第四章　　矩阵的初等变换与线性方程组

4.1 向量组及其线性组合

4.2 向量组的线性相关性

4.3 向量组的秩

4.4 线性方程组的解的结构

4.5 向量空间

§1 向量组及其线性组合

一、基本概念

定义1： n 个**有次序**的数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的数组称为 **n 维向量**，这 n 个数称为该向量的 n 个**分量**，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量.

- 分量全为实数的向量称为**实向量**.
- 分量全为复数的向量称为**复向量**.

备注:

- ✓ 本书一般只讨论实向量（特别说明的除外）.
- ✓ 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量.
- ✓ 所讨论的向量在没有指明是行向量还是列向量时，都当作列向量.
- ✓ 本书中，列向量用黑色小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等表示，行向量则用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 表示.

定义2：若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合称为向量组.

注: (1) 向量组中的向量必须是同型向量.

(2)一个向量组可含有限多个向量，也可含无限多个向量.

例如

(1) $$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}$$

（2） 当$R(A)<n$时，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全体解组成的向量组含有无穷多个向量．如

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\\0\\1\end{pmatrix},\quad c_1\in R, c_2\in R$$

二、矩阵与向量组

$$A_{34}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

有限向量组

结论1：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

问: $(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\overset{?}{=}A$

答: $(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\neq A$

三、向量组的线性组合

定义3：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$， 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$， 表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**.

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个**线性组合的系数**.

定义4：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$， 使得

$$b = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_ma_m$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，这时称**向量 b 能由向量组 A 线性表示**.

例： 设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\left(\begin{array}{c|c|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$

e_1, e_2, e_3的线性组合

那么 $b=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\underline{\underline{2e_1+3e_2+7e_3}}$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量b，必有

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

n 维单位坐标向量有几个?

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

四、向量组之间线性表示的判断法

回顾：线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组有解？ $\Leftrightarrow$ **向量** $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **是否能用** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **线性表示？**

结论1：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

设有向量 b 和向量组 A: a_1, a_2, ……., a_n.

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$$

$$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m \iff \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=b$$

定理1

向量b 能由向量组 A 线性表示 $\iff$ 线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\iff$ $R(A)=R(A,b)$

定义5： 设有向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \ldots, b_l$ 若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称**向量组 B 能由向量组 A 线性表示**.

若向量组 A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个**向量组等价**.

问： 怎么判断向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 能由向量组 B：$b_1, b_2, \ldots, b_l$ 线性表示**?**

设有向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$， 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

$$
\begin{aligned}
b_1 &= k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{m1}a_m \\
b_2 &= k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{m2}a_m \\
&\cdots\cdots \\
b_l &= k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \cdots + k_{ml}a_m
\end{aligned}
$$

线性表示的系数矩阵

$$
(b_1, b_2, \cdots, b_l) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}
$$

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则 $$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

结论： 矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，B 为这一线性表示的系数矩阵.

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则
$$\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_l^T \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，A 为这一线性表示的系数矩阵.

口诀：左行右列

结论：若 $C = AB$，那么

- 矩阵 C **的行向量组**能由矩阵 B **的行向量组**线性表示，A为这一线性表示的系数矩阵．（A 在左边）
- 矩阵 C **的列向量组**能由矩阵 A **的列向量组**线性表示，B为这一线性表示的系数矩阵．（B 在右边）

$A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A$ 经过有限次初等列变换变成 B

$\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $AP = B$

把 P 看成是线性表示的系数矩阵

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 B 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

同理可得

$A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow$ 矩阵 B 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

向量组 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$ 能由向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 K，使得 $AK = B$

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解

$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ （P.84 定理2）

$\Rightarrow$ $R(B) \le R(A)$ （P.86 定理3） 因为 $R(B) \le R(A, B)$

推论： 向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

证明： 向量组 A 和 B 等价

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{向量组 } B \text{ 能由向量组 } A \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \\ \text{向量组 } A \text{ 能由向量组 } B \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(B) = R(A, B) \end{cases}$

从而有 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

例： 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 A：a_1, a_2, a_3 线性表示，并求表示式.

解： 向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当 $R(A) = R(A, b)$.

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A) = R(A, b) = 2$， 所以向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Longleftrightarrow$ **线性方程组 $Ax=b$ 有解.**

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \qquad +3x_3=2\\ \qquad x_2-2x_3=-1\end{cases}$

通解为 $x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$ **故** $b=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$

即 $b=(-3c+2)\,a_1+(2c-1)\,a_2+c\,a_3$.

例2：证明向量组A与B等价，其中

$$A: \ a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B: \ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

证： 向量组A, B等价 $\Longleftrightarrow$ $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A) = R(B) = R(A, B)$. 故向量组A, B等价.

例3: 设有$n\times m$ 矩阵 $A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$，试证：n 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示的充分必要条件是$R(A)=n$.

证： 因为n 维单位坐标向量组构成的矩阵为E_n，所以

n 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示

$\Longleftrightarrow \quad R(A)=R(A, E)$.

显然 $R(A, E)=n$, 故 $R(A)=n$.

课堂练习

1. 把向量 β 表示成向量 α_1 , α_2 , α_3 的线性组合, 其中

$$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

§2　向量组的线性相关性

回顾：向量组的线性组合

定义： 给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$， 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$， 表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个**线性组合**.

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个**线性组合的系数**.

定义： 给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$， 使得

$$b = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_ma_m$$

则称**向量 b 能由向量组 A 的线性表示**.

引言

问题1：给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示?

问题2：如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零?

P.83 定理1 的结论：

向量b 能由向量组 A 线性表示	$\Leftrightarrow$	线性方程组 $Ax = b$ 有解	$\Leftrightarrow$	$R(A) = R(A,b)$

问题1： 给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示?

问题1′： 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在解?

回答： 齐次线性方程组 $Ax= 0$ 一定存在解.

事实上，可令$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$，则

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$$ （零向量）

问题2： 如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零?

问题2′： 齐次线性方程组 $Ax=0$ 是否存在**非零解**?

回答： 齐次线性方程组不一定有非零解，从而线性组合的系数不一定不全于零.

例： 设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

若 $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则 $k_1=k_2=k_3=0$.

一、向量组的线性相关性

定义： 给定向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0 \text{（零向量）}$$

则称向量组 A 是**线性相关**的，否则称它是**线性无关**的.

向量组		m 元齐次线性方程组		
A：$a_1, a_2, \dots, a_m$	$\Leftrightarrow$	$Ax = 0$	$\Leftrightarrow$	$R(A) < m$
线性相关		有非零解		

备注：

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 a 是**零向量**时，线性相关；当 a 不是**零向量**时，线性无关.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，也就是向量组 A 中，至少有一个向量能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

  特别地，

  - a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线.
  - a_1, a_2, a_3 线性相关的几何意义是三个向量共面.

二、线性相关性的判定

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关

⟺ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0 \text{（零向量）}.$$

⟺ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

⟺ 矩阵$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .

⟺ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0 .$$

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m - 1$ 个向量线性表示.

例1：试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\ e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

解： **设有** $k_1,\ k_2,\cdots,\ k_n$ **使得** $k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=0$

即 $k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

故 n **维单位坐标向量组的线性无关.**

例2：已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 **及向量组** a_1, a_2 **的线性相关性.**

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2, a_3) = 2 < 3$ **，故向量组** a_1, a_2, a_3 **线性相关；**

同时，$R(a_1, a_2) = 2$**，故向量组** a_1, a_2 **线性无关.**

例3： 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解题思路：

- ✓ 转化为齐次线性方程组的问题；
- ✓ 转化为矩阵的秩的问题.

例3：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法1：转化为齐次线性方程组的问题.

已知 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，记作 $B = AK$.

设 $Bx = 0$ ，则$(AK)x = A(Kx) = 0$.

因为向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，所以$Kx = 0$.

又 $|K| = 2\ \ \overline{0}$，那么$Kx = 0$ 只有零解 $x = 0$ ，

从而向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

例3： 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法2： 转化为矩阵的秩的问题.

已知 $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，记作 $B = AK$.

因为$|K| = 2 \neq 0$，所以K 可逆，$R(A) = R(B)$，

又向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关， $R(A) = 3$，

从而$R(B) = 3$，向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

三、相关结论　（定理5）

(1)若向量组 A： $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关， 则向量组 B： $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关． （部分相关，整体相关）

其逆否命题也成立，即若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关． （整体无关，部分无关）

(2) m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时，一定线性相关．

特别地， $n+1$个 n 维向量一定线性相关．

(3) 设向量组 A： $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关， 而向量组 B： $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的．

(1)若向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关， 则向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

证： 因为向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关，所以 $R(A) < m$，

而 $R(B) \le R(A) + 1 < m+1$, 故向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

(2) m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时，一定线性相关.

证：设该向量组对应 m 行 n 列的矩阵 A， 则由矩阵秩的性质 $R(A) \le \min\{m,n\}=n<m$, 故向量组线性相关.

(3) 设向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关， 而向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

证：因为向量组 A： $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关，所以

$R(A)=m$.

而向量组 B： $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ 线性相关，所以

$R(B)<m+1$. 又因为$R(B)\geq R(A)=m$,所以

$R(B)=m=R(A)$，即$R(A)=R(A, b)=m$，故向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

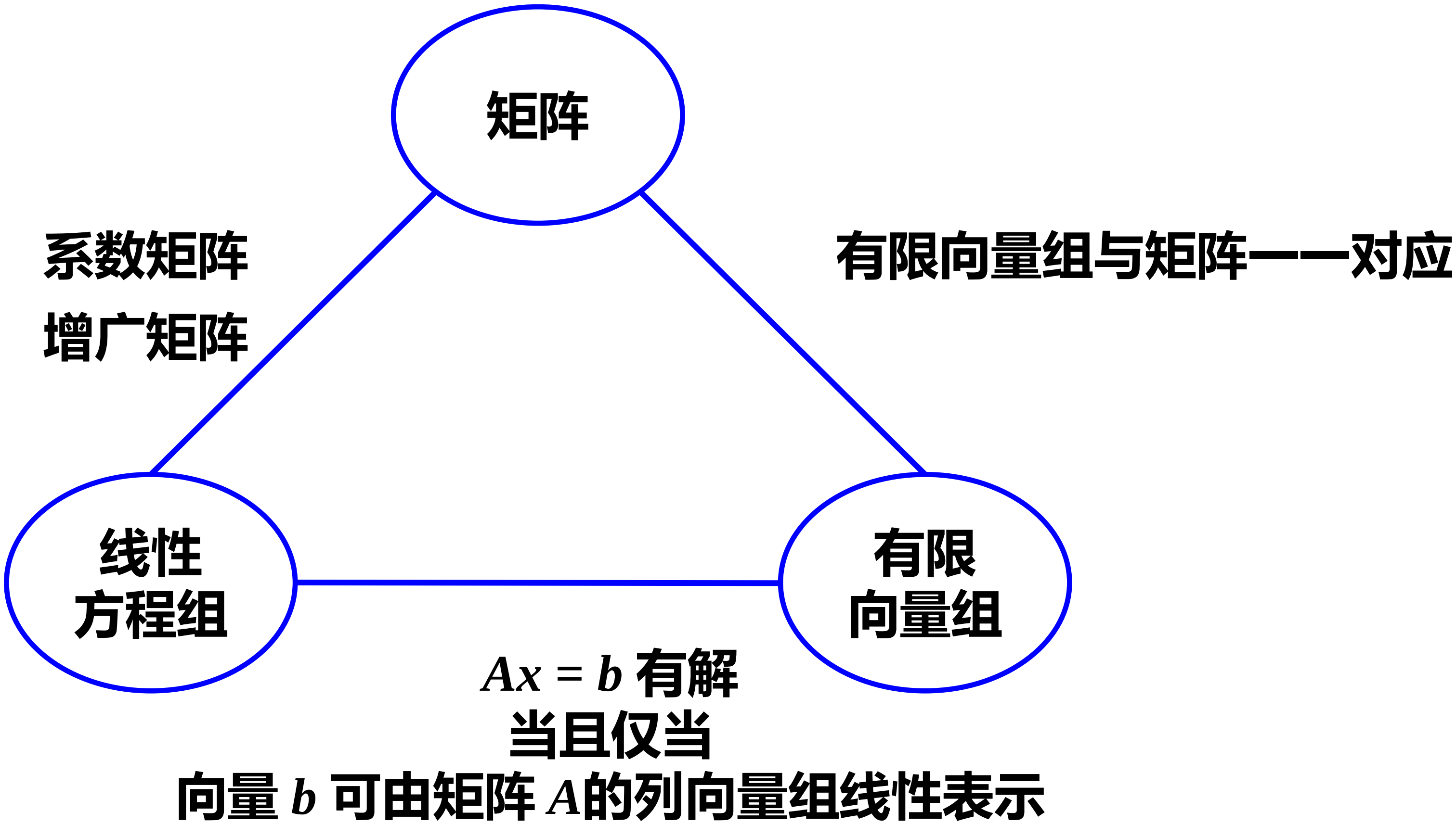
例 设向量a_1, a_2, a_3线性相关，向量组a_2, a_3，a_4线性无关，证明：（1）a_1能由a_2, a_3线性表示；

（2）a_4不能由a_1, a_2, a_3线性表示.

证：(1)因为a_2, a_3，a_4线性无关，由定理5（1）知a_2, a_3无关，又因为a_1, a_2, a_3线性相关，再根据定理5（3）a_1能由a_2, a_3线性表示.

(2) 用反证法. 设a_4能由a_1, a_2, a_3线性表示，又由（1）知a_1能由a_2, a_3线性表示，故a_4能由a_2, a_3线性表示，这与a_2, a_3，a_4线性无关矛盾，所以）a_4不能由a_1, a_2, a_3线性表示.

§3 向量组的秩



课本P. 88定理4：

- 向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性相关**的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩**小于**向量的个数 m；
- 向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ **线性无关**的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩**等于**向量的个数 m .

n元线性方程组 $Ax = b$ 其中 A 是 $n\times m$ 矩阵		矩阵 (A, b)		向量组 A: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 及 向量 b	
是否存在解?		$R(A) = R(A, b)$ 成立?		向量 b 能否由向量组 A线性表示?	
无解		$R(A) < R(A, b)$		NO	
有解		$R(A) = R(A, b)$		YES x 的分量是线性组合的系数	
	唯一解		$R(A) = R(A, b)$ = 未知数个数		表达式唯一
	无穷解		$R(A) = R(A, b)$ < 未知数个数		表达式不唯一

回顾：矩阵的秩

定义：在 $m \times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k \le m$，$k \le n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 **k 阶子式**.

规定：零矩阵的秩等于零.

定义：设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

结论： 矩阵的秩

= 矩阵中最高阶非零子式的阶数

= 矩阵对应的行阶梯形矩阵的非零行的行数

一、向量组的秩的概念

定义1 设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \ldots, a_r$，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**最大线性无关向量组(Maximal system of linear independence)**，简称**最大无关组**.

最大无关组所含向量个数 r 称为**向量组 A 的秩(Rank of vector system)**，记作 R_A .

二、最大无关组的求法

例1： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式．并求其列向量组和行向量组的秩.

解： (1) 第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故 $R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & -6 & -2\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & -6 & -2\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

结论：矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的，但矩阵的秩是唯一的.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

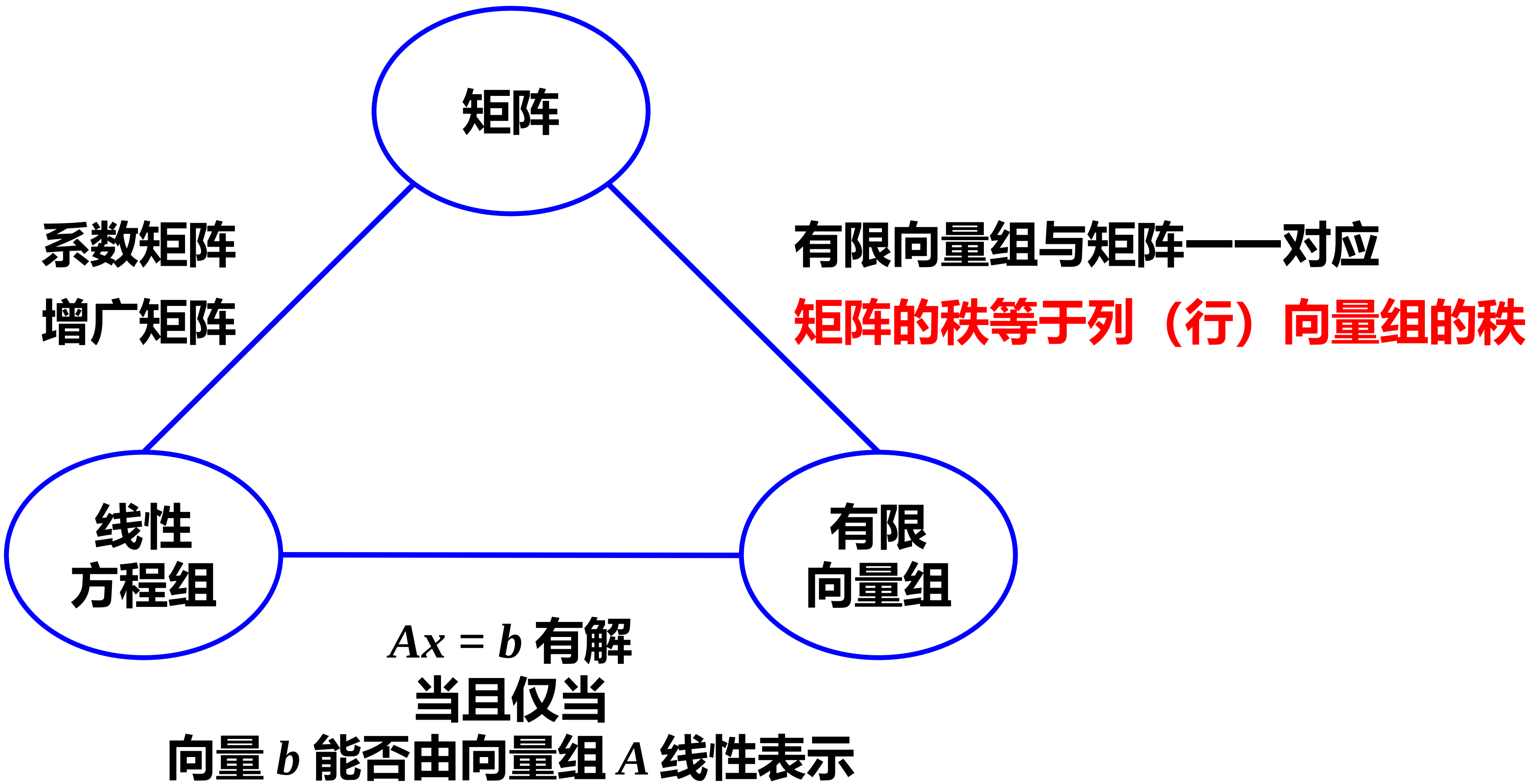
(2)

- 根据 $R(A_0)=3$ 可知：A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个线性无关的部分组.
- 在矩阵 A 任取 4 个列向量，根据 $R(A)=3$ 可知：A中所有4 阶子式都等于零，从而这 4 个列向量所对应的矩阵的秩小于 4，即这 4 个列向量线性相关.
- A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大线性无关组.
- 矩阵 A 的列向量组的秩等于 3.
- 同理可证，矩阵 A 的行向量组的秩也等于 3.

一般地，

⑩ **矩阵的秩等于它的列向量组的秩．**

矩阵的秩等于它的行向量组的秩． **(P.90 定理6)**



备注：

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩．

  矩阵的秩等于它的行向量组的秩． **（P.90 定理6）**

- 今后，向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 的秩也记作 $R(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ．

- 若D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组，D_r 所在的 r 行是 A 的行向量组的一个最大无关组．

- 向量组的最大无关组一般是不唯一的．

例2： 已知 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组a_1, a_2 的线性相关性．并求其最大无关组.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2) = 2$，故向量组 a_1, a_2 线性无关，

同时， $R(a_1, a_2, a_3) = 2$，故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关，

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

事实上， a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是最大无关组.

三、向量组与其最大无关组的关系

结论：向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价.

证：只需证明向量组 A 与 A_0 可以互相线性表示即可.

先证向量组 A 能由向量组 A_0 线性表示即可.

设 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ **，而** $A_0: a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ **是其一个任意最大无关组，则显然** A_0 **的每个向量都能由向量组** A_0 **线性表示，即**

$$a_{i_k} = 0a_{i_1} + 0\,a_{i_2} +, \cdots, +1a_{i_k} +, \cdots, +0\,a_{i_r}, k = 1,2, \cdots, r$$

又因为 A_0 是向量组 A 的最大无关组，所以A 中任意 向量

$a_j, j \neq i_1, \cdots, i_k$ 添加到 A_0 后的 r+1 个向量 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}, a_j$

必线性相关. 于是 $a_j, j \neq i_1, \cdots, i_k$ 也能由向量组 A_0 线性表示，
故向量组A 能由向量组 A_0 线性表示.

反之，向量组 A_0 也能由向量组 A 线性表示，只需

$$a_{i_k} = 0a_1 + 0\,a_2 +, \cdots, +1a_{i_k} +, \cdots, +0\,a_m, k = 1,2, \cdots, r$$

所以向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

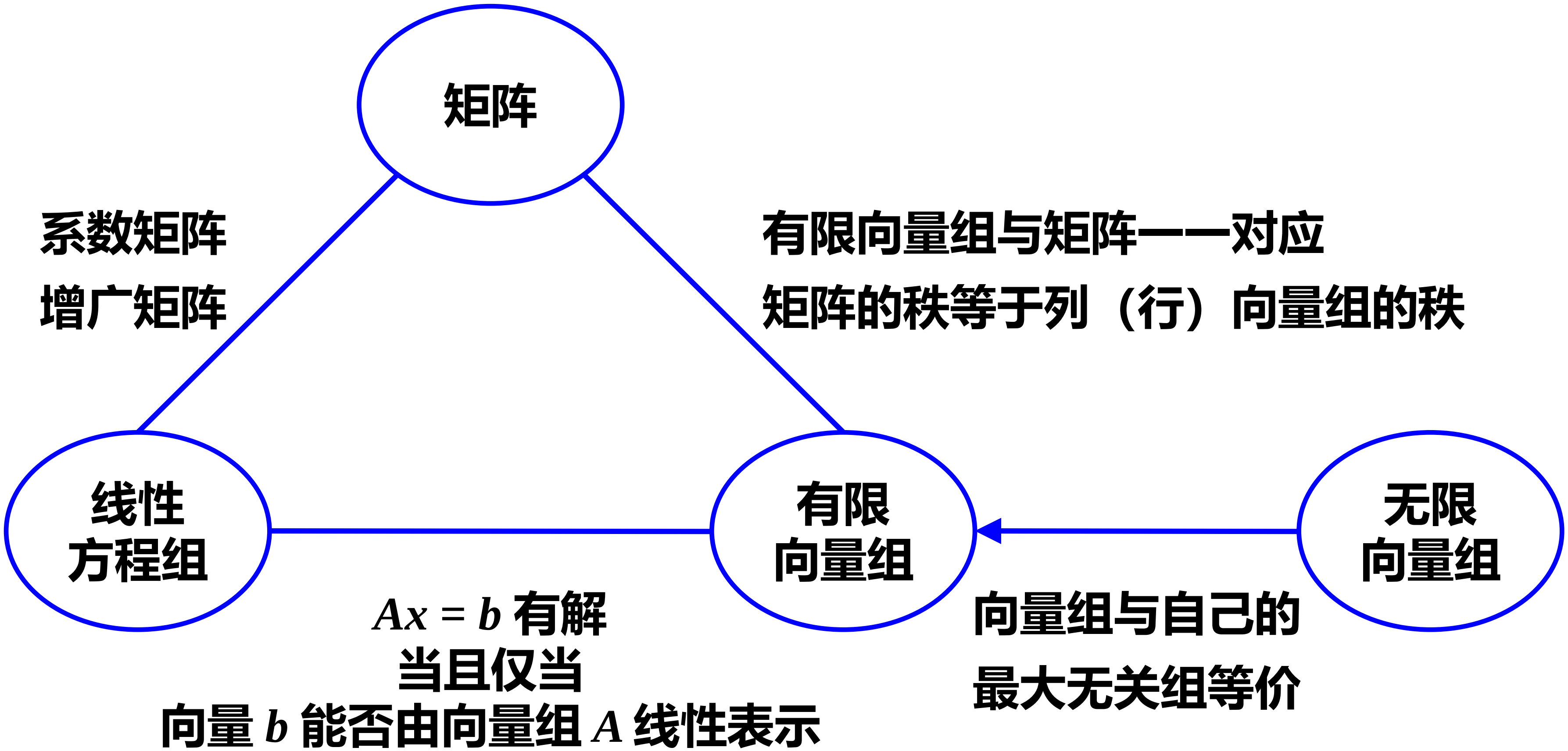
推论： 设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 a_1, $a_2, \dots, a_r$，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

证： 由已知条件可知，向量组 A 与向量组 A_0 等价，所以 $R(A)=R(A_0)$. 故向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩
线性
方程组
有限
向量组
无限
向量组
$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示
向量组与自己的
最大无关组等价

四、最大无关组的意义

结论：向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

- 用 A_0 来代表 A，掌握了最大无关组，就掌握了向量组的全体.

  特别，当向量组 A 为无限向量组，就能用有限向量组来代表.

- 凡是对有限向量组成立的结论，用最大无关组作过渡，立即可推广到无限向量组的情形中去.

例3： 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩.

解： n 阶单位矩阵 $E=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个最大无关组，R^n 的秩等于n .

思考： n阶上三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个最大无关组吗?

例4： 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2 \qquad -x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的通解是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩.

解：已知方程组通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $A: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 则显然向量组 A 线性无关.

而齐次线性方程组 的解全体解向量构成的向量组 S 的每个向量都可以由向量组 A 线性表示，故向量组 A 是向量组 S 的一个最大无关组，所以 $R(S)=2$.

例5：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **的列向两组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示**

解： 1．先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2．$R(A)=3$．即列向量组的秩等于 3．

3．取行阶梯形矩阵中首个非零元所在的列，与之对应的是选取 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组.

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

思考：如何把 a_3, a_5 表示成 a_1, a_2, a_4 的线性组合?

思路1：利用P.83 定理1 的结论

向量 b 能由向量组 A 线性表示	$\Leftrightarrow$	线性方程组 $Ax=b$ 有解	令 $A_0=(a_1, a_2, a_4)$ 求解 $A_0x=a_3$ $A_0x=a_5$

思路2：利用矩阵 A 的行最简形矩阵.

解（续）：为把 a_3, a_5 表示成a_1, a_2, a_4 的线性组合，把矩阵 A 再变成行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

于是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$，即

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 = 0$$

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + x_4 b_4 + x_5 b_5 = 0$$

同解.

即矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的列向量组有相同的线性关系.

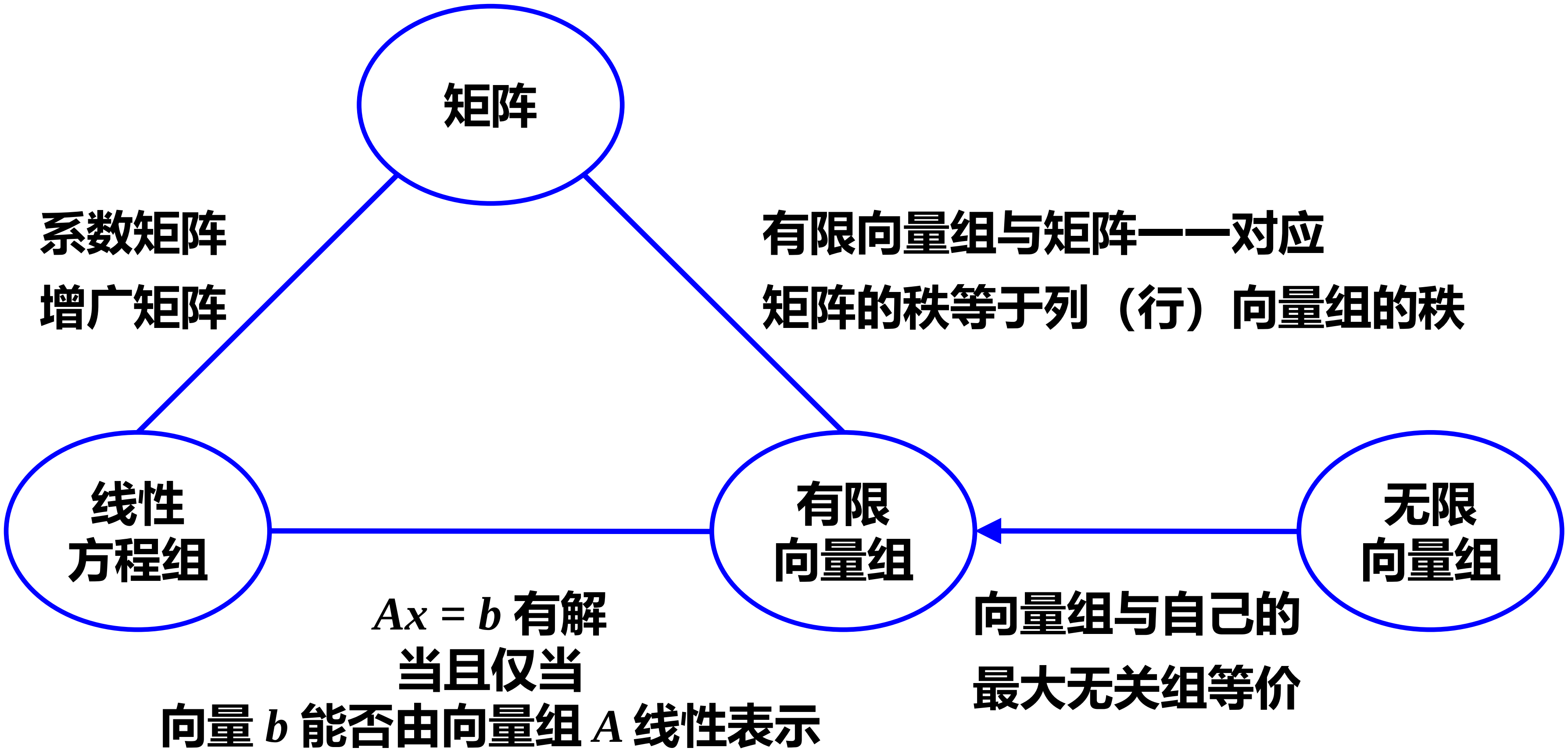
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

可以看出：

$$b_3 = -b_1 - b_2$$
$$b_5 = 4b_1 + 3b_2 - 3b_4$$

所以

$$a_3 = -a_1 - a_2$$
$$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4$$


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩
线性
方程组
有限
向量组
无限
向量组
$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示
向量组与自己的
最大无关组等价

§3 向量组的秩(续)

设有向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$，则

定理1 **向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R(A) = R(A, b)}$

$$\Leftrightarrow \quad R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = R(a_1, a_2, \cdots, a_m, b).$$

定理2 **向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R(A) = R(A, B)}$

$$\Leftrightarrow \quad R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = R(a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_l).$$

推论 **向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R(A) = R(B) = R(A, B)}$

$$\Leftrightarrow \quad R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = R(b_1, b_2, \cdots, b_l).$$

定理3 **向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{R(B) \le R(A)}$

$$\Leftrightarrow \quad R(b_1, b_2, \cdots, b_l) \le R(a_1, a_2, \cdots, a_m).$$

五、向量组的线性表示与向量组的秩

定理2' 向量组 B 能由向量组 A 线性表示的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

证： 设向量组 A 和 B 的极大无关组分别为 $A_0:a_1,a_2,\cdots,a_r$ 和 $B_0:b_1,b_2,\cdots,b_t$，则向量组 A 与 A_0，B 与 B_0 等价. 故向量组 B 能由 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 向量组 B_0 能由 A_0 线性表示 $\Leftrightarrow$ $R(A_0)=R(A_0,B_0)$. 又因为 $R(A)=R(A_0)$ 且 $R(A,B)=R(A_0,B_0)$，故 $R(A)=R(A,B)$.

推论1 向量组 b 能由向量组 A 线性表示的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)$.

推论2 向量组 A 与向量组 B 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)=R(A,B)$.

定理3' **向量组** B **能由向量组** A **线性表示，则** $R(B) \le R(A)$.

证： **设** $R(A) = r$ **，** $R(B) = t$ **且两个向量组的**极大无关组分别为 $A_0 : a_1, a_2, \cdots, a_r$ **和** $B_0 : b_1, b_2, \cdots, b_t$

则向量组 B_0 能由 A_0 线性表示，**再由定理 3得** $R(b_1, b_2, \cdots, b_t) \le R(a_1, a_2, \cdots, a_r)$, **即** $t \le r$.

六、向量组的线性相关性与向量组的秩

定理5 设有向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$, 则

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(a_1, a_2, \cdots, a_m) < m$;

向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow$ $R(a_1, a_2, \cdots, a_m) = m$.

证： 由定理2.4可知，向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(A) < m$; 又因为 $R(A) = R(a_1, a_2, \cdots, a_m)$,

故向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(a_1, a_2, \cdots, a_m) < m$;

同理可证向量组线性无关的充要条件.

例 6 设向量组 B 能由向量组 A 线性表示，且它们的秩相等，证明向量组 A 与向量组 B 等价.

证： 已知向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则由定理 2 可知，$R(A)=R(A,B)$. 又因 $R(A)=R(B)$，故 $R(A)=R(B)=R(A,B)$. 再由定理4，向量组 A 与 B 等价.

§4 线性方程组的解的结构

回顾：线性方程组的解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = \mathrm{R}(A, b)$，并且
   - 当$R(A) = R(A, b) = n$时，方程组有唯一解；
   - 当$R(A) = R(A, b) < n$时，方程组有无限多个解.

引言

问题： 什么是线性方程组的解的结构?

答： 所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系.

备注：

- 当方程组存在唯一解时，无须讨论解的结构.
- 下面的讨论都是假设线性方程组有解.

一、解向量的定义

定义1 设有齐次线性方程组 $Ax=0$，如果

$$x_1=\xi_{11},\quad x_2=\xi_{21},\quad \dots,\quad x_n=\xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组的**解向量**（solution vector）.

二、齐次线性方程组的解的性质

性质1： 若 $x = \xi_1$， $x = \xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

证明： $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$.

性质2： 若 $x = \xi$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，k 为实数，则 $x = k\xi$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

证明： $A(k\xi) = k(A\xi) = k\,0 = 0$.

结论： 若 $x = \xi_1$, $x = \xi_2$, ...,, $x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解， 则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

结论：若 $x=\xi_1$, $x=\xi_2$, ...,, $x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

- 已知齐次方程组 $Ax=0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解.
- 能否通过**有限个解向量的线性组合**把 $Ax=0$ 的解全部表示出来?
- 把 $Ax=0$ 的全体解组成的集合记作 S，若求得 S 的一个最大无关组 S_0：$x=\xi_1$, $x=\xi_2$, ...,, $x=\xi_t$，那么 $Ax=0$ 的通解可表示为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$.
- 齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的**基础解系**（不唯一）.

三、基础解系的概念

定义2 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 如果满足

① $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 线性无关；

② 方程组中任意一个解都可以表示 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个**基础解系**（**Basic solution system**）.

注： 齐次线性方程组的基础解系不唯一.

问： 如何求齐次线性方程组的基础解系？

用初等变换法求方程组的基础解系.

设 $R(A)=r$，为叙述方便，

不妨设 A 行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \quad x_2 \quad\quad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \quad\quad\quad \cdots\cdots \\ \quad\quad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \quad\quad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, …, $x_n = c_{n-r}$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$. （满足基础解系②）

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=\left(\begin{array}{cccc}
-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r}\\
-b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
-b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r}\\
1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{前 } r \text{ 行}\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{后 } n-r \text{ 行}
\end{array}$$

$$n-r\text{ 列}$$

故 $R(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r})=n-r$ **,**

即 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ **线性无关.　（满足基础解系①）**

于是 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ **就是齐次线性方程组** $Ax=0$ **的基础解系.**

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

线性方程组
的通解

令 $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, …, $x_n = c_{n-r}$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.　（满足基础解系②）

法二：

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{-b_{11}} x_{r+1} \boxed{-b_{12}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{1,n-r}} x_n, \\ x_2 = \boxed{-b_{21}} x_{r+1} \boxed{-b_{22}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{2,n-r}} x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = \boxed{-b_{r1}} x_{r+1} \boxed{-b_{r2}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{r,n-r}} x_n. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为 $Ax = 0$ 的基础解系.

通解为

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

定理 设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

证明同上.

例1 **求齐次线性方程组** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ **的基础解系.**

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

令$x_3 = c_1$， $x_4 = c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 - 4c_2 \\ -2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

因为

- ✓ 方程组的任意一个解都可以表示为ξ_1, ξ_2的线性组合.
- ✓ ξ_1, ξ_2的四个分量不成比例，所以 ξ_1, ξ_2线性无关.

所以ξ_1, ξ_2是原方程组的一个基础解系.

方法2：先求出基础解系，再写出通解.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \quad -3x_3+4x_4=0\\ \quad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\ x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

还能找出其它基础解系吗?

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

问题：是否可以把 x_1 选作自由变量?

答：可以，因为是否把系数矩阵化为行最简形矩阵，其实并不影响方程组的求解．当两个矩阵行等价时，以这两个矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组同解．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-3&-4&1&0\\-2&-3&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_1-4x_2+x_3=0\\-2x_1-3x_2+x_4=0\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_3=3x_1+4x_2\\x_4=2x_1+3x_2\end{cases}$$

令 $x_1=c_1$， $x_2=c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\3c_1+4c_2\\2c_1+3c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\3\end{pmatrix}=c_1\eta_1+c_2\eta_2$$

从而可得另一个基础解系：η_1和 η_2 .

定理： 设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

例： 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，证明 $R(A) = R(B)$.

例： 设 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$ （零矩阵），证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

例： 证明 $R(A^{\mathrm{T}} A) = R(A)$.

非齐次线性方程组的解的性质

性质3： 若 $x=\eta_1$， $x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ （导出组）的解.

证明： $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$.

性质4： 若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 还是 $Ax=b$ 的解.

证明： $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$.

根据性质3 和性质4 可知

- ⑩ **若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解， $x = \xi$ 是 $Ax = 0$ 的解，那么 $x = \xi + \eta^*$ 也是 $Ax = b$ 的解.**
- ⑩ **设 $Ax = 0$ 的通解为 $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.**

于是 $Ax = b$ 的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

例：求线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_4=5 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ **的通解.**

解：容易看出 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ **是方程组的一个特解 .**

其对应的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$

根据前面的结论，导出组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

于是，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\eta} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}^* = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上节内容回顾

一、齐次线性方程组的解的性质

性质1：若 $x=\xi_1$， $x=\xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 还是 $Ax=0$ 的解.

性质2：若 $x=\xi$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，k 为实数，

则 $x=k\xi$ 还是 $Ax=0$ 的解.

结论：若 $x=\xi_1$, $x=\xi_2$, …,, $x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$

的解， 则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

二、基础解系的概念

定义1 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ 如果满足

① ξ_1，ξ_2，…，ξ_r 线性无关；

②方程组中任意一个解都可以表示 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ 的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个**基础解系**（Basic solution system）.

注： 齐次线性方程组的基础解系不唯一.

求齐次线性方程组的基础解系的方法：

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系.

方法2：对自由未知量取一些特殊的值，构造基础解系.

三、非齐次线性方程组的解的性质

性质3： 若 $x=\eta_1$， $x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ (导出组) 解.

性质4： 若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 还是 $Ax=b$ 的解.

根据性质3 和性质4 可知

- 若 $x=\eta^*$ 是 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是 $Ax=0$ 的解，那么 $x=\xi+\eta^*$ 也是 $Ax=b$ 的解.
- 设 $Ax=0$ 的通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_{n-r}\xi_{n-r}$.

于是 $Ax=b$ 的通解为

$$\eta=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$$

§5 向量空间

一、封闭的概念

定义1 所谓**封闭**，是指集合中任意两个元素作某一运算得到的结果仍属于该集合.

例1 试讨论下列数集对四则运算是否封闭?

(1) 整数集 Z； (2) 有理数集 Q; (3) 实数集 R.

证： (1) 对 $\forall a,b\in Z$, 有$(a\pm b)\in Z$, $ab\in Z$，故整数集对加减乘三种运算封闭.但可有 $(a\div b)\notin Z$, 故整数集对除法运算不封闭.

(2）有理数集 Q 对四则运算封闭;

(3）实数集 R 对四则运算封闭;

二、向量空间的概念

定义2 设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的加法和乘数两种运算封闭，

具体地说，就是：

若 $a \in V$， $b \in V$，则 $a + b \in V$． （对加法封闭）

若 $a \in V$， $\lambda \in R$，则 $\lambda a \in V$． （对乘数封闭）

那么就称集合 V 为**向量空间**(*Vector space*)．

例2　下列哪些向量组构成向量空间?

(1) n 维向量的全体R^n;

(2) 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$;

(3) 集合 $V_2 = \{ (1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$;

(4) 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$;

(5) 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$.

解: (1) 因为 $\theta = (0,0,\cdots,0)^T \in R^n$, 所以集合 $R^n \neq \phi$. 又因为

对 $\forall a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in R^n$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in R^n$, 和 $\forall k \in R$,

有 $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T \in R^n, ka = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)^T \in R^n$,

故集合 R^n 是向量空间.

(2) 显然 $\theta=(0,0,\cdots,0)^T\in V_1$, 故集合 $V_1\neq\phi$. 又因为对 $\forall X=(0,x_2,\cdots,x_n)^T\in V_1$, $Y=(0,y_2,\cdots,y_n)^T\in V_1$, 和 $\forall k\in R$ 有

$$X+Y=(0,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^T\in V_1,\quad kX=(0,kx_2,\cdots,kx_n)^T\in V_1,$$

故集合 V_1 是向量空间.

(3) 集合 $V_2 = \{ (1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$不是向量空间.

因为 $(1,0,\cdots,0)^T\in V_2$, 所以集合 $V_2\neq\phi$. 但是对任意的 $\forall X=(1,x_2,\cdots,x_n)^T\in V_2$, $Y=(1,y_2,\cdots,y_n)^T\in V_2$, 和 $1\neq k\in R$,

$$X+Y=(2,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^T\notin V_2,\quad kX=(k,kx_2,\cdots,kx_n)^T\notin V_2.$$

(4) 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$;

因为 $\theta = (0,0,\cdots,0)^T \in S_1$，故集合 $S_1 \neq \phi$. 又根据齐次线性方程组解的性质，若 $\eta_1, \eta_2 \in S_1$，则 $\eta_1 + \eta_2 \in S_1$，**且对** $\forall k \notin R$ **也有** $k\eta_1 \in S_1$，**故集合** S_1 **是向量空间.**

(5) 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$.

若 $S_2 = \phi$，**则它不是向量空间. 若** $S_2 \neq \phi$， **则假设** $\xi_1, \xi_2 \in S_2$，**则** $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = b + b = 2b$， **所以** $\xi_1 + \xi_2 \notin S_2$，**故集合** S_2 **仍不是向量空间.**

定义3 齐次线性方程组的解集称为齐次线性方程组的解空间(*Solution space*).

例3 设 a, b 为两个已知的 n 维向量，集合

$$L = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$$

是一个向量空间吗?

解: 显然 $a, b \in L$，所以 L 是非空集合.

设 $x_1 = \lambda_1 a + \mu_1 b,\ x_2 = \lambda_2 a + \mu_2 b \in L$，$k \in R$，则因为

$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 a + \mu_1 b) + (\lambda_2 a + \mu_2 b)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)\, a + (\mu_1 + \mu_2)\, b \in L$$

$$k\, x_1 = k\,(\lambda_1 a + \mu_1 b) = (k\lambda_1)\, a + (k\mu_1)\, b \in L$$

所以，L 是一个向量空间.

定义4 把集合 $L = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$ 称为**由向量 a, b 所生成的向量空间（The vector space generated by vector a and b）**.

一般地，把集合

$$L = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R\}$$

称为**由向量 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 所生成的向量空间**.

例4 设向量组 A: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和 B: $b_1, b_2, \ldots, b_s$ 等价，记

$$L_1 = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R\},$$

$$L_2 = \{\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_s b_s \mid \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s \in R\},$$

试证 $L_1 = L_2$.

解：只需证 $L_1 \subseteq L_2$ 且 $L_2 \subseteq L_1$.

设 $a \in L_1$，则 a 可由 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示.

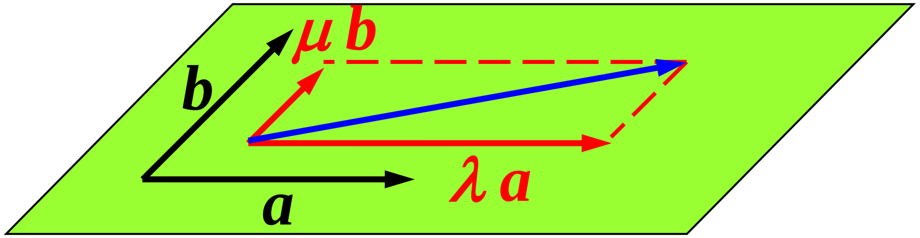
又因为向量组 A 和 B 等价，所以 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 可由 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 线性表示，故 a 也可由 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 线性表示，所以 $a \in L_2$. 故 $L_1 \subseteq L_2$.

同理可证，若 $a \in L_2$ 则 $a \in L_1$, 因此 $L_2 \subseteq L_1$.

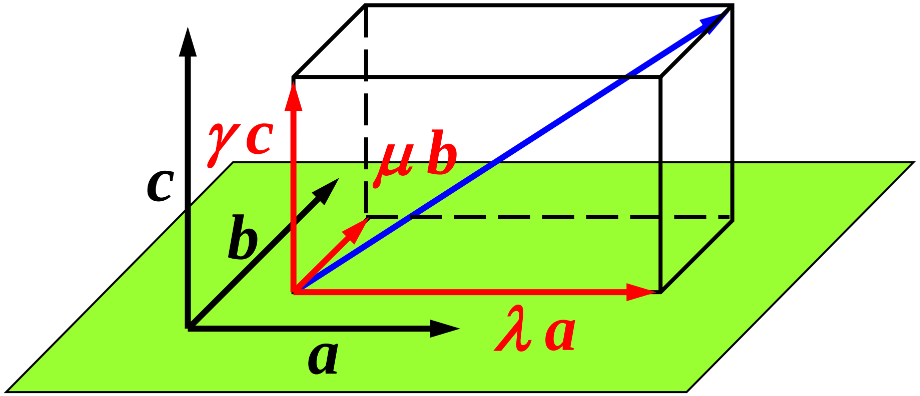
因为 $L_1 \subseteq L_2$，$L_2 \subseteq L_1$, 所以 $L_1 = L_2$,

结论：等价的向量组所生成的空间相等.

$L = \{\lambda\, a \mid \lambda \in R\}$



$L = \{\lambda\, a + \mu\, b \mid \lambda, \mu \in R\}$



$L = \{\lambda\, a + \mu\, b + \gamma\, c \mid \lambda, \mu, \gamma \in R\}$

子空间的概念

定义： 如果向量空间 V 的非空子集合 V_1 对于 V 中所定义的加法及乘数两种运算是封闭的，则称 V_1 是 V 的子空间.

例：

1. n 维向量的全体 R^n
2. 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$
3. 集合 $V_2 = \{ (1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$

解： V_1 是 R^n 的子空间，V_2 不是 R^n 的子空间.

向量空间	→	**向量组**
向量空间的基	→	**向量组的最大无关组**
向量空间的维数	→	**向量组的秩**

三、向量空间的基与维数

定义5 设有向量空间 V，如果在 V 中能选出 r 个向量 a_1，$a_2, \ldots, a_r$，满足

① $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关；

② V 中任意一个向量都能由 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性表示；

那么称向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基(*Basis of a vector space*)．r 称为向量空间 V 的维数 (*Dimension of a vector space*)，并称 V 为 r 维向量空间（ *r dimensional vector space*) .

例5 求下列向量空间的维数.

(1) n 维向量的全体 R^n

解： n 维单位坐标向量组是 R^n 的一个基，故R^n 的维数等于 n .

(2) 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

解： $n-1$个单位坐标列向量 $e_2, e_3, \cdots, e_n$ 是V_1 的一个基，故 V_1 的维数等于 $n-1$.

(3) n 元齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

解： 齐次线性方程组的基础解系是 S_1 的一个基，故 S_1 的维数等于 $n-R(A)$.

(4) 由$a_1, a_2, ..., a_m$所生成的向量空间

$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R \}.$$

解：若 $a_1, a_2, ..., a_m$ 线性无关，则$a_1, a_2, ..., a_m$ 是向量空间 L 的一个基.

若 $a_1, a_2, ..., a_m$ 线性相关，则向量组 A：$a_1, a_2, ..., a_m$ 等价于其最大无关组 A_0：$a_1, a_2, ..., a_r$，从而

$$L = L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in R \}$$

故向量组 A_0 就是 L 的一个基， A_0中向量的个数就是 L 的维数.

定义6 如果在向量空间 V 中取定一个基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$，那么V中任意一个向量 x 可唯一表示为

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r$$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 中的**坐标** (*Coordinate*).

例6 $E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^3 的一个基，

那么 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$

b 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标

上三角形矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的列向量组也是 R^3 的一个基，那么

$$\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-3a_1-2a_2+7a_3$$

b 在基 a_1, a_2, a_3 中的坐标

结论：同一个向量在不同基中的坐标是不同的.

一般地

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

***n* 维单位坐标向量组**称为 R^n 的**自然基(*natural basis*).**

例7 设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证a_1, a_2, a_3是R^3的一个基，并求 b_1, b_2 在这个基中的坐标.

分析:

- a_1, a_2, a_3 是 R^3 的一个基 $\Leftrightarrow$ $R(a_1, a_2, a_3) = 3$
- b_1, b_2 在这个基中的坐标 $\Leftrightarrow$ b_1, b_2能用 a_1, a_2, a_3线性 表示
- 当 $A \overset{r}{\sim} B'$时，A 的列向量组与B' 的列向量组有相同的线性关系．(P. 93 例11)

为此，考虑把 $(A, B) = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ 化为行最简形矩阵.

例7 设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证a_1, a_2, a_3是R^3的一个基，并求b_1, b_2在这个基中的坐标.

解:

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

于是 $b_1=\frac{2}{3}a_1-\frac{2}{3}a_2-a_3$, $b_2=\frac{4}{3}a_1+a_2+\frac{2}{3}a_3$

故b_1, b_2在基a_1, a_2, a_3中的坐标分为 $\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-1$和 $\frac{4}{3},1,\frac{2}{3}$.

四、基变换公式与坐标变换公式，过度矩阵

例8 在 R^3中取定一个基 a_1, a_2, a_3 ，再取一个新基 b_1，b_2, b_3，设 $A = (a_1, a_2, a_3)$，$B = (b_1, b_2, b_3)$.

① 求用a_1, a_2, a_3 表示 b_1, b_2, b_3 的表示式 (基变换公式)；

② 求向量在两个基中的坐标之间的关系式 (坐标变换公式).

解： (1) 根据向量组 B 能由向量组A 线性表示的充要条件，只需求解矩阵方程 $AX = B$ 即可. 解得 $X = A^{-1}B$, 即

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)P$$

其中$P= A^{-1}B$，*称为基*A到B 的过渡矩阵(*transition matrix*).

（2）设 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}_3$，且 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

是从旧坐标到新坐标的坐标转换公式.

例9 **已知R³的两组基为**

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{及} \quad b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

（1）求基 a_1,a_2,a_3 **到基** b_1,b_2,b_3 **的过度矩阵P；**

（2）向量 x **在基** a_1,a_2,a_3 **中的坐标为** $(1,1,3)^T$,

x **在基** b_1,b_2,b_3 **中的坐标.**