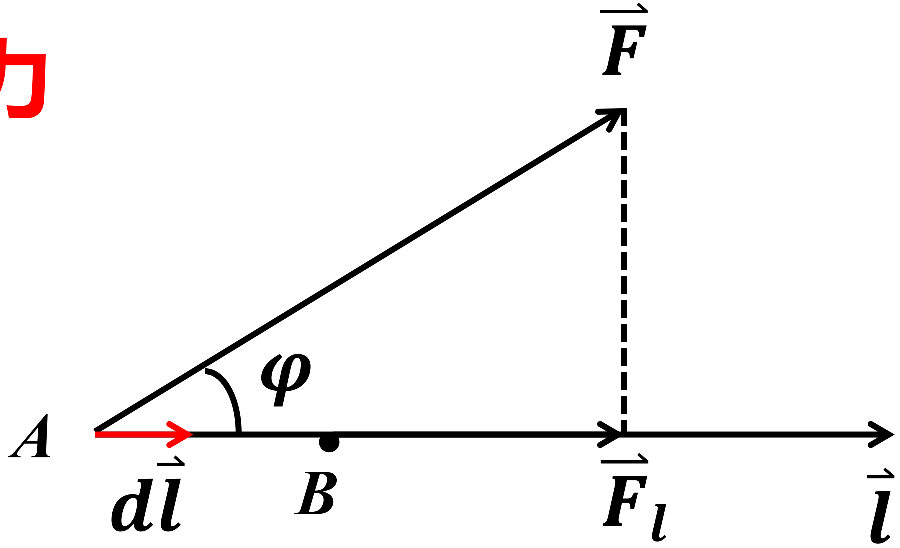
第4章 功和能

§4-5 由势能求保守力



- ✓ 保守力对路径的积分 → 势能
- ✓ 势能函数对路径的导数 → 保守力

$d\vec{l}$：质点在保守力$\vec{F}$作用下沿着给定方向$\vec{l}$，从A到B的元位移。

$$dE_P = -A = -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -F\,dl\cos\varphi$$

$$\because F\cos\varphi = F_l\,,\qquad \therefore -dE_P = F_l\,dl$$

$$\Rightarrow\quad F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

保守力沿某一给定的$\vec{l}$方向的分量，等于此保守力相应的势能函数沿$\vec{l}$方向的空间变化率的负值。

$$F_l = -\frac{dE_P}{dl}$$

三维直角坐标系中：

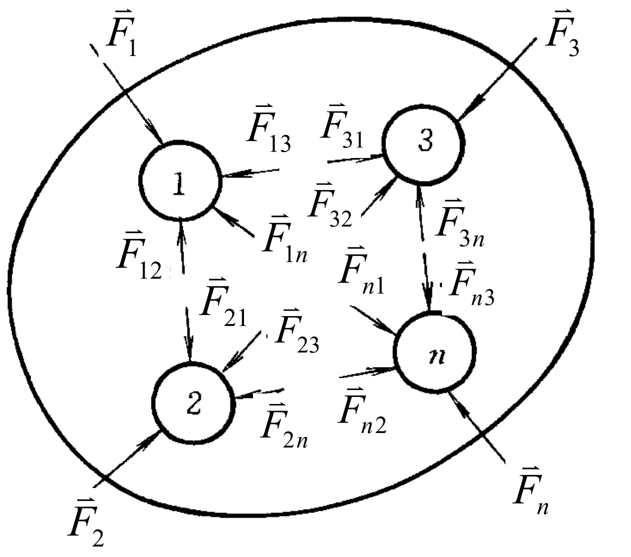
$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\Big(\underbrace{\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}}_{\text{势能梯度}}\Big)$$

直角坐标系中求保守力的最一般的公式

保守力等于相应的势能函数的梯度的负值。

§4-6 功能原理和机械能守恒定律



1、质点系的动能定理

研究对象：质点系，n个质点组成；

受力：**外力**（系统以外的力）

内力（质点间的相互作用力）

$$A_1=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2$$

$$A_2=\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2$$

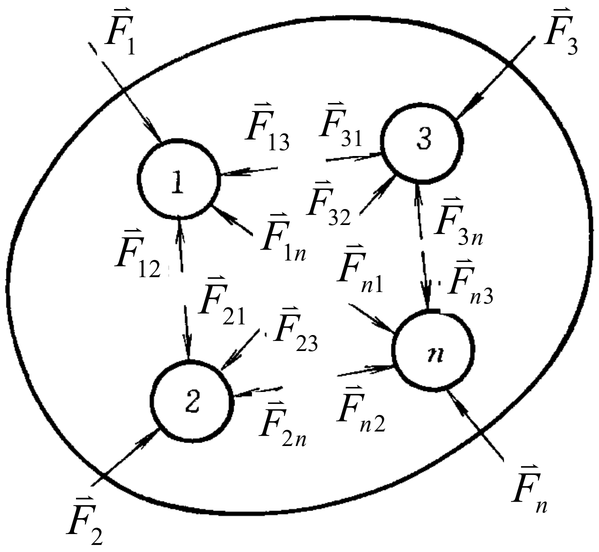
$$+\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\sum A_i=\sum\frac{1}{2}m_iv_{iB}^2-\sum\frac{1}{2}m_iv_{iA}^2$$

1、质点系的动能定理

$$\underbrace{\sum A_i}_{\substack{A \\ \overbrace{A_{外} \quad A_{内}}}} = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2}_{E_{kB}} - \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2}_{E_{kA}}$$

系统终态总动能　　系统初态总动能

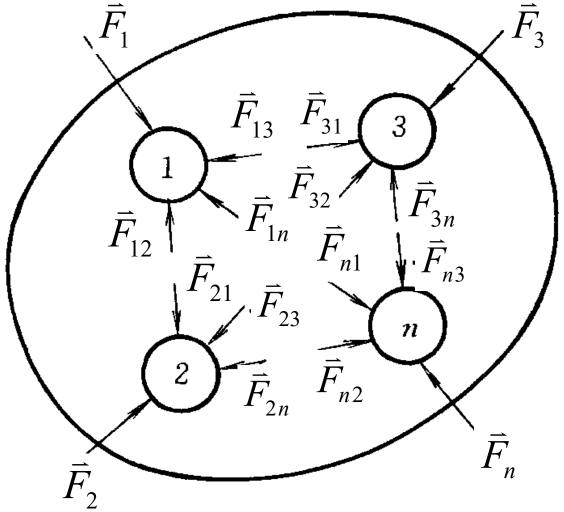


$$A_{外} + A_{内} = E_{kB} - E_{kA}$$

质点系的动能定理：外力和内力所功的代数和等于系统总动能的增量。

2、功能原理

质点系的动能定理： $A_{外}+A_{内}=E_{kB}-E_{kA}$



因为 $A_{内}=A_{保内}+A_{非保内}$

$$A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{kB}-E_{kA}$$

因为 $A_{保内}=-(E_{PB}-E_{PA})$

$$A_{外}+A_{非保内}=(E_{kB}+E_{PB})-(E_{kA}+E_{PA})$$

系统终态机械能E_B　　系统初态机械能E_A

系统的动能与势能之和称为系统的机械能，用E表示

$$A_{外}+A_{非保内}=(E_{kB}+E_{PB})-(E_{kA}+E_{PA})$$

系统终态机械能E_B　　系统初态机械能E_A

于是有 $A_{外}+A_{非保内}=E_B-E_A$

功能原理：质点系在运动过程中，它所受的外力的功和系统内非保守内力的功的代数和等于其机械能的增量。（**功-能关系**）

注意：

(1) 动能定理是以单个质点为研究对象的，而功能原理则是以质点系为研究对象的。

(2) 动能定理不涉及内力和势能的概念，而功能原理涉及。

3、机械能守恒定律

功能原理： $A_{外} + A_{非保内} = E_B - E_A$

如果 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 则有 $E_B = E_A$

或 $E_{kB} + E_{PB} = E_{kA} + E_{PA}$

机械能守恒定律：在外力和非保守内力都不作功 或 所作功的代数和为零的情况下，系统内质点的动能和势能可以互相转换，但它们的总和，即系统的机械能保持恒定。

功能原理： $A_{外}+A_{非保内}=E_B-E_A$

如果 $\vec{F}_{非保内}=0$，则为保守系统，$A_{非保内}=0$， $A_{外}=E_B-E_A$

如果 $\vec{F}_{外}=0$，则为封闭系统，$A_{外}=0$ $A_{非保内}=E_B-E_A$

如果 $\vec{F}_{非保内}=\vec{F}_{外}=0$，则为封闭的保守系统，$A_{非保内}=A_{外}=0$

机械能守恒的特例条件 $E_A=E_B$

讨论：

1. 条件：

$$A_{外} + A_{非保内} = 0 \begin{cases} \text{i) } A_{外} = 0,\ A_{非保内} = 0 \\ \text{ii) } F_{外} = 0,F_{非保内} = 0 \\ \text{iii) } A_{外} \neq 0,\ A_{非保内} \neq 0 \\ \quad\ 但\ A_{外} + A_{非保内} = 0 \end{cases}$$

封闭保守系统

2. 结论：

$$E_{\mathrm{B}} = E_{\mathrm{A}} \begin{cases} \text{i) } E_{\mathrm{k}B} = E_{\mathrm{k}A},\ E_{\mathrm{p}B} = E_{\mathrm{p}A} \\ \text{ii) } E_{\mathrm{k}B} \neq E_{\mathrm{k}A},\ E_{\mathrm{p}B} \neq E_{\mathrm{p}A} \\ 但\ E_{\mathrm{k}B} + E_{\mathrm{p}B} = E_{\mathrm{k}A} + E_{\mathrm{p}A} \end{cases}$$

注意： 如果 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 则有 $E_B = E_A$

(1) 机械能守恒定律总是对于一个确定的系统和一个确定的过程而言的。

(2) 所谓机械能守恒，是指系统在某一确定的过程中，动能和势能的总和一直保持不变，而不能仅理解为过程的始、末两状态机械能相等。

(3) 一个系统在只有保守内力作功的情况下机械能是守恒的，这表明保守内力不会使系统的机械能传递到系统以外去，也不会使系统的机械能转化为其他形式的能量，而却可以使系统自身的动能和势能之间相互转化。

如果 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 则有 $E_B = E_A$

（4）封闭系统内有非保守力作功时，机械能不守恒，能量的形式可能变化，也可能在物体之间转移。但是，能量不会消失，也不会产生，只能从一种形态转换为另一形态。这就是普遍的能量守恒定律。

任何一种“永动机”都是不存在的。

能量守恒定律是物理学中具有最大普遍性的定律之一，也是整个自然界都遵从的普遍规律，机械能守恒定律只是它在力学范围内的一个特例。

解题步骤：

1、确定研究对象

- 动能定理——物体
- 功能原理
- 机械能守恒定律

（功能原理、机械能守恒定律）系统

2、分析受力

- 外力
- 保守内力
- 非保守内力

3、选用定理，列方程

4、求解，必要时进行结果讨论

例1 求使物体脱离地球引力作用的最小速度。

(第二宇宙速度，地球的逃逸速度)

解 根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mm_{\mathrm{e}}}{R} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{e}}}{R}} = \sqrt{2gR} = 11.2\times10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由逃逸速度公式联想？

星球质量足够大以致算得的逃逸速度正好等于真空中的光速*c*，那么一切物体都不能摆脱其引力束缚而逃逸，甚至光子也不能例外，我们看不到它。

“黑洞”

附：“黑洞”的牛顿力学浅释

某恒星质量为 M 半径为 R。

欲摆脱该恒星的引力，质点 m 的逃逸速度 v 应满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \quad 得 \quad v^2 = \frac{2GM}{R}$$

若此恒星的密度很大，以至于

$$\boxed{R < \frac{2GM}{c^2} \qquad c\ 为光速}$$

则逃逸速度

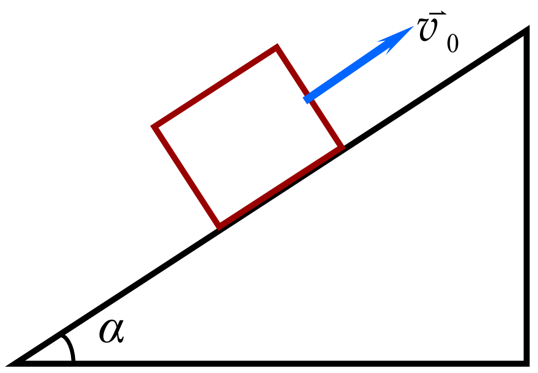
$$v > c$$

这意味着连光也逃不脱如此高密度的天体的引力，成为“黑洞”

例3 一物体以初速v_0=6.0 m·s^{-1}沿倾角为α =30° 的斜面向上运动（如图），物体沿斜面运行了s=2.0m后停止。若忽略空气阻力，试求：

(1) 斜面与物体之间的摩擦系数$\boldsymbol{\mu}$；

(2) 物体下滑到出发点的速率v。



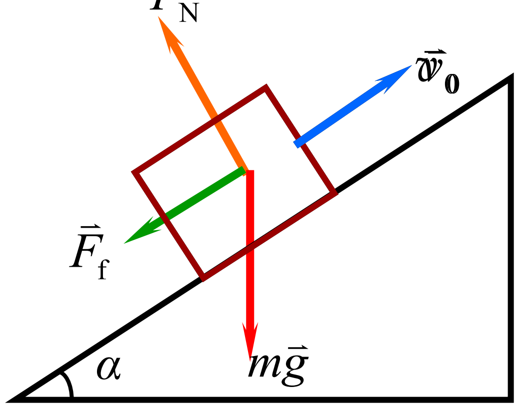
解 （1）物体沿斜面上升过程中，

根据功能原理得

$$\int_P^Q \vec{F}_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2$$

而摩擦力的大小为

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu mg\cos\alpha$$



所以 $$\int_P^Q \vec{F}_f \cdot d\vec{l} = \int_P^Q -\mu mg\cos\alpha dl = -\mu mgs\cos\alpha$$

即有 $$-\mu mgs\cos\alpha = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2$$

解得 $$\mu = \frac{\frac{1}{2}v_0^2 - gs\sin\alpha}{gs\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\times 6.0^2 - 9.8\times 2.0\times\frac{1}{2}}{9.8\times 2.0\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.48$$

（2）物体下滑到出发点过程中，根据功能原理得：

$$\int_{Q}^{C} \vec{F}_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}mv^2 - mgs\sin\alpha$$

即有 $$-\mu mgs\cos\alpha = \frac{1}{2}mv^2 - mgs\sin\alpha$$

解得 $$v = \sqrt{2(gs\sin\alpha - \mu gs\cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{2\times(9.8\times2.0\times\frac{1}{2} - 0.48\times2.0\times\frac{\sqrt{3}}{2})}\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1.8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

4、用于质心参考系的功能原理***

简单起见，假定是保守系统（ $A_{非保内}=0$ ），n个质点组成的质点系

$\vec{F}_i$：第i个质点所受的外力；

$\vec{f}_{ij}$：第i个质点所受的来自第j 个质点的内力；

由质点i的动能定理：
$$\int_A^B \vec{F}_i\, d\vec{r}_i + \sum_{j\neq i}\int_A^B \vec{f}_{ij} d\vec{r}_i = \frac{1}{2}m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2}m_i v_{iA}^2$$

质点系：对n个质点叠加：

$$\sum_i \int_A^B \vec{F}_i\, d\vec{r}_i + \sum_i \sum_{j\neq i}\int_A^B \vec{f}_{ij} d\vec{r}_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{iB}^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{iA}^2$$

$$\sum_i\int_A^B\vec{F}_i\,d\vec{r}_i+\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{iB}^2-\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{iA}^2$$

$\vec{r}_C$、$\vec{v}_C$：质心的位矢、速度；

$\vec{r}_i'$、$\vec{v}_i'$：第i个质点相对于质心参考系的位矢、速度；

则有： $\vec{r}_i=\vec{r}_i'+\vec{r}_C$　　　$\vec{v}_i=\vec{v}_i'+\vec{v}_C$

$$\sum_i\int_A^B\vec{F}_i\,d\vec{r}_C+\sum_i\int_A^B\vec{F}_i\,d\vec{r}_i'+\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_C+\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i'$$

$$=\sum_i\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{iB}'+\vec{v}_{CB})^2-\sum_i\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{iA}'+\vec{v}_{CA})^2$$

$$\int_A^B\left(\sum\vec{F}_i\right)d\vec{r}_C+\sum_i\int_A^B\vec{F}_i\,d\vec{r}_i'+\int_A^B\left(\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right)d\vec{r}_C+\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i'$$

$$=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{iB}'^2+\sum_i m_i\vec{v}_{iB}'\vec{v}_{CB}+\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{CB}^2-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{iA}'^2-\sum_i m_i\vec{v}_{iA}'\vec{v}_{CA}-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_{CA}^2$$

$$\int_A^B\left(\sum \vec{F}_i\right)d\vec{r}_C+\sum_i\int_A^B\vec{F}_i\,d\vec{r}_i'+\int_A^B\overbrace{\boxed{\left(\sum_i\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right)}}^{=0}d\vec{r}_C+\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i'$$

$$=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^2_{iB}+\underbrace{\boxed{\sum_i m_i\vec{v}'_{iB}}}_{=0}\vec{v}_{CB}+\underbrace{\boxed{\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}^2_{CB}}}_{=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CB}}-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^2_{iA}-\underbrace{\boxed{\sum_i m_i\vec{v}'_{iA}}}_{=0}\vec{v}_{CA}-\underbrace{\boxed{\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}^2_{CA}}}_{=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CA}}$$

左第1项： $\int_A^B\left(\sum \vec{F}_i\right)d\vec{r}_C=\int_A^B m\frac{d\vec{v}_C}{dt}d\vec{r}_C=\int_A^B m\vec{v}_C d\vec{v}_C=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CB}-\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CA}$

左第4项：保守力做功=势能增量的负值，可得： $\sum_i\sum_{j\neq i}\int_A^B\vec{f}_{ij}d\vec{r}_i'=E_{PA}-E_{PB}$

左第2项：相对于质心参考系，外力所做的功$A'_{外}$

$$\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CB}}-\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CA}}+A'_{外}+E_{PA}-E_{PB}=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^2_{iB}+\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CB}}-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^2_{iA}-\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{CA}}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}_{CB}^{2}}-\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}_{CA}^{2}}+A'_{外}+E_{PA}-E_{PB}=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^{2}_{iB}+\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}_{CB}^{2}}-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^{2}_{iA}-\cancel{\frac{1}{2}m\vec{v}_{CA}^{2}}$$

$$\Rightarrow\quad A'_{外}=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^{2}_{iB}-\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}'^{2}_{iA}-E_{PA}+E_{PB}$$

$$\Rightarrow\quad A'_{外}=(E'_{kB}+E_{PB})-(E'_{kA}+E_{PB})$$

系统的内动能和各质点间势能的总和称为系统的**内能**。

相对质心参考系，外力对系统所做的功等于系统内能的增量。

守恒定律的意义*

赫尔曼·外尔（1885-1955年），
德国数学家、物理学家。

守恒定律与对称性有关

- ✓ 动量守恒——空间平移对称性
- ✓ 角动量守恒——空间转动对称性
- ✓ 能量守恒——时间平移对称性

对称性：不变性，如果我们对一件东西进行操作，使得操作后这件东西仍旧和以前一样，我们就叫这件东西是对称的。

https://haokan.baidu.com/v?pd=wisenatural&vid=6508035551098119530

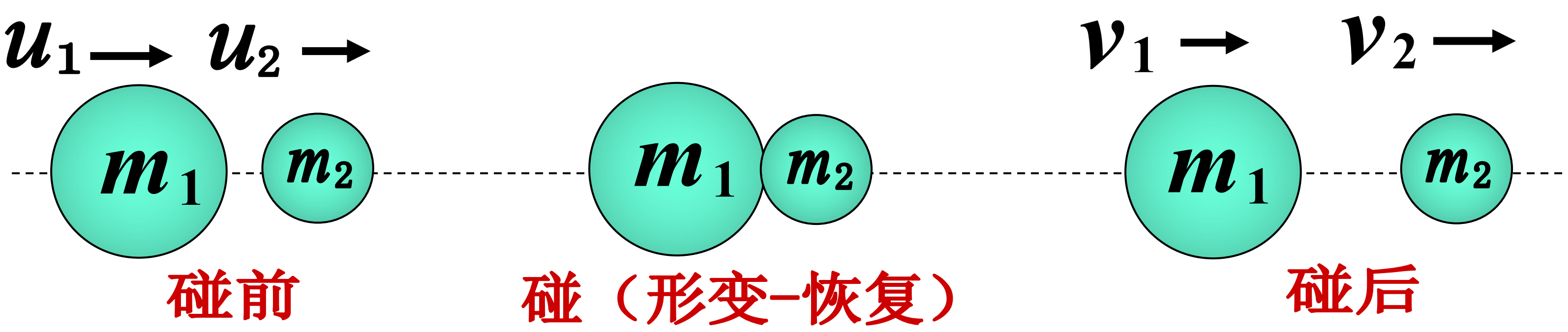
第4章 功和能

§4-8 碰撞

1. 定义

当两个或两个以上的物体互相接近时, 在极短的时间内, 它们之间的相互作用达到相当大的数值, 致使它们的运动状况突然发生显著变化，这种现象称为**碰撞**。

2. 物理模型



（a）压缩阶段 （b）恢复阶段

3. 碰撞现象的分类

（1）按照碰撞后的恢复情况：

完全弹性碰撞

形变后能完全恢复并弹开。

碰撞过程无动能损失（动量守恒+动能守恒）

完全非弹性碰撞

形变后完全无恢复，不能弹开。（撞后速度相等）

碰撞后有动能损失（仅动量守恒）

非完全弹性碰撞

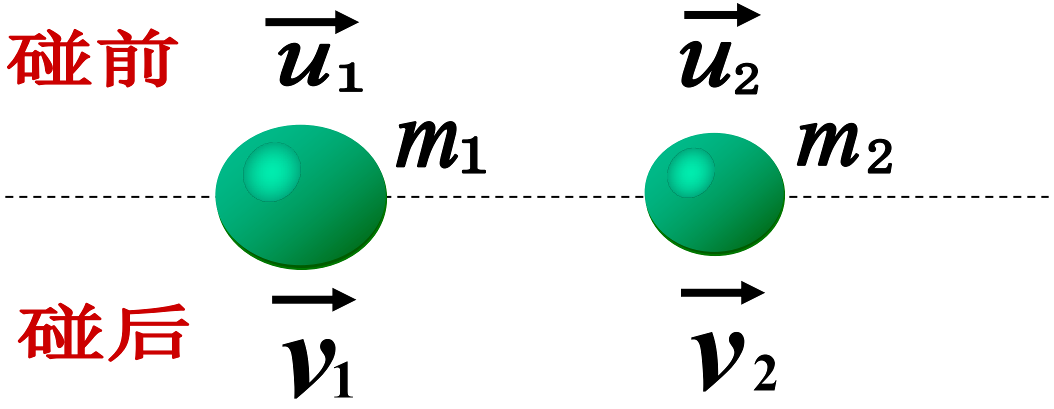
形变后不能完全恢复，但能弹开。

碰撞后有部分动能损失（仅动量守恒）

（2）碰撞后物体速度方向：正碰和斜碰

碰撞前后的速度都处于两球的连心线上的碰撞称为**正碰**。

1、完全弹性碰撞



根据动量守恒定律得

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \qquad (1)$$

根据能量守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (2)$$

若碰撞为正碰,则有 $m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2$ (3)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad (2)$$

(2)式可变为: $m_1\left(v_1^2-u_1^2\right)=m_2\left(u_2^2-v_2^2\right)$ (2')

(3)式可变为: $m_1\left(v_1-u_1\right)=m_2\left(u_2-v_2\right)$ (3')

(2')式除以(3')得 $v_1+u_1=u_2+v_2$ (4)

由(3)、(4)解得

$$v_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)u_2 \quad (5)$$

$$v_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)u_2 \quad (6)$$

$$v_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)u_2 \qquad (5)$$

$$v_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)u_1+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)u_2 \qquad (6)$$

讨论：

（1）两球质量相同，即 $m_1=m_2$

则： $v_1=u_2$， $v_2=u_1$

两质量相同的物体作完全弹性对心碰撞时，碰后彼此交换速度

（2）若m_2静止，即 $u_2=0$

则： $v_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)u_1$ $\qquad v_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)u_1$

（2）若m_2静止，即 $u_2 = 0$ 则：$\boxed{v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) u_1}$ $\boxed{v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) u_1}$

(a) $m_1 \ll m_2$

$$v_1 \approx \frac{-m_2}{m_2} u_1 = -u_1 \qquad v_2 \approx \frac{2m_1}{m_2} u_1 \approx 0$$

在此种情况下，碰撞后m_1以原速返回

(b) $m_1 = m_2$

$v_1 = 0$ $v_2 = u_1$ 碰后，两物体相互交换速度

(c) $m_1 \gg m_2$

$$v_1 \approx \frac{m_1}{m_1} u_1 = u_1 \qquad v_2 \approx \frac{2m_1}{m_1} u_1 = 2u_1$$

此时，碰撞后m_1的速度几乎不变，m_2以m_1的2倍速度远离。

2、**完全非弹性碰撞**：两个物体碰撞之后结合为一体

对孤立系统（封闭系统）不考虑外力，**动量守恒**。碰撞只形变 不恢复，已远超弹性限度，含非保守力做功，机械能不守恒，**动能有损失**。

以正碰为例，根据动量守恒定律得： $m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

✓ **碰撞前后能量变化：**

$$\Delta E_k = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right)$$

$$= -\frac{m_1m_2(u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)} < 0$$ **（动能损失）**

完全非弹性正碰: $$\boxed{v=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}}$$

讨论：

1、同向运动（ $u_1>u_2$ ）

碰后，两球的运动方向与原方向相同，且 $u_2<v<u_1$

2、相向运动，动量不同

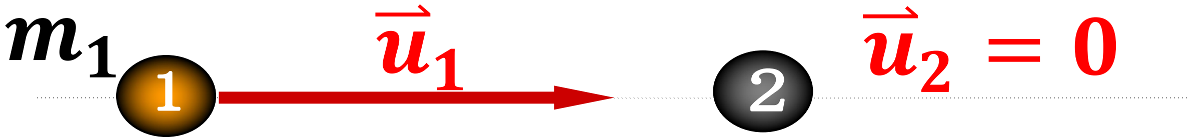
碰后，两球将以动量大的方向运动

3、相向运动，动量相同

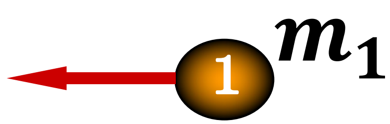
碰后，两球静止

例1、快速粒子1与静止粒子2发生弹性正碰：

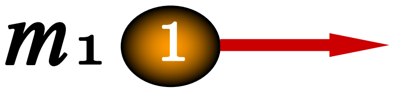
已知初态：



（1）欲使碰撞后 $\vec{v}_1 = -\vec{u}_1/2$， 求 m_2 =?



（2）欲使碰撞后 $\vec{v}_1 = \vec{u}_1/2$， 求 m_2 =?



解： 由弹性正碰速度公式： $v_1 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2$

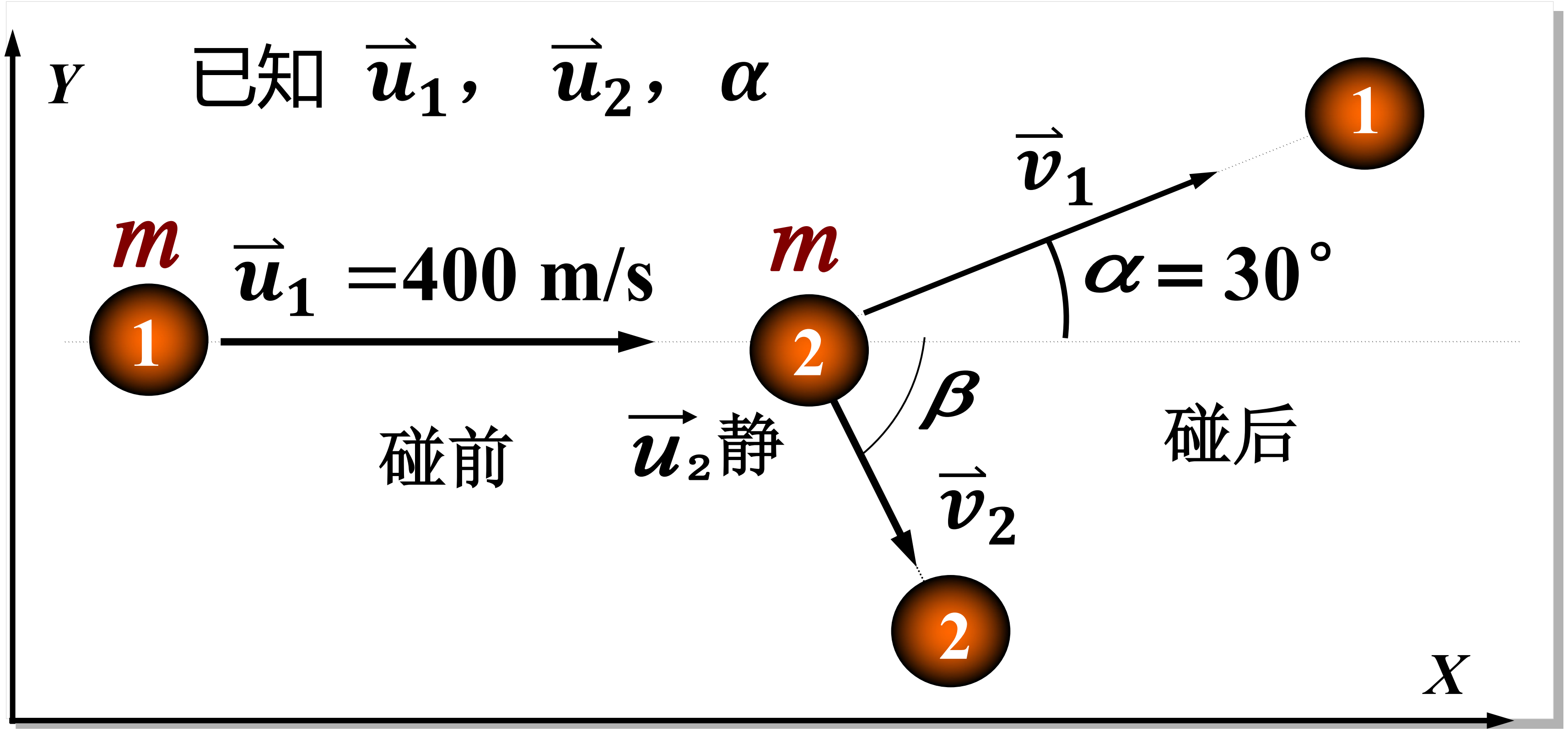
（1）代入 $u_2 = 0$， $v_1 = -u_1/2$： $-\dfrac{u_1}{2} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1$

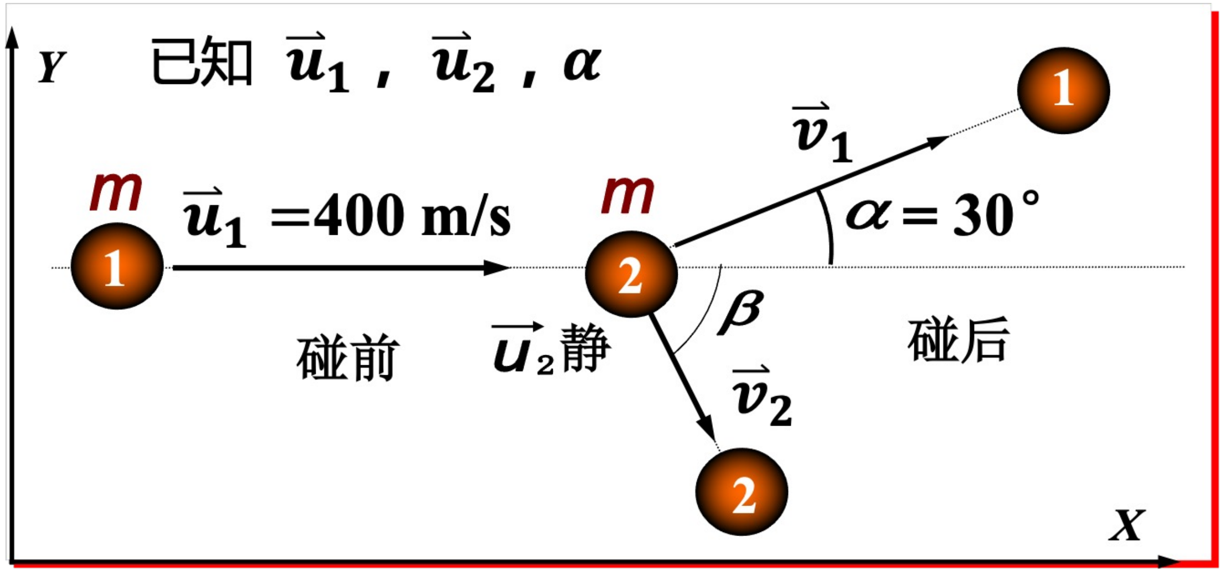
解得： $m_2 = 3m_1$

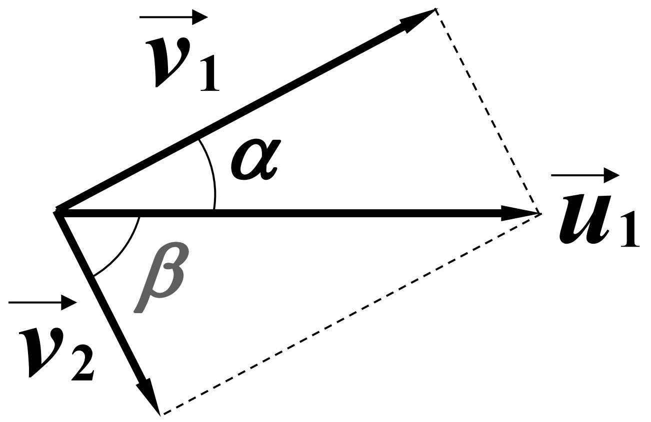
（2）代入 $u_2 = 0$， $v_1 = u_1/2$： $\dfrac{u_1}{2} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1$

解得： $m_2 = m_1/3$

例2、1和2为同类粒子，m相同，在以水平面X-Y上发生弹性碰撞，粒子系统在水平的各个方向上无外力作用，碰撞过程如下图所示：已知 $\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$，α，求：$|\vec{v}_1|$，$|\vec{v}_2|$，β







判知
三矢量构成
直角三角形

解： 由弹性碰撞动量守恒： $m\vec{u}_1 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ ⇒ $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

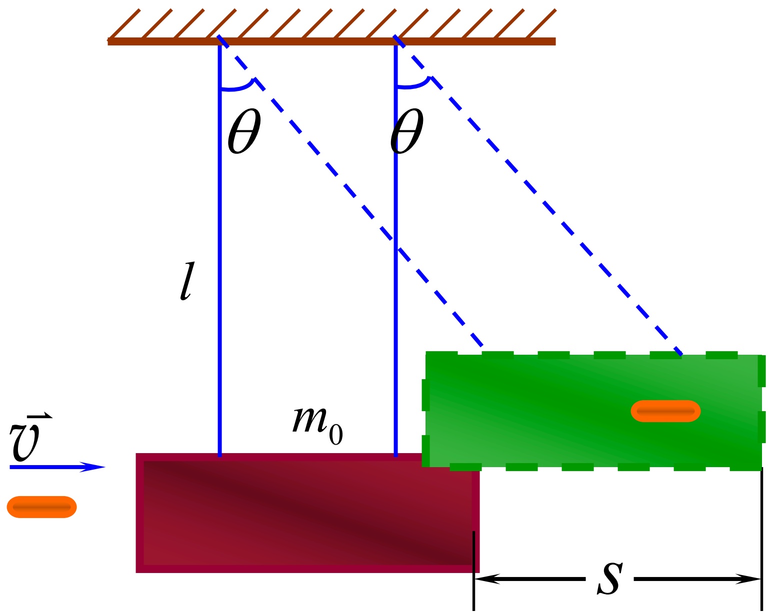
由弹性碰撞动能守恒： $\frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ ⇒ $u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$

得： $\alpha + \beta = \pi/2$ ⇒ $\beta = \pi/2 - \alpha = 60^o$

$$|v_1| = |u_1|\cos\alpha = 400\times\sqrt{3}/2 = 346\ \text{m/s}$$

$$|v_2| = |u_1|\cos\beta = 400\times 2/2 = 200\ \text{m/s}$$

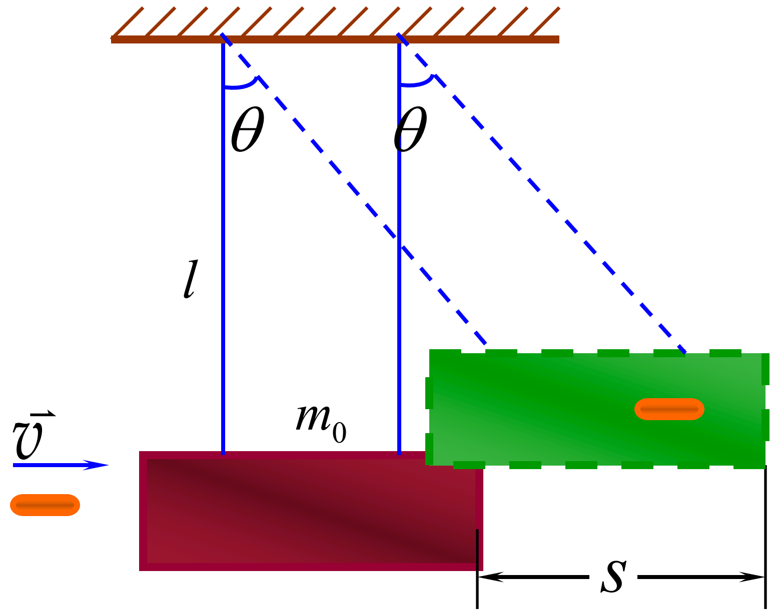
例3、如图所示的装置称为冲击摆，可用它来测定子弹的速度。质量为$\boldsymbol{m_0}$的木块被悬挂在长度为l的细绳下端，一质量为$\boldsymbol{m}$的子弹沿水平方向以速度$\boldsymbol{v}$射中木块，并停留在其中。木块受到冲击而向斜上方摆动，当到达最高位置时，木块的水平位移为s。试确定子弹的速度。



解： 射击过程（完全非弹性正碰）动量守恒：

$$mv = (m + m_0)u$$

上摆过程：机械能守恒 (系统：单摆、子弹、地球)：



$$\frac{1}{2}(m + m_0)u^2 = (m + m_0)gh$$

由图知　$h = l - \sqrt{l^2 - s^2}$

解以上三方程的联立方程组得

$$v = \frac{m + m_0}{m}\sqrt{2g\left(l - \sqrt{l^2 - s^2}\right)}$$