第4章 功和能

§4-1 功

§4-2 动能定理

§4-3 势能

§4-4 引力势能

§4-5 由势能求保守力

§4-6 功能原理和机械能守恒定律

§4-7 守恒定律的意义

§4-8 碰撞

§4-10 流体的稳定流动

§4-11 伯努利方程

§4-10 流体的稳定流动

物质常见的三种形态：气、液、固态。

流体：是对处于液态和气态的物体的统称。

✓ 流体的特性：

1. 流动性：流体物质的各部分之间发生相对运动；
2. 粘滞性：流体各部分之间发生相对运动时存在内摩擦力；
3. 压缩性：流体体积随外部压力而变化的特性。

✓ **理想流体**：**绝对不可压缩**和**完全没有黏性**的流体。

2. 稳定流动（steady flow）：又称稳流、定常流动

流体质点流经空间任一给定点的速度是确定的，且**不随时间变化**，称为**稳定流动**。 例如，沿着管道或渠道缓慢流动的水流，在一段不长的时间内可以认为是定常流动。

这是否说明：空间中各点的流速即方向和大小都一定相同？（液体在流动时，液体要时刻不停地流经空间中各点。）即 $v_a = v_b = v_c$

答：不一定。

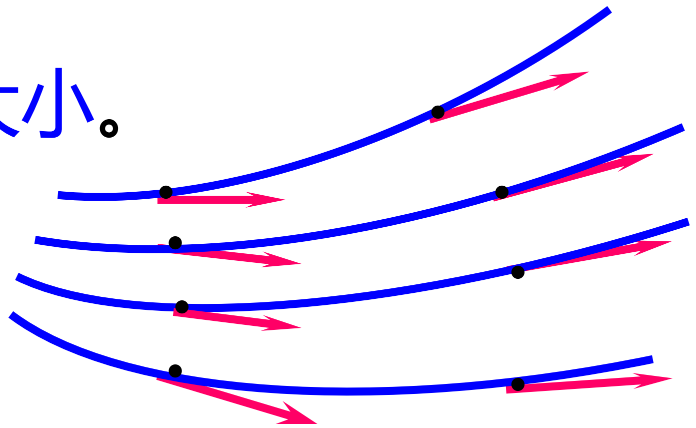
稳定流动只是说明液体在流经任一定点（如 a）时，流速的大小和方向始终不变，即 v_a 恒定，v_b 恒定， v_c 恒定……，但 $v_a \neq v_b \neq v_c$，或者说，液体在空间的速度分布不随时间变化的流动。

3、理想流体稳定流动的2个性质：

1. 管中流体每单位时间流过的体积（体积流量）qV为常量；
2. 流体每单位体积的质量（密度）也是常量。

4、流线：为了形象地描述流体的运动，在流体中画一系列曲线，每一点的切线方向与流经该点流体质点的速度方向相同。

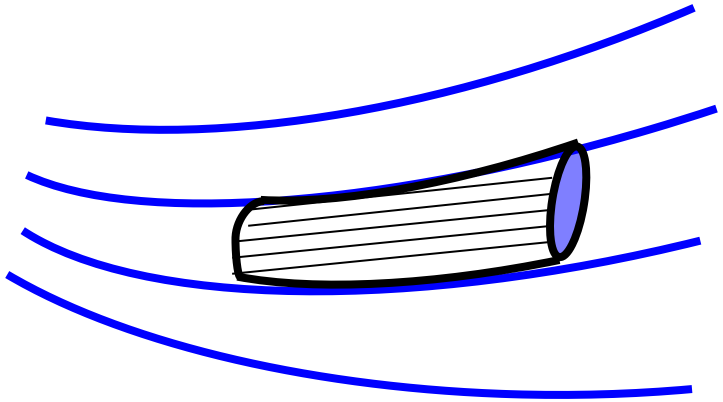
✓ 流线的走向表示速度的方向，疏密表示速度的大小。



✓ 稳定流动中的流线：

- 不随时间变化；
- 流线就是流体质点的运动轨迹；
- 任何两条流线不相交。

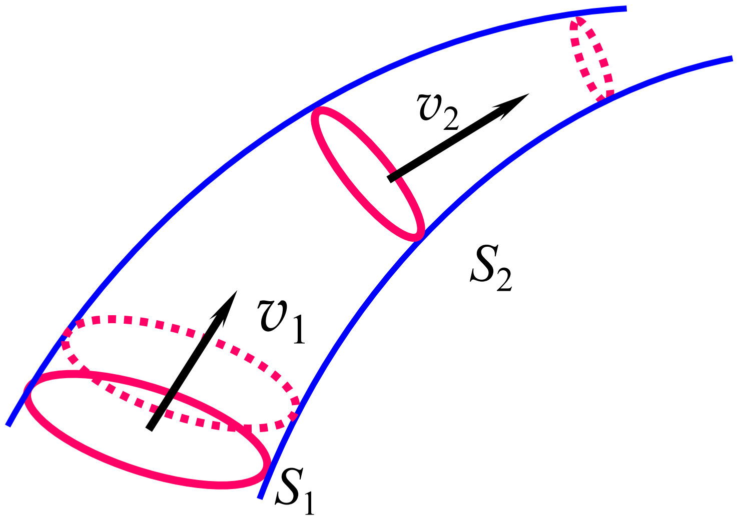
5、**流管**：流线围成的管状区域。



理想流体稳定流动中的流管性质：

- ✓ 流管内的流体不能流出管外；
- ✓ 流管外的流体不能流入管内；
- ✓ 流管就是一种无形的管道；
- ✓ 流体在流管中的运动规律代表了整个流体的运动规律，这为我们研究流体的运动提供了方便。

6、理想流体稳定流动的连续性方程



在细流管中，流体流经截面S_1和S_2的速率为v_1和v_2，在Δt时间内流过这两个截面的流体体积分别为：

$$dV_1 = S_1 v_1 dt$$

$$dV_2 = S_2 v_2 dt$$

体积流量（流量）：单位时间内流过某一截面的流体体积。

流过截面S_1和S_2的流量为：

$$\frac{dV_1}{dt} = S_1 v_1 \qquad \frac{dV_2}{dt} = S_2 v_2$$

对于不可压缩理想流体的稳流：

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{或} \quad S v = \text{恒量}$$

——理想流体稳流的连续性方程

理想流体作稳定流动时, 速率与流管截面积的乘积为恒量, 或者说速率与流管的截面积成反比。

由连续性方程可以断定，在流速大的地方，流管狭窄，流线必定密集；在流速小的地方，流管粗大，流线必定疏散。

第4章 功和能

复习：

1. **理想流体**：**绝对不可压缩** 和 **完全没有黏性**的流体。

2. **稳定流动**（steady flow）：又称稳流、定常流动

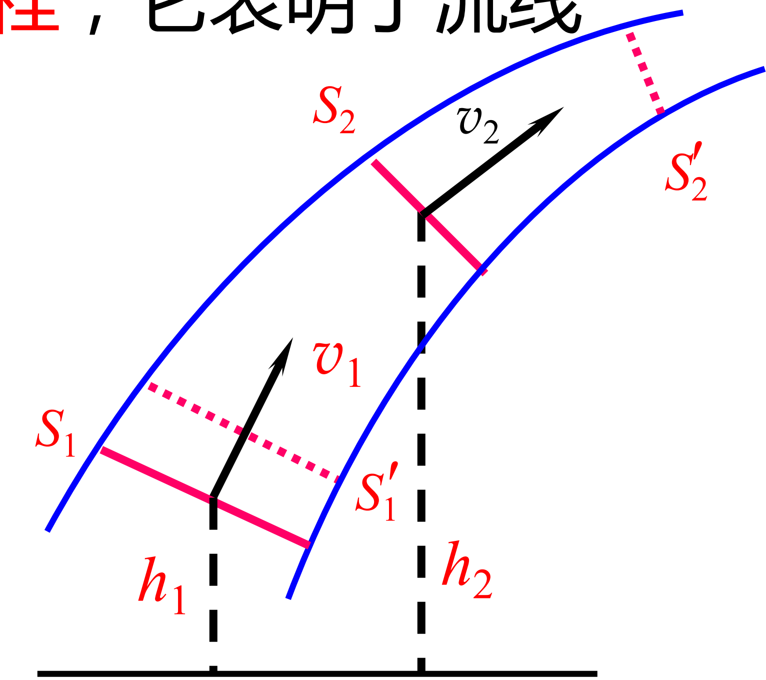
流体质点流经空间任一给定点的速度是确定的，且**不随时间变化**

3. **理想流体稳流的连续性方程**：体积流量为定值

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{或} \quad S v = \text{恒量}$$

§4-11 伯努利方程

伯努利方程是理想流体作稳定流动的基本动力学方程，它表明了流线上各点的压强、速度和高度三者关系的基本定律。



下面应用功能原理、连续性方程来推导伯努利方程：

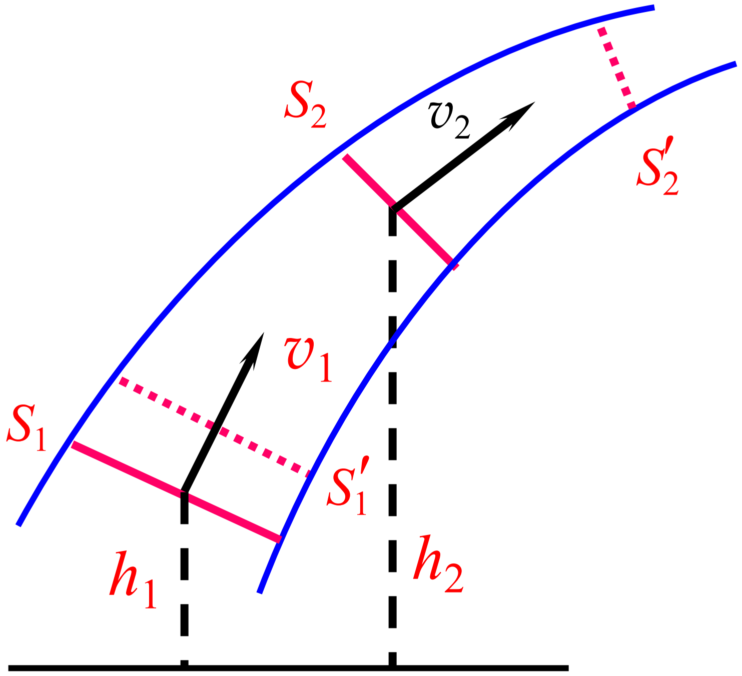
在重力场中稳流的理想流体内任取一细流管，S_1和 S_2表示两个横截面的面积，h_1 和 h_2是它们相对同一个水平参考面的高度。

由于理想流体是不可压缩的，从S_1到S_1'之间的流体质量等于从 S_2到 S_2'之间的质量Δm。

质量 Δm： $\boldsymbol{\rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt}$

质量 Δm： $\boldsymbol{\rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt}$

整个流体块从位置S_1-S_2流到位置 S_1-S_2'的过程中，机械能的增量ΔE为

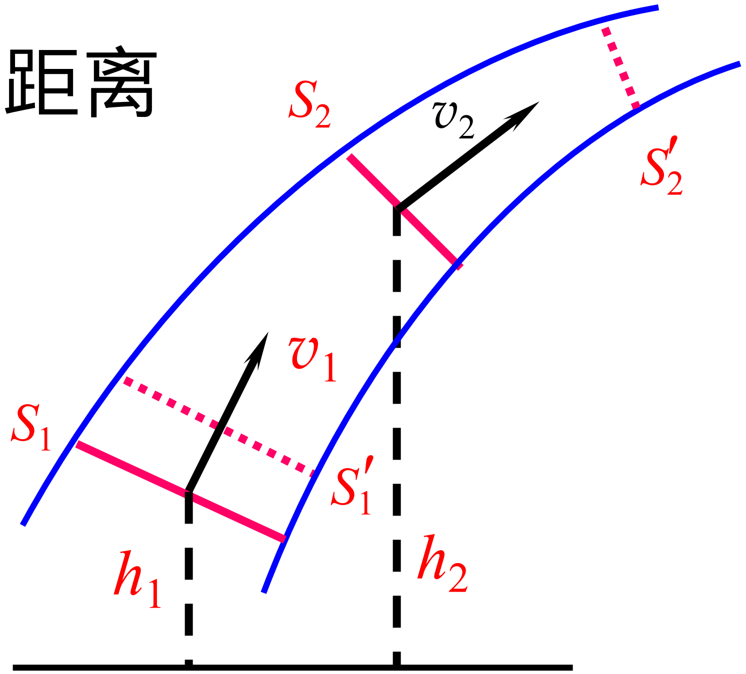


$$\boldsymbol{\Delta E = \left(E_k + E_p\right)_2 - \left(E_k + E_p\right)_1}$$

$$\boldsymbol{= \left[\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2\right] - \left[\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1\right]}$$

$$\boldsymbol{= \Delta m\left[\frac{1}{2}v_2^2 + g h_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - g h_1\right]}$$

✓ 如果作用于S_1上的压力为f_1，在 dt 内S_1移动距离$v_1 dt$到达S_1'，则 f_1作的功为：



$$f_1 = p_1 S_1$$

$$dA_1 = f_1\, dl = f_1\, v_1 dt = p_1 S_1\, v_1 dt$$

✓ 对于截面S_2，压力f_2对流体块所作的功为：

$$f_2 = p_2 S_2$$

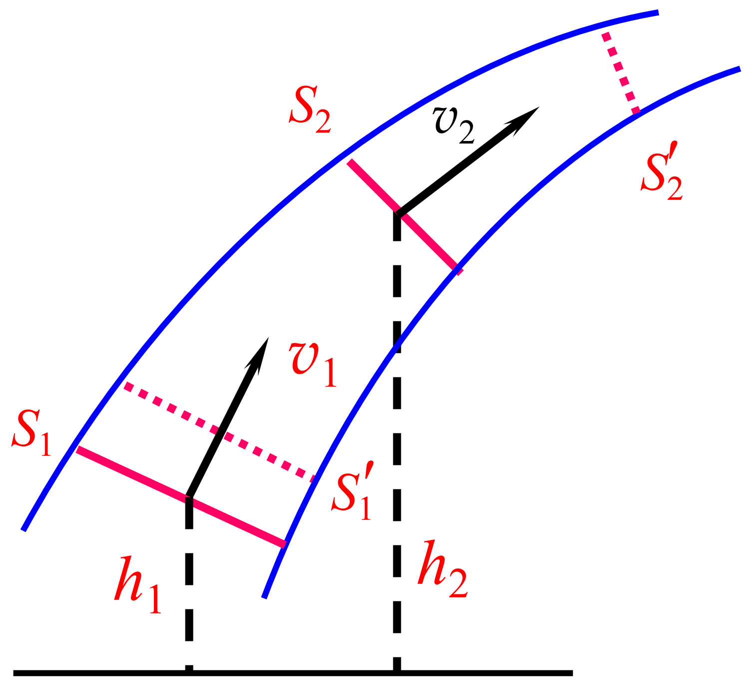
$$dA_2 = -f_2\, dl = -f_2\, v_2 dt = -p_2 S_2\, v_2 dt$$

✓ 周围流体的压力对流体块作的总功为：

$$dA = dA_1 + dA_2 = (p_1 S_1\, v_1 - p_2 S_2\, v_2) dt$$

✓ 周围流体的压力对流体块作的总功为：

$$dA = (p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2)dt$$



根据 $S_1 v_1 = S_2 v_2$, 并且

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$$

得 $$dA = p_1 \frac{\Delta m}{\rho} - p_2 \frac{\Delta m}{\rho} = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho}$$

根据功能原理 $\Delta E = dA$

$$\Delta m\left[\frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - gh_1\right] = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta m\left[\frac{1}{2}v_2^2+gh_2-\frac{1}{2}v_1^2-gh_1\right]=(p_1-p_2)\frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2}$$

去掉角标, 对于同一条细流管中的任一截面, 下面的关系总是成立的：

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g h=\text{恒量}}$$

上面两式都称为伯努利方程, 它们描述了理想流体作稳定流动时的基本规律。

讨论：

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g h=\text{恒量}}$$

（1）若理想流体沿**水平流管**作定常流动，则 $\rho g h=$ 恒量

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{恒量}$$

说明：水平流动的流管中，压强大的地方流速小，压强小的地方流速大。

由连续方程 $Sv=$ 恒量 知，管细的地方流速大，管粗的地方流速小。

推论：细管处（流速大）压强小

粗管处（流速小）压强大

讨论： $$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = 恒量}$$

（2）当流管内**流速处处相等**时, 即 $\frac{1}{2}\rho v^2 = 恒量$ ，则有：

$$p + \rho g h = 恒量$$

说明：高度低的地方压强大，高度高的地方压强小，这与流体静力学中的结果一致。

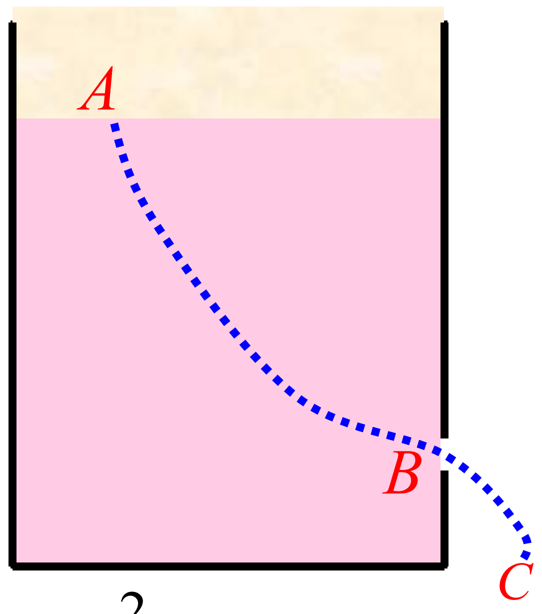
（3）当$v = 0$，流体静止时，则

$$p_A + \rho g h_A = p_B + \rho g h_B \quad 或者 \quad p_A - p_B = \rho g (h_B - h_A)$$

如果A、B两点的高度相等, 则 $p_A = p_B$

例1 求水从容器壁小孔中流出时的速率。设水面距离小孔的高度为h。

解 连接液面和小孔任取一条流线ABC (见图)。A和B分别是这条流线在水面和小孔处的两点, 在这条流线上运用伯努利方程, 得:



$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^{\ 2} + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^{\ 2} + \rho g h_B$$

A点: $P_A = P_o$; $v_A \approx 0$

B点: $P_B = P_o$ $\boldsymbol{h_A - h_B = h}$

$$\rho g h_A - \rho g h_B = \frac{1}{2}\rho v_B^{\ 2}$$

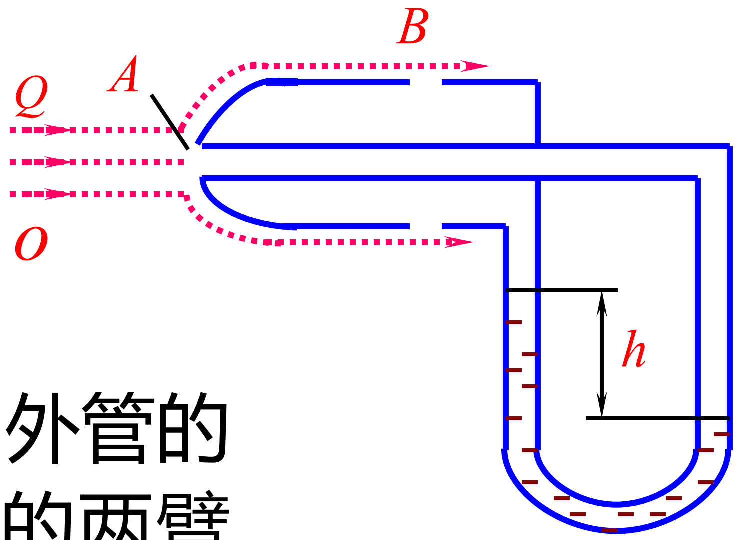
取小孔处的高度为零，则 $h_A=h$。容器的横截面比小孔的截面大得多, 根据连续性方程, $v_A \ll v_B$,故认为$v_A=0$。将以上条件代入上式, 即可求得小孔处的流速为

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

可见, 小孔处水的流速，与物体从h处自由下落到小孔处的速率是相同的。

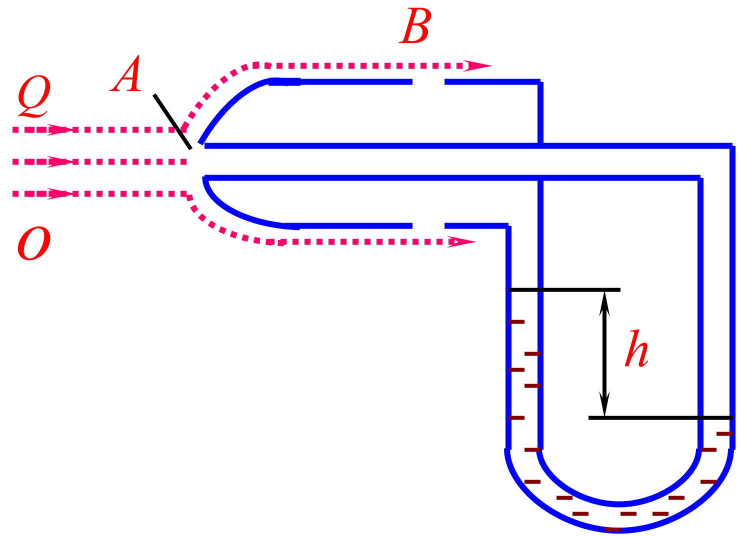
这个结论叫做托里拆利定理。对开在容器底部的小孔，结论仍然正确。小孔流速是一个很重要的实际问题，例如水库放水，就需要计算出水管道处的流速和流量，上述结论可以近似用于实际问题。

例2 皮托管是测定流体流速的仪器, 常用来测定气体的流速。



它由两个同轴细管组成，内管的开口在正前方。外管的开口在管壁上，如图中*B*所示。两管分别与U型管的两臂相连，在U型管中盛有液体(如水银)，构成了一个压强计，由U型管两臂的液面高度差*h*确定气体的流速。

解：在A处气流速率为零（？），在流线OA上运用伯努利方程，得到：



$$p_A + \rho g h_A = p_O + \rho g h_O + \frac{1}{2}\rho v_O^{\ 2}$$

对于流线QB

$$p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^{\ 2} = p_Q + \rho g h_Q + \frac{1}{2}\rho v_Q^{\ 2}$$

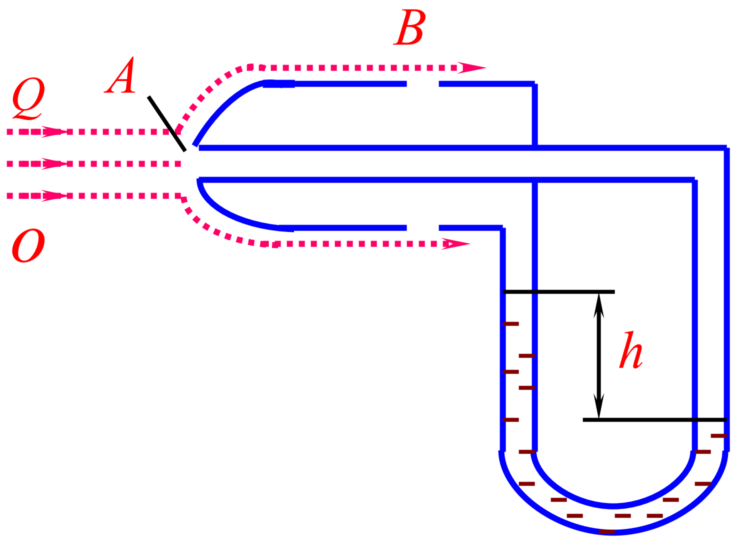
点O和点Q非常接近，可认为各量相等。又因皮托管一般都很细，点A与点B的高度相差很小，$h_A=h_B$。考虑到这些条件，得

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^{\ 2}$$

其中v_B是待测气流的流速。

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B{}^2$$

如果压强计中液体的密度为ρ'，则



$$p_A = p_B + \rho' gh$$

比较上面两式得 $\frac{1}{2}\rho v_B{}^2 = \rho' gh$

所以 $$v_B = \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}}$$

这样，就可以由压强计两液面的高度差h，计算出待测气流速率。

课后作业

请在异步SPOC上完成

1. 第四章作业： 已发布
   - ✓ 04.09日（周日） 23:30之前完成作业提交
   - ✓ 04.16日（周日）23:30之前完成作业互评
2. 单元测验（第2～4章内容）：已发布
   - ✓ 04.09日（周日）23:30之前完成提交