第5章 刚体的转动

§5-1 刚体转动的描述

§5-2 转动定律

§5-3 转动惯量的计算

§5-4 转动定律的应用

§5-5 角动量守恒

§5-6 转动中的功和能

§5-1　刚体转动的描述

刚体：任何情况下大小和形状都不变的物体，是固体的理想化模型，也是一种常用的力学模型。

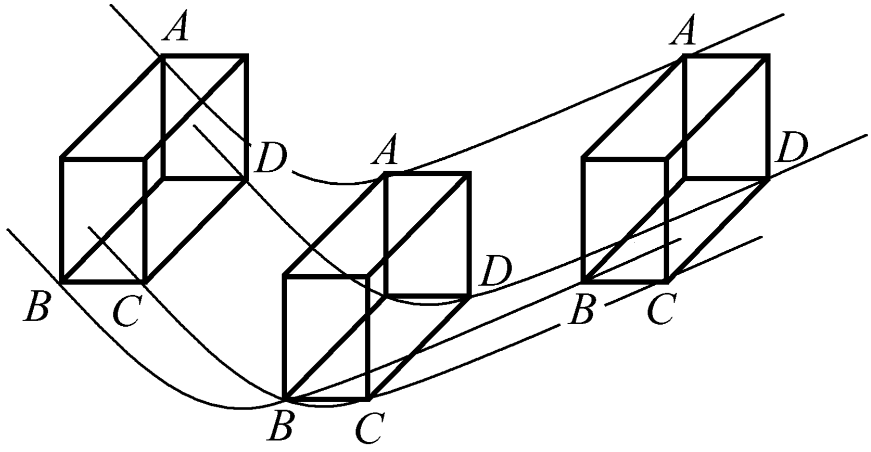
刚体有形状和大小，可以看成由许多质点构成的质点系。

刚体质点系特点：外力作用下，各质元之间的相对位置保持不变。

一、平动和转动： 刚体运动的最基本的形式。

平动：在刚体运动过程中，如果刚体上的任意一条直线始终保持平行，这种运动就称为平动。可用质点运动讨论。

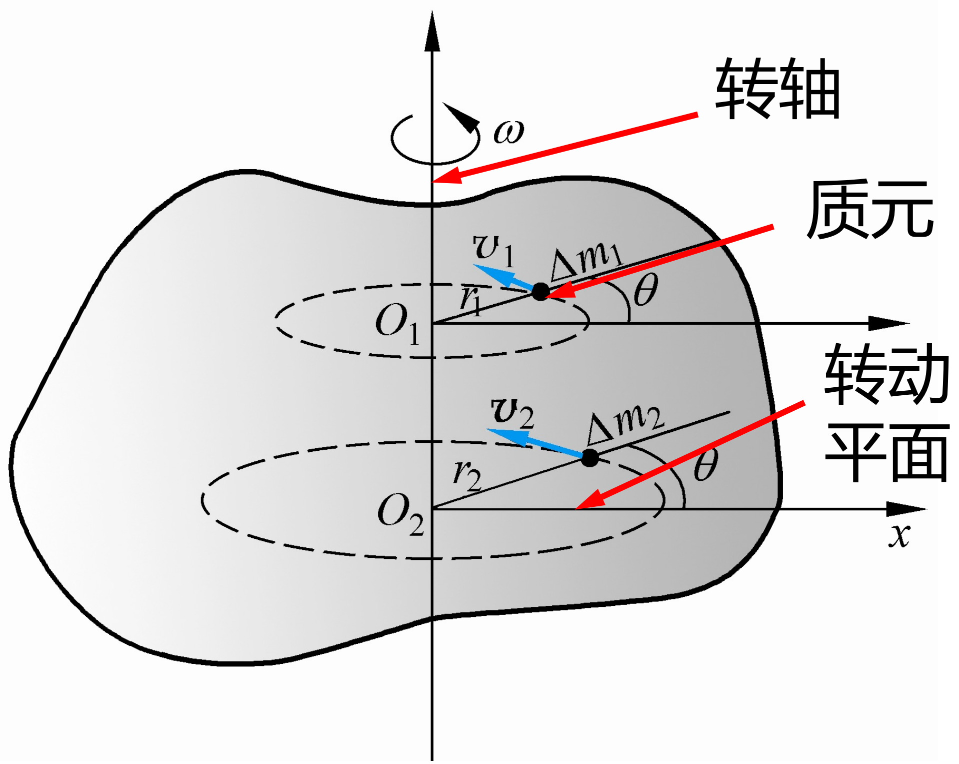
刚体平动时可用一点的运动来代表，常用质心运动代表整个刚体的平动。



转动：在刚体运动过程中，如果刚体上所有的点都绕同一条直线（转轴）作圆周运动，那么这种运动就称为转动。

定轴转动：刚体转动中，转轴固定不动。

二、刚体的定轴转动 (Fixed-axis rotation)

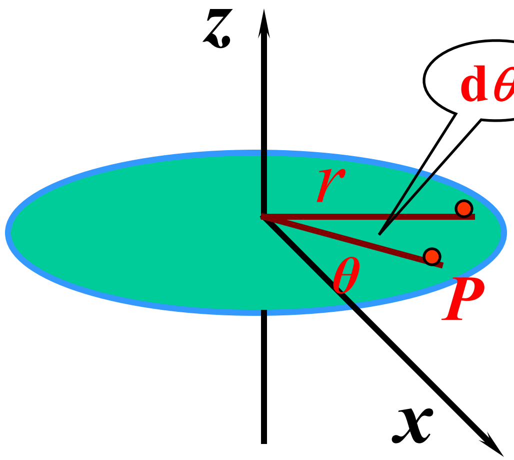


- ✓ **定轴转动**：刚体转动中，转轴固定不动。
- ✓ **转动平面**：过刚体上任意一点并垂直于转轴的平面。

刚体**定轴转动**特点：所有的点都具有相同的角速度$\vec{\omega}$和角加速度$\vec{\alpha}$，在相同时间内有相等的角位移$\Delta\theta$。但位移$\Delta\vec{r}$ 、速度$\vec{v}$ 和加速度$\vec{a}$却不相等。

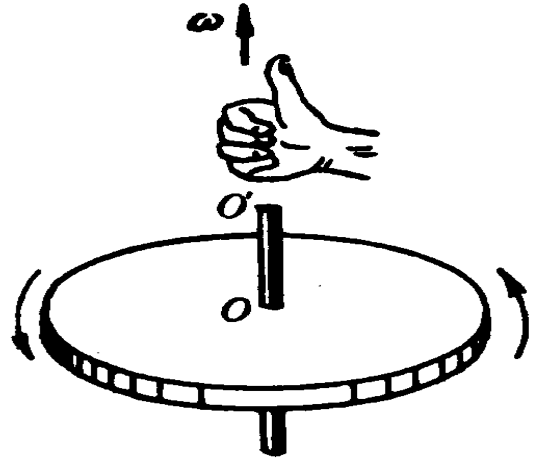
一般情况下，**角速度$\vec{\omega}$**和**角加速度$\vec{\alpha}$**是矢量，但在定轴转动中它们的方向沿着转轴，可以用带正负号的标量来表示。

角速度 $$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\quad(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$$

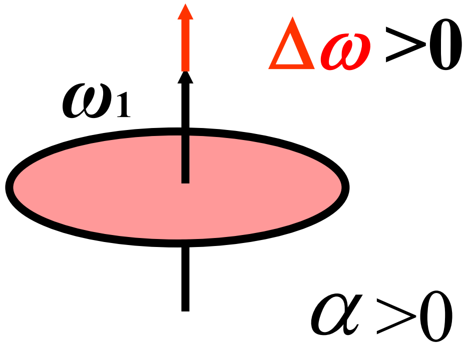


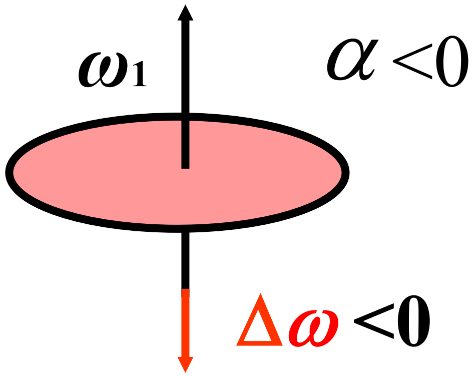
角速度的方向：沿轴的方向，由右手定则确定。

角加速度 $$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



单位：$\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$

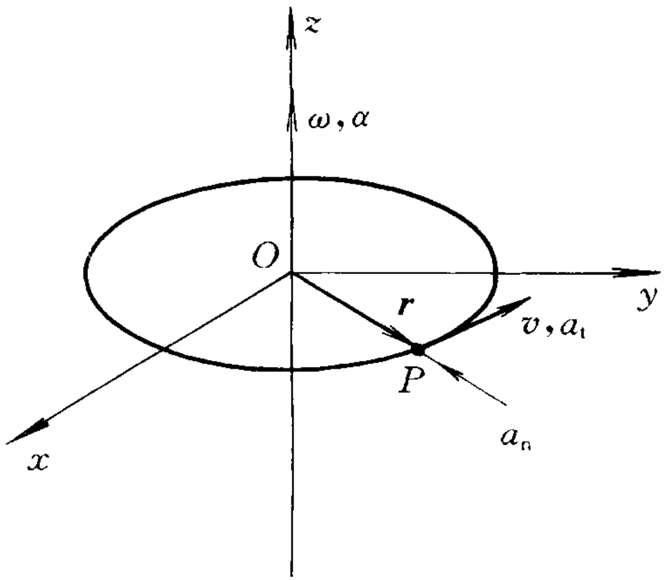




刚体运动学中角量和线量的关系

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$v = r\omega \qquad a_{\mathrm{t}} = r\alpha \qquad a_{\mathrm{n}} = r\omega^2$$



例1 设圆柱型电机转子由静止经300 s后达到 18000 r/min，已知转子的角加速度α与时间成正比，求转子在这段时间内转过的圈数。

解 因角加速度α随时间而增大，设 $\alpha = ct$

由定义得 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = ct \qquad \mathrm{d}\omega = ct\mathrm{d}t$

对上式两边积分 $\int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega = c\int_0^t t\mathrm{d}t \qquad \omega = \dfrac{1}{2}ct^2$

由条件知 $t = 300\,\mathrm{s}$，$\omega = 18000 \times \dfrac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 600\pi\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

所以 $c = \dfrac{2\omega}{t^2} = \dfrac{2 \times 600\pi}{300^2}\,\mathrm{rad \cdot s^{-3}} = \dfrac{\pi}{75}\,\mathrm{rad \cdot s^{-3}}$

由角速度定义 $$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi t^2}{75}\,\mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

得到 $$\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{150}\int_0^{t}t^2\,\mathrm{d}t \qquad \theta=\frac{\pi t^3}{150}\,\mathrm{rad\cdot s^{3}}$$

转子转数 $$\boldsymbol{N}=\frac{\theta}{2\boldsymbol{\pi}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{2\boldsymbol{\pi}\times 450}(300)^3=3\times 10^4$$

例2 一飞轮的半径为0.2m，转速为150r/min，经30s 匀减速后停止。求：（1）角加速度和飞轮转的圈数,（2）t=6s 时的角速度，(3) t=6s 时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度、法向加速度。

解 （1） $\because\ \omega_0=\dfrac{2\pi\times150}{60}=5\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{0-5}{30}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}=-\frac{\pi}{6}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

飞轮在30s内转过的角度为: $\theta=\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}=\dfrac{0-(5\pi)^2}{2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=75\pi\ (\mathrm{rad})$

飞轮在30s内转过的圈数为: $N=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{75\pi}{2\pi}37.5$

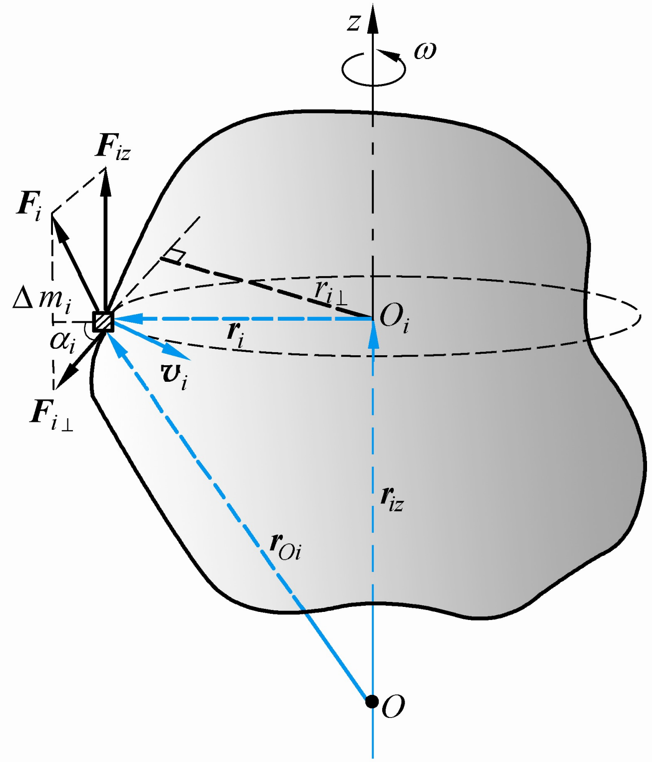
(2) ***t*=6s** 时的角速度 $\omega = \omega_0 + \alpha t = 4\pi \text{ rad/s}$

(3) 边缘线速度 $v = r\omega = 2.5\text{m/s}$

切向加速度 $a_{\mathrm{t}} = r\alpha = -0.105\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

法向加速度 $a_{\mathrm{n}} = v^2 / r = r\omega^2 = 31.6\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

§5-2　转动定律



1. 定轴转动刚体的转动定律的推导：

刚体质点系的角动量定理：　$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

沿定轴（ Z轴 ）的角动量定理分量式：　$M_Z = \dfrac{dL_Z}{dt}$

$\vec{F}_i$：质元Δm_i所受的外力，分解为垂直和平行于转轴的2个分量$\vec{F}_{i\perp}$和$\vec{F}_{iZ}$

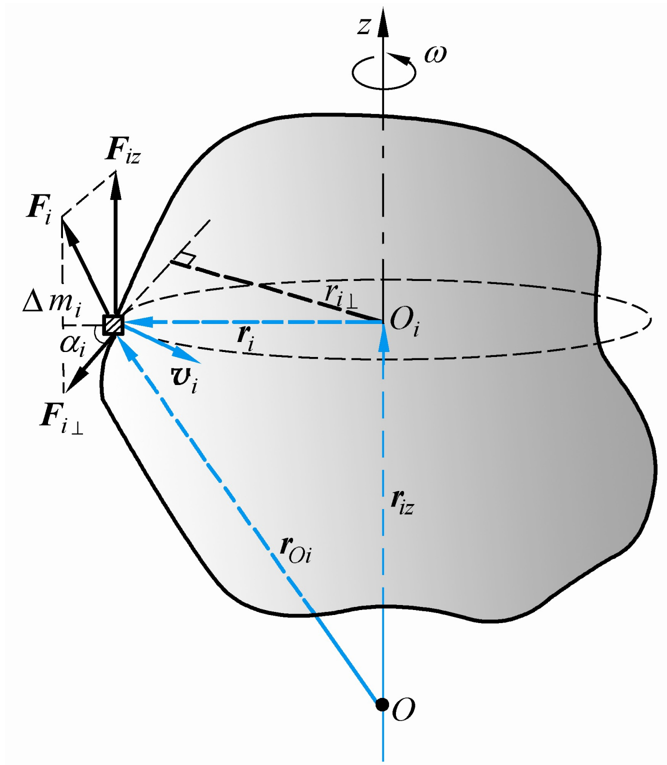
质元Δm_i对轴上一点O、转轴Z ，力矩为：

$$\vec{M}_i = \vec{r}_{Oi}\times\vec{F}_i = \vec{r}_{Oi}\times\vec{F}_{i\perp} + \boxed{\vec{r}_{Oi}\times\vec{F}_{iZ}} \perp Z$$

$$\because \vec{r}_{Oi} = \vec{r}_i + \vec{r}_{iZ} \qquad \therefore \vec{r}_{Oi}\times\vec{F}_{i\perp} = \underset{//Z}{\boxed{\vec{r}_i\times\vec{F}_{i\perp}}} + \boxed{\vec{r}_{iZ}\times\vec{F}_{i\perp}} \perp Z$$

$$\therefore M_{iZ} = \left|\vec{r}_i\times\vec{F}_{i\perp}\right| = r_iF_{i\perp}\sin\alpha_i$$

质元Δm_i对转轴Z 的力矩：$\boldsymbol{M}_{iZ} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{F}_{i\perp}\sin\alpha_i$



对刚体质点系积分： $\boldsymbol{M}_Z = \sum \boldsymbol{M}_{iZ} = \sum \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{F}_{i\perp}\sin\alpha_i$

再有质元Δm_i 对O点、 Z轴的角动量$\vec{L}_i$ 、 L_{iZ} ：

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{Oi}\times\Delta mi\vec{v}_i = \Delta mi\vec{r}_i\times\vec{v}_i \boxed{+ \Delta mi\vec{r}_{iZ}\times\vec{v}_i} \perp Z$$

$$L_{iZ} = |\Delta mi\vec{r}_i\times\vec{v}_i| = \Delta mi r_i v_i = \Delta mi r_i^2\omega$$

刚体对轴的转动惯量J_Z

对刚体质点系积分：$L_Z = \sum L_{iZ} = \sum \Delta mi r_i^2\omega = \boxed{\left(\sum \Delta mi r_i^2\right)}\omega$

刚体对转轴Z 的力矩： $M_Z=\sum M_{iZ}=\sum r_i F_{i\perp}\sin\alpha_i$

刚体对转轴Z 的角动量：$L_Z=\left(\sum \Delta m i r_i^2\right)\omega=J_Z\omega$

刚体对转轴 Z 的**转动惯量**：$J_Z=\sum \Delta m i r_i^2$

若刚体质量连续分布, J_Z可用积分形式： $J_Z=\int r^2 dm$

与转动惯量有关的因素：刚体的质量大小和分布、转轴的位置。

由刚体（质点系）沿Z轴的角动量定理：

$$M_Z=\frac{dL_Z}{dt}=\frac{dJ_Z\omega}{dt}=J_Z\frac{d\omega}{dt}=J_Z\alpha$$

$$\boxed{M_Z = J_Z\alpha}$$

或在约定固定轴为Z轴的情况下，略去下标写成： $\boxed{M = J\alpha}$

刚体的定轴转动定律：刚体所受的对于某一固定转轴的合外力矩等于刚体对此转轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积。

联想牛二： $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ 刚体转动惯量J与质点的惯性质量m相对应。

刚体转动惯量J表示刚体在转动过程中表现出的惯性。

转动定理和牛顿第二定律在数学形式上是相似的，合外力矩与合外力相对应，转动惯量与质量相对应，角加速度与加速度相对应。

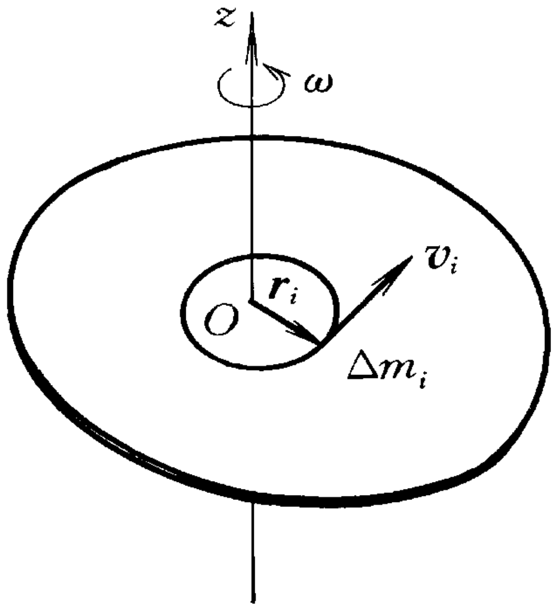
2. 质心参考系的**转动定律**：

***由质心系的角动量定理： $M_C = \dfrac{dL_C}{dt}$

可导出相对于质心的转动定律： $\boxed{M_C = J_C\alpha}$

J_C是刚体对通过质心的轴的转动惯量，M_C是刚体所受外力对此轴的合外力矩， α是刚体在M_C的作用下绕此轴的角加速度。

§5-3 转动惯量的计算



一、转动惯量的定义

$$J = J_Z = \sum \Delta m r_i^2$$

$$J = J_Z = \int r^2 dm$$

r_i、r：质元Δm、dm到转轴的垂直距离。

有关因素：刚体的质量大小和分布（刚体的形状）、转轴的位置。

- ✓ 形状、大小相同的均匀刚体，总质量越大，J越大。
- ✓ 总质量相同的刚体，质量分布距离轴越远，J越大。
- ✓ 同一刚体，转轴不同，质量对轴的分布就不同，因而J不同。

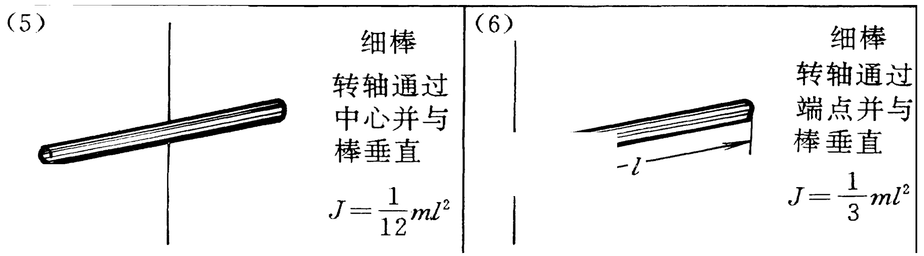
1D、2D、3D物体转动惯量的求法：

$$\begin{cases} J=\int r^2\,\mathrm{d}m=\int r^2\lambda\,\mathrm{d}l & \lambda:\text{线密度} \\ J=\int r^2\,\mathrm{d}m=\int r^2\sigma\,\mathrm{d}S & S:\text{面密度} \\ J=\int r^2\,\mathrm{d}m=\int r^2\rho\,\mathrm{d}V & \rho:\text{体密度} \end{cases}$$

SI制中，J的单位为$\mathrm{kg\cdot m^2}$

只有形状比较简单而密度又有规则地分布的物体才能用数学方法求出它的转动惯量。对形状复杂而密度又不均匀的物体，求转动惯量的最好办法是用实验方法测定。

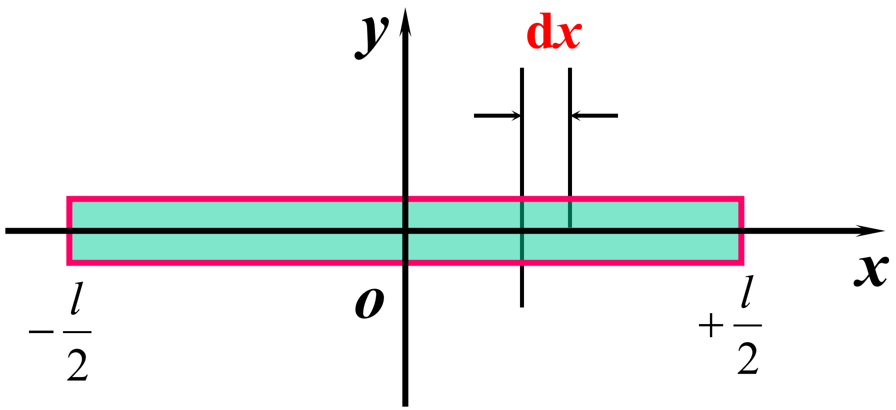
1. 转动惯量的计算



（1）均匀细棒（对中点和端点轴的转动惯量）

将棒的中点取为坐标原点, 建立坐标系Oxy,取y 轴为转轴。在距离转轴为x 处取棒元dx, 其质量为

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$



$$\mathrm{d}J = x^2\mathrm{d}m = x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$J=\int_{-l/2}^{+l/2} x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{m}{l}x^3\Big|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{1}{12}ml^2$$