高数(上)

1 — 极限与函数

1.1 术语

- 邻域
  - 以a中心的开区间,称为a的邻域.不包含x=a处,称为去心邻域
  - 普通邻域:符号

$$U(a,b)=(x||x-a|<b)$$

  - 去心邻域:符号

$$U^0(a,b)=(x|0<|x-a|<b)$$

- 初等函数
  - 基本初等函数(自变量只能为x不能为2x)
    - 常数a
    - 幂函数

$$X^a$$

    - 指数

$$a^x$$

    - 对数

$$log_a x$$

    - 三角

$$sinx$$

    - 反三角

$$arcsinx$$

  - 定义:用基本初等函数经过有限次四则运算或者有限次复合,并能用一个解析式表达的函数

1.2 数列的极限

- 定义

    - {Xn}是数列,任意b>0,存在N使得n>N时,|Xn-a|<b,则称该数列有极限,极限是a
- 性质
    - 收敛数列的极限是唯一的
    - 收敛数列一定有界,有界未必收敛
    - 收敛数列和子数列收敛于同一极限
    - 两个子数列收敛于不同极限,原数列一定发散

1.3 函数的极限

- 函数在某点的极限
    - 定义
        - 函数f(x)在x0的去心邻域内有定义(x0处可以无定义),任意b>0,存在数c使得当

$$0<|x-xo|<c\text{时},|f(x)-A|<b$$

,则A是函数f(x)趋近于x0的极限
- 函数极限存在的充分必要条件
    - 左右极限均存在且相等
    - 若趋于无穷,则负无穷和正无穷均满足
- 函数趋于无穷的极限
    - 定义
        - 任意b>0,存在正数X,使得|x|>X时,|f(x)-A|<b,则A是函数的无穷极限
- 性质
    - 函数极限是唯一的
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 海涅定理 $\lim_{n \to \infty} f\left(x_n\right)=\lim_{x \to x_0} f(x)$
    - f(x)>g(x),极限f(x)>=g(x):相等情况:1/x和1/x^2

1.4 无穷大与无穷小

- 无穷小(大)定义
    - x->x0(x->∞),f(x)->0(∞),则称f(x)是在此条件下的无穷小(大)
    - 注意:无穷小和无穷大是变量
- 无穷的运算
    - 记忆:无穷小与无穷小四则运算中除了"/"未知外都是无穷小
    - 无穷大与无穷大的运算中,除了*是∞外,其余均未知(未指定正无穷大和负无穷大)
- 极限与无穷小的关系

- x->x0,f(x)->A的充分必要条件是f(x)=A+g(x),其中g(x)->0(x->x0)
- 定理一:有限个无穷小的和是无穷小
- 定理二:有界函数和无穷小的乘积是无穷小
- 无穷小的比较
  - $$lima/b=0$$
    ,a是b的高阶无穷小
  - $$lima/b=\infty$$
    ,a是b的低阶无穷小
  - $$lima/b=c$$
    (c!=0),a是b的同阶无穷小
  - $$lima/b^k=c$$
    ,a是b的k阶无穷小
  - $$lima/b=1,$$
    a是b的等价无穷小
  - 几个重要的等价无穷小
    - x->0
      $$sinx-x-tanx-arcsinx-(e^x-1)-ln(1+x)$$
    - x->0
      $$(1+x)^k-(kx+1)$$
    - (
      $$1-cosx)-1/2*x^2$$
    - $$(tanx-sinx)\ 1/2*x^3$$
  - 等价无穷小之间,f(x)=g(x)+c(x)(c(x)是无穷小)
  - 注意:无穷小比的极限中,分子和分母用等价无穷小,不能出现加减

1.5 极限存在准则和两个重要极限

- 准则1:夹逼定理

  - 定义:三个数列,其中在n>N0时,都有xn<yn<zn,且xn->a,zn->a,则yn->a
- 两个重要极限
  - $$1: lim_{x->0}sinx/x = 1$$
  - $$2: lim_{x->\infty}(1+1/x)^x = e$$

    (里小外大)
  - 第二个重要极限还可以写成

    $$lim_{x->0}(1+x)^{1/x} = e$$
- 准则2:单调有界数列必有极限

1.6 函数的连续性

- 增量:改变量,未必增加
- $$lim_{dx->0}dy->0, 即 lim_{x->xo}f(x) = f(x0)$$

  则函数连续,x0称作连续点
- 连续的三个条件
  - 在x0处有极限
  - 在x0处有定义
  - 极限=函数值
- 连续的充分必要条件
  - 左右都连续(左右极限存在并等于函数值)
- 开区间连续->闭区间连续的条件
  - 左端点右连续,右端点左连续
- 间断点
  - 条件
    - x0无定义
    - x0无极限
    - 极限不等于函数值
  - 分类
    - 第一类间断点(左右极限均存在)(极限不一定存在)
      - 可去间断点:左右极限相等(求出来极限是常数)
      - 跳跃间断点:左右极限不相等
    - 第二类间断点(至少有一个极限不存在)
      - 无穷间断点(极限不存在,趋于无穷)

        - 振荡间断点(极限不存在,趋于振荡)
        - 极限不存在->无穷或振荡
- 闭区间上连续函数的性质
    - 闭区间上连续函数一定有最大值最小值
    - 有界性定理 闭区间上的连续函数一定有界
    - 介值定理 闭区间上连续函数一定取得介于最大值最小值之间的一切值

1.7 考试注意点

- x->∞,可换元用t=1/x来解题
- 有sin可以凑nπ来解题
- ln中有e^就提e
- 证明函数是连续函数,可以用定义法去证
- 若n->∞,需要对x进行分类讨论
- 若x->-∞时,下有根式的情况,同除以x后,根号前要加负号来保证符号的一致性
- $$若数列ann趋向于无穷的极限是a,则存在N,使得n>N时,|an|>c*|a|(0<c<1)$$
- 证明数列没有极限->证明子数列收敛于不同值,或者子数列发散即可
- 函数表达式中单个式子的极限可能不存在,但整体极限存在仍然可行

2 二 导数与微分

2.1 导数

- **定义**
    - f(x)在x0的邻域内有定义(包括中心)且
    $$lim_{dx->0}(dy/dx)$$
    极限存在,则称在x0处可导
- **可导的充要条件**
    - 左右导数存在且相等
- **由开区间可导到闭区间可导**
    - 左端点右导数存在,右端点左导数存在
- **可导和连续的关系**
    - 可导->连续
    - 连续未必可导
    - 几何层面:可导指曲线光滑,连续指曲线不断
- **求导法则**

- $$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$
- 求导公式
  - $$tanx' = secx^2 cotx' = -cscx^2$$
  - $$secx' = secx * tanx \text{且} cscx' = -cscx * cotx$$
  - $$arcsinx' = 1/(1-x^2)^{1/2} arccosx' = -1/(1-x^2)^{1/2}$$
  - $$arctanx' = 1/(1+x^2) arccotx' = -1/(1+x^2)$$
- 奇函数求导是偶函数,偶函数求导是奇函数
- 复合函数求导->洋葱法则
- 高阶求导
  - 定义:f(n-1)'x在x处可导,称作f(x)在x的n阶导数
  - 常见公式记忆
    - $$sinx^{(n)} = sin(x + n * (\pi/2))$$
    - $$cosx^{(n)} = cos(x + n * (\pi/2))$$
    - $$ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/(x+1)^n (0\text{的阶乘为}1)$$
    - $$(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))x^{a-n}$$
    - $$sin(2x)^{(n)} = 2^n sin(2x + n * (\pi/2))$$
  - 莱布尼茨公式
    - $$(u * v)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k) u^{(n-k)} v^{(k)}$$
- 隐函数求导
  - 注意:结果可以带有y
- 参数方程求导
  - $$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$$

2.2 微分

- 定义
  - $$dy = Adx + O(x)(A\text{不依赖于}dx,\text{相对于它为常数})\text{近似记作}dy = Adx$$
  - A=f'(x)
- 可微的充要条件
  - 可导
- 微分的几何意义
  - 用竖直线段的长度近似代替变化的长度
- 微分的应用
  - 用x的多项式近似代替复杂函数进行计算

2.3 考试注意点

- 若遇到分段函数,大部分求导用定义来做
- f(x)只含有|x-xo|在x0处不可导
- 证明函数在某点可导->只要极限存在就可导
- 已知函数在某点处可导->可推得连续->可求出参数的取值
- 若要满足x趋向于0，极限存在，则x的a次方中，a一定大于0
- 若讨论导函数的连续性.取值用定义做,极限用先求出导函数再做

3 三 微分中值定理和导数的应用

3.1 微分中值定理

- **罗尔定理**
  - 三个条件:若f(x)在[a,b]上连续,在(a,b)可导,且f(a)=f(b)
  - 则至少存在一个c在(a,b)使得f(c)'=0
- **拉格朗日中值定理**
  - 两个条件[a,b]连续,(a,b)可导
  - 则(a,b)至少存在一个点c使得f(b)-f(a)=f(c)'(b-a)
  - 是罗尔定理的一般形式
- **拉格朗日中值定理推论**
  - 若f(x)在I中连续且可导,且f(x)'=0,则f(x)=c
- **柯西中值定理**
  - 若三个条件f(x)与g(x)满足[a,b]连续(a,b)可导,f(x)'!=0
  - 满足至少存在一个c从(a,b),使得g(a)-g(b)/f(a)-f(b)=g(c)'/f(c)'
  - 令f(x)等于x,则为拉格朗日中值定理
- **术语**

- 驻点:导数为0的点

3.2 洛必达法则

- 四个条件:若x->a(x->∞),f(x)->0(∞),F(x)->0(∞)且在a的去心邻域中f(x)'和F(x)'存在且F(x)'!=0且lim(x->a)f(x)'/F(x)'存在
- 则有lim(x->a)f(x)/F(x)=lim(x->a)f(x)'/F(x)'
- 若后者存在可以推出前者存在
- 若后者无穷大可以推出前者无穷大
- 若后者不存在无法推出前者不存在
- 注意:适当使用等价无穷小替换和直接代入求解方便

3.3 泰勒公式

- $$f(x) = f(x0) + f(x0)'/1!(x - x0).....+f(\theta)(x - xo)^{n+1}/(n+1)!(\theta : xo- > x)$$
- 拉格朗日余项
  - $$f(\theta)(x - xo)^{n+1}/(n+1)!$$
- 皮亚诺余项
  - $$O(x^n)$$
- 常见泰勒公式记忆
  - $$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$$
  - $$sinx = x - 1/3!x^3 + 1/5!x^5..$$
  - $$cosx = 1 - 1/2!x^2 + 1/4!x^4 - ....$$
  - $$1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + ...$$
  - $$ln(1 + x) = x - 1/2x^2 + 1/3x^3...$$

3.4 3.4函数的单调性和凹凸性

- 单调性看f(x)' 凹凸性看f(x)''
- **极值的判定**

- f(x)'=0的点和f(x)'->∞的点都可以是函数单调区间的分界点
- 极值点只可能是驻点或者不可导点
- **极值第一判定法**->看f(x)'是否变号
  - 求最值->看端点和极值点进行比较
- **极值第二判定法**->若f(x0)''!=0且f(x0)'=0则若f(x0)''<0,则是极大值,f(x0)''>0,则是极小值,若等于0,则结果未知,如

$$x^4和x^3$$

- 推论:

$$若f(x0)' = f(x0)'' = f(x0)''' = ... = f(x0)^{n-1} = 0, 且f(x0)(n)! = 0$$

  - 则若n为偶,则必为极值,若大于0,极小值,小于0,极大值
  - 若n为奇,则不为极值
- 还可以用泰勒展开,f(x)-f(x0)判断是否恒大于0或小于0(推得公式的经过)

- **凹凸性的判定**
  - 凹凸性决定f(x)'增减,斜率的增大和减小
  - 凹凸的判断:若f(x)处于切线的上方,则是凹,若是处于切线的下方则是凸
  - f(x)''>0凹,f(x)''<0凸
  - 若f(x)''不存在或者f(x)''=0,都可能是拐点,看是否变号,也可以看三阶导的正负
- **三种渐近线**
  - $$lim_{x->\infty} f(x) = A,$$

    y=A为水平渐近线(注意负无穷和正无穷双向考虑)
  - $$lim_{x->(a+-)} f(x) = \infty$$
  - $$lim_{x->\infty} f(x)/x = a(! = 0)$$

    ,且lim(x->∞)(f(x)-ax)=b,则y=ax+b是斜渐近线
  - 除了铅直是x->a之外其余均是无穷

3.5 曲率

- k=dα/ds
- ◯的曲率k=1/a,a为半径
- 曲率半径r=1/k
- 近似代替

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

(**弧微分公式**)

- 计算得到

$$k=|y''|/(1+y'^2)^{3/2}$$

- 极坐标下

$$k=|r^2+2r'^2-rr''|/(r^2+r'^2)^{3/2}$$

3.6 考试注意点

- 若证明至少存在一点使得f(c)'=h(c),则要构造辅助函数,用罗尔定理求解
- 若证明存在一点使得f(c)=h(c)用零点存在定理来证
- 求比值极限,可以用泰勒公式代换来求解
- f(X)与f(x)'的桥梁->泰勒公式和拉格朗日中值定理
- 隐函数中求斜渐近线的时候,需要设y=xt,来算出x=f(t),当x->∞的时候可以推出来t的取值,从来判断斜率
- 若判断导数>0或者<0,则需要使用拉格朗日中值定理进行判断
- 一阶泰勒公式
  - n=1,要写到n+1项

4 四 不定积分

4.1 定义

- 定义
  - F(x)'=f(x),F(x)是f(x)的一个原函数,
- 原函数存在定理
  - 连续函数必有原函数
- 术语
  - ∫f(x)dx=F(x)+c中,f(x)称为被积函数,dx称为积分变量 f(x)dx称为被积表达式
  - 积分曲线簇:原函数+c,**一组平行的曲线簇**
- 常见公式
  - $$\int 1/(a^2+x^2)dx=(1/a)arctan(x/a)+c$$
  - $$\int 1/(\sqrt{a^2-x^2})=arcsin(x/a)+c$$

- $$\int 1/(x^2-a^2) = (1/2a)ln(|x-a|/|x+a|)+c$$
- $$\int cscxdx = ln|cscx-cotx|+c$$
- $$\int secxdx = ln|secx+tanx|+c$$
- $$\int 1/\sqrt{x^2+-a^2} = ln|x+\sqrt{x^2+-a^2}|+c$$
- $$\int tanxdx = -ln|cosx|+c$$
- $$\int cotxdx = ln|sinx|+c$$
- $$\int sinxe^x = e^x(sinx-cosx)/2$$

- 性质
  - $$d(\int f(x)dx)/dx = f(x)$$
  - $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$
  - $$\int f(x)g(x)! = \int f(x)\int g(x)$$

4.2 积分方法

- **第一类换元积分法**
  - 凑:把d前面某一部分的原函数拿到d的里面
  - d内可以任意加减常数
- **第二类换元积分法**
  - 可以采用换元(分母多项式)
    - 注意dx->du,最后再换回x
  - 若sint,tant都解决不了,可以使用1/t

- **分部积分法**
  - ∫udv=uv-∫vdu
  - 优先提出

$$1/x^2, e^x, sinx, cosx$$

- **有理函数积分**
  - 分子分母阶数分别为m和n
  - 若m>n,上除下
  - 若m=n,使得m<n,凑数
  - 若m<n
    - 分母是二次的幂次方
      - 一样凑ln
    - 分母是二次
      - 分子为常数分母不能因式分解
        - 配方
      - 分子为x,分母不能因式分解
        - 硬凑出来一个ln再进行第一个的讨论
    - 分母是几个x的多项式因子相乘,分子是多项式
      - 分母的多项式的次方数就是假设的要写的个数(从大往小写),分子的次方形式取决于分母的

$$x^n的n, x^2就假设为ax+b$$

5 五 定积分

5.1 定义

- 定义:曲边梯形的面积
  - $$A = lim_{l->0} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)di = \int_a^b f(x)dx$$
- 注意:A只与f(x)和积分区间有关,与积分变量无关
- 可积的条件
  - 连续函数一定可积(一定有界)
  - 不连续,有有限个第一类间断点,也可积

5.2 性质与推论

- b=a => ∫=0

- $$\int_{a->b} f(x)dx = -\int_{b->a} f(x)dx$$
- f(x)=1
  - $$\int_{a->b} f(x)dx = b - a$$
- 推论
  - $$|\int_{a->b} f(x)dx| <= \int_{a->b} |f(x)|dx$$
  - $$f(x) <= g(x), \int_{a->b} f(x)dx <= \int_{a->b} g(x)dx$$
  - $$m(b-a) < \int_{a->b} f(x)dx < M(b-a)(\text{定积分介值定理})$$
  - 定积分中值定理
    $$\int_{a->b} f(x)dx = f(c)(b-a)(c\text{从}b- > a)$$
  - 广义积分中值定理,
    $$\int f(x)g(x) = f(c) \int g(x)(c\text{从}b- > a)$$
- 微积分基本公式
  - 积分上限函数g(x)=∫a->x f(t)dt
  - g(x)'=f(x),g(x)是f(x)的一个原函数
- 牛顿莱布尼茨公式
  - $$\int_{a->b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$
  - 使用条件:积分区间不是无穷的,且可积

5.3 常见公式和结论

- f(x)偶函数
  - $$\int_{-a->a} f(x)dx = 2\int_{0->a} f(x)dx$$

- f(x)奇函数
  - $$\int_{-a->a} f(x)dx = 0$$
- $$\int_{0->\pi} /2f(sinx)dx = \int_{0->\pi} /2f(cosx)dx$$
- $$\int_{0->\pi} xf(sinx)dx = \pi/2\int_{0->\pi} f(sinx)dx$$

  (少x多π/2)=π∫_{0->π}/2 f(sinx)dx(少x多π π->π/2)
- $$\int_{a->a+T} f(x)dx = \int_{0->T} f(x)dx$$
- $$\int_{a->a+nT} f(x)dx = n\int_{0->T} f(x)dx$$
- 积分上限减去积分下限等于nT 等于T都可以转换
- $$\int_{0->\pi/2} sinx^n dx = \int_{0->\pi/2} cosx^n dx$$

  =
  - $$(n-1)!!/n!! * \pi/2$$

    n为偶
  - $$(n-1)!!/n!!$$

    n为奇

5.4 无穷项的反常(广义)积分

- 若b->∞,极限存在,则称为无穷项的广义积分
- ∫a->∞ 1/x^p dx(a>0) p>1收敛,p<=1发散
- 无界函数的反常积分
  - 有无穷间断点t
  - ∫_{a->b} f(x)dx=∫a->t f(x)dx+∫t->b f(x)dx(有一个极限不存在就是发散)
  - ∫0->a 1/x^p dx p<1收敛,p>=1发散

5.5 考试注意点

- 若积分函数含有f(x)则求导时需要提出来x再进行复合函数的求导
- 根号下的二次式,先配方再换元
- 若函数的对称性明显,可以使用2I等于b来计算出I的值
- 两个e指数相加作为分母,先化为1
- 可以构造积分上限函数来进行解题
- 奇导函数到原函数偶，偶导函数到原函数奇(当且仅当积分下限为0时)
- 若f(x)在a,b之间取值，先写积分(fx- a)(fx-b)/fx来写取值范围

6 六 定积分的应用

- **XY区域中求平面图形的面积**
  - X型区域上-下,y型区域右-左
- **极坐标下求曲线两点与原点连线图形的面积**
  - $$S = 1/2 \int_{\alpha->\beta} \rho^2 d\theta$$
- **求旋转体的体积**
  - 绕x轴旋转

    $$\int_{a->b} \pi f(x)^2 dx$$
  - 绕y轴旋转

    $$\int_{a->b} \pi f(y)^2 dy$$
  - 椭圆
    - 绕x轴

      $$4/3\pi ab^2$$
    - 绕y轴

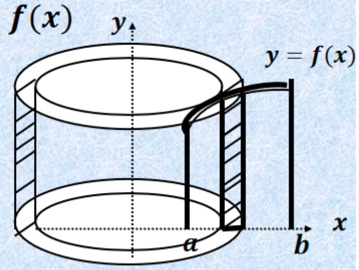
      $$4/3\pi a^2 b$$
  - 绕某一条特定直线进行旋转 ,则

    $$\pi y^2 -> \pi(\text{到旋转轴距离})^2$$

例6　证明：由平面图形 $0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$

绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$



柱壳法——就是把旋转体看成是以y 轴为中心轴的一系列圆柱形薄壳组成的，

以此柱壳的体积作为体积元素，

当 dx 很小时，此小柱体的高看作 $f(x)$，即圆柱薄壳在区间 $[x, x + dx]$ 上

柱壳体的体积元素为 $dV = 2\pi x \cdot dx \cdot f(x)$

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

- **求几何体的体积**
  - 把横截面表示出来,直接积分
- **求平面曲线的弧长**
  - 参方下S=

$$\int_{\alpha->\beta} \sqrt{(f(t)'^2 + g(t)'^2)} dt$$

  - 极坐标下S=

$$\int_{\alpha->\beta} \sqrt{(\rho^2 + \rho'^2)} d\theta$$

  - xy区域下S=

$$\int_{a->b} \sqrt{(1 + y'^2)} dx$$

- **求旋转体的表面积**
  - 求旋转面的表面积:

$$S = 2\pi \int_{a->b} |y| \sqrt{(1 + y'^2)} dx$$

7 七 微分方程

7.1 术语

- 含未知函数导数或微分的方程

- 术语
  - **几阶导就是几阶微分方程**
  - **常微分方程和偏微分方程**:未知函数一元是常微分,未知函数多元是偏微分
  - **通解**:解含任意常数个数等于阶数
  - **特解**:无任意常数
  - **初始条件**:给出自变量的相关值
  - **定解条件个数要与阶数相同才能确定唯一特解**
  - 一阶微分方程基本形式F(x,y,y')=0

7.2 常见形式

可分离变量的微分方程

- f(x)dx=g(y)dy->两边同时积分即可

齐次方程

- y'=f(y/x)整体出现
- 令u=y/x ->dy/dx=u+x(du/dx)
- 代入原式化为可分离变量进行求解
- 可化为齐次方程的
  - dy/dx=ax+by+c/a1x+b1y+c1
  - 若a/a1=b/b1,则令u=ax+by ,则du/dx=a+b dy/dx ,直接代入即可
  - 若a/a1!=b/b1,令x=X+h,y=Y+k则dY/dX=...令常数项为0,解出h和k,就可以化为dY/dX=f(aX+bY/a1X+bY),就化为了齐次方程,再进行计算即可

7.3 一阶线性微分方程

- 一般形式dy/dx+p(x)y=Q(x)
- 若Q(x)=0,则 是齐次方程,否则是非齐次方程
- 齐次方程通解

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

- 非齐次方程通解

$$y = e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx} + c)$$

- 有时可以写成d

$$x/dy + f(y)x = g(y)$$

例4: 求方程 $(x+y^2)\frac{dy}{dx}=y$ 满足初始条件 $y|_{x=3}=1$ 的特解.

解: 将 y 视为自变量, 可以变成关于 x 的线性方程:

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y \qquad P(y)=-\frac{1}{y},\ Q(y)=y$$

$$\therefore x=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left[\int ye^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right] \quad =y(y+C)$$

由 $y|_{x=3}=1$ 得: $\qquad C=2$

故所求特解为: $\qquad x=y(y+2)$

,最后再换回来即可

7.3.1 伯努利方程

- dy/dx+p(x)y=Q(x)y^n
- $$同除以y^n,令z=y^{1-n},dz=(1-n)y^{-n}dy$$
- 代入即可化为普通形式
- 一般形式y=Cf(x)+g(x)

7.4 可降解的高阶微分方程

- $$y^n=f(x)$$
- $$y('')=f(x,y')(无y)令y'=p,y''=p'$$
- $y('')=f(y,y')(无x)令y'=p,y''=dp/dx=dp/dy*dy/dx=p*dp/dy,则原式化为p*dp/dy=f(y$
- 既无y也无x
  - 发现用不含y去做更简单

7.5 常系数齐次线性微分方程

- **齐次二阶线性微分方程的一般形式** y''+p(x)y'+Q(x)y=0
- **常系数齐次二阶线性微分方程的一般形式**y''+py'+qy=0
- $$特征方程r^2+pr+q=0;\varDelta=p^2-4q$$

- 若Δ>0,y=

$$c1 * e^{r1x} + c2 * e^{r2x}$$

- 若Δ=0,y=

$$(c1 + c2x)e^{r1x}$$

- 若Δ<0,y=

$$e^{\alpha x}(c1cos\beta x + c2sin\beta x)$$

  ,此时r1=α+iβ,r2=α-iβ
- **若特征方程不只二阶**
  - 若特征方程只有单根r1,则

$$y = Ce^{r1x}$$

    是方程的解
  - 若特征方程有k重根r1,则

$$y = (C1 + C2X + ... + C_k x^{K-1})e^{r1x}$$

  - 若特征方程有一对共轭负根,则

$$y = e^{\alpha x}(c1cos\beta x + c2sin\beta x)$$

  - 若特征方程有k重复根α+-iβ,则

$$y = e^{\alpha x}((c1 + c2... + c_k x^{k-1})cos\beta x + (D1 + D2... + D_k x^{k-1})sin\beta x)$$

7.6 高阶线性微分方程解的结构

- 定理
  - y1(x) y2(x)是两解,则y=c1y1(x)+c2y2(x)也是一个解(未必是通解),若y1(x)与y2(x)线性无关,那么就是通解
  - 若y*是非齐次特解,Y=c1y1+c2y2是齐次通解,则y*+Y是非齐次通解
  - 若y1(x),y2(x)分别是非齐次=f1(x) =f2(x)的特解,那么y1(x)+y2(x)是非齐次方程=f1(x)+f2(x)的特解

7.7 求解非齐次二阶线性微分方程

求齐次线性微分方程的解

- 求非齐次的特解

- 若f(x)=

$$e^{cx}P_m(x)$$

  - 令

$$y* = Q(x)e^{cx}$$

    - 若c不是特征根,

$$Q(x) = b0x^m + ... + bm$$

    - 若c是单根

$$Q(x) = x(b0x^m + ... + bm)$$

    - 若c是重根

$$Q(x) = x^2(b0x^m + ... + bm)$$

- 若f(x)=

$$e^{cx}(P_l(x)cos\beta x + Pn(x)sin\beta x)$$

  - 令m=max(l,n)
  - $$y* = x^k * e^{cx}(Rm(x)cos\beta x + Nm(x)sin\beta x)$$
  - 若齐次线性方程的解不是c+iβ,则k=0
  - 若是一个单根,则k=1

8 八 重要课外知识

- **两个次方相减**
  - $$(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1) = a^n - 1$$
  - 即

$$(x^n - a^n)/(x-a) = x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

- **和差化积(积化和差)公式**
  - $$sinacosb = 1/2(sin(a+b) + sin(a-b))$$
  - $$cosacosb = 1/2(cos(a+b) + cos(a-b))$$
  - $$sinasinb = -1/2(cos(a+b) - cos(a-b))$$

  - 遇到积化和差容易直接想公式即可
  - 遇到和差化积,直接把a换成((a+b)/2+(a-b)/2),b换成两个相减即可
- **平方和公式**
  - $$1^2+2^2+...+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$$
- **三倍角公式**
  - $$sin3x=3sinx-4sin^3x$$
  - $$cos3x=-3cosx+4cos^3x$$
  - $$tan3x=(3tanx-tan^3x)/(1-3tan^2x)$$
- $$lim_{n->\infty}a^{1/n}=1$$
- **三次方公式**
  - $$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
  - $$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
  - $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
  - $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
- **杨辉三角(排列组合公式*)**
  - $$A_m^n=m!/(m-n)!$$
  - $$C_m^n=m!/(m-n!)n!$$
  - $$C_{m+1}^n=C_m^n+C_m^{n-1})$$
- **万能公式**
  - $$sinx=2tan(x/2)/(1+tan^2(x/2))$$
  - $$cosx=1-tan^2(x/2)/(1+tan^2(x/2))$$

- **欧拉公式**
  - $$e^{ix} = cosx + i * sinx$$