20. Man setze, ähnlich wie in der vorigen Aufgabe,

$$\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \cdots + \sqrt[n]{a_p}}{p} = s_n' \quad \text{und} \quad (s_n')^n = x_n'$$

und zeige, daß x_n' *monoton fallend* $\to \sqrt[p]{a_1\, a_2 \ldots a_p}$ strebt.

21. Das Intervall $a \ldots b$ $(0 < a < b)$ werde in n gleiche Teile geteilt; $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ seien die Teilpunkte. Man zeige, daß deren geometrisches Mittel

$$\sqrt[n+1]{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \to \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

und ihr harmonisches Mittel $\to \dfrac{b-a}{\log b - \log a}$ strebt.

22. Man zeige, daß im Falle der allgemeinen Folge in Aufgabe 5

$$\frac{x_n}{\alpha^n} \to \frac{x_1 - \beta\, x_0}{\alpha\,(\alpha - \beta)}$$

strebt.

23. Es sei $x > 0$ und die Folge (x_n) durch die Festsetzungen

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^{x_1}, \quad x_3 = x^{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = x^{x_{n-1}}, \quad \ldots$$

definiert. Für welche x fällt diese Folge konvergent aus? (Antwort: Dann und nur dann, wenn

$$\left(\frac{1}{e}\right)^e \leqq x \leqq e^{\frac{1}{e}}$$

ist.)

24. Es sei $\underline{\lim}\, x_n = \varkappa$, $\overline{\lim}\, x_n = \mu$, $\underline{\lim}\, x_n' = \varkappa'$ und $\overline{\lim}\, x_n' = \mu'$. Was läßt sich über die Lage der Häufungsgrenzen der Folgen

$$(-x_n), \quad \left(\frac{1}{x_n}\right), \quad (x_n + x_n'), \quad (x_n - x_n'), \quad (x_n \cdot x_n'), \quad \left(\frac{x_n}{x_n'}\right)$$

aussagen? Man diskutiere alle möglichen Fälle!

25. Es sei (α_n) beschränkt und (nach etwaiger Überspringung einiger Anfangsglieder)

$$\log\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{\beta_n}{n}$$

gesetzt. Dann haben (α_n) und (β_n) dieselben Häufungsgrenzen. Dasselbe gilt, wenn

$$\log\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \log n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{\beta_n}{n \log n}$$

gesetzt wird.

26. Gilt Satz **43**, 3 noch, falls $\eta = 0$ oder $= +\infty$ ist?

27. Wenn die in **43**, 2 und 3 gegebenen Folgen x_n und y_n *monoton* sind, so sind es auch die dortigen Folgen x_n' und y_n'.

28. Ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ monoton und $b_n > 0$, so ist es auch die Folge der Quotienten

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

29. Es ist

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}},$$

falls der *rechtsstehende* Grenzwert existiert und falls (a_n) und (b_n) Nullfolgen sind, deren zweite monoton ist.

30. Bei positiven, monotonen c_n kann aus

$$\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \to \xi \quad \text{auf} \quad \frac{c_0\, x_0 + c_1\, x_1 + \cdots + c_n\, x_n}{c_0 + c_1 + \cdots + c_n} \to \xi$$