

Определения на экзамен  
по Математическому Анализу  
2 семестр

Данил Заблоцкий

28 июня 2023 г.

# Оглавление

0.1	Формула Тейлора . . . . .	5
0.2	Теорема о существовании и единственности многочлена Тейлора . . . . .	5
0.3	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа . . . . .	5
0.4	Разложение основных функций по формуле Тейлора . . . . .	6
0.5	Теорема о связи знака производной с монотонностью функции . . . . .	7
0.6	Необходимое условие локального экстремума . . . . .	7
0.7	Достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной . . . . .	7
0.8	Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных . . . . .	7
0.9	Функция, выпуклая вверх (вниз) . . . . .	8
0.10	Геометрический смысл выпуклости вверх (вниз) функции . . . . .	8
0.11	Критерий выпуклости в терминах первой производной . . . . .	8
0.12	Критерий выпуклости в терминах касательной . . . . .	8
0.13	Критерий выпуклости в терминах высших производных . . . . .	9
0.14	Первообразная . . . . .	9
0.15	Неопределенный интеграл, операция интегрирования . . . . .	9
0.16	Основные методы интегрирования . . . . .	10
0.17	Рациональные функции . . . . .	10
0.18	Простые дроби . . . . .	10
0.19	Интегрирование простых дробей . . . . .	11
0.20	Разложение рациональных дробей на простые . . . . .	12
0.21	Метод неопределенных коэффициентов . . . . .	12
0.22	Метод Остроградского . . . . .	13
0.23	Теорема Чебышева . . . . .	13
0.24	Подстановки Эйлера . . . . .	13
0.25	Интегральная сумма, интеграл Римана . . . . .	14
0.26	База на множестве . . . . .	14
0.27	Предел функции по базе (в том числе, для метрических пространств) . . . . .	15
0.28	Основные свойства предела по базе . . . . .	15
0.29	Связь предела функции по базе с неравенствами . . . . .	15
0.30	Критерий Коши существования предела по базе . . . . .	16
0.31	Разбиение с отмеченными точками . . . . .	16

0.32	База на множестве разбиений отмеченными точками . . . . .	16
0.33	Интегрируемая по Риману функция, интеграл Римана (через предел по базе) . . . . .	17
0.34	Необходимое условие интегрируемости функции . . . . .	17
0.35	Суммы Дарбу . . . . .	17
0.36	Свойства сумм Дарбу . . . . .	17
0.37	Нижний и верхний интегралы Дарбу . . . . .	18
0.38	Критерий интегрируемости . . . . .	18
0.39	Колебание функции на отрезке . . . . .	18
0.40	Теорема Дарбу . . . . .	18
0.41	Интегрируемость непрерывных функций . . . . .	18
0.42	Интегрируемость функции с конечным числом точек разрыва . . . . .	19
0.43	Интегрируемость монотонных функций . . . . .	19
0.44	Свойства интегрируемых функций . . . . .	19
0.45	Аддитивность интеграла Римана . . . . .	19
0.46	Монотонность интеграла Римана и ее следствия . . . . .	20
0.47	Теорема о среднем . . . . .	20
0.48	Первая теорема о среднем . . . . .	20
0.49	Интеграл Римана как функция верхнего предела интегриро- вания . . . . .	21
0.50	Непрерывность интеграла Римана . . . . .	21
0.51	Дифференцируемость интеграла Римана по верхнему преде- лу и ее следствие . . . . .	21
0.52	Вторая теорема о среднем . . . . .	21
0.53	Формула Ньютона-Лейбница для непрерывной функции . . . . .	22
0.54	Формула Ньютона-Лейбница для функции, недифференциру- емой в некоторых (конечное число) точках отрезка. Следствие. . . . .	22
0.55	Формула интегрирования по частям для определенного инте- грала . . . . .	22
0.56	Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме . . . . .	22
0.57	Замена переменной в интеграле Римана (для непрерывных функций) . . . . .	23
0.58	Замена переменной в интеграле Римана (для интегрируемых функций) . . . . .	23
0.59	Путь . . . . .	23
0.60	Простой путь . . . . .	23
0.61	Отношение эквивалентности путей . . . . .	24
0.62	Носитель пути . . . . .	24
0.63	Кривая на множестве . . . . .	25
0.64	Простая кривая . . . . .	25
0.65	Параметризация кривой . . . . .	25
0.66	Гладкая параметризация кривой . . . . .	25
0.67	Ломаная, вписанная в кривую . . . . .	25
0.68	Периметр ломаной, вписанной в кривую . . . . .	25
0.69	Спрямолинейная кривая . . . . .	27
0.70	Аддитивность длины кривой . . . . .	27

0.71	Длина кривой как предел . . . . .	27
0.72	Формула вычисления длины кривой . . . . .	27
0.73	Многоугольник . . . . .	28
0.74	Измеримое по Жордану (квадрируемое) множество. Площадь. . . . .	28
0.75	Критерий квадрируемости множества . . . . .	29
0.76	Криволинейная трапеция . . . . .	29
0.77	Квадрируемость криволинейной трапеции . . . . .	29
0.78	Квадрируемость криволинейного сектора . . . . .	29
0.79	Несобственный интеграл, заданный на луче, на прямой, на отрезке. Сходящийся и расходящийся несобственный интеграл . . . . .	30
0.80	Критерий Коши сходимости несобственного интеграла . . . . .	31
0.81	Свойства несобственного интеграла . . . . .	32
0.82	Сходимость несобственного интеграла от неотрицательных функций . . . . .	32
0.83	Первый признак сравнения . . . . .	32
0.84	Второй признак сравнения . . . . .	33
0.85	Абсолютно сходящийся несобственный интеграл . . . . .	33
0.86	Связь сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла . . . . .	33
0.87	Признак Вейерштрасса . . . . .	33
0.88	Условно сходящийся несобственный интеграл . . . . .	33
0.89	Признак Абеля . . . . .	34
0.90	Признак Дирихле . . . . .	34
0.91	Теорема о замене переменной в несобственном интеграле . . . . .	34
0.92	Линейное пространство . . . . .	34
0.93	Линейное нормированное пространство. Норма . . . . .	35
0.94	Примеры линейных нормированных пространств (ЛНП) . . . . .	35
0.95	Метрика ЛНП . . . . .	36
0.96	Банахово ЛНП. Примеры . . . . .	36
0.97	Теорема о вложенных шарах . . . . .	37
0.98	Сжимающее отображение . . . . .	37
0.99	Принцип сжимающих отображений . . . . .	37
0.100	Предкомпактное множество в МП . . . . .	37
0.101	Вполне ограниченное множество . . . . .	37
0.102	Теорема Хаусдорфа . . . . .	38
0.103	Теорема о полноте $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
0.104	Критерий компактности $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
0.105	Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	38
0.106	Линейные отображения в конечномерных пространствах . . . . .	38
0.107	Теорема о матрице линейного отображения . . . . .	38
0.108	Теорема о непрерывности линейного отображения . . . . .	39
0.109	Дифференциал в точке в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
0.110	Критерий дифференцируемости отображения в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
0.111	Область . . . . .	39
0.112	Частная производная функции многих переменных . . . . .	40
0.113	Связь дифференциала и частных производных . . . . .	40

0.114Матрица Якоби . . . . .	40
0.115Дифференцируемость и арифметические операции . . . . .	41
0.116Дифференцирование композиции . . . . .	41
0.117Дифференцирование обратного отображения . . . . .	41

# Определения

## 0.1 Формула Тейлора

Предисловие: Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ .

Нужно построить многочлен  $P(x; x_0)$  вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n;$$

$f(x) - P(x; x_0) = r_n(x; x_0)$  -  $n$ -ый остаточный член в формуле Тейлора.

**Определение.** Остаточные члены в форме Пеано имеют вид:

$$r_n(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^n$$

**Определение.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производные до  $n$ -го порядка включительно.

**Многочленом Тейлора** (полиномом) функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется многочлен

$$P(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

## 0.2 Теорема о существовании и единственности многочлена Тейлора

**Теорема.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $f$  имеет в точке  $x_0$  производные до  $n$ -го порядка включительно, тогда  $\exists!$  многочлен вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

такой, что

$$f(x) - P(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0} ((x - x_0)^n)$$

## 0.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа

Пусть  $f(x) = P(x; x_0) + r_2(x; x_0)$ .

**Теорема.** Пусть  $Q = [x; x_0]$ ,  $Q^o = (x; x_0)$ ;  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  :

1.  $f, f', \dots, f^{(n)}$  непрерывны на  $Q$ ;
2.  $f$  имеет производную  $(n+1)$ -го порядка на  $Q^o$ .

Далее,  $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ :

1.  $\phi$  - непрерывна на  $Q$ ;
2.  $\phi$  - дифференцируема на  $Q^o$ ;
3.  $\phi'(t) \neq 0 \forall t \in Q^o$ .

Тогда  $\exists \xi \in Q^o$  :

$$r_n(x; x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)} * \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} * (x - \xi)^n$$

**Следствие.** Теоремы:

1. Пусть  $\phi(t) = x - t$ ,  $\phi(t) = -1$ ,  $\phi(x) = 0$ ,  $\phi(x_0) = x - x_0$ . Тогда:

$$r_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} * (x - \xi)^n * (x - x_0)$$

- остаточный член формулы Тейлора **в форме Коши**.

2.  $\phi(t) = (x - t)^{n+1}$ ;  $\phi'(t) = (n+1)(x - t)^n(-1)$ ;  $\phi(x) = 0$ ;  
 $\phi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$ . Тогда:

$$r_n(x; x_0) = \frac{-(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x - \xi)^n} * f^{(n+1)}(\xi) * (x - \xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- остаточный член в формуле Тейлора **в форме Лагранжа**.

## 0.4 Разложение основных функций по формуле Тейлора

1.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^n)$
2.  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n+1})$
3.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^{2n})$
4.  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^n)$
5.  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^n)$

## 0.5 Теорема о связи знака производной с монотонностью функции

**Утверждение** (связь знака производной с монотонностью). Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $(a; b)$ . Тогда знак производной функции связан с монотонностью следующим образом:

1.  $f'(x) > 0 \implies f(x)$  - возрастает  $\implies f'(x) \geq 0$ ;
2.  $f'(x) \geq 0 \implies f(x)$  - не убывает  $\implies f'(x) \geq 0$ ;
3.  $f'(x) = 0 \implies f(x) - \text{const} \implies f'(x) = 0$ ;
4.  $f'(x) < 0 \implies f(x)$  - убывает  $\implies f'(x) \leq 0$ ;
5.  $f'(x) \leq 0 \implies f(x)$  - не возрастает  $\implies f'(x) \leq 0$ ;

## 0.6 Необходимое условие локального экстремума

Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  - точка внутреннего локального экстремума. Либо  $f'(x_0) = 0$ , либо  $f'(x_0) \nexists$ .

## 0.7 Достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной

**Утверждение** (достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной). Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - непрерывна на  $(a; b)$ , дифференцируема везде, кроме точки  $x_0$ ,  $x_0 \in (a; b)$ . Тогда:

1. Если  $\forall x < x_0 \ f'(x) > 0$  и  $x > x_0 \ f'(x) < 0$ , то  $x_0$  - точка локального максимума;
2. Если  $\forall x < x_0 \ f'(x) < 0$  и  $x > x_0 \ f'(x) > 0$ , то  $x_0$  - точка локального минимума;
3. Если  $f'(x)$  - не меняет знак на  $(a; b)$  (за исключением  $x_0$ ), то в точке  $x_0$  - экстремумов нет.

## 0.8 Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных

**Утверждение** (достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных). Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $(a; b)$  и имеет производные до  $n$ -го порядка включительно,  $x_0 \in (a; b)$ .



Причем  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

Тогда:

1. Если  $n = 2k + 1$  (нечет.), то экстремума - нет;
2. Если  $n = 2k$  (чет.), то при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ ,  $x_0$  - точка локального минимума, если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - точка локального максимума.

## 0.9 Функция, выпуклая вверх (вниз)

**Определение.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что  $f(x)$  - **выпукла вниз (вверх)**, если  $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))$$

, при этом  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  и  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

## 0.10 Геометрический смысл выпуклости вверх (вниз) функции

Это в тетради смотреть, не хочу столько печатать

## 0.11 Критерий выпуклости в терминах первой производной

**Утверждение** (критерий выпуклости в терминах первой производной). Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $(a; b)$ .  $f$  - выпукла вниз на  $(a; b) \iff f'(x)$  - не убывает на  $(a; b)$ ,  $f$  - выпукла вверх на  $(a; b) \iff f'(x)$  - не возрастает на  $(a; b)$ . Строгая выпуклость функции соответствует строгой монотонности производной.

## 0.12 Критерий выпуклости в терминах касательной

**Утверждение.** Пусть функция  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема на  $(a; b)$ .

Функция  $f(x)$  выпукла вниз на  $(a; b) \iff$  ее график всеми своими точками лежит не ниже любой ее касательной в  $\forall x \in (a; b)$ . При этом строгой выпуклости соответствует то, что график функции лежит выше касательной за исключением точки касания.

### 0.13 Критерий выпуклости в терминах высших производных

**Следствие.** Пусть функция  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема на  $(a; b)$ . Тогда:

- $f(x)$  выпукла вниз на  $(a; b) \iff \forall x \in (a; b) f''(x) \geq 0$ ;
- $f(x)$  выпукла вверх на  $(a; b) \iff \forall x \in (a; b) f''(x) \leq 0$ .

Строгая выпуклость соответствует строгому неравенству.

### 0.14 Первообразная

**Определение** (Первообразная функция). Пусть  $X$  - промежуток,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F(x)$  называется **первообразной**  $f(x)$ , если производная  $F'(x) = f(x)$ , при этом  $F(x)$  дифференцируема и непрерывна.

**Пример.**  $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$ . В самом деле,  $F'(x) = f(x)$ .

### 0.15 Неопределенный интеграл, операция интегрирования

**Определение** (Неопределенный интеграл). Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом,  $\int f(x)dx = \{F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x), C \in \mathbb{R}\}$ , или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Замечание.** (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$ ;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$ ;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ .

**Определение** (интегрирование). Операция нахождения первообразной функции  $f(x)$  называется ее **интегрированием**.

## 0.16 Основные методы интегрирования

**Утверждение.** (Основные методы интегрирования)

Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  - промежуток:

1. Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = \text{const}$ , тогда:  
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$
2. Формула интегрирования по частям:  
$$udv = uv - \int u dv, \quad u = u(x), v = v(x).$$
3. Интегрирование подстановкой:  
Пусть  $T$  - промежуток,  $X = X(t)$  - дифференцируема на  $T$ .  
Тогда  $\int f(X(t)) * X'(t) dt = F(X(t)) + C = \int f(x) dx + C.$

## 0.17 Рациональные функции

**Определение** (Рациональная дробь). Функция вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.

Если  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ , то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.

Если дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - неправильная, то ее можно представить в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ , где  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

## 0.18 Простые дроби

**Определение** (Простые дроби). **Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1.  $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, k > 1$
3.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - 4q < 0$
4.  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, k > 1, p^2 - 4q < 0$

## 0.19 Интегрирование простых дробей

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{A}{x-a} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \int \frac{dt}{t} = \ln t \right| = A \ln |x-a| + C \\
 2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left| \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \right| = \\
 &= A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C \\
 3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \left| \begin{aligned} x^2+px+q &= (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}, \quad (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{aligned} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C} dx = \\
 A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} &= \left| \begin{aligned} d((x+\frac{p}{2})^2+C) &= \\ &= 2(x+\frac{p}{2}) dx \end{aligned} \right| = \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} &= \frac{A}{2} \int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{2(x+\frac{p}{2}) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \\
 \frac{Ap}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} &= \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \\
 \frac{A}{2} \int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2} I &= \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2} I;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \frac{\sqrt{C} d(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \\
 \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| &= \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}}\right) + C_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 &= (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = \\
 &= (\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}})^2;
 \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B - \frac{Ap}{2}) \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}}\right) + C_1$$

$$\begin{aligned}
 4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \left| \begin{aligned} d(x^2+px+q) &= \\ &= 2x+p \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \\
 (B-\frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4q}{4}))^k} &= \frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{4})^k} \int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} = \\
 \frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2}) \frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k} &\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}}\right)^2+1\right)^k}
 \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить инте-

$$\begin{aligned}
 \text{грал } \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} &= \left| \begin{aligned} u &= \frac{1}{(t^2+1)^k}; \quad du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1} 2t dt \\ dv &= dt \implies v = t \end{aligned} \right| = \\
 \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}} dt &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \left( \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \right);
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{l} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$$

$$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k, \quad k = 1, \dots$$

## 0.20 Разложение рациональных дробей на простые

**Лемма.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем  $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ , где  $Q_1(x)$  не делится на  $(x-a)$ . Тогда  $\exists$  многочлен  $P_1(x)$  из  $\exists A \in \mathbb{R} : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ . При этом дробь (рациональная)  $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$  - правильная.

**Лемма.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная дробь. При этом  $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$ , здесь  $p^2 - 4q < 0$ . Тогда  $\exists M, N \in \mathbb{R}$  и  $\exists$  многочлен  $P_1(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ . При этом  $Q_1(x)$  не делится на  $x^2 + px + q$ . Дробь  $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$  - правильная.

## 0.21 Метод неопределенных коэффициентов

Если  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная дробь и  $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \dots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} * \dots * (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$ , то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_1)^{k_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-i}},$$

где  $A_i, \dots, A_i^s, M_i, N_i, \dots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$ .

**Пример.**  $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \dots$  правую часть к общему знаменателю и получим:  $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$ ;  $\deg Q(x) = k_1 + \dots + k_s + 2m_1 + \dots + 2m_r = n$ ;

$$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leq \deg Q(x) - 1.$$

Количество неизвестных коэф. у множества  $R(x)$  равно  $n$  штук, приравнявая коэф. при соответствующих степенях  $x$  (в том числе при  $x^0$ ) получим

$n$  уравнений с  $n$  неизвестными (старшая степень  $x$  множества  $R(x)$  равна  $n - 1$ ).

## 0.22 Метод Остроградского

**Теорема.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная несократимая дробь.

Тогда  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ . Дробь  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  и  $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$  - правильные.  $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$  и многочлен  $Q_2(x)$  представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена  $Q(x)$ , взятых в первой степени.

**Пример.**  $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)} dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)} dx$

## 0.23 Теорема Чебышева

**Теорема.** Интеграл  $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ , где  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ , можно привести к интегрированию рациональных функций в следующих случаях:

- $p \in \mathbb{Z}$ : замена  $x = t^N$ , где  $N$  - общий знаменатель  $m$  и  $n$ ;
- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ : замена  $a + bx^n = t^N$ , где  $N$  - знаменатель  $p$ ;
- $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ : замена  $ax^{-n} + b = t^N$ , где  $N$  - знаменатель  $p$ .

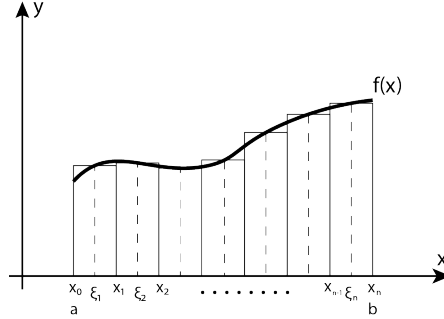
## 0.24 Подстановки Эйлера

1. Если  $a > 0$ , то интеграл вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  рационализируется подстановкой  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$ .
2. Если  $a < 0$  и  $c > 0$ , то интеграл вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  рационализируется подстановкой  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$ .
3. Если  $a < 0$ , а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители  $a(x-x_2)(x-x_1)$ , то интеграл вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  рационализируется подстановкой  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ .

Подстановки Эйлера неудобны для практического использования, так как даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

## 0.25 Интегральная сумма, интеграл Римана

**Определение** (интеграл Римана). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  частей точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . В каждом таком кусочке выберем точку  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  - длина отрезка  $\Delta i$ .

Составим сумму  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $f(\xi_i)$  - высота  $i$ -го прямоугольника и  $\Delta x_i$  - ширина  $i$ -го прямоугольника.

$S_n$  - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции  $f(x)$ .

Говорят, что функция  $f$  интегрируема на  $[a; b]$ , если существует предел интегральных сумм  $S_n$ , то есть  $\exists \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n$ , причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a; b]$ , ни от способа выбора точек  $\xi_i$ .

Этот предел называется **интегралом Римана** функции  $f$  на  $[a; b]$ . Класс интегрируемых функций на отрезке  $[a; b]$  будем обозначать  $R([a; b])$ .

## 0.26 База на множестве

**Определение** (база множества). Пусть  $X$  - произвольное множество.

Система  $\beta$  подмножеств множества  $X$  называется **базой** на  $X$ , если:

1.  $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \emptyset$
2.  $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \quad \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

**Пример** (баз множества). 1.  $\beta = \{X\}$  - база

2.  $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

3.  $X = \mathbb{R}$ ,  $\beta = \{\beta_\epsilon = \{x : 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$  (выколотые окрестности нуля)

## 0.27 Предел функции по базе (в том числе, для метрических пространств)

**Определение** (предел по базе). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом** функции  $f$  **по базе**  $\beta$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists$  элемент базы  $\beta \in \beta : |f(x) - A| < \epsilon$ .

$$\lim_{\beta} f(x)$$

**Определение** (предел по базе (МП)). Пусть  $(Y, d)$  - МП,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .

$y \in Y$  называется **пределом** функции  $f(x)$  **по базе**  $\beta$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta \forall x \in \beta : d(f(x), y) < \epsilon$ , или, что то же самое,  $\forall V_Y(y) \exists \beta \in \beta f(\beta) \subset V_Y(y)$ , где  $V_Y$  - окрестность метрического пространства  $Y$ .

## 0.28 Основные свойства предела по базе

**Теорема** (основные свойства предела по базе). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ :

1. Если  $\exists \lim_{\beta} f(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta : f$  ограничена на  $\beta$
2. Если  $\lim_{\beta} f(x) = A$  и  $\lim_{\beta} f(x) = B$ , то  $A = B$

## 0.29 Связь предела функции по базе с неравенствами

**Теорема** (связь предела функции по базе с неравенствами). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ :

1. Если  $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq g(x)$ , то  $\lim_{\beta} f(x) \leq \lim_{\beta} g(x)$
2. Если  $\lim_{\beta} f(x) < \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) < g(x)$

Если  $\lim_{\beta} f(x) \geq \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) \geq g(x)$

3. Если  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  **И**  $A = \lim_{\beta} f(x) = \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\lim_{\beta} h(x) = A$



### 0.30 Критерий Коши существования предела по базе

**Теорема** (критерий Коши существования предела по базе). Существуют две формулировки:

1. Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .  
Функция  $f(x)$  имеет предел по базе  $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть  $(Y, d)$  - МП (полное),  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .  
Функция  $f(x)$  имеет предел по базе  $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

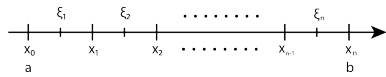
### 0.31 Разбиение с отмеченными точками

**Определение** (разбиение). Пусть дан отрезок  $[a; b]$ . **Разбиением**  $P$  отрезка  $[a; b]$  называется набор точек  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . То есть  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Отрезки  $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$ .  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$  - длина  $i$ -го отрезка разбиения  $\lambda(P) = \max_{i=0, n} \{\Delta x_i\}$ . Величины  $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$  - параметры ограничения.

**Определение** (разбиение с отмеченными точками). **Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \dots, x_n\}, \{\xi_0, \dots, \xi_n\},$$

где  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ .



Пусть  $\mathfrak{R}_\xi = \{(P, \xi)\}$  - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка  $[a, b]$ .

### 0.32 База на множестве разбиений отмеченными точками

**Утверждение.** Множество  $\beta = \{\beta_\delta : \delta > 0\}$  является базой на  $\mathfrak{R}_\xi$ .

### 0.33 Интегрируемая по Риману функция, интеграл Римана (через предел по базе)

**Определение (!).** Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(P, \xi)$  - разбиение отрезка  $[a; b]$  с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Можно смотреть на  $\sigma$  для фиксированной функции  $f(x)$  как на функцию, сопоставляющую разбиение  $(P, \xi) \in \mathfrak{R}_\xi$  сумме  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ , то есть  $\sigma_f : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  (то есть  $(P, \xi)$  - аргумент функции  $\sigma$ ).

Говорят, что функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , если:

$$\exists \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Или, что то же самое, если  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  и соответствующий элемент  $\beta_\delta \in \beta : \forall \text{ разбиения } (P, \xi) : \lambda(P) < \delta \text{ выполняется неравенство } |\sigma_f((P, \xi)) - I| < 0$ :

$$I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \int_a^b f(x) dx$$

### 0.34 Необходимое условие интегрируемости функции

**Теорема** (необходимое условие интегрируемости функции). \* \_ \*

Если  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $[a; b]$  (то есть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ ), то  $f$  ограничена на  $[a; b]$ .

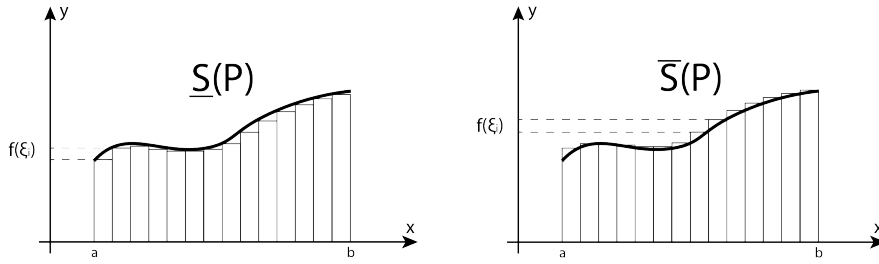
### 0.35 Суммы Дарбу

**Определение** (нижняя/верхняя суммы Дарбу). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$ . Числа  $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$  и  $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ , где  $m_k = \inf_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$ ,  $M_k = \sup_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$ , называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению  $P$ .

### 0.36 Свойства сумм Дарбу

**Теорема** (свойства сумм Дарбу). Свойства:

$$1. \forall (P, \xi) \underline{S}(P) \leq \sigma_f((P, \xi)) \leq \overline{S}(P)$$



2. Если разбиение  $P'$  получено из разбиения  $P$  добавлением новых точек, то  $\underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$  и  $\overline{S}(P') \leq \overline{S}(P)$
3.  $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leq \overline{S}(P_2)$

### 0.37 Нижний и верхний интегралы Дарбу

**Определение** (верхний/нижний интеграл Дарбу). Числа  $\underline{\mathcal{J}} = \sup \underline{S}(P)$  и  $\overline{\mathcal{J}} = \inf \overline{S}(P)$  называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

### 0.38 Критерий интегрируемости

**Теорема** (критерий интегрируемости). Функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $[a; b]$   $\iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$ .

### 0.39 Колебание функции на отрезке

**Определение.** Обозначим  $M_i - m_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) - \inf_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta_i)$ .  
 $\omega_i$  называется **колебанием** функции  $f(x)$  на отрезке  $\Delta_i$ .  
 $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$

### 0.40 Теорема Дарбу

**Теорема** (Дарбу). Для любой ограниченной функции  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  выполняются равенства:

$$\underline{\mathcal{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{S}(P); \quad \overline{\mathcal{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{S}(P)$$

### 0.41 Интегрируемость непрерывных функций

**Теорема** (интегрируемость непрерывных функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[a; b] \implies f$  - интегрируема на  $[a; b]$ , то есть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ .

## 0.42 Интегрируемость функции с конечным числом точек разрыва

**Теорема** (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ограничена и имеет на  $[a; b]$  конечное число точек разрыва. Тогда  $f \in \mathbb{R}[a; b]$  интегрируема на  $[a; b]$ .

## 0.43 Интегрируемость монотонных функций

**Теорема** (интегрируемость монотонных функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонна на  $[a; b] \implies f$  - интегрируема на  $[a; b]$ .

## 0.44 Свойства интегрируемых функций

**Теорема.** Пусть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ ,  $g \in \mathbb{R}[a; b]$ . Тогда:

1.  $f \pm g \in \mathbb{R}[a; b]$ .
2.  $\alpha f \in \mathbb{R}[a; b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $f * g \in \mathbb{R}[a; b]$ .
4.  $|f| \in \mathbb{R}[a; b]$ , при этом:
  - $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
  - $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
  - $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

## 0.45 Аддитивность интеграла Римана

**Определение.** Пусть  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , положим  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ . Если  $a = b$ , то  $\int_a^{a=b} f(x) dx = 0$ .

**Теорема** (Аддитивность интеграла Римана). Пусть даны точки  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Если  $f$  - интегрируема на большем из отрезков  $[a; b]$ ,  $[a; c]$ ,  $[b; c]$ , то  $f$  - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если  $f$  интегрируема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0$$

## 0.46 Монотонность интеграла Римана и ее следствия

**Теорема.** Если  $a < b$  и  $f \in R[a; b]$  и:

1.  $\forall x \in [a; b] f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2.  $\forall x \in [a; b] f(x) > 0$ , то  $\int_a^b f(x)dx > 0$

**Следствие.** (теоремы 2.4.9)

1. Если  $a < b$ ,  $f, g \in R[a; b]$  и:
  - (а)  $\forall x \in [a; b] f(x) \leq g(x)$ , то  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
  - (б)  $\forall x \in [a; b] f(x) < g(x)$ , то  $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$
2. Если  $f \in R[a; b]$ ,  $a < b$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .
3. (Теорема о среднем)  
Пусть  $f \in R[a; b]$  ( $a > b, a < b$ ),  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ . Тогда существует  $\mu \in [m; M]$ :  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ .

**Следствие.** Если, кроме того,  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\exists c \in [a; b]$ :  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .

## 0.47 Теорема о среднем

Пусть  $f \in R[a; b]$  ( $a > b, a < b$ ),  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ . Тогда существует  $\mu \in [m; M]$ :  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ .

**Следствие.** Если, кроме того,  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\exists c \in [a; b]$ :  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .

## 0.48 Первая теорема о среднем

**Теорема** (Первая теорема о среднем). Пусть  $f, g \in R[a; b]$  ( $a > b, a < b$ ),  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$  и  $g$  не меняет свой знак на  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \mu \in [m; M]$ :  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ .

## 0.49 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

**Определение.** Пусть  $f \in R[a; b]$ ,  $x \in [a; b]$ .

Рассмотрим функцию  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $F(x)$  определена для  $\forall x \in [a; b]$ .

## 0.50 Непрерывность интеграла Римана

**Теорема** (непрерывность интеграла Римана). Если  $f \in R[a; b]$ , то  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  - непрерывна на  $[a; b]$ .

## 0.51 Дифференцируемость интеграла Римана по верхнему пределу и ее следствие

**Теорема** (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу). Пусть  $f \in R[a; b]$ ,  $x \in [a; b]$  и  $f$  непрерывна в точке  $x$ , тогда функция  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  дифференцируема в точке  $x$ , причем:

$$F'(x) = f(x) \implies \left( \int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

**Следствие.** Если  $f$  - непрерывна на  $[a; b]$ , то на  $[a; b]$  она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

**Замечание.** Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a; b]$  - множество интегрируемых на  $[a; b]$  функций;
- $C[a; b]$  - множество непрерывных на  $[a; b]$  функций;
- $C^o[a; b]$  - множество дифференцируемых на  $[a; b]$  функций.

Получаем:

$$C^o[a; b] \subset C[a; b] \subset R[a; b].$$

## 0.52 Вторая теорема о среднем

**Теорема** (вторая теорема о среднем). Пусть  $f, g \in R[a; b]$ , причем  $f$  - монотонна на  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$  :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$$

### 0.53 Формула Ньютона-Лейбница для непрерывной функции

**Теорема.** Пусть  $f$  - непрерывна на  $[a; b]$  и  $F(x)$  - её первообразная.

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

### 0.54 Формула Ньютона-Лейбница для функции, недифференцируемой в некоторых (конечное число) точках отрезка. Следствие.

**Теорема.** Пусть  $F(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ , дифференцируема на  $[a; b]$  за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема:  $F'(x) = f(x)$ . И, наконец,  $f(x) \in R[a; b]$ .

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

**Следствие.** Если функция  $F(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то  $\forall x \in [a; b]$  :

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

### 0.55 Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

**Теорема** (формула интегрирования по частям). Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a; b]$ , то справедливо равенство:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

### 0.56 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

**Теорема** (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть функция  $f(t)$  имеет на отрезке  $[a; x]$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a; x),$$

где  $r_n(a; x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1} dt.$

## 0.57 Замена переменной в интеграле Римана (для непрерывных функций)

**Теорема.** Пусть  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$  - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка  $[\alpha; \beta]$  в отрезок  $[a; b]$ , причем  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$ . Тогда для любой функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[a; b]$ , функция  $f(\phi(t))\phi'(t)$  - непрерывна на  $[\alpha; \beta]$  и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

## 0.58 Замена переменной в интеграле Римана (для интегрируемых функций)

**Теорема** (замена переменной для интегрируемых функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R[a; b]$ , функция  $x = \phi(t) :$

1.  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$
2.  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$
3.  $\phi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$
4.  $\phi$  - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

## 0.59 Путь

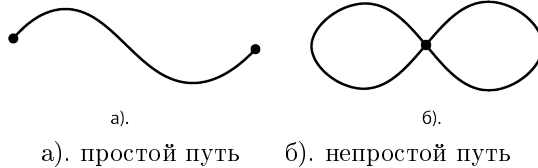
**Определение.** Пусть  $(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ . Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \rightarrow X$$

## 0.60 Простой путь

**Определение.** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow X$  называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$





## 0.61 Отношение эквивалентности путей

На множестве путей введем отношение.

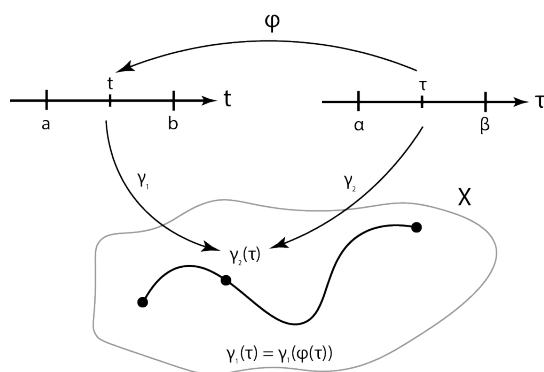
Пусть  $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow X$ .

Будем говорить, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  находятся в отношении " $\sim$ ", то есть  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , если существует строго возрастающее отображение  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ :

$$\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b,$$

а так же:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$

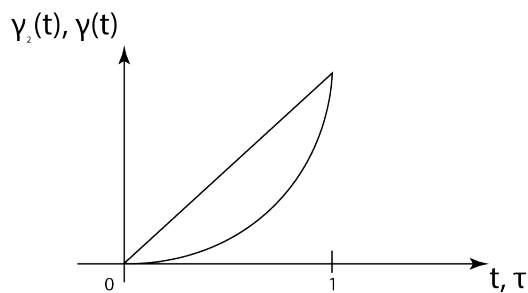


## 0.62 Носитель пути

**Определение.** Образ пути  $\gamma$  называется **носителем** этого пути.

**Пример.** Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) &= t; \\ \gamma_2 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) &= \tau^3, \end{aligned}$$



Что бы доказать, что  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , нужно найти строго возрастающее отображение  $\phi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ :

$$t = \phi(\tau) = \tau^3, \phi(\tau) - \text{строго возрастающее}, \phi(0) = 0, \phi(1) = 1; \\ \gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau)).$$

### 0.63 Кривая на множестве

**Определение.** Кривой в  $X$  будем называть класс эквивалентных путей.

### 0.64 Простая кривая

**Определение.** Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

### 0.65 Параметризация кривой

**Определение.** Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей)  $l$  называется **параметризацией** этой кривой.

### 0.66 Гладкая параметризация кривой

**Определение.** Пусть  $l$  - простая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t); y(t))$  - ее параметризация. Кривая  $l$  называется **гладкой**, если  $\forall t$   $x(t), y(t)$  имеют непрерывные производные на  $[\alpha, \beta]$  и  $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$  ( $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ),  $x'(t_0) = 0$  и  $y'(t_0) = 0$ .

### 0.67 Ломаная, вписанная в кривую

**Определение.** Пусть  $l \subset \mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) и  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) - параметризация кривой  $l$ .

Пусть  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$  - разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$  и  $M_i = \gamma(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  - точка пути  $\gamma$  (кривая  $l$ ):

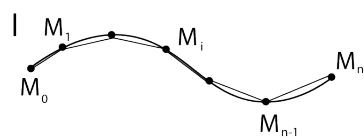
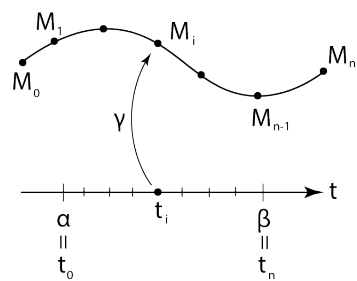
$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

Тогда отрезок  $M_{i-1}M_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) называется **звеном** кривой  $l$ . Объединение  $\bigcup_i M_{i-1}M_i$  - **ломаная, вписанная в  $l$** .

### 0.68 Периметр ломаной, вписанной в кривую

**Определение.** Периметром ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \dots, M_n) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$$



## 0.69 Спрямяемая кривая

**Определение.** Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую  $l$  - ограничено, то кривую  $l$  будем называть **спрямяемой**.

## 0.70 Аддитивность длины кривой

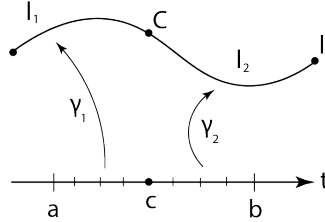
**Теорема** (аддитивность длины кривой). Функция  $S(l)$  является аддитивной, то есть если  $l = l_1 \cup l_2$ , то  $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$ .

**Более тонко:** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация спрямяемой кривой  $l$ , точка  $c \in [a; b]$ :

$\gamma_1 : [a; c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация кривой  $l_1$ ,

$\gamma_2 : [c; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация кривой  $l_2$ ,

при этом  $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ .



Тогда  $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$ .

## 0.71 Длина кривой как предел

**Теорема.** Пусть  $l$  - простая спрямяемая незамкнутая кривая в  $\mathbb{R}^2$  и  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - ее параметризация. Пусть  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  - разбиение отрезка  $[a; b]$ , этому разбиению соответствуют точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$  - соответствующая ломаная, вписанная в  $l$  ( $M_i = \gamma(t_i)$ ), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p(m),$$

где  $\lambda = \max_i \Delta t_i$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

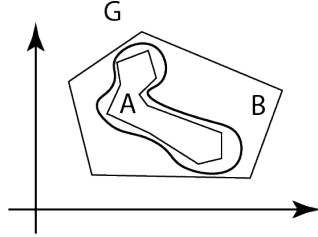
## 0.72 Формула вычисления длины кривой

**Теорема** (формула для вычисления длины кривой). Пусть  $l$  - гладкая кривая;  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - ее параметризация (гладкая, то есть  $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные производные на  $[a; b]$ ). Тогда  $l$  - спрямяема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

### 0.73 Многоугольник

**Определение.** Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



### 0.74 Измеримое по Жордану (квадрируемое) множество. Площадь.

**Определение.** Множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  называется измеримым по Жордану (или квадрируемым), если:

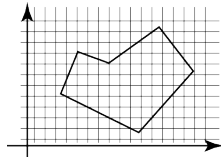
$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

где  $\sup$  берется по всем многоугольникам, вписанным в  $G$ , а  $\inf$  - по всем многоугольникам, описанным около  $G$ . При этом их общее значение  $S = S_* = S^*$  называется площадью  $G$ , или мерой Жордана.

$S_*$  - внутренняя мера,  $S^*$  - внешняя мера.

Другими словами, множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  квадрируемо, если внутренняя и внешняя меры совпадают.

Здесь  $S(A)$ ,  $S(B)$  - площади многоугольников  $A$  и  $B$ . Многоугольник  $A$  можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:



$$S_{\square} = ab; \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

**Пример.** (из определения)

1. Квадрируемые множества на плоскости.

Круг с границей:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Упражнение: доказать, что круг - квадрируемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

Множество точек единичного квадрата с рациональными координатами:

$$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0; 1] \times [0; 1])$$

Вписанный многоугольник  $A = \emptyset$ ,  $S(A) = 0$ . Многоугольник  $B = [0; 1] \times [0; 1]$  имеет площадь равную 1 ( $S(B) = 1$ ).

$$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \quad (S_* \neq S^*)$$

## 0.75 Критерий квадрируемости множества

**Теорема** (критерий квадрируемости). Множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  квадрируемо  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists$  многоугольники  $A$  и  $B$ :

1.  $A \subset G$ ,  $B \supset G$ ,
2.  $S(B) - S(A) < \epsilon$ .

## 0.76 Криволинейная трапеция

**Определение.** Криволинейная трапеция - часть плоскости, ограниченная прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , графиком функции  $y = f(x)$  и осью  $Ox$ .

## 0.77 Квадрируемость криволинейной трапеции

**Теорема.** Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

## 0.78 Квадрируемость криволинейного сектора

**Определение.** Фигура на плоскости, ограниченная лучами  $\phi = \alpha$  и  $\phi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\phi)$  называется **криволинейным сектором**.

**Теорема.** Пусть криволинейный сектор  $\Omega$  ограничен лучами  $\phi = \alpha$ ,  $\phi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\phi)$ . Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi,$$

где  $\rho(\phi)$  - непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ .

## 0.79 Несобственный интеграл, заданный на луче, на прямой, на отрезке. Сходящийся и расходящийся несобственный интеграл

**Определение.** Пусть  $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (задана на луче) и  $\forall b \in [a; +\infty)$   $f \in R[a; b]$ . Рассмотрим:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции  $f(x)$  на луче  $[a; +\infty)$ .

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

**Определение.** (продолжение определения)

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(2)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, пусть функция  $f : (-\infty; a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R[a; b]$ ,  $\forall b \in (-\infty; a]$ .

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции  $f(x)$  на луче  $(-\infty; a]$ .

Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x) dx,$$

где  $c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty$  - независимые друг от друга ( $\forall b, c \ f(x) \in R[b; c]$ ).

2. Далее, пусть  $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R} : \forall c \in [a; b) f \in R[a; c]$ . Положим:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции  $f$  на полуинтервале  $[a; b)$ .

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть  $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $\forall c \in (a; b] f \in R[c; b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x)dx -$$

несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на полуинтервале  $(a; b]$ .

Аналогично, пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $\forall c, d \in (a; b) f \in R[c, d]$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x)dx,$$

(где  $c \rightarrow a, d \rightarrow b$  - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от  $f(x)$  на  $(a; b)$

3. Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\exists c \in (a; b) : f$  - неограниченана в точке  $c$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Если  $\lim$  существует, то интеграл является сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_a^\omega f(x)dx,$$

где  $\omega = +\infty, -\infty, b$ .

## 0.80 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

**Теорема** (Критерий Коши). Пусть  $\forall b \in [a; \omega) f \in R[a; b]$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (a; \omega)$  и  $b_1, b_2 > B$  верно неравенство:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$



## 0.81 Свойства несобственного интеграла

**Теорема.** Пусть  $\forall b \in [a; \omega)$   $f \in R[a; b]$ .

1. Тогда  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \forall b \in [a; \omega)$   $\int_b^\omega f(x)dx$  сходится и

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx$$

- 2.

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_b^\omega f(x)dx = 0$$

3.  $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\omega cf(x)dx = c \int_a^\omega f(x)dx$$

(то есть если  $c \int_a^\omega f(x)dx$  сходится, то сходится  $\int_a^\omega c(x)dx$  и наоборот, и они равны)

4. Если  $\int_a^\omega f(x)dx$  и  $\int_a^\omega g(x)dx$  сходятся, то сходится и

$$\int_a^\omega (f(x) + g(x))dx = \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx$$

## 0.82 Сходимость несобственного интеграла от неотрицательных функций

**Теорема** (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции). Пусть  $f \in R[a; b]$  для  $\forall b \in (a; \omega)$  и  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; \omega)$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \exists M > 0 : \forall b \in (a; \omega)$

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

## 0.83 Первый признак сравнения

**Теорема** (первый признак сравнения). Если  $\forall x \in [a; \omega)$   $f(x) \leq g(x)$  и  $\forall b \in [a; \omega)$   $f, g \in R[a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ , тогда:

1. Если  $\int_a^\omega g(x)dx$  - сходится  $\implies \int_a^\omega f(x)dx$  - сходится.
2. Если  $\int_a^\omega f(x)dx$  - расходится  $\implies \int_a^\omega g(x)dx$  - расходится.

## 0.84 Второй признак сравнения

**Теорема** (второй признак сравнения). Если  $\forall x \in [a; \omega) f(x) > 0, g(x) > 0$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  (либо 0, либо  $+\infty$ , либо  $const \neq 0$ ), тогда:

1. Если  $A = +\infty$ , то из расходимости  $\int_a^\omega g(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^\omega f(x)dx$ , а из сходимости  $\int_a^\omega f(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^\omega g(x)dx$ .
2. Если  $A = 0$ , то из расходимости  $\int_a^\omega f(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^\omega g(x)dx$ , а из сходимости  $\int_a^\omega g(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^\omega f(x)dx$ .
3. Если  $A = const \neq 0$ , то интегралы  $\int_a^\omega f(x)dx$  и  $\int_a^\omega g(x)dx$  ведут себя одинаково.

## 0.85 Абсолютно сходящийся несобственный интеграл

**Определение.** Пусть  $\forall b \in [a; \omega) f \in R[a; b]$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится  $\int_a^\omega |f(x)|dx$ .

## 0.86 Связь сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла

**Теорема.** Если  $\int_a^\omega |f(x)|dx$  сходится, то  $\int_a^\omega f(x)dx$  тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$\left| \int_a^\omega f(x)dx \right| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx$$

## 0.87 Признак Вейерштрасса

**Следствие** (признак Вейерштрасса). Если  $\forall x \in [a; \omega) |f(x)| \leq g(x)$  и  $\int_a^\omega g(x)dx$  сходится, то  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится.

## 0.88 Условно сходящийся несобственный интеграл

**Определение.** Если  $\int_a^\omega |f(x)|dx$  расходится, а  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится, то  $\int_a^\omega f(x)dx$  называется **условно сходящимся**.

## 0.89 Признак Абеля

**Теорема** (признак Абеля). Если:

1.  $\int_a^\omega$  сходится,
  2.  $g(x)$  монотонна и ограничена на  $[a; \omega)$ ,
- то  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  - сходится.

## 0.90 Признак Дирихле

**Теорема** (признак Дирихле). Если:

1. Функция  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$  ограничена на  $[a; \omega)$ , то есть  $\exists M > 0 : \forall b \in [a; \omega)$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M,$$

2.  $g(x)$  - монотонна на  $[a; \omega)$  и  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \omega$ . Тогда  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  - сходится.

## 0.91 Теорема о замене переменной в несобственном интеграле

**Теорема** (о замене переменной в несобственном интеграле). Пусть  $\forall b \in [a; \omega)$ ,  $f \in C[a; b]$  (множество непрерывных функций), функция  $x = \phi(t)$  :

1.  $\phi : [\alpha; \omega_1) \rightarrow [a; \omega)$ ,
2.  $\phi(\alpha) = a$ , при  $t \rightarrow \omega_1$ ,  $\phi(t) \rightarrow \omega$ ,
3.  $\phi(t)$  монотонно возрастает на  $[\alpha; \omega_1)$ ,
4.  $\phi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \omega_1)$ ,

Тогда интегралы  $\int_a^\omega f(x)dx$  и  $\int_\alpha^{\omega_1} f(\phi(t))\phi'(t)dt$  ведут себя одинаково и равны между собой.

## 0.92 Линейное пространство

**Определение.** **Линейным пространством** называется четверка  $(X, K, +, *)$ , где  $X$  - множество,  $K$  - поле, "+" - операция сложения на  $X$  ("+" :  $X \times X \rightarrow X$ ), "\*" - операция умножения элемента поля  $K$  на элемент множества  $X$  ("\*" :  $K \times X \rightarrow X$ ).

При этом выполняются следующие аксиомы:

1.  $\langle X, + \rangle$  - абелева группа;
2. (a)  $\forall \alpha, \beta \in K$  и  $\forall x \in X \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ,  
(b)  $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ,  
(c)  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ,  
(d)  $\forall x \in X, 1 \in K \quad 1x = x$ .

### 0.93 Линейное нормированное пространство. Норма

**Определение.** Линейным нормированным пространством называется пара  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $X$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , а  $\|\cdot\|$  - функция из  $X$  в  $\mathbb{R}$ .

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , причем выполнены следующие аксиомы для нее:

1.  $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$  (читается "норма от  $x$ "),
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
3.  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Функция  $\|\cdot\|$  называется **нормой**.

### 0.94 Примеры линейных нормированных пространств (ЛНП)

**Пример.** ЛНП:

1.  $X = \mathbb{R}, \forall x \in X \quad \|x\| = |x|$  (норма = модулю по свойствам нормы),
2.  $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  ( $n$  раз),  $\forall x \in X \quad \|x\| = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}, x = (a_1, \dots, a_n) \in X$ . Покажем, что это норма:  
1., 2. - очевидно. Докажем, что  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , то есть докажем, что  $(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} (\Delta)$ .  
Рассмотрим  $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq | \sum_{k=1}^n x_k y_k | \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n y_k^2 = [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$ .

Имеем:

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \leq [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \implies$$

приходим к  $(\Delta)$  операцией взятия корня от обеих частей неравенства

$$\implies (\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$3. X = \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad \|x\| = \max_{k=1, n} |x_k|.$$

Такое ЛНП обозначается  $\mathbb{R}_\infty^n$ .

$$4. X = \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad \|x\| = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

Упражнение: доказать, что введенная функция есть норма, используя неравенство Левановича (Гельдера):

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n y_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

$$5. X - \text{пространство непрерывных на } [a; b] \text{ функций, то есть } X = C[a; b], \forall x \in X \quad \|x\| = \max_{t \in [a; b]} |x(t)|; \quad 1, 2, 3 - \text{ почти очевидно.}$$

$$6. X = C[a; b], \forall x \in X \quad \|x\| = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Покажем, что введенная функция есть норма:

$$(a) \quad \|x(t)\| = 0 \iff x(t) = 0;$$

Пусть  $\int_a^b |x(t)| dt = 0$ . От противного. Допустим, что  $\exists t_0 \in [a; b] : x(t_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists t_0 \in [\alpha; \beta], [\alpha; \beta] \subset [a; b]$  и  $\forall t \in [\alpha; \beta] \quad |x(t)| > 0$ ,

$$\int_a^b |x(t)| dt \geq \int_\alpha^\beta |x(t)| dt$$

Противоречие  $\implies \forall t \in [a; b] \quad |x(t)| = 0$ .

$$(b) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\text{из свойств определенного интеграла});$$

$$(c) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{из свойств определенного интеграла});$$

$$7. X = C[a; b].$$

## 0.95 Метрика ЛНП

ЛНП  $(C[a; b], \|x\|(*))$  обозначается  $C^p[a; b]$ .

**Утверждение.** Пусть  $(X, \| \cdot \|)$  - ЛНП. Тогда функция  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , является метрикой ЛНП.

## 0.96 Банахово ЛНП. Примеры

**Определение.** Если линейное нормированное пространство является полным относительно введенной метрики, то оно называется **банахово**.

( $X$  - полное, если  $\forall$  фундаментальная последовательность сходится).

**Пример.** (банаховых пространств)

1.  $X = \mathbb{R}$  - банахово;
2.  $X = C[a; b]$ ,  $\|x\| = \max_{t \in [a; b]} |x(t)|$ ;
3.  $C_p[a; b]$  - ЛНП,  $X = C[a; b]$ ,

$$\|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## 0.97 Теорема о вложенных шарах

**Теорема** (о вложенных шарах). Метрическое пространство (МП) является полным  $\iff \forall$  последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеют в нем непустое пересечение.

## 0.98 Сжимающее отображение

**Определение.** Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  - МП. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется **сжимающим**, если  $\exists 0 \leq \alpha < 1 : \forall x_1, x_2 \in X$

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha * \rho_X(x_1, x_2).$$

## 0.99 Принцип сжимающих отображений

**Теорема** (принцип сжимающих отображений). Сжимающее отображение полного МП в себя имеет единственную неподвижную точку, то есть если  $(X, \rho)$  - полное, отображение  $f : X \rightarrow X$  - сжимающее, то

$$\exists! a \in X : f(a) = a.$$

## 0.100 Предкомпактное множество в МП

**Определение.** Множество  $E$  в метрическом пространстве называется **предкомпактным** (относительно компактным), если ее замыкание  $\overline{E}$  компактно.

## 0.101 Вполне ограниченное множество

**Определение.** Множество  $E$  в МП  $(X, \rho)$  называется **вполне ограниченным**, если  $\forall \epsilon > 0 \exists$  конечная  $\epsilon$ -сеть для  $E$ .

Напоминание:  $\epsilon$ -сеть - набор  $\{x_1, \dots, x_n \mid x_i \in E\} \forall x \in E \exists$  хотя бы одна точка  $x_i : \rho(x, x_i) < \epsilon$ .

### 0.102 Теорема Хаусдорфа

**Теорема** (Хаусдорфа). Множество  $E$  в полном МП  $(X, \rho)$  является предкомпактным  $\iff$  оно вполне ограничено.

### 0.103 Теорема о полноте $\mathbb{R}^n$

**Теорема.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  ( $n$ -мерное линейное пространство с евклидовой метрикой),

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n (x^i)^2)^{\frac{1}{2}} - \text{полное}$$

### 0.104 Критерий компактности $\mathbb{R}^n$

**Теорема** (критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ ). Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  компактно  $\iff$  замкнуто и ограничено.

### 0.105 Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть  $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$  - линейное нормированное пространство (конечномерное). Говорят, что  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$  (эквивалентны), если  $\exists c_1, c_2 > 0$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ):

$$\forall x \in X \quad c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad (*)$$

**Теорема** (эквивалентность норм в конечномерном пространстве). Если  $X$  - конечномерное пространство МП, и  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  - две нормы на нем, то:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$$

### 0.106 Линейные отображения в конечномерных пространствах

**Определение.** Пусть  $X, Y$  - линейные пространства. Отображение  $L : X \rightarrow Y$  называется **линейным**, если  $\forall x_1, x_2 \in X$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha Lx_1 + \beta Lx_2.$$

### 0.107 Теорема о матрице линейного отображения

**Теорема.** Всякому линейному отображению  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  можно поставить в соответствие матрицу  $A$  размером  $k \times n$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x) = Ax.$$

При этом, если в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^k$  зафиксированны базисы, то матрица  $A$  определяется однозначно.

## 0.108 Теорема о непрерывности линейного отображения

**Утверждение.** Если  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  - линейно, то оно непрерывно.

## 0.109 Дифференциал в точке в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ , точка  $a \in D$  - предельная точка для  $D$ .

Отображение  $f$  называется **дифференцируемым** в точке  $a$ , если  $\forall h : a + h \in D \exists$  линейное отображение  $L(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  :

$$f(a + h) - f(a) = L(a)h + o(h), \quad h \rightarrow \bar{0}.$$

Линейный оператор  $L(a)$  называется **дифференциалом** (или **касательным отображением**, или **производным отображением**) функции  $f$  и обозначается:

$$Df(x), \quad df(x)$$

## 0.110 Критерий дифференцируемости отображения в $\mathbb{R}^n$

**Утверждение.** Пусть  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in D$

$$\text{и } f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

Отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $a \iff$  отображение  $f^i : D \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо в точке  $a$ .

## 0.111 Область

**Определение.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называется **областью**, если оно открыто и линейно связно.



## 0.112 Частная производная функции многих переменных

**Определение.** Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x \in D.$$

**Частной производной** отображения  $f$  точки  $x \in D$  по переменной  $x^i$  называется

$$\lim_{h^i \rightarrow 0} \frac{f(x^1, x^2, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - (f(x^1, x^2, \dots, x^n))}{h^i},$$

если этот предел существует.

Обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \text{or} \quad f'_{x^i}$$

## 0.113 Связь дифференциала и частных производных

**Теорема** (о связи дифференциала и частных производных). Если  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D$  - область в  $\mathbb{R}^n$ ) дифференцируема в точке  $x \in D$ , то она имеет в точке  $x$  все частные производные, при этом:

$$\begin{aligned} df(x)h &= \frac{\partial f}{\partial x^1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} h^n = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) * \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(здесь везде  $1, 2, \dots, n$  - индексы, а не степени или производные).

## 0.114 Матрица Якоби

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**Матрицей Якоби** отображения  $f$  в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  называется:

$$\mathfrak{J}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Т. обр. } df(x)h = \mathfrak{I}(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ df^2(x)h \\ \vdots \\ df^k(x)h \end{pmatrix}$$

Часто матрицу Якоби отображения  $f$  будем обозначать  $f'$ .

### 0.115 Дифференцируемость и арифметические операции

**Теорема.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  - область,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ , если  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x \in D$ , то  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  функция  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$  дифференцируема в точке  $x$ , при этом:

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g',$$

где  $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)'$ ,  $f'$ ,  $g'$  - матрицы Якоби.

**Теорема.** Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Если  $f, g$  - дифференцируемы в точке  $x \in D$ , то  $f \cdot g$  дифференцируемо в точке  $x$  и если  $g(x) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  - дифференцируемо в точке  $x$ , при этом:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

### 0.116 Дифференцирование композиции

**Теорема** (дифференцирование композиции). Пусть  $X$  - область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  - область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Если  $f$  дифференцируема в точке  $x \in X$ ,  $g$  - дифференцируема в точке  $y = f(x) \in Y$ , то  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$ .

### 0.117 Дифференцирование обратного отображения

**Теорема** (о дифференцируемости обратного отображения). Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

1.  $f$  дифференцируемо в точке  $x \in D$ ;

2.  $f$  имеет обратное отображение в  $D$ ;
3.  $f^{-1}$  - непрерывно в точке  $y = f(x)$ ;
4.  $f'(x)$  - обратимая матрица.

Тогда  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  дифференцируемо в точке  $y = f(x)$  и  $(f^{-1})' = [f'(x)]^{-1}$ .