复习

自然坐标系

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}}$$

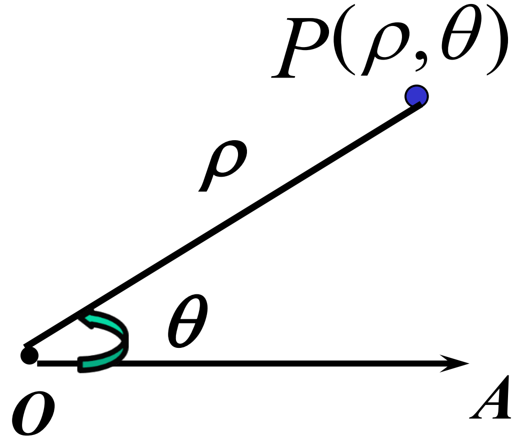
$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}}$$

极坐标系

$$\boxed{\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t)}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$



✓ 径向速度$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$ ； 横向速度$v_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$

$$\boxed{\vec{v} = v_\rho\vec{e}_\rho + v_\theta\vec{e}_\theta}$$

速度大小 $v = \sqrt{v_\rho^{\ 2} + v_\theta^{\ 2}} = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t})^2 + (\rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2}$

✓ 质点加速度

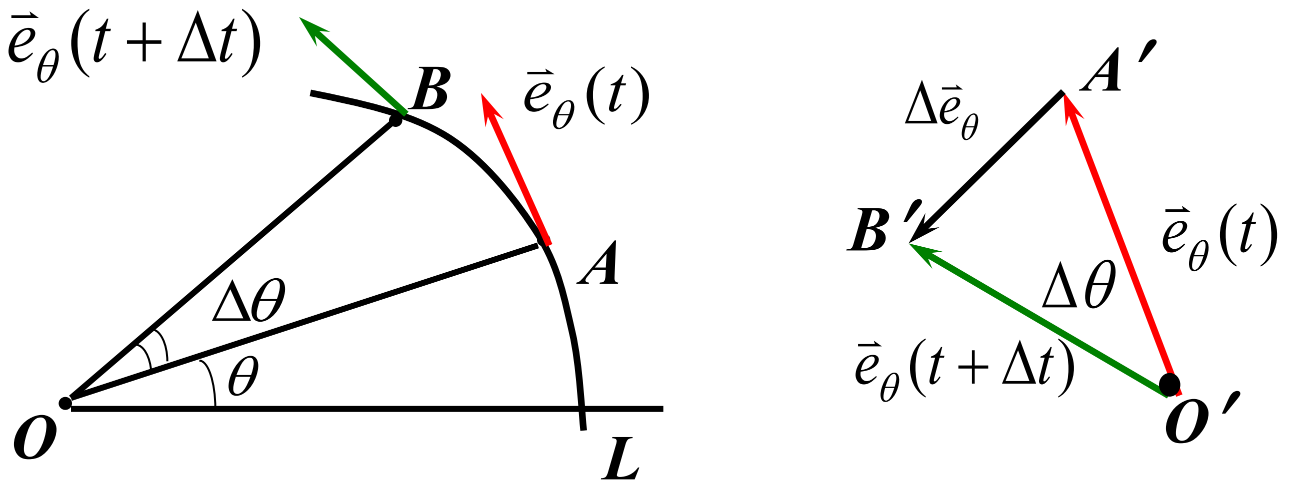
$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

式中$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$是单位矢量$\vec{e}_\theta$随时间的变化率。



等腰$\Delta O'A'B'$,当$\Delta t\to 0$时, $\Delta\vec{e}_\theta$ 趋于与$\vec{e}_\theta$ 垂直, 即

指向 $-\vec{e}_\rho$的方向, 大小为: $|\Delta\vec{e}_\theta| = 1\cdot\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\boldsymbol{\theta}$

于是有

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}(-\vec{e}_\rho) = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho$$

将$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$和$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho$ 代入

$$\vec{a}=\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta+\rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta-\rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho$$

$$=\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_\rho+\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a}=a_\rho\vec{e}_\rho+a_\theta\vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{a_\rho=\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad a_\theta=\rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$$

分别称为径向加速度和横向加速度。

讨论： $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta$ $\qquad v_\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\ v_\theta = \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\theta \vec{e}_\theta \qquad a_\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad a_\theta = \rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

（1）质点直线运动时，取该直线为极径，极角θ为常量 (即$\frac{d\theta}{dt} = 0$)

$$v_\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, v_\theta = 0$$

$$a_\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2},\quad a_\theta = 0$$

讨论： $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta$ $\qquad v_\rho = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\ v_\theta = \rho\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\theta \vec{e}_\theta \qquad a_\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad a_\theta = \rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

（2）质点圆周运动时，极径是圆周的半径r，为常量 (即$\frac{d\rho}{dt} = 0$)

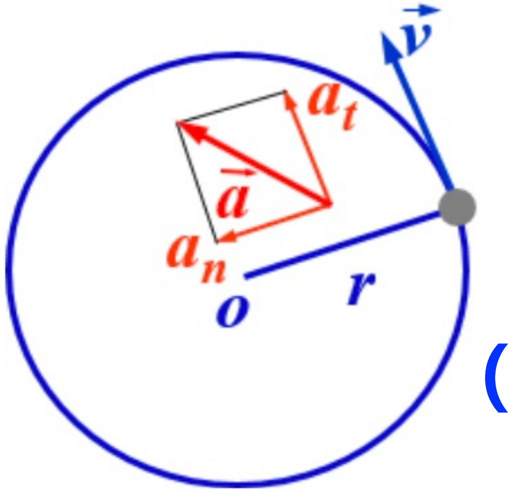
$v_\rho = 0,\quad \underline{v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt},}$ 横向速度即切向速度/线速度：

圆周运动**角速度:** $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{r}$

线速度: $v = r\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{ds}{dt} = r\omega$

讨论： $\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\theta \vec{e}_\theta$ $\quad a_\rho = \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2, \quad a_\theta = \rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

（2）圆周运动，极径是半径r，常量 (即$\frac{d\rho}{dt} = 0$)



切向（横向

法向
（与径向相反
）

加速度: $a_\rho = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$

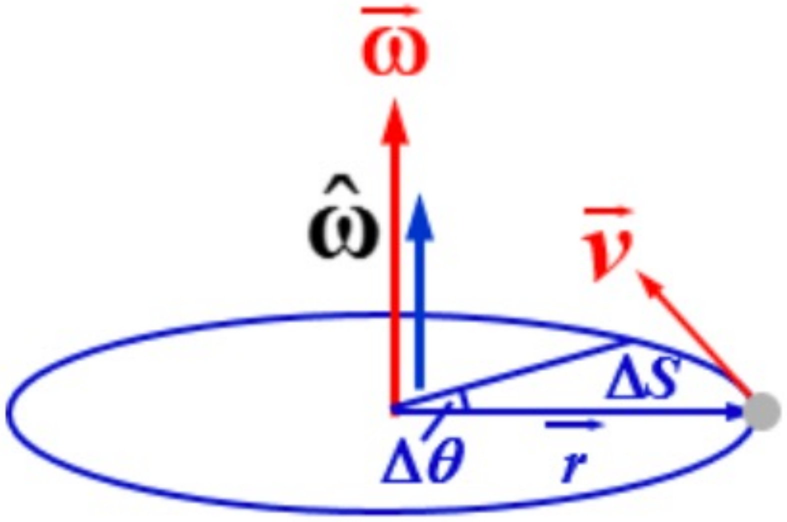
角加速度: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad v = r\omega \Rightarrow \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$

法向/向心加速度: $a_n = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$ **(由速度方向变化引起)**

线加速度: $a_t = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha = \frac{dv}{dt}$ **(由速度大小变化引起)**

二、圆周运动

1、角量和线量



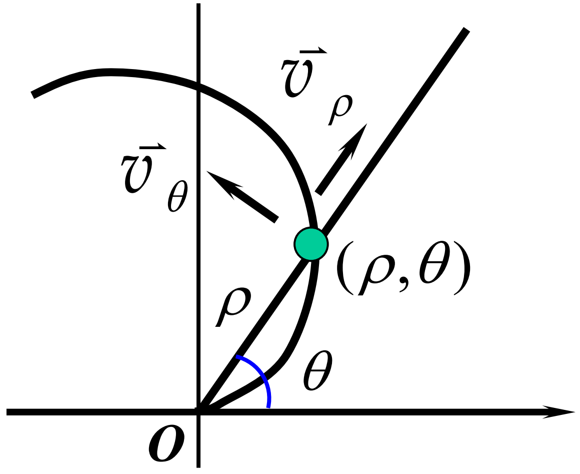
- ✓ **角位移：$\Delta\theta$**
- ✓ **线位移：Δs，$\Delta s = r\Delta\theta$**

- ✓ **角速度：$\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_\omega$**
- ✓ **线速度：$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{rd\theta}{dt} = r\omega$，$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$**

- ✓ **角加速度：$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$，若$\vec{\omega}$方向不变，则$\vec{\alpha} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\omega$**
- ✓ **线加速度：$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$**

例　细棒以恒定角速度ω绕其端点O旋转，棒上套一小球，小球以恒定速度u沿棒向外滑动。初始时刻小球处于点O，求t时刻小球的速度和加速度。

解　取棒端点O为极点，在细棒旋转的平面内建立极坐标系，初始时刻棒位置为极轴。在此坐标系中，小球的位置可用极坐标(ρ, θ)表示，



其中 $\rho = ut$，　$\theta = \omega t$

$$\rho = ut\ , \quad \theta = \omega t$$

求得小球的速度 $\vec{v} = u\vec{e}_\rho + \omega ut\vec{e}_\theta$

可见小球的径向速度就是它沿棒滑动的速度，横向速度则是*t*的线性函数。

根据 $\vec{a} = [\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2]\vec{e}_\rho + [\rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}]\vec{e}_\theta$

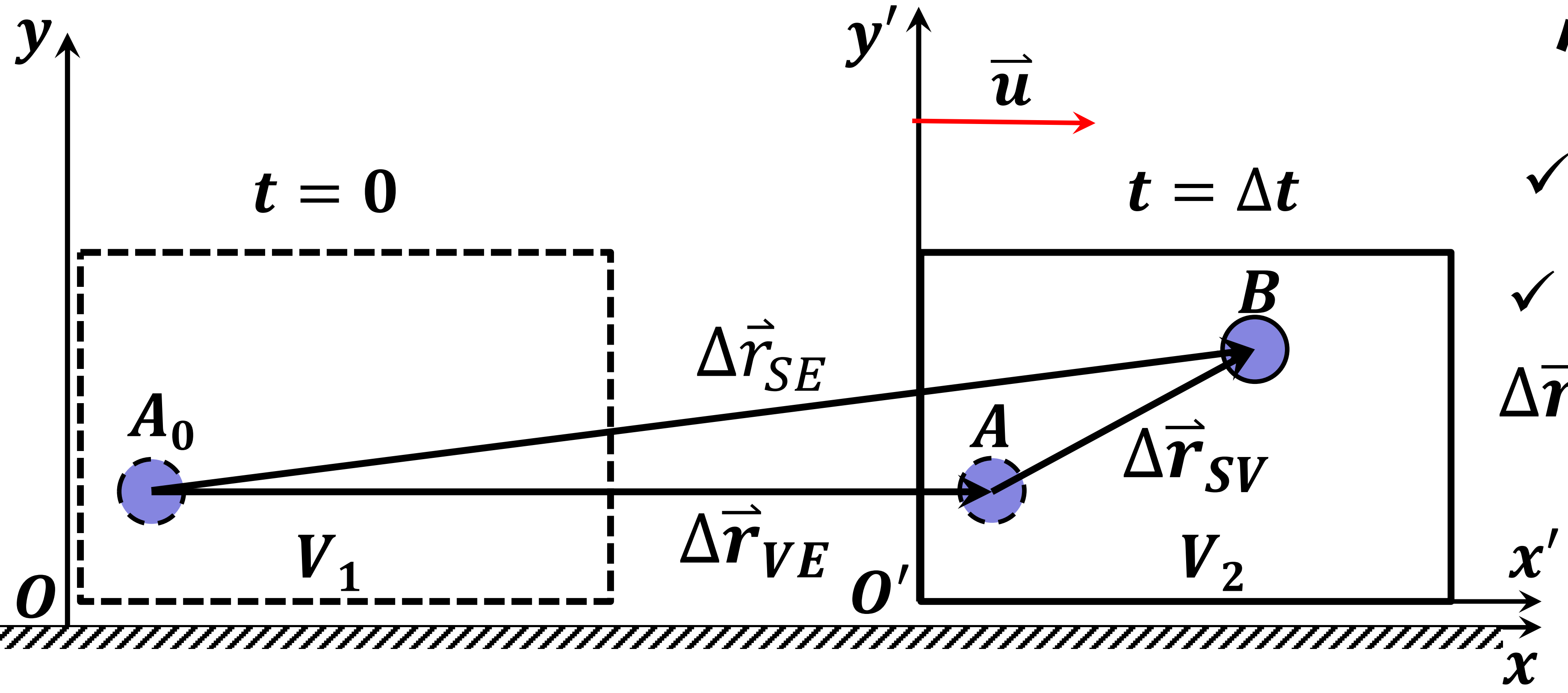
小球的加速度可表示为： $\vec{a} = -\omega^2 ut\vec{e}_\rho + 2\omega u\vec{e}_\theta$

由上式可以看到，径向加速度是时间的线性函数，横向加速度则为常量。

§1-7 相对运动

描述物体的运动时，必须先指明是相对于什么参考系。

同一运动，不同参考系，$\Delta\vec{r}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 都可能不同。

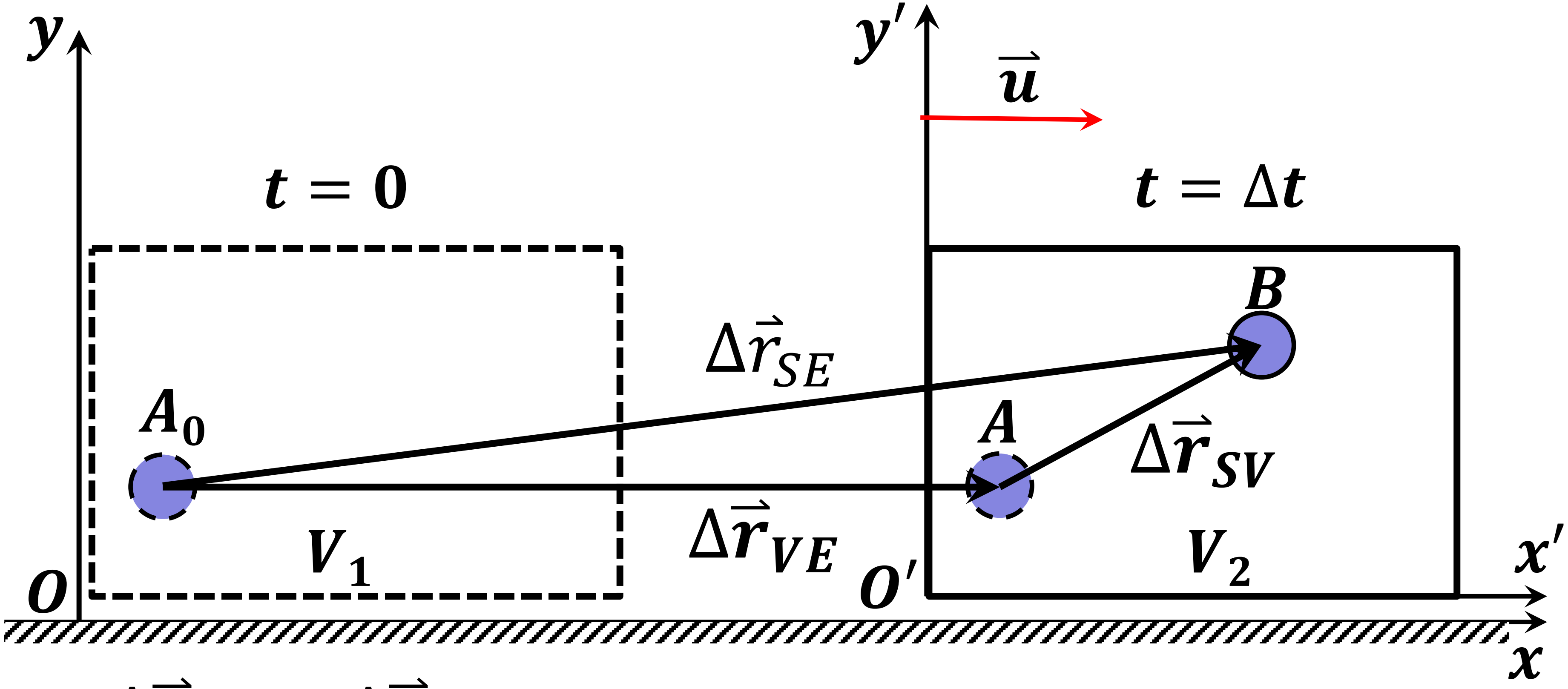


小球位移

✓ 参考系Oxy：$\Delta\vec{r}_{SE}$

✓ 参考系$O'x'y'$：$\Delta\vec{r}_{SV}$

$$\Delta\vec{r}_{SE} = \Delta\vec{r}_{SV} + \Delta\vec{r}_{VE}$$



$$\Delta\vec{r}_{SE} = \Delta\vec{r}_{SV} + \Delta\vec{r}_{VE}$$

令$\Delta t \to 0$，上式两边处以Δt，得到相应的速度关系：

$$\vec{v}_{SE} = \vec{v}_{SV} + \vec{v}_{VE}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$

$\vec{v}$：**质点相对于参考系Oxy的速度，**

$\vec{v}'$ ：**质点相对于参考系$O'x'y'$的速度**

$\vec{u}$ ：**参考系$O'x'y'$ 相对于参考系Oxy的速度**

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$

$\vec{v}$：质点相对于参考系Oxy的速度
$\vec{v}'$ ：质点相对于参考系$O'x'y'$的速度
$\vec{u}$ ：参考系$O'x'y'$ 相对于参考系Oxy的速度

伽利略变换：同一质点相对于两个相对做平动的参考系的速度之间的关系。

上式对t求导，可得相应的加速度之间的关系：

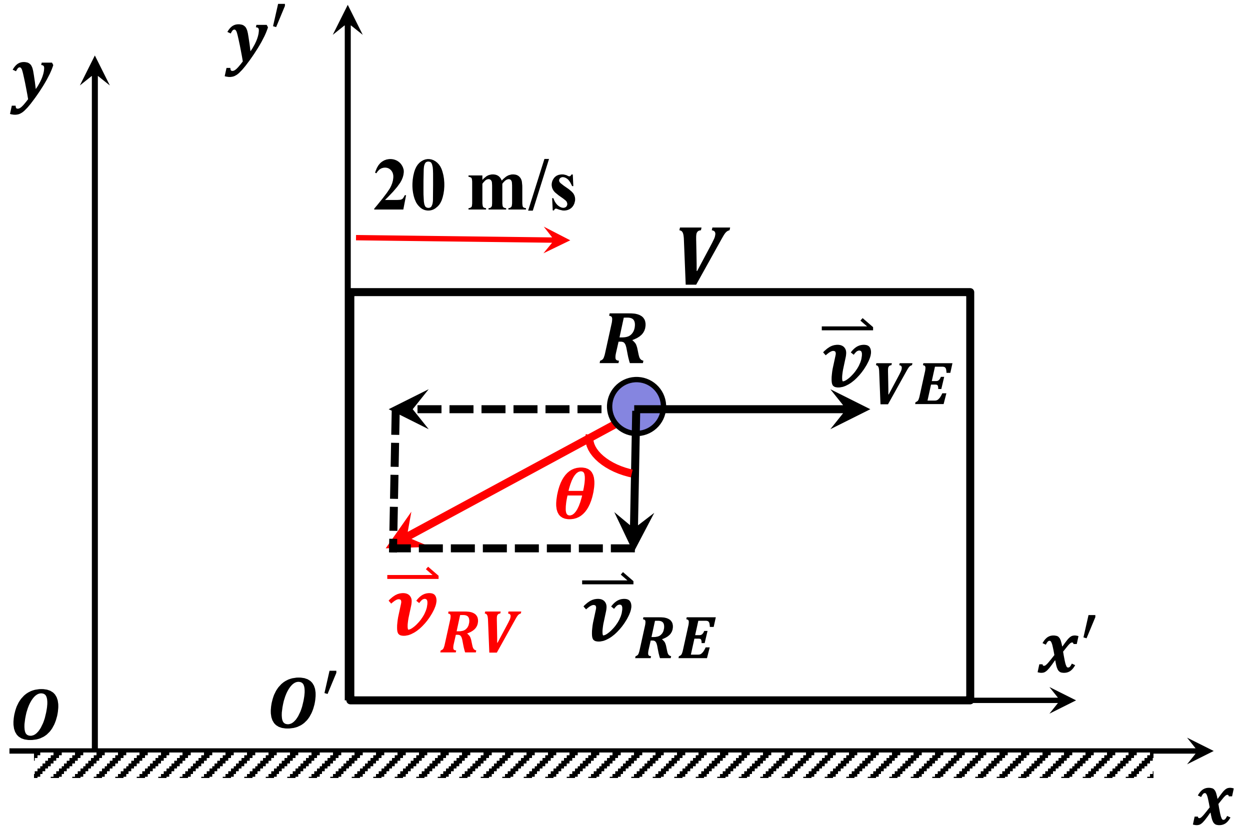
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0}$$

$\vec{a}$：质点相对于参考系Oxy的加速度
$\vec{a}'$ ：质点相对于参考系$O'x'y'$的加速度
$\vec{a}_0$ ：参考系$O'x'y'$ 相对于参考系Oxy的加速度

如果两个参考系相对做匀速直线运动，即$\vec{u}$为常量，则$\vec{a}_0 = 0$，于是有$\vec{a} = \vec{a}'$，即两个相对做匀速直线运动参考系中所测质点的加速度相同。

例1.7 雨天一辆客车V在水平马路上以20 m/s的速度向东开行，雨滴R在空中以10 m/s的速度竖直下落。求雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

解：如图所示，



$$\vec{v}_{RE} = \vec{v}_{RV} + \vec{v}_{VE}$$

$$\vec{v}_{RV} = \vec{v}_{RE} - \vec{v}_{VE}$$

$$= -20\vec{i}' - 10\vec{j}' \ (\text{m/s})$$

✓ 大小：$v_{RV} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22.4 \ (\text{m/s})$

✓ 方向：$\theta = \arctan\frac{20}{10} = 63.4°$

课后作业

请在SPOC上完成

1. 第1章作业： 1.2，1.17，1.22 （已发布）
   - ✓ 03.06日（周日）23:30之前 **提交**
   - ✓ 03.13日（周日） 23:30之前 **互评**
2. 第1-2章单元测验：已发布，
   - ✓ 03.13日（周日） 23:30之前 **提交**