Определения на экзамен
по Математическому Анализу
2 семестр

Данил Заблоцкий

18 мая 2023 г.

Оглавление

Определения

0.1 Формула Тейлора

Текст

0.2 Теорема о существовании и единственности многочлена Тейлора

Текст

0.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа

Текст

0.4 Разложение основных функций по формуле Тейлора

Текст

0.5 Теорема о связи знака производной с монотонностью функции

Текст

0.6 Необходимое условие локального экстремума

Текст

0.7 Достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной

Текст

0.8 Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных

Текст

0.9 Функция, выпуклая вверх (вниз)

Текст

0.10 Геометрический смысл выпуклости вверх (вниз) функции

Текст

0.11 Критерий выпуклости в терминах первой производной

Текст

0.12 Критерий выпуклости в терминах касательной

Текст

0.13 Критерий выпуклости в терминах высших производных

Текст

0.14 Первообразная

Определение (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

0.15 Неопределенный интеграл, операция интегрирования

Определение (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C$, где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Определение (интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

0.16 Основные методы интегрирования

Утверждение. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Формула интегрирования по частям:
   $udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x)$.

3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$.

0.17 Рациональные функции

Определение (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

0.18 Простые дроби

Определение (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

0.19 Интегрирование простых дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| =$
$A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx) \end{array} \right| = \ldots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C}d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\ldots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{l} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$$

$$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k,\ k = 1, \ldots$$

0.20 Разложение рациональных дробей на простые

Лемма. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Лемма. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

0.21 Метод неопределенных коэффициентов

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \ldots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_ix+N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^rx+N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\quad \deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1.$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим

n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

0.22 Метод Остроградского

Теорема. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1}+\int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$

0.23 Теорема Чебышева (без доказательства)

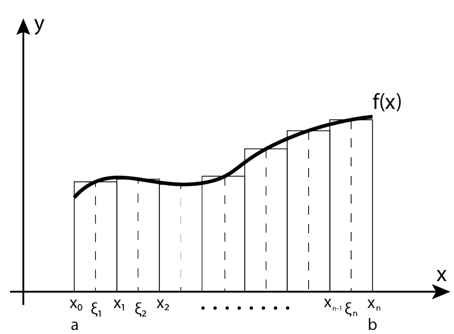
У меня этого нет

0.24 Подстановки Эйлера

И этого тоже нет

0.25 Интегральная сумма, интеграл Римана

Определение (интеграл Римана)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = 1, \ldots, n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i-го прямоугольника и Δx_i - ширина i-го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a;b]$, если существует предел интегральных сумм S_n, то есть $\exists \lim\limits_{max\Delta x_i \to 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от способа выбора точек ξ_i.

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a;b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $R([a;b])$.

0.26 База на множестве

Определение (база множества)**.** Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X, если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \emptyset$
2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \ \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример (баз множества)**.** 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x: \ 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

0.27 Предел функции по базе (в том числе, для метрических пространств)

Определение (предел по базе)**.** Пусть $f: X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists$ элемент базы $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение (предел по базе (МП))**.** Пусть (Y, d) - МП, $f: X \to Y,\ \beta$ - база на X.

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \beta \in \beta \ \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y) \ \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y.

0.28 Основные свойства предела по базе

Теорема (основные свойства предела по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \lim\limits_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta :\ f$ ограничена на β
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) = A$ и $\lim\limits_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

0.29 Связь предела функции по базе с неравенствами

Теорема (связь предела функции по базе с неравенствами)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \beta \in \beta : \quad \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} f(x) \leqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) < \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) < g(x)$

   Если $\lim\limits_{\beta} f(x) \geqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) \geqslant g(x)$
3. Если $h : X \to \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta :\ \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ **И** $A = \lim\limits_{\beta} f(x) = \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} h(x) = A$

0.30 Критерий Коши существования предела по базе

Теорема (критерий Коши существования предела по базе)**.** Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть (Y, d) - МП (**полное**), $f : X \to Y,\ \beta$ - база на Y.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

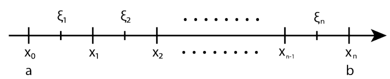
0.31 Разбиение с отмеченными точками

Определение (разбиение)**.** Пусть дан отрезок $[a; b]$. **Разбиением** P отрезка $[a; b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i-го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max\limits_{i=\overline{0,n}}\{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение (разбиение с отмеченными точками)**. Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \ldots, x_n\}, \{\xi_0, \ldots, \xi_n\},$$

$$\text{где } a = x_0 < \ldots < x_n = b,\ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$



Пусть $\Re_\xi = \{(P,\xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a,b]$.

0.32 База на множестве разбиений отмеченными точками

Утверждение. Множество $\beta = \{\beta_\delta : \quad \delta > 0\}$ является базой на $\Re_\xi$.

0.33 Интегрируемая по Риману функция, интеграл Римана (через предел по базе)

Определение (!)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P,ξ) - разбиение отрезка $[a;b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиение $(P,\xi) \in \Re_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ (то есть (P,ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta : \quad \forall$ разбиения $(P,\xi) :\ \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P,\xi)) - I| < 0$:

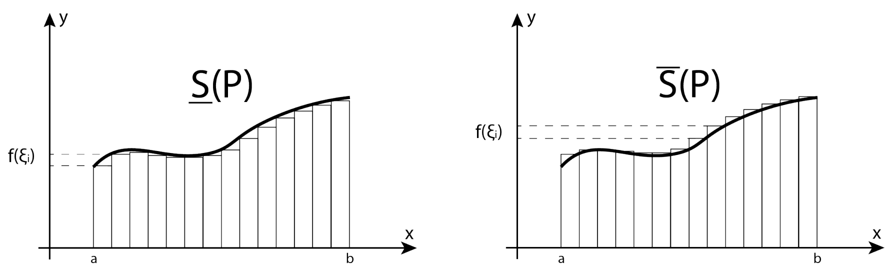
$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \int_a^b f(x)dx$$

0.34 Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции)**.** *_*
Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$), то f ограничена на $[a;b]$.

0.35 Суммы Дарбу

Определение (нижняя/верхняя суммы Дарбу)**.** Пусть $f[a;b] \to \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, $M_k = \sup\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P.



0.36 Свойства сумм Дарбу

Теорема (свойства сумм Дарбу)**.** Свойства:

1. $\forall (P, \xi)\ \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P, \xi)) \leqslant \overline{S}(P)$
2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$
3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leqslant \overline{S}(P_2)$

0.37 Нижний и верхний интегралы Дарбу

Определение (верхний/нижний интеграл Дарбу)**.** Числа $\underline{\mathfrak{I}} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{\mathfrak{I}} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

0.38 Критерий интегрируемости

Теорема (критерий интегрируемости)**.** Функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

0.39 Колебание функции на отрезке

Определение. Обозначим $M_i - m_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δi.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$

0.40 Теорема Дарбу

Теорема (Дарбу)**.** Для любой ограниченной функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \underline{S}(P); \ \overline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \overline{S}(P)$$

0.41 Интегрируемость непрерывных функций

Теорема (интегрируемость непрерывных функций)**.** Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b] \implies f$ - интегрируема на $[a; b]$, то есть $f \in \mathbb{R}[a; b]$.

0.42 Интегрируемость функции с конечным числом точек разрыва

Теорема (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва)**.** Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ - ограничена и имеет на $[a; b]$ конечное число точек разрыва. Тогда $f \in \mathbb{R}[a; b]$ интегрируема на $[a; b]$.

0.43 Интегрируемость монотонных функций

Теорема (интегрируемость монотонных функций)**.** Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ - монотонна на $[a; b] \implies f$ - интегрируема на $[a; b]$.

0.44 Свойства интегрируемых функций

Теорема. Пусть $f \in \mathbb{R}[a; b], \ g \in \mathbb{R}[a; b]$. Тогда:

1. $f \pm g \in R[a; b]$.
2. $\alpha f \in R[a; b], \ \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f * g \in R[a; b]$.
4. $|f| \in R[a; b]$, при этом:

- $\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

0.45 Аддитивность интеграла Римана

Определение. Пусть $a > b,\ a, b \in \mathbb{R}$, положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$.

Теорема (Аддитивность интеграла Римана)**.** Пусть даны точки $a, b, c \in \mathbb{R}$. Если f - интегрируема на большем из отрезков $[a;b],\ [a,c],\ [b,c]$, то f - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если f интегрирема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

0.46 Монотонность интеграла Римана и ее следствия

Теорема. Если $a < b$ и $f \in R[a;b]$ и:

1. $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
2. $\forall x \in [a;b]\ f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$

Следствие. (теоремы 2.4.9)

1. Если $a < b,\ f, g \in R[a;b]$ и:
   (a) $\forall x \in [a;b]\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$
   (b) $\forall x \in [a;b]\ f(x) < g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$
2. Если $f \in R[a;b],\ a < b,\ M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.
3. (Теорема о среднем)
   Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M] :\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

   Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b] :\ \int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

0.47 Теорема о среднем

Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b)$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M]$: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

0.48 Первая теорема о среднем

Теорема (Первая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b](a > b, a < b)$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и g не меняет свой знак на $[a;b]$. Тогда $\exists \mu \in [m;M]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

0.49 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

Определение. Пусть $f \in R[a;b]$, $x \in [a;b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $F(x)$ определена для $\forall x \in [a;b]$.

0.50 Непрерывность интеграла Римана

Теорема (непрерывность интеграла Римана)**.** Если $f \in R[a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывна на $[a;b]$.

0.51 Дифференцируемость интеграла Римана по верхнему пределу и ее следствие

Теорема (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу)**.** Пусть $f \in R[a;b]$, $x \in [a;b]$ и f непрерывна в точке x, тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x, причем:

$$F'(x) = f(x) \implies (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$$

Следствие. Если f - непрерывна на $[a;b]$, то на $[a;b]$ она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Замечание. Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a;b]$ - множество интегрируемых на $[a;b]$ функций;
- $C[a;b]$ - множество непрерывных на $[a;b]$ функций;
- $C^o[a;b]$ - множество дифференцируемых на $[a;b]$ функций.

Получаем:

$$C^o[a;b] \subset C[a;b] \subset R[a;b].$$

0.52 Вторая теорема о среднем

Теорема (вторая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b]$, причем f - монотонна на $[a;b]$. Тогда $\exists \xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

0.53 Формула Ньютона-Лейбница для непрерывной функции

Теорема. Пусть f - непрерывна на $[a;b]$ и $F(x)$ - её первообразная.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

0.54 Формула Ньютона-Лейбница для функции, недиффиренцируемой в некоторых (конечное число) точках отрезка. Следствие.

Теорема. Пусть $F(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $[a;b]$ за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема: $F'(x) = f(x)$. И, наконец, $f(x) \in R[a;b]$.

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Следствие. Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то $\forall x \in [a;b]$:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

0.55 Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Теорема (формула интегрирования по частям)**.** Если фукнции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

0.56 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** Пусть функция $f(t)$ имеет на отрезке $[a;x]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a;x),$$

где $r_n(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1}dt$.

0.57 Замена переменной в интеграле Римана (для непрерывных функций)

Теорема. Пусть $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha;\beta]$ в отрезок $[a;b]$, причем $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, функция $f(\phi(t))\phi'(t)$ - непрерывна на $[\alpha;\beta]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

0.58 Замена переменной в интеграле Римана (для интегрируемых функций)

Теорема (замена переменной для интегрируемых функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R},\ f \in R[a;b]$, функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$
2. $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$
3. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$
4. ϕ - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

0.59 Путь

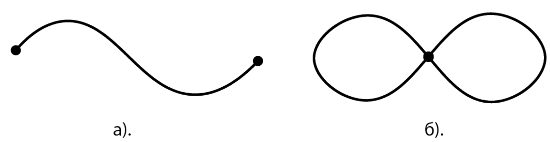
Определение. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \to X$$

0.60 Простой путь

Определение. Пусть $\gamma : [a; b] \to X$ называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$



а). простой путь б). непростой путь

0.61 Отношение эквивалентности путей

На множестве путей введем отношение.

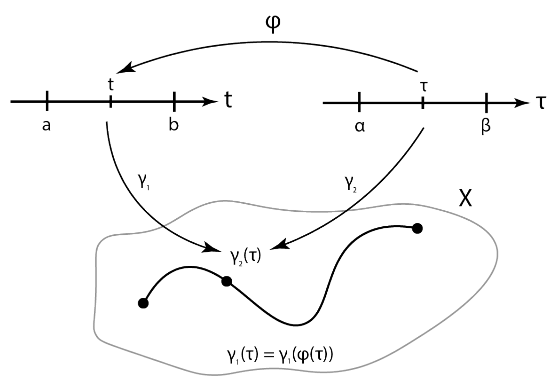
Пусть $\gamma_1 : [a; b] \to X,\ \gamma_2 : [\alpha; \beta] \to X$.

Будем говорить, что γ_1 и γ_2 находятся в отношении " $\sim$ ", то есть $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует строго возрастающее отображение $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$:

$$\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b,$$

а так же:

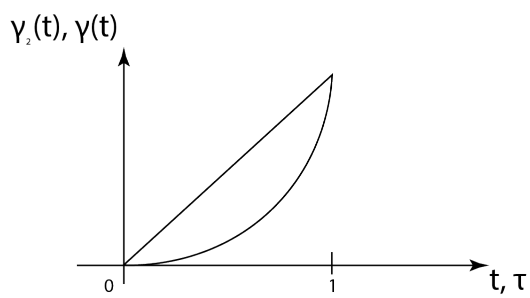
$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$



0.62 Носитель пути

Определение. Образ пути γ называется **носителем** этого пути.

Пример. Рассмотрим:
$\gamma_1 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) = t;$
$\gamma_2 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) = \tau^3,$



Что бы доказать, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$, нужно найти строго возрастающее отображение $\phi : [0;1] \to [0;1]$:
$t = \phi(\tau) = \tau^3,\ \phi(\tau)$ - строго возрастающее, $\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1;$
$\gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau)).$

0.63 Кривая на множестве

Определение. **Кривой** в X будем называть класс эквивалентных путей.

0.64 Простая кривая

Определение. Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

0.65 Параметризация кривой

Определение. Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей) l называется **параметризацией** этой кривой.

0.66 Гладкая параметризация кривой

Определение. Пусть l - простая кривая в $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t); t(t))$ - ее параметризация. Кривая l называется **гладкой**, если $\forall t \ x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$ и $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$ $(\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2)$, $x'(t_0) = 0$ и $y'(t_0) = 0$.

0.67 Ломаная, вписанная в кривую

Это мне походу было впадлу писать

0.68 Периметр ломаной, вписанной в кривую

Определение. Пусть $l \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ - параметризация кривой l.

Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ - разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $M_i = \gamma(t_i)$, $i = \overline{0, n}$ - точка пути γ (кривая l):

$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

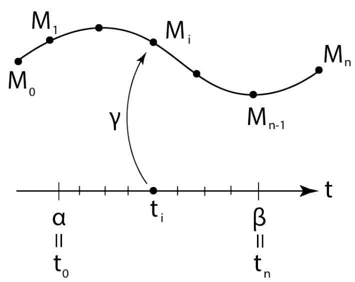
Тогда отрезок $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1, n})$ называется **звеном** кривой l. Объединение $\bigcap\limits_i M_{i-1}M_i$ - ломаная, вписанная в l.

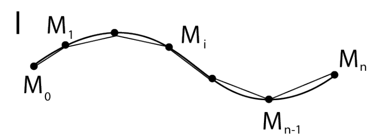
Периметром ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \ldots, M_n) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$

0.69 Спрямляемая кривая

Определение. Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую l - ограничено, то кривую l будем называть **спрямляемой**.





0.70 Аддитивность длины кривой

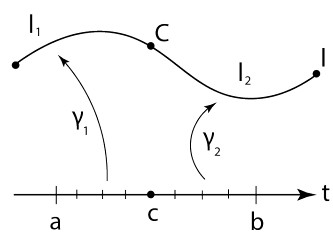
Теорема (аддитивность длины кривой)**.** Функция $S(l)$ является аддитивной, то есть если $l = l_1 \cup l_2$, то $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Более тонко: Пусть $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация спрямляемой кривой l, точка $c \in [a; b]$:

$\gamma_1 : [a; c] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_1,

$\gamma_2 : [c; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_2,

при этом $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.



Тогда $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

0.71 Длина кривой как предел

Теорема. Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ и $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ - разбиение отрезка $[a; b]$, этому разбиению соответствуют точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ - соответсвующая ломаная, вписанная в l ($M_i = \gamma(t_i)$), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \to 0} p(m),$$

где $\lambda = \max_i \Delta t_i,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

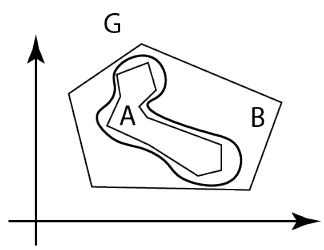
0.72 Формула вычисления длины кривой

Теорема (формула для вычисления длины кривой)**.** Пусть l - гладкая кривая; $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация (гладкая, то есть $\gamma(t) = (x(t); y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные произведения на $[a; b]$). Тогда l - спрямляема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

0.73 Многоугольник

Определение. Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



0.74 Измеримое по Жордану (квадрируемое) множество. Площадь.

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ называется **измеримым по Жардану** (или **квадрируемым**), если:

$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

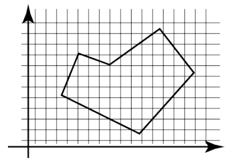
где sup берется по всем многоугольникам, вписанным в G, a inf - по всем многоугольникам, описанным около G. При этом их общее значение $S = S_* = S^*$ называется **площадью** G, или **мерой Жардана**.

S_* - **внутренняя** мера, S^* - **внешняя** мера.

Другими словами, множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо, если внутреняя и внешняя меры совпадают.

Здесь $S(A)$, $S(B)$ - площади многоугольников A и B. Многоугольник A можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:

Пример. (из определения)



$$S_{\square} = ab; \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

1. Квадрируемые множетсва на плоскости.

   Круг с границей:
   $$x^2 + y^2 = 1$$

   Упражнение: доказать, что круг - квадрируемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

   Множество точек одинарного квадрата с рациональными координатами:
   $$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0;1] \times [0;1])$$

   Вписанный многоугольник $A = \emptyset$, $S(A) = 0$. Многоугольник $B = [0;1] \times [0;1]$ имеет площадь равную 1 ($S(B) = 1$).

   $$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \ (S_* \neq S^*)$$

0.75 Критерий квадрируемости множества

Теорема (критерий квадрируемости)**.** Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо $\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists$ многоугольники A и B:

1. $A \subset G, \ B \supset G$,
2. $S(B) - S(A) < \epsilon$.

0.76 Криволинейная трапеция

Определение. Криволинейная трапеция - часть плоскости, ограниченная прямыми $x = a, \ x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox. РИСУНОК

0.77 Квадрируемость криволинейной трапеции

Теорема. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$.

0.78 Квадрируемость криволинейного сектора

Определение. Фигура на плоскости, ограниченная лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$ называется **криволинейным сектором**.

Теорема. Пусть криволинейный сектор Ω ограничен лучами $\phi = \alpha,\ \phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$. Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)d\phi,$$

где $\rho(\phi)$ - непрерывна на $[\alpha;\beta]$. РИСУНОК

0.79 Несобственный интеграл, заданный на луче, на прямой, на отрезке. Сходящийся и расходящийся несобственный интеграл

Определение. Пусть $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ (задана на луче) и $\forall b \in [a;+\infty)\ f \in R[a;b]$. Рассмотрим:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $[a;+\infty)$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Определение. (продолжение определения)

1. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}(F(b)-F(2)) = \lim\limits_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

   Аналогично, пусть функция $f : (-\infty;a] \to \mathbb{R},\ f \in R[a;b],\ \forall b \in (-\infty;a]$.

   $$\lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

   этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $(\infty;a]$.

   Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

   $$\int_{-\infty}^a f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty, b\to-\infty} \int_{b}^{c} f(x)dx,$$

где $c \to +\infty, b \to -\infty$ - независимые друг от друга ($\forall b, c\ f(x) \in R[b;c]$).
РИСУНОК

2. Далее, пусть $f : [a;b) \to \mathbb{R} :\ \forall c \in [a;b) f \in R[a;c]$. Положим:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to b} \int_{a}^{c} f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции f на полуинтервале $[a;b)$.

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть $f : (a;b] \to \mathbb{R}$, причем $\forall c \in (a;b]\ f \in R[c;b]$:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{c\to a} \int_{c}^{b} f(x)dx\ -$$

несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $(a;b]$.

Аналогично, пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R}$, причем $\forall c, d \in (a;b)\ f \in R[c,d]$. Тогда:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{c\to a, d\to b} \int_{c}^{d} f(x)dx,$$

(где $c \to a, d \to b$ - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от $f(x)$ на $(a;b)$

3. Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ и $\exists c \in (a;b) :\ f$ - неограниченана в точке c.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если lim существует, то интеграл ялвяется сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_{a}^{\omega} f(x)dx,$$

где $\omega = +\infty,\ -\infty,\ b$.

0.80 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема (Критерий Коши)**.** Пусть $\forall b \in [a;\omega)$ $f \in R[a;b]$.
$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists B \in [a;\omega):$ $\forall b_1, b_2 \in (a;\omega)$ и $b_1, b_2 > B$ верно неравенство:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$$

РИСУНОК

0.81 Свойства несобственного интеграла

Не нашел

0.82 Сходимость несобственного интеграла от неотрицательных функций

Теорема (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции)**.** Пусть $f \in R[a;b]$ для $\forall b \in (a;\omega)$ и $f(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [a;\omega)$.
$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \exists M > 0:$ $\forall b \in (a;\omega)$

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

РИСУНОК

0.83 Первый признак сравнения

Теорема (первый признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)$ $f(x) \leqslant g(x)$ и $\forall b \in [a;\omega)$ $f, g \in R[a;b],$ $f(x) \geqslant 0,$ $g(x) \geqslant 0$, тогда:

1. Если $\int_a^\omega g(x)dx$ - сходится $\implies$ $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.
2. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ - расходится $\implies$ $\int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

0.84 Второй признак сравнения

Теорема (второй признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)$ $f(x) > 0,$ $g(x) > 0$ и $\exists \lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (либо 0, либо $+\infty$, либо $const \neq 0$), тогда:

1. Если $A = +\infty$, то из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$.

2. Если $A = 0$, то из расходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega g(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega f(x)dx$.

3. Если $A = const \neq 0$, то интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ ведут себя одинаково.

0.85 Абсолютно сходящийся несобственный интеграл

Определение. Пусть $\forall b \in [a;\omega)$ $f \in R[a;b]$.
$\int_a^\omega f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^\omega |f(x)|dx$.

0.86 Связь сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла

Теорема. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leqslant \int_a^\omega |f(x)|dx$$

0.87 Признак Вейерштрасса

Следствие (признак Вейерштрасса)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)$ $|f(x)| \leqslant g(x)$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится.

0.88 Условно сходящийся несобственный интеграл

Текст

0.89 Признак Абеля

Текст

0.90 Признак Дирихле

Текст

0.91 Теорема о замене переменной в несобственном интеграле

Текст

0.92 Линейное пространство

Текст

0.93 Линейное нормированное пространство. Норма

Текст

0.94 Примеры линейных нормированных пространств (ЛНП)

Текст

0.95 Метрика ЛНП

Текст

0.96 Банахово ЛНП. Примеры

Текст

0.97 Теорема о вложенных шарах

Текст

0.98 Сжимающее отображение

Текст

0.99 Принцип сжимающих отображений

Текст

0.100 Предкомпактное множество в МП

Текст

0.101 Вполне ограниченное множество

Текст

0.102 Теорема Хаусдорфа

Текст

0.103 Теорема о полноте $\mathbb{R}^n$

Текст

0.104 Критерий компактности $\mathbb{R}^n$

Текст

0.105 Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$

Текст

0.106 Линейные отображения в конечномерных пространствах

Текст

0.107 Теорема о матрице линейного отображения

Текст

0.108 Теорема о непрерывности линейного отображения

Текст

0.109 Дифференциал в точке в $\mathbb{R}^n$

Текст

0.110 Критерий дифференцируемости отображения в $\mathbb{R}^n$

Текст

0.111 Область

Текст

0.112 Частная производная функции многих переменных

Текст

0.113 Связь дифференциала и частных производных

Текст

0.114 Матрица Якоби

Текст

0.115 Дифференцируемость и арифметические операции

Текст

0.116 Дифференцирование композиции

Текст

0.117 Дифференцирование обратного отображения

Текст

0.118 Производная функции по вектору

Текст

0.119 Теорема о существовании производной функции по вектору

Текст

0.120 Градиент функции

Текст

0.121 Производная по направлению вектора

Текст

0.122 Теорема о среднем (аналог теоремы Лагранжа).

Текст

0.123 Следствие теоремы о среднем

Текст

0.124 Достаточное условие дифференцируемости функции

Текст

0.125 Производные высших порядков

Текст

0.126 Теорема о смешанных производных

Текст

0.127 Формула Тейлора

Текст

0.128 Локальный экстремум

Текст

0.129 Необходимое условие локального экстремума

Текст

0.130 Критическая точка функции

Текст

0.131 Достаточное условие локального экстремума

Текст

0.132 Критерий Сильвестра

Текст

0.133 Неявная функция

Текст

0.134 Теорема о неявной функции

Текст

0.135 Диффиоморфизм

Текст

0.136 Теорема о неявной функции (через понятие диффиоморфизма)

Текст