高数(一)　2015 级

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$______.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\le 0\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，则 $a=$______.

3. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$______.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right]=$______.

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=$______.

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于2　(B) 等于0

(C) 为∞　(D) 不存在但不为∞

7. 设 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$

(A) 4　(B) 5　(C) $\dfrac{5}{2}$　(D) 2

8. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则 c 的值为

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 0

9. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$

(A) 2π　(B) π　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

10. 已知微分方程 $y''+4y=x\cos x$，则其通解为

(A) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

(B) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

(C) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x$

(D) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

三、计算题（共 7 小题，共 60 分）

11. (8分) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

12. (8分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判定它是否为极值点.

13. (8分) 设可微函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^x tf(x-t)\,dt$，求 $f(x)$.

14. (8分) 证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，并计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,dx$

15. (8分) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$，求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

16. (10分)

(1) 叙述并证明牛顿-莱布尼兹公式；

(2) 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

17. (10分) 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求此最大值.

高数(一)

一、填空题（共5小题，每题4分，共20分）

1.

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=$______.

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin x+x\cos x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\cos x+\cos x-x\sin x+\cos x}=\dfrac{4}{3}$

2.

设$f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\le 0\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$ 在$x=0$可导；则$a=$_____.

答案：2

解　首先$f(x)$在$x=0$处连续，即$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$;

其次　$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+2x}{x}=2$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a$,

故$a=2$.

3.

$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=$______.

解:$\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt \xlongequal{x-t=u} -\int_x^0 \sin u^2\,du=\int_0^x \sin u^2\,du$,

$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt=\sin x^2$.

4.

极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right]=$______.

极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$

______.

解：由于$\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi$,而

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)\pi}\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\dfrac{2}{\pi}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\dfrac{2}{\pi}$.

所以所求极限是$\dfrac{2}{\pi}$

5. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=$______.

解：因为　$(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$,

而　　$\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)\le\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)=0$

即　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$　　故$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$

三、选择题（共5小题，每题4分，共20分）

6.

当$x\to 1$时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A) 等于2　(B) 等于0　　　D

(C) 为∞　　(D) 不存在但不为∞

解　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$　$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0$

所以应选(D).

7.

设$x\to 0$时，$e^{x\cos x^2}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则$n=$

(A) 4　　(B) 5　　(C) $\dfrac{5}{2}$　　(D) 2　　B

解：因为$e^{x(\cos x^2)}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$，当$x\to 0$时，

$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x(-\dfrac{x^4}{2})$

所以$n=5$

8.

已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e, \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则$c$的值为

(A)$\frac{1}{3}$　(B)$-\frac{1}{2}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)0

答案：C

解：由条件易见$c\neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$

由拉格朗日定理，有$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\cdot 1$，其中$\xi$介于$x-1$与$x$之间，那么

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty} f'(\xi)=e$

于是$e^{2c}=e$，故$c=\frac{1}{2}$

9.

已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$时，

α是Δx的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则$y(1)=$

(A)2π　(B)π　(C)$e^{\frac{\pi}{4}}$　(D)$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

解：由$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}$，得$f'(x)=\frac{y}{1+x^2}$，即$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$

分离变量得$\frac{dy}{y}=\frac{1}{1+x^2}dx$，积分并整理得$y=Ce^{\arctan x}$

把$y(0)=\pi$代入上式得$C=\pi$，则$y=\pi e^{\arctan x}$，从而$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

故应选（D）

10.

已知微分方程$y''+4y=x\cos x$，则其通解为

(A) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

(B) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

(C) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x$　　A

(D) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

解：对应的齐次方程为$y''+4y=0$，特征方程为　$r^2+4=0$

解得　$r=\pm 2i$

齐次方程的通解为　$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\lambda+i\beta=i$不是特征方程根，$P_1(x)=x$，故设

$y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$

计算$(y^*)',(y^*)''$代入原方程，得

$-2a\sin x-(ax-b)\cos x+2c\cos x-cx\sin x-d\sin x+4(ax+b)\cos x+4(cx+d)\sin x=x\cos x$

比较同类项系数得：$a=\frac{1}{3},b=0,c=0,d=\frac{2}{9}$

所以　$y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

故其通解为$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

三、计算题（共7小题，共60分）

11.(8分)

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$所确定，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(t+1)(3t+2)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$

12. (8分)

设函数$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，试求$y=y(x)$的驻点，并判定它是否为极值点

解：对原方程两边关于x求导可得

$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$　(*)

令$y'=0$，得$y=x$，将此代入原方程，有$2x^3-x^2-1=0$，从而得驻点$x=1$

(*) 式两边求导得

$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0$

因此，$y''|_{(1,1)}=\frac{1}{2}>0$.故驻点（1，1）是$y=y(x)$的极小值点

13. (8分)

设可微函数$f(x)$满足：$\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^x tf(x-t)dt$，求$f(x)$.

解 令$x-t=u$，则

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u,$$

故原方程化为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$

两端对x求导 $f(x)=x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，再次求导 $f'(x)=1+f(x)$.

解此方程得 $f(x)=Ce^x-1$. 因为$f(0)=0$，所以$C=1$，故$f(x)=e^x-1$.

14. (8 分)

说明$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，并计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

证:(1)令$x=\frac{\pi}{4}-t$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\sin(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

(2)原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right]\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ln2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(x+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\pi\ln2$

15.(8 分)

已知函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有连续导数，且

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$, 求$f(0)$及$f'(0)$.

解：当$x\to0$时,应用麦克劳林公式,有

$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),\sin x=x+o(x^2)$

代入得 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+o(x^2)+f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$

所以$f(0)=-1,f'(0)=2$

16. (10 分)

(1)叙述并证明牛顿-莱布尼兹公式；

(2)计算定积分$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\,\mathrm{d}x$.

解：(1)牛顿-莱布尼茨公式 若$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，

而且$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

(2)$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot|\cos x|\mathrm{d}x$

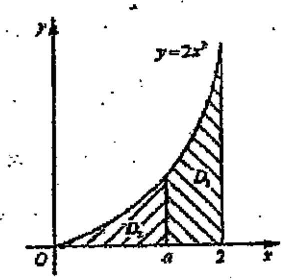
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}$

17. (10 分)

设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a$，$x=2$及$y=0$所围成的平面区域；D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$y=0$，$x=a$所围成的平面区域，其中$0<a<2$.

(1)试求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1；D_2绕y轴旋转而成的旋转体体积V_2；

(2)问当a为何值时，V_1+V_2取得最大值？并求此最大值.



解:(1)如图所示

$V_1=\pi\int_0^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$

$V_2=\pi a^2\cdot2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4$

(2) 设$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$由

$V'=4\pi a^3(1-a)=0$

得区间$(0,2)$内的唯一驻点$a=1$

当$0<a<1$时，$V'>0$；当$a>1$时，$V'<0$

因此$a=1$是极大值点即最大值点.

此时，V_1+V_2取得最大值等于$\frac{129}{5}\pi$