知量由自由未知量表达;

③ 写出通解.

第四章 向量组的线性相关性

一、向量组的线性组合

二、向量组的线性相关性

三、向量组的秩

四、线性方程组的解的结构

一、向量组的线性组合

(1) 一组定义

定义2： 给定向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$，
对于任意一组实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$，
表达式 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m$
称为向量组 A 的一个线性组合.

$k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

定义： 给定向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 和向量 b，
如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$，使得

$$b = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_ma_m$$

即，向量 b 是向量组 A 的线性组合，
这时，称向量 b 能由向量组 A 线性表示.

定义3: 设向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$

若 B 组中的每一个向量都能由向量组 A 线性表示，

则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示.

定义　若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，

则称向量组 A 与向量组 B 等价.

(2) 一组定理

定理6

矩阵的秩 = 矩阵的列向量组的秩

= 矩阵的行向量组的秩

A： 列向量 ↔ 向量组A的各向量

B： 列向量 ↔ 向量组A的各向量

定理1

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$

定理2

向量组的秩

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$

定理2-推论

定理3

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A, B)$

二、向量组的线性相关性

(1)　基本定义

定义4： 给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$，

如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$$ （零向量）

则称向量组 A 是线性相关的；

否则，称向量组 A 是线性无关的.

当且仅当实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 全为零，

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$$ 才成立.

(2) 向量组线性相关性的判定

- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关

⟺ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_m a_m = 0$$

⟺ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

⟺ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .

⟺ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 m-1 个向量线性表示.

- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$，则必有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0 .$$

$\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

$\Leftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 m-1 个向量线性表示.

(3) 其他结论（定理5）

- 若向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关， 则向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

  其逆否命题也成立. 即，若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

  部分相关，整体相关；整体无关，部分无关

- m个n维向量组成的向量组，若维数 n 小于向量个数 m，向量组一定线性相关.

  特别地， $n+1$个 n 维向量一定线性相关.

- (3) 设向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关， 而向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

三、向量组的秩

定义5 设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 满足

① 向量组 A_0： $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有$r+1$个向量的话）都线性相关；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大线性无关向量组**，简称**最大无关组**.

最大无关组所含向量个数 r 称为**向量组 A 的秩**，记作 R_A .

- 向量组的最大无关组一般不是唯一的（甚至有无限多个）．向量个数.
- 向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

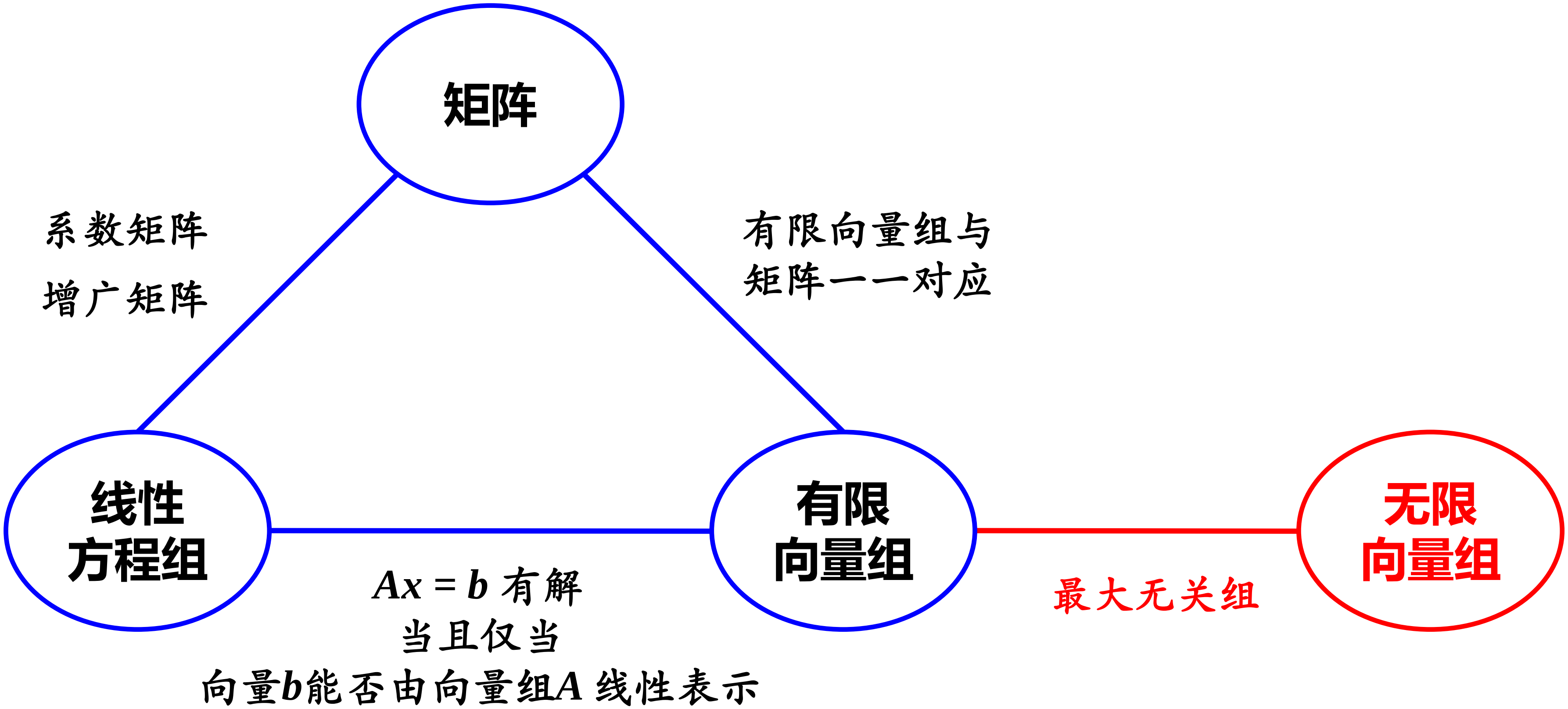
等价定义：

设 A为一个向量组，A的部分组 $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，满足：

（i） $A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

（ii）A的任意向量都能由 A_0线性表示.

那么称部分组 A_0 为向量组 A的一个**最大无关组.**


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与
矩阵一一对应
线性
方程组
有限
向量组
无限
向量组
$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量b能否由向量组A线性表示
最大无关组

四、线性方程组的解的结构

1、齐次线性方程组

(1) 解的性质

性质1： 若 $x=\xi_1$， $x=\xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解.

性质2： 若 $x=\xi$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，k 为实数，

则 $x=k\xi$ 也是 $Ax=0$ 的解.

推论： 若 $x=\xi_1, x=\xi_2, \cdots, x=\xi_t$ 都是齐次线性方程组 $Ax=0$

的解， 则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

定理7 设 $m\times n$ 矩阵A的秩 为 r，则 n 元齐次线性方程组

$Ax=0$ 的解集 S 的秩(基础解系向量个数) $R_S=n-r$.

(2) 齐次线性方程组的基础解系

定义 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$，如果满足

① ξ_1，ξ_2，…，ξ_r 线性无关；

②方程组中任意一个解都可表示为 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ 的线性组合.

那么, 称这组解向量是齐次线性方程组的一个基础解系.

- $Ax = 0$ 的基础解系是其解集的最大无关组.
- 用初等变换法求基础解系.

2、非齐次线性方程组

(1) 解的性质

性质3： 若 $x=\eta_1$， $x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

性质4： 若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

- 综合性质3 和性质4 可知：

  设 $x=\eta^*$ 是 $Ax=b$ 的一个解（特解）

  并设 $Ax=0$ 的通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\dots+c_{n-r}\xi_{n-r}$

  则， $Ax=b$ 的通解为： $\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2+\dots+c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$

第五章 相似矩阵及二次型

一、向量的内积、长度及正交性

二、矩阵的特征值与特征向量

三、相似矩阵与矩阵的对角化

四、对称矩阵的对角化

五、二次型及其标准形

六、正定二次型

一、向量的内积、长度及正交性

• 向量的正交性

1、相关概念与性质

定义： 当 $[x, y] = 0$，称向量 x 和 y **正交**.

若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交.

定义： 两两正交的非零向量组成的向量组，称为**正交向量组**.

定理1 正交向量组是线性无关的.

定义3 n 维向量 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一组向量，若该向量组满足：为向量空间 V 的一个基；两两正交，且都为单位向量，则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是 V 的一个**标准正交基**.

- **向量在标准正交基中的坐标的计算**

设$e_1, e_2, \dots, e_r$是向量空间V中的一个标准正交基，

V中任意一个向量a可以由该基唯一地线性表示：

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_r e_r$$

向量 a 在标准正交基$e_1, e_2, \dots, e_r$中的坐标$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$为：

$$\lambda_i = [e_i, a] = [a, e_i] = e_i^T a \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$a = [a, e_1] e_1 + [a, e_2] e_2 + \dots + [a, e_i] e_r$$

定义4 如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^TA=E$ (即 $A^{-1}=A^T$)，则称矩阵 A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列/行向量都是单位向量，且两两正交. (标准正交向量组)

从而，n 阶正交阵 A 的列/行向量组构成 R^n 的标准正交基.

- $A^TA=E$ 与$AA^T=E$ 等价.

- 若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且$|A|=1$ 或 - 1.

若 A 和B是正交阵，则 AB 也是正交阵.

定义5 若 P 是正交阵，则线性变换 $y=Px$ 称为**正交变换**.

- 经过正交变换，向量的长度保持不变.

2、线性无关向量组标准正交化的方法

已知 $a_1,\ldots,a_r$是向量空间V的一个基，

求V的一个标准正交基$e_1,\ldots,e_r$.

第一步：施密特（Schimidt）正交化过程

得到与$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 等价的、两两正交的向量组$b_1, b_2, \ldots, b_r$.

第二步：单位化

将$b_1, b_2, \ldots, b_r$ 单位化，得到 $e_1, e_2, \ldots, e_r$.

二、矩阵的特征值与特征向量

1、基本概念与术语

定义6 设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 满足

$$Ax = \lambda x$$

那么，数 λ 称为矩阵 A 的**特征值**，

非零向量 x 称为 A的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)x = 0$$

对应于 λ的特征向量 x是 $(A-\lambda E)\ x = 0$ 的非零解.

系数行列式 $|A-\lambda E| = 0.$

特征方程 ---- 其**解**为方阵A的特征值

$|A-\lambda E|=0$ **以 λ 为未知数的一元 n 次方程**

特征多项式 ---- 其**根**为方阵A的特征值

$f(\lambda) = |A-\lambda E|$ **关于 λ 的 n 次多项式**

在复数范围内，有n 个特征值.

2、特征值与特征向量的计算

若 λ是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组 $(A - \lambda E)x = 0$ 的基础解系，实则是对应于 λ的全部特征向量的一个最大无关组

- Step1　计算A的特征多项式 $|A - \lambda E|$.
- Step2　令 $|A - \lambda E| = 0$ 得到A的特征值.
- Step3　对于每个不同的特征值λ，通过求解齐次线性方程组 $(A - \lambda E)x = 0$ 得到对应于λ的特征向量.

求 $(A - \lambda E)x = 0$ 的一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$，其所有非零的线性组合 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ ($k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$不全为0) 即为 A 的对应于λ的全部特征向量.　(这里，假定 $R(A - \lambda E) = r$)

3、特征值与特征向量的若干性质

(1) 若 p 是 A的对应于特征值 λ 的特征向量，则

- ✓ λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- ✓ 若 A 可逆，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，对应的特征向量也是 p .

(2) 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

- ✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$
- ✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

- 矩阵A有特征值为0当且仅当$|A| = 0$.

  $\Leftrightarrow$ 矩阵A可逆当且仅当A没有0特征值.

(3) 若λ为方阵A的特征值, 则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值, 且特征向量相同.

即，若x为A的对应于λ的特征向量，则$\varphi(A)x=\varphi(\lambda)x$.

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$$

若λ为可逆方阵A的特征值,则$\phi(\lambda)$是$\phi(A)$的特征值, 且特征向量相同.

即, 若x为A的对应于λ的特征向量，则$\phi(A)x=\phi(\lambda)x$.

$$\phi(x)=a_{-k}x^{-k}+\cdots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$$

(4) 定理2

设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值，$p_1, p_2, \ldots, p_m$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

(5) $x_1, x_2, \cdots, x_m$是方阵A的对应于λ的特征向量,则其非零线性组合

$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m \quad (k_1, k_2, \cdots, k_m$不全为零)

也是A的对应于λ的特征向量.

三、相似矩阵与矩阵的对角化

- **矩阵的对角化**

定义： n 阶矩阵 A (方阵)与对角阵相似，

则称矩阵 A 可以**对角化**.

> **矩阵可对角化的充要条件**

定理4 n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的**充分必要条件**是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论： 若 n 阶 A 有 n 个不同特征值，

则 A 和对角阵相似 (对角化).

典型问题1：

对于方阵A，求可逆矩阵P和对角矩阵Λ，使$P^{-1}AP = \Lambda$.

四、对称矩阵的对角化

1、对称矩阵的若干性质

性质1 对称阵的特征值都是实数．

性质2 设 λ_1 和 λ_2 是对称阵 A 的特征值， p_1, p_2 是分别对应它们的特征向量. 若$\lambda_1 \neq \lambda_2$， 则 p_1与p_2 正交.

定理5 设A为n阶对称矩阵，则必有正交矩阵P,

使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$.

其中, Λ 是以A的n个特征值为对角元的对角阵.

推论：设A为 n 阶对称阵，λ 是A的特征方程的 k 重根，则

(1) 矩阵 $A-\lambda E$ 的秩等于 $n-k$,

(2) 恰有 k 个线性无关的特征向量与特征值 λ 对应.

典型问题2：

对于方阵A,求正交矩阵P和对角矩阵Λ, 使$P^{-1}AP=\Lambda$.

(S1) 求出A全部互不相等的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 记它们的重数依次为 $k_1,\cdots,k_s$. $(k_1+\cdots+k_s=n)$

(S2) 对每个k_i重特征值λ_i, 求方程$(A-\lambda_i E)x=0$的基础解系, 得k_i个线性无关的特征向量.

再把它们正交化、单位化，得k_i个两两正交的单位特征向量.

(因$k_1+\cdots+k_s=n$, 故总共可得n个两两正交的单位特征向量)

(S3) 以这n个单位特征向量为列向量构造正交矩阵P, 便有 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$.

注意：Λ中对角元的排列次序应与P中列向量的排列次序相对应.

五、二次型及其标准形

1、二次型与对称矩阵

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$(a_{ij}\in R)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x^TAx.$$

其中，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

二次型与对称矩阵之间一一对应.

2、对称矩阵的合同对角化

对于二次型f，要讨论的**主要问题**是：

如何寻找**可逆的**线性变换，使得二次型 f 化为标准形.

对于对称阵 A，如何寻找可逆矩阵 C，使 C^TAC 为对角阵.

该问题称作**把对称阵A合同对角化**.

定理6 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$，总存在**正交变换** $x=Py$，使f化为**标准形**

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是f的矩阵 A 的特征值.

推论 任给二次型 $f(x)=x^TAx \quad (A=A^T)$，总存在**可逆变换** $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为**规范形**.

典型问题3：

- 寻找正交变换，将二次型化为标准形.
- 寻找可逆变换，由标准形化为规范形；
  寻找可逆变换，由二次型化为规范形.

典型问题2：

对于方阵$\boldsymbol{A}$,求正交矩阵$\boldsymbol{P}$和对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$, 使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

六、正定二次型

1、定义

定义10

设有二次型 $f(x)=x^TAx$, 如果对任何$x\neq 0$,都有 $f\left(x\right)>0$,

则称f为正定二次型, 并称对称矩阵A是正定的.

如果对任何$x\neq 0$,都有 $f(x)<0$, 则称 f为负定二次型,

并称对称矩阵A是负定的.

2、正定二次型的判别

定理8

n元二次型 $f(x)=x^TAx$为正定的充要条件是：

它的标准形的n个系数全为正，

即，它的规范形的n个系数全为 1，

亦即，它的正惯性指数等于 n.

推论 **对称矩阵 A 为正定的充要条件是：**

A 的特征值全为正.

定理9 (赫尔维茨定理) 对称矩阵 A 为正定的充要条件是：A 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

A为负定的充要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0,\quad (r = 1, 2, \cdots, n).$$