Определения на экзамен
по Математическому Анализу
2 семестр

Данил Заблоцкий

29 июня 2023 г.

Оглавление

Определения

0.1 Формула Тейлора

Предисловие: Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a; b)$.

Нужно построить многочлен $P(x; x_0)$ вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n;$$

$f(x) - P(x; x_0) = r_n(x; x_0)$ - n-ый остаточный член в формуле Тейлора.

Определение. Остаточные члены в форме Пеано имеют вид:

$$r_n(x; x_0) = \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)^n$$

Определение. Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a; b),\ f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно.

Многочленом Тейлора (полиномом) функции $f(x)$ в точке x_0 называется многочлен

$$P(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

0.2 Теорема о существовании и единственности многочлена Тейлора

Теорема. Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a; b),\ f$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, тогда $\exists!$ многочлен вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

такой, что

$$f(x) - P(x; x_0) = \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

0.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа

Пусть $f(x) = P(x; x_0) + r_2(x; x_0)$.

Теорема. Пусть $Q = [x; x_0],\ Q^o = (x; x_0);\ f : Q \to \mathbb{R}:$

1. $f,\ f',\ \ldots,\ f^{(n)}$ непрерывны на Q;
2. f имеет производную $(n+1)$-го порядка на Q^o.

Далее, $\phi : Q \to \mathbb{R}$:

1. ϕ - непрерывна на Q;
2. ϕ - дифференцируема на Q^o;
3. $\phi'(t) \neq 0\ \forall t \in Q^o$.

Тогда $\exists \xi \in Q^o$:

$$r_n(x; x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)} * \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} * (x - \xi)^n$$

Следствие. Теоремы:

1. Пусть $\phi(t) = x - t,\ \phi(t) = -1,\ \phi(x) = 0,\ \phi(x_0) = x - x_0$. Тогда:

   $$r_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} * (x - \xi)^n * (x - x_0)$$

   - остаточный член формулы Тейлора **в форме Коши**.

2. $\phi(t) = (x-t)^{n+1};\ \phi'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1);\ \phi(x) = 0;$
   $\phi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$. Тогда:

   $$r_n(x; x_0) = \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x-\xi)^n} * f^{(n+1)}(\xi) * (x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   - остаточный член в формуле Тейлора **в форме Лагранжа**.

0.4 Разложение основных функций по формуле Тейлора

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n-1})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

0.5 Теорема о связи знака производной с монотонностью функции

Утверждение (связь знака производной с монотонностью)**.** Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$. Тогда знак производной функции связан с монотонностью следующим образом:

1. $f'(x) > 0 \implies f(x)$ - возрастает $\implies f'(x) \geqslant 0$;
2. $f'(x) \geqslant 0 \implies f(x)$ - не убывает $\implies f'(x) \geqslant 0$;
3. $f'(x) = 0 \implies f(x)$ - const $\implies f'(x) = 0$;
4. $f'(x) < 0 \implies f(x)$ - убывает $\implies f'(x) \leqslant 0$;
5. $f'(x) \leqslant 0 \implies f(x)$ - не возрастает $\implies f'(x) \leqslant 0$;

0.6 Необходимое условие локального экстремума

Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R},\ x_0$ - точка внутреннего локального экстремума. Либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0) \nexists$.

0.7 Достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной

Утверждение (достаточное условие локального экстремума в терминах первой производной)**.** Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R},\ f$ - непрерывна на $(a;b)$, дифференцируема везде, кроме точки $x_0,\ x_0 \in (a;b)$. Тогда:

1. Если $\forall x < x_0\ f'(x) > 0$ и $x > x_0\ f'(x) < 0$, то x_0 - точка локального максимума;
2. Если $\forall x < x_0\ f'(x) < 0$ и $x > x_0\ f'(x) > 0$, то x_0 - точка локального минимума;
3. Если $f'(x)$ - не меняет знак на $(a;b)$ (за исключением x_0), то в точке x_0 - экстремумов нет.

0.8 Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных

Утверждение (достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных)**.** Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $(a;b)$ и имеет производные до n-го порядка включительно, $x_0 \in (a;b)$.

Причем $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$
Тогда:

1. Если $n = 2k+1$ (нечет.), то экстремума - нет;
2. Если $n = 2k$ (чет.), то при $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 - точка локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума.

0.9 Функция, выпуклая вверх (вниз)

Определение. Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f(x)$ - **выпукла вниз (вверх)**, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2))$$

, при этом $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

0.10 Геометрический смысл выпуклости вверх (вниз) функции

Это в тетради смотреть, не хочу столько печатать

0.11 Критерий выпуклости в терминах первой производной

Утверждение (критерий выпуклости в терминах первой производной)**.** Пусть функция $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$.

- $f(x)$ выпукла вниз на $(a;b) \iff f'(x)$ не убывает на $(a;b)$;
- $f(x)$ выпукла вверх на $(a;b) \iff f'(x)$ не возрастает на $(a;b)$.

Строгая выпуклость функции соответствует строгой монотонности производной.

0.12 Критерий выпуклости в терминах касательной

Утверждение. Пусть функция $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $(a;b)$.

Функция $f(x)$ выпукла вниз на $(a;b) \iff$ ее график всеми своими точками лежит не ниже любой ее касательной в $\forall x \in (a;b)$. При этом строгой выпуклости соответствует то, что график функции лежит выше касательной за исключением точки касания.

0.13 Критерий выпуклости в терминах высших производных

Следствие. Пусть функция $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на $(a; b)$. Тогда:

- $f(x)$ выпукла вниз на $(a; b) \iff \forall x \in (a; b)\ f''(x) \geqslant 0$;
- $f(x)$ выпукла вверх на $(a; b) \iff \forall x \in (a; b)\ f''(x) \leqslant 0$.

Строгая выпуклость соответствует строгому неравенству.

0.14 Первообразная

Определение (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

0.15 Неопределенный интеграл, операция интегрирования

Определение (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C$, где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Определение (интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

0.16 Основные методы интегрирования

Утверждение. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$

2. Формула интегрирования по частям:
   $\int udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x).$

3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C.$

0.17 Рациональные функции

Определение (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

0.18 Простые дроби

Определение (Простые дроби)**.** **Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$

2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

0.19 Интегрирование простых дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| =$
$A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx) \end{array} \right| = \dots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C}d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\dots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\displaystyle\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\displaystyle\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{c} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$$
$$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k = 1,\ldots$$

0.20 Разложение рациональных дробей на простые

Лемма. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Лемма. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

0.21 Метод неопределенных коэффициентов

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_ix+N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^rx+N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\quad \deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1.$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим

n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

0.22 Метод Остроградского

Теорема. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$

0.23 Теорема Чебышева

Теорема. Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где $m, n, p \in \mathbb{Q}$, можно привести к интегрированию рациональных функций в следующих случаях:

- $p \in \mathbb{Z}$: замена $x = t^N$, где N - общий знаменатель m и n;
- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: замена $a + bx^n = t^N$, где N - знаменатель p;
- $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$: замена $ax^{-n} + b = t^N$, где N - знаменатель p.

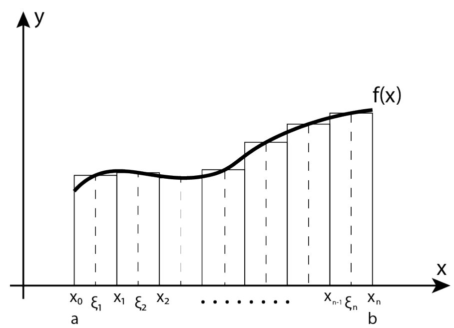
0.24 Подстановки Эйлера

1. Если $a > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкий $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$.
2. Если $a < 0$ и $c > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$.
3. Если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x-x_2)(x-x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}dx)$ рационализируется подстановкий $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$.

Подстановки Эйлера неудобны для практического использования, так как даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

0.25 Интегральная сумма, интеграл Римана

Определение (интеграл Римана)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = 1, \ldots, n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i-го прямоугольника и Δx_i - ширина i-го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a;b]$, если существует предел интегральных сумм S_n, то есть $\exists \lim\limits_{max \Delta x_i \to 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от способа выбора точек ξ_i.

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a;b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $R([a;b])$.

0.26 База на множестве

Определение (база множества)**.** Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X, если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \varnothing$

2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta\ \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример (баз множества)**.** 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$

3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x: \ 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

0.27 Предел функции по базе (в том числе, для метрических пространств)

Определение (предел по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, \ \beta$ - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists$ элемент базы $\beta \in \beta: \ \forall x \in \beta: \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение (предел по базе (МП))**.** Пусть (Y, d) - МП, $f : X \to Y, \ \beta$ - база на X.

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \beta \in \beta \ \forall x \in \beta: \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y) \ \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y.

0.28 Основные свойства предела по базе

Теорема (основные свойства предела по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, \ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \lim_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta: \ f$ ограничена на β
2. Если $\lim_{\beta} f(x) = A$ и $\lim_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

0.29 Связь предела функции по базе с неравенствами

Теорема (связь предела функции по базе с неравенствами)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, \ g : X \to \mathbb{R}, \ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \beta \in \beta: \quad \forall x \in \beta \ f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim_{\beta} f(x) \leqslant \lim_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim_{\beta} f(x) < \lim_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta \ \forall x \in \beta \quad f(x) < g(x)$

   Если $\lim_{\beta} f(x) \geqslant \lim_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta \ \forall x \in \beta \quad f(x) \geqslant g(x)$
3. Если $h : X \to \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta: \ \forall x \in \beta \ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ **И** $A = \lim_{\beta} f(x) = \lim_{\beta} g(x)$, то $\lim_{\beta} h(x) = A$

0.30 Критерий Коши существования предела по базе

Теорема (критерий Коши существования предела по базе)**.** Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

2. Пусть (Y, d) - МП (**полное**), $f : X \to Y,\ \beta$ - база на Y.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

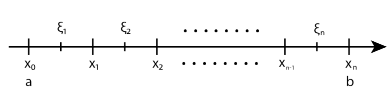
0.31 Разбиение с отмеченными точками

Определение (разбиение)**.** Пусть дан отрезок $[a; b]$. **Разбиением** P отрезка $[a; b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i-го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max\limits_{i=\overline{0,n}} \{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение (разбиение с отмеченными точками)**. Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \ldots, x_n\}, \{\xi_0, \ldots, \xi_n\},$$

$$\text{где } a = x_0 < \ldots < x_n = b,\ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$



Пусть $\Re_\xi = \{(P, \xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

0.32 База на множестве разбиений отмеченными точками

Утверждение. Множество $\beta = \{\beta_\delta : \quad \delta > 0\}$ является базой на $\Re_\xi$.

0.33 Интегрируемая по Риману функция, интеграл Римана (через предел по базе)

Определение (!)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P,ξ) - разбиение отрезка $[a;b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиение $(P,\xi) \in \Re_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ (то есть (P,ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta :\quad \forall$ разбиения $(P,\xi) :\ \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P,\xi)) - I| < 0$:

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \int_a^b f(x)dx$$

0.34 Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции)**.** $*\_*$
Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$), то f ограничена на $[a;b]$.

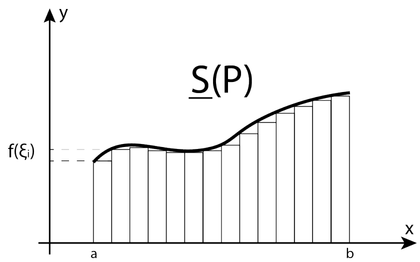
0.35 Суммы Дарбу

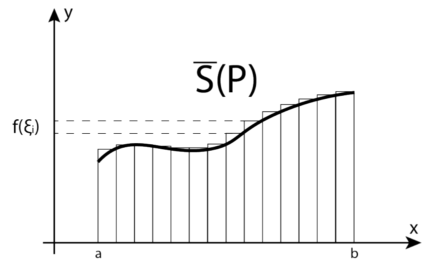
Определение (нижняя/верхняя суммы Дарбу)**.** Пусть $f[a;b] \to \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, $M_k = \sup\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P.

0.36 Свойства сумм Дарбу

Теорема (свойства сумм Дарбу)**.** Свойства:

1. $\forall (P,\xi)\ \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P,\xi)) \leqslant \overline{S}(P)$





2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$

3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leqslant \overline{S}(P_2)$

0.37 Нижний и верхний интегралы Дарбу

Определение (верхний/нижний интеграл Дарбу). Числа $\underline{\mathfrak{I}} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{\mathfrak{I}} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

0.38 Критерий интегрируемости

Теорема (критерий интегрируемости). Функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a; b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

0.39 Колебание функции на отрезке

Определение. Обозначим $M_i - m_i = \sup\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δi.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$

0.40 Теорема Дарбу

Теорема (Дарбу). Для любой ограниченной функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{S}(P); \ \overline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(P)$$

0.41 Интегрируемость непрерывных функций

Теорема (интегрируемость непрерывных функций). Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b] \implies f$ - интегрируема на $[a; b]$, то есть $f \in \mathbb{R}[a; b]$.

0.42 Интегрируемость функции с конечным числом точек разрыва

Теорема (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - ограничена и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва. Тогда $f \in \mathbb{R}[a;b]$ интегрируема на $[a;b]$.

0.43 Интегрируемость монотонных функций

Теорема (интегрируемость монотонных функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - монотонна на $[a;b] \implies f$ - интегрируема на $[a;b]$.

0.44 Свойства интегрируемых функций

Теорема. Пусть $f \in \mathbb{R}[a;b],\ g \in \mathbb{R}[a;b]$. Тогда:

1. $f \pm g \in R[a;b]$.
2. $\alpha f \in R[a;b],\ \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f * g \in R[a;b]$.
4. $|f| \in R[a;b]$, при этом:
    - $\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
    - $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
    - $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

0.45 Аддитивность интеграла Римана

Определение. Пусть $a > b,\ a, b \in \mathbb{R}$, положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$.

Теорема (Аддитивность интеграла Римана)**.** Пусть даны точки $a, b, c \in \mathbb{R}$. Если f - интегрируема на большем из отрезков $[a;b],\ [a,c],\ [b,c]$, то f - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если f интегрирема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

0.46 Монотонность интеграла Римана и ее следствия

Теорема. Если $a < b$ и $f \in R[a;b]$ и:

1. $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
2. $\forall x \in [a;b]\ f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$

Следствие. (теоремы 2.4.9)

1. Если $a < b,\ f, g \in R[a;b]$ и:
   (a) $\forall x \in [a;b]\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$
   (b) $\forall x \in [a;b]\ f(x) < g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$
2. Если $f \in R[a;b],\ a < b,\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.
3. (Теорема о среднем)
   Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

   Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b]:\ \int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

0.47 Теорема о среднем

Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b]:$ $\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

0.48 Первая теорема о среднем

Теорема (Первая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и g не меняет свой знак на $[a;b]$. Тогда $\exists \mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

0.49 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

Определение. Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ F(x)$ определена для $\forall x \in [a;b]$.

0.50 Непрерывность интеграла Римана

Теорема (непрерывность интеграла Римана)**.** Если $f \in R[a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывна на $[a;b]$.

0.51 Дифференцируемость интеграла Римана по верхнему пределу и ее следствие

Теорема (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу)**.** Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$ и f непрерывна в точке x, тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x, причем:

$$F'(x) = f(x) \implies (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$$

Следствие. Если f - непрерывна на $[a;b]$, то на $[a;b]$ она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Замечание. Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a;b]$ - множество интегрируемых на $[a;b]$ функций;
- $C[a;b]$ - множество непрерывных на $[a;b]$ функций;
- $C^o[a;b]$ - множество дифференцируемых на $[a;b]$ функций.

Получаем:

$$C^o[a;b] \subset C[a;b] \subset R[a;b].$$

0.52 Вторая теорема о среднем

Теорема (вторая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b]$, причем f - монотонна на $[a;b]$. Тогда $\exists \xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

0.53 Формула Ньютона-Лейбница для непрерывной функции

Теорема. Пусть f - непрерывна на $[a;b]$ и $F(x)$ - её первообразная.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

0.54 Формула Ньютона-Лейбница для функции, недиффиренцируемой в некоторых (конечное число) точках отрезка. Следствие.

Теорема. Пусть $F(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $[a;b]$ за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема: $F'(x) = f(x)$. И, наконец, $f(x) \in R[a;b]$.

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Следствие. Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то $\forall x \in [a;b]$:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

0.55 Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Теорема (формула интегрирования по частям)**.** Если фукнции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

0.56 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** Пусть функция $f(t)$ имеет на отрезке $[a;x]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a;x),$$

где $r_n(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1}dt.$

0.57 Замена переменной в интеграле Римана (для непрерывных функций)

Теорема. Пусть $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha; \beta]$ в отрезок $[a; b]$, причем $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, функция $f(\phi(t))\phi'(t)$ - непрерывна на $[\alpha; \beta]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

0.58 Замена переменной в интеграле Римана (для интегрируемых функций)

Теорема (замена переменной для интегрируемых функций)**.** Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R},\ f \in R[a; b]$, функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi : [\alpha; \beta] \to [a; b]$
2. $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$
3. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$
4. ϕ - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

0.59 Путь

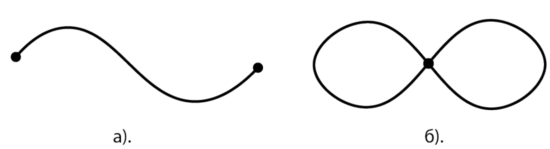
Определение. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \to X$$

0.60 Простой путь

Определение. Пусть $\gamma : [a; b] \to X$ называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$



а). простой путь б). непростой путь

0.61 Отношение эквивалентности путей

На множестве путей введем отношение.

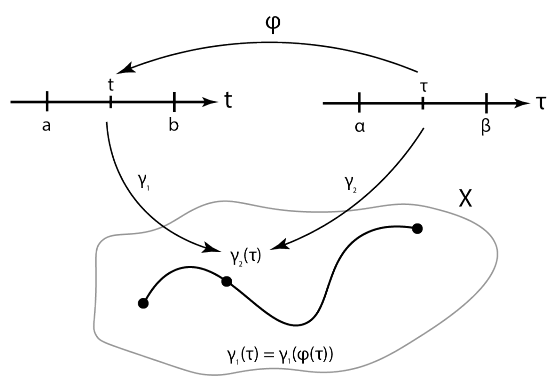
Пусть $\gamma_1 : [a;b] \to X,\ \gamma_2 : [\alpha;\beta] \to X$.

Будем говорить, что γ_1 и γ_2 находятся в отношении "$\sim$", то есть $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует строго возрастающее отображение $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$:

$$\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b,$$

а так же:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$



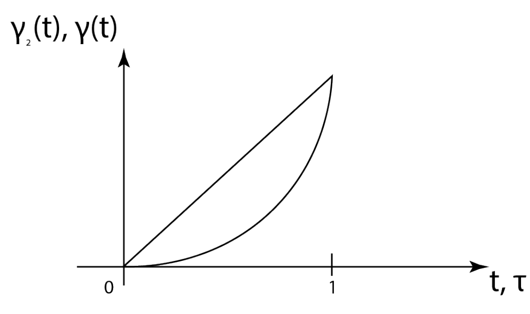
0.62 Носитель пути

Определение. Образ пути γ называется **носителем** этого пути.

Пример. Рассмотрим:

$\gamma_1 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) = t;$

$\gamma_2 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) = \tau^3,$



Что бы доказать, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$, нужно найти строго возрастающее отображение $\phi : [0;1] \to [0;1]$:

$t = \phi(\tau) = \tau^3,\ \phi(\tau)$ - строго возрастающее, $\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1;$
$\gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau)).$

0.63 Кривая на множестве

Определение. Кривой в X будем называть класс эквивалентных путей.

0.64 Простая кривая

Определение. Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

0.65 Параметризация кривой

Определение. Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей) l называется **параметризацией** этой кривой.

0.66 Гладкая параметризация кривой

Определение. Пусть l - простая кривая в $\mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x(t); t(t))$ - ее параметризация. Кривая l называется **гладкой**, если $\forall t\ x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$ и $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$ $(\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2),\ x'(t_0) = 0$ и $y'(t_0) = 0$.

0.67 Ломаная, вписанная в кривую

Определение. Пусть $l \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ - параметризация кривой l.

Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ - разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $M_i = \gamma(t_i),\ i = \overline{0, n}$ - точка пути γ (кривая l):

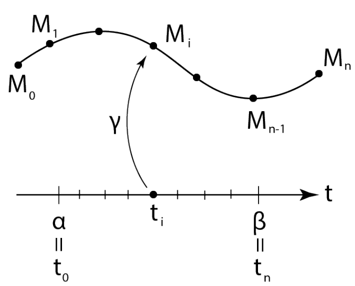
$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

Тогда отрезок $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1, n})$ называется **звеном** кривой l. Объединение $\bigcap\limits_i M_{i-1}M_i$ - **ломаная, вписанная в** l.

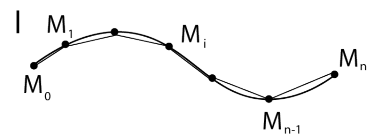
0.68 Периметр ломаной, вписанной в кривую

Определение. Периметром ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \ldots, M_n) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$



M1
Mi
Mn
M0
γ
Mn-1
t
α
=
t0
ti
β
=
tn



l
M1
Mi
Mn
M0
Mn-1

0.69 Спрямляемая кривая

Определение. Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую l - ограничено, то кривую l будем называть **спрямляемой**.

0.70 Аддитивность длины кривой

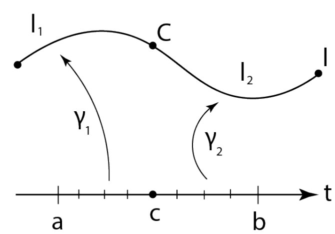
Теорема (аддитивность длины кривой)**.** Функция $S(l)$ является аддитивной, то есть если $l = l_1 \cup l_2$, то $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Более тонко: Пусть $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация спрямляемой кривой l, точка $c \in [a; b]$:

$\gamma_1 : [a; c] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_1,

$\gamma_2 : [c; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_2,

при этом $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.



Тогда $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

0.71 Длина кривой как предел

Теорема. Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ и $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ - разбиение отрезка $[a; b]$, этому разбиению соответствуют точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ - соответсвующая ломаная, вписанная в l ($M_i = \gamma(t_i)$), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \to 0} p(m),$$

где $\lambda = \max_i \Delta t_i, \ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

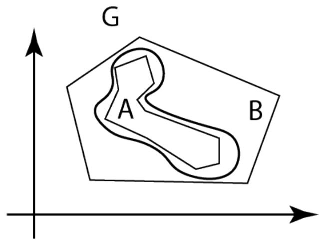
0.72 Формула вычисления длины кривой

Теорема (формула для вычисления длины кривой)**.** Пусть l - гладкая кривая; $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация (гладкая, то есть $\gamma(t) = (x(t); y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные произведения на $[a; b]$). Тогда l - спрямляема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

0.73 Многоугольник

Определение. Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



0.74 Измеримое по Жордану (квадрируемое) множество. Площадь.

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ называется **измеримым по Жардану** (или **квадрируемым**), если:

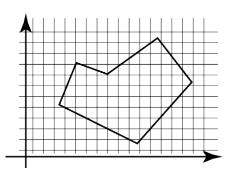
$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

где sup берется по всем многоугольникам, вписанным в G, а inf - по всем многоугольникам, описанным около G. При этом их общее значение $S = S_* = S^*$ называется **площадью** G, или **мерой Жардана**.

S_* - **внутренняя** мера, S^* - **внешняя** мера.

Другими словами, множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо, если внутреняя и внешняя меры совпадают.

Здесь $S(A)$, $S(B)$ - площади многоугольников A и B. Многоугольник A можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:



$$S_{\square} = ab; \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

Пример. (из определения)

1. Квадрируемые множетсва на плоскости.

   Круг с границей:
   $$x^2 + y^2 = 1$$

   Упражнение: доказать, что круг - квадрируемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

   Множество точек одинарного квадрата с рациональными координатами:
   $$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0; 1] \times [0; 1])$$

   Вписанный многоугольник $A = \emptyset$, $S(A) = 0$. Многоугольник $B = [0; 1] \times [0; 1]$ имеет площадь равную 1 ($S(B) = 1$).

   $$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \ (S_* \neq S^*)$$

0.75 Критерий квадрируемости множества

Теорема (критерий квадрируемости)**.** Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо $\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists$ многоугольники A и B:

1. $A \subset G, \ B \supset G$,
2. $S(B) - S(A) < \epsilon$.

0.76 Криволинейная трапеция

Определение. Криволинейная трапеция - часть плоскости, ограниченная прямыми $x = a, \ x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox.

0.77 Квадрируемость криволинейной трапеции

Теорема. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ - непрерывна на $[a; b], \ f(x) \geqslant 0$.

0.78 Квадрируемость криволинейного сектора

Определение. Фигура на плоскости, ограниченная лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$ называется **криволинейным сектором**.

Теорема. Пусть криволинейный сектор Ω ограничен лучами $\phi = \alpha, \ \phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$. Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi,$$

где $\rho(\phi)$ - непрерывна на $[\alpha; \beta]$.

0.79 Несобственный интеграл, заданный на луче, на прямой, на отрезке. Сходящийся и расходящийся несобственный интеграл

Определение. Пусть $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ (задана на луче) и $\forall b \in [a; +\infty)$ $f \in R[a; b]$. Рассмотрим:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $[a; +\infty)$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \overset{def}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Определение. (продолжение определения)

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to +\infty} (F(b) - F(2)) = \lim\limits_{b \to +\infty} (-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

   Аналогично, пусть функция $f : (-\infty; a] \to \mathbb{R}, \ f \in R[a; b], \ \forall b \in (-\infty; a]$.

   $$\lim_{b \to -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

   этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $(\infty; a]$.

   Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

   $$\int_{-\infty}^{a} f(x) dx \overset{def}{=} \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

   Аналогично:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \to +\infty, b \to -\infty} \int_b^c f(x) dx,$$

   где $c \to +\infty, b \to -\infty$ - независимые друг от друга ($\forall b, c \ f(x) \in R[b; c]$).

2. Далее, пусть $f:[a;b)\to\mathbb{R}:\ \forall c\in[a;b) f\in R[a;c]$. Положим:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции f на полуинтервале $[a;b)$.

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть $f:(a;b]\to\mathbb{R}$, причем $\forall c\in(a;b]\ f\in R[c;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx\overset{def}{=}\lim_{c\to a}\int_c^b f(x)dx -$$

несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $(a;b]$.

Аналогично, пусть $f:(a;b)\to\mathbb{R}$, причем $\forall c,d\in(a;b)\ f\in R[c,d]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx\overset{def}{=}\lim_{c\to a,d\to b}\int_c^d f(x)dx,$$

(где $c\to a, d\to b$ - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от $f(x)$ на $(a;b)$

3. Пусть $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ и $\exists c\in(a;b):\ f$ - неограниченана в точке c.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx+\lim_{\epsilon}\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Если lim существует, то интеграл является сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_a^\omega f(x)dx,$$

где $\omega=+\infty,\ -\infty,\ b$.

0.80 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема (Критерий Коши)**.** Пусть $\forall b\in[a;\omega)\ f\in R[a;b]$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\forall\epsilon>0\ \exists B\in[a;\omega):\ \forall b_1,b_2\in(a;\omega)$ и $b_1,b_2>B$ верно неравенство:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx|<\epsilon$$

0.81 Свойства несобственного интеграла

Теорема. Пусть $\forall b \in [a;\omega)\ f \in R[a;b]$.

1. Тогда $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\forall b \in [a;\omega)$ $\int_b^\omega f(x)dx$ сходится и
$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx$$
2. $$\lim_{b\to\omega} \int_b^\omega f(x)dx = 0$$
3. $\forall c \in \mathbb{R}$
$$\int_a^\omega cf(x)dx = c\int_a^\omega f(x)dx$$
(то есть если $c\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, то сходится $\int_a^\omega c(x)dx$ и наоборот, и они равны)
4. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходятся, то сходится и
$$\int_a^\omega (f(x)+g(x))dx = \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx$$

0.82 Сходимость несобственного интеграла от неотрицательных функций

Теорема (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции)**.** Пусть $f \in R[a;b]$ для $\forall b \in (a;\omega)$ и $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a;\omega)$.
$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \exists M > 0 :\ \forall b \in (a;\omega)$
$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

0.83 Первый признак сравнения

Теорема (первый признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)\ f(x) \leqslant g(x)$ и $\forall b \in [a;\omega)\ f,g \in R[a;b],\ f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0$, тогда:

1. Если $\int_a^\omega g(x)dx$ - сходится $\implies$ $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.
2. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ - расходится $\implies$ $\int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

0.84 Второй признак сравнения

Теорема (второй признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)\ f(x) > 0,\ g(x) > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (либо 0, либо $+\infty$, либо $const \neq 0$), тогда:

1. Если $A = +\infty$, то из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$.

2. Если $A = 0$, то из расходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega g(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega f(x)dx$.

3. Если $A = const \neq 0$, то интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ ведут себя одинаково.

0.85 Абсолютно сходящийся несобственный интеграл

Определение. Пусть $\forall b \in [a;\omega)\ f \in R[a;b]$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^\omega |f(x)|dx$.

0.86 Связь сходимости и абсолютной сходимости несобственного интеграла

Теорема. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leqslant \int_a^\omega |f(x)|dx$$

0.87 Признак Вейерштрасса

Следствие (признак Вейерштрасса)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)\ |f(x)| \leqslant g(x)$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится.

0.88 Условно сходящийся несобственный интеграл

Определение. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, а $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega$ называется **условно сходящимся**.

0.89 Признак Абеля

Теорема (признак Абеля)**.** Если:

1. $\int_a^\omega$ сходится,
2. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a;\omega)$,

то $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

0.90 Признак Дирихле

Теорема (признак Дирихле)**.** Если:

1. Функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a;\omega)$, то есть $\exists M > 0 : \ \forall b \in [a;\omega)$
$$|\int_a^b f(x)dx| \leqslant M,$$
2. $g(x)$ - монотонна на $[a;\omega)$ и $g(x) \to 0$ при $x \to \omega$. Тогда $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

0.91 Теорема о замене переменной в несобственном интеграле

Теорема (о замене переменной в несобственном интеграле)**.** Пусть $\forall b \in [a;\omega), \ f \in C[a;b]$ (множество непрерывных функций), функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi : \ [\alpha;\omega_1) \to [a;\omega)$,
2. $\phi(\alpha) = a$, при $t \to \omega_1, \ \phi(t) \to \omega$,
3. $\phi(t)$ монотонно возрастает на $[\alpha;\omega_1)$,
4. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\omega_1)$,

Тогда интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_\alpha^{\omega_1} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ведут себя одинаково и равны между собой.

0.92 Линейное пространство

Определение. Линейным пространством называется четверка $(X, K, +, *)$, где X - множество, K - поле, "$+$" - операция сложения на X ("$+$" $: \ X \times X \to X$), "$*$" - операция умножения элемента поля K на элемент множества X ("$*$" $: \ K \times X \to X$).

При этом выполняются следующие аксиомы:

1. $< X, + >$ - абелева группа;

2. (a) $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall x \in X \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta X)$,
   (b) $\forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in K \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
   (c) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,
   (d) $\forall x \in X, \ 1 \in K \quad 1x = x$.

0.93 Линейное нормированное пространство. Норма

Определение. Линейным нормированным пространством называется пара $(X, ||*||)$, где X - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, а $||*||$ - функция из X в $\mathbb{R}$.

$||*||: \ X \to \mathbb{R}$, причем выполнены следующие аксиомы для нее:

1. $||x|| = 0 \iff x = \overline{0}$ (читается "норма от x"),
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ ||\lambda x|| = |\lambda| * ||x||$,
3. $\forall x, y \in X \ ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Функция $||*||$ называется **нормой**.

0.94 Примеры линейных нормированных пространств (ЛНП)

Пример. ЛНП:

1. $X = \mathbb{R}, \ \forall x \in X \quad ||x|| = |x|$ (норма $=$ модулю по свойствам нормы),
2. $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n раз), $\forall x \in X \ ||x|| = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}, \ x = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Покажем, что это норма:

   $1., 2.$ - очевидно. Докажем, что $\forall x, y \in X \ ||x+y|| \leqslant ||x|| x + ||y||$, то есть докажем, что $(\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ $(\triangle)$.
   Рассмотрим $\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2\sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \leqslant |$ используем неравенство Назарова-Заблоцкого (Коши-Буньковского) $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^n x_K^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} | \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n y_k^2 = [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$.
   Имеем:
   $$\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2 \leqslant [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \implies$$
   приходим к $(\triangle)$ операцией взятия корня от обеих частей неравенства
   $$\implies (\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3. $X = \mathbb{R}^n,\ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad ||x|| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |x_k|.$

Такое ЛНП обозначается $\mathbb{R}^{\ltimes}_{\infty}$.

4. $X = \mathbb{R}^n,\ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad ||x|| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}},\ p > 1.$

   Упражнение: доказать, что введенная функция есть норма, используя неравенство Левановича (Гельдера):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

5. X - пространство непрерывных на $[a;b]$ функций, то есть $X = C[a;b]$, $\forall x \in X \quad ||x|| = \max\limits_{t \in [a;b]} |x(t)|$; 1,2,3 - почти очевидно.

6. $X = C[a;b],\ \forall x \in X \quad ||x|| = \int_a^b |x(t)| dt.$

   Покажем, что введенная функция есть норма:

   (a) $||x(t)|| = 0 \iff x(t) = 0;$

   Пусть $\int_a^b |x(t)| dt = 0$. От противного. Допустим, что $\exists t_0 \in [a;b]$: $x(t_0) \neq 0$. Тогда $\exists t_0 \in [\alpha;\beta],\ [\alpha;\beta] \subset [a;b]$ и $\forall t \in [\alpha;\beta] \quad |x(t)| > 0,$

$$\int_a^b x(t)| dt \geqslant \int_\alpha^\beta |x(t)| dt$$

   Противоречие $\implies \forall t \in [a;b]\ |x(t)| = 0.$

   (b) $||\lambda x|| = |\lambda| * ||x||$ (из свойств определенного интеграла);

   (c) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (из свойств определенного интеграла);

7. $X = C[a;b].$

0.95 Метрика ЛНП

ЛНП $(C[a;b], ||x||(*))$ образначается $C^p[a;b]$.

Утверждение. Пусть $(X, ||*||)$ - ЛНП. Тогда функция $\rho X \times X \to \mathbb{R}$, опредленная $\rho(x,y) = ||x - y||$, является метрикой ЛНП.

0.96 Банахово ЛНП. Примеры

Определение. Если линейное нормированное пространство является полным относительно введенной метрики, то оно называется **банахово**.

(X - полное, если $\forall$ фундаментальная последовательность сходится).

Пример. (банаховых пространств)

1. $X = \mathbb{R}$ - банахово;
2. $X = C[a;b],\ ||x|| = \max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|$;
3. $C_p[a;b]$ - ЛНП, $X = C[a;b]$,

$$||x|| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

0.97 Теорема о вложенных шарах

Теорема (о вложенных шарах)**.** Метрическое пространство (МП) является полным $\iff$ $\forall$ последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеют в нем непустое пересечение.

0.98 Сжимающее отображение

Определение. Пусть $(X, \rho_X),\ (Y, \rho_Y)$ - МП. Отображение $f : X \to Y$ называется **сжимающим**, если $\exists 0 \leqslant \alpha < 1 :\ \forall x_1, x_2 \in X$

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha * \rho_X(x_1, x_2).$$

0.99 Принцип сжимающих отображений

Теорема (принцип сжимающих отображений)**.** Сжимающее отображение полного МП в себя имеет единственную неподвижную точку, то есть если (X, ρ) - полное, отображение $f : X \to X$ - сжимающее, то

$$\exists! a \in X : \quad f(a) = a.$$

0.100 Предкомпактное множество в МП

Определение. Множество E в метрическом пространстве называется **предкомпактным** (**относительно компактным**), если ее замыкание $\overline{E}$ компактно.

0.101 Вполне ограниченное множество

Определение. Множество E в МП (X, ρ) называется **вполне ограниченным**, если $\forall \epsilon > 0\ \exists$ конечная ϵ-сеть для E.

Напоминание: ϵ-сеть - набор $\{x_1, \ldots, x_n \mid x_i \in E\}$ $\forall x \in E\ \exists$ хотя бы одна точка $x_i :\ \rho(x, x_i) < \epsilon$.

0.102 Теорема Хаусдорфа

Теорема (Хаусдорфа)**.** Множество E в полном МП (X, ρ) является предкомпактным $\iff$ оно вполне ограничено.

0.103 Теорема о полноте $\mathbb{R}^n$

Теорема. Пространство $\mathbb{R}^n$ (n-мерное линейное пространство с евклидовой метрикой),

$$||x|| = (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2)^{\frac{1}{2}} \text{ - полное}$$

0.104 Критерий компактности $\mathbb{R}^n$

Теорема (критерий компактности в $\mathbb{R}^n$)**.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ замкнуто и ограничено.

0.105 Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть $(X, ||*||_1), (X, ||*||_2)$ - линейное нормированное пространство (конечномерное). Говорят, что $||*||_1 \sim ||*||_2$ (эквивалентны), если $\exists c_1, c_2 > 0$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$:

$$\forall x \in X \quad c_1 * ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant c_2 * ||x||_2 \quad (*)$$

Теорема (эквивалентность норм в конечномерном пространстве)**.** Если X - конечномерное пространство МП, и $||*||_1,\ ||*||_2$ - две нормы на нем, то:

$$||*||_1 \sim ||*||_2$$

0.106 Линейные отображения в конечномерных пространствах

Определение. Пусть X, Y - линейные пространства. Отображение $L : X \to Y$ называется **линейным**, если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha * L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha L x_1 + \beta L x_2.$$

0.107 Теорема о матрице линейного отображения

Теорема. Всякому линейному отображению $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ можно поставить в соответствие матрицу A размером $k \times n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x) = Ax.$$

При этом, если в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ зафиксированны базисы, то матрица A определяется однозначно.

0.108 Теорема о непрерывности линейного отображения

Утверждение. Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ - линейно, то оно непрерывно.

0.109 Дифференциал в точке в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$, точка $a \in D$ - предельная точка для D.

Отображение f называется **дифференцируемым** в точке a, если $\forall h :$ $a + h \in D$ $\exists$ линейное отображение $L(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$:

$$f(a+h) - f(a) = L(a)h + o(h), \quad h \to \overline{0}.$$

Линейный оператор $L(a)$ называется **дифференциалом** (или **касательным отображением**, или **производным отображением**) функции f и обозначается:

$$Df(x), \quad df(x)$$

0.110 Критерий дифференцируемости отображения в $\mathbb{R}^n$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$

и $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{pmatrix}$

Отображение f дифференцируемо в точке $a \iff$ отображение $f^i : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a.

0.111 Область

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется **областью**, если оно открыто и линейно связно.

0.112 Частная производная функции многих переменных

Определение. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad x \in D.$$

Частной производной отображения f точки $x \in D$ по переменной x^i называется

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, x^2, \ldots, x^i + h^i, \ldots, x^n) - (f(x^1, x^2, \ldots, x^n))}{h^i},$$

если этот предел существует.

Обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad or \quad f'_{x^i}$$

0.113 Связь дифференциала и частных производных

Теорема (о связи дифференциала и частных производных)**.** Если $f : D \to \mathbb{R}$ (D - область в $\mathbb{R}^n$) дифференцируема в точке $x \in D$, то она имеет в точке x все частные производные, при этом:

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} h^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \frac{\partial f}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}$$

(здесь везде $1, 2, \ldots, n$ - индексы, а не степени или производные).

0.114 Матрица Якоби

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Матрицей Якоби отображения f в точке $x \in \mathbb{R}$ называется:

$$\mathfrak{I}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Здесь $f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix}$

Т. обр. $df(x)h = \mathfrak{I}(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ df^2(x)h \\ \vdots \\ df^k(x)h \end{pmatrix}$

Часто матрицу Якоби отображения f будем обозначать f'.

0.115 Дифференцируемость и арифметические операции

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - область, $f : D \to \mathbb{R}^k$, $g : D \to \mathbb{R}^k$, если f и g дифференцируемы в точке $x \in D$, то $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ дифференцируема в точке x, при этом:

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g',$$

где $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)'$, f', g' - матрицы Якоби.

Теорема. Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$. Если f, g - дифференцируемы в точке $x \in D$, то $f \cdot g$ дифференцируемо в точке x и если $g(x) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ - дифференцируемо в точке x, при этом:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

0.116 Дифференцирование композиции

Теорема (дифференцирование композиции)**.** Пусть X - область в $\mathbb{R}^n$, Y - область в $\mathbb{R}^m$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}^k$.

Если f дифференцируема в точке $x \in X$, g - дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$, то $g \circ f$ дифференцируема в точке x и $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$.

0.117 Дифференцирование обратного отображения

Теорема (о дифференцируемости обратного отображения)**.** Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$:

1. f дифференцируемо в точке $x \in D$;

2. f имеет обратное отображение в D;

3. f^{-1} - непрерывно в точке $y = f(x)$;

4. $f'(x)$ - обратимая матрица.

Тогда $f^{-1} : f(D) \to D$ дифференцируемо в точке $y = f(x)$ и $(f^{-1})' = [f'(x)]^{-1}$.