Ausführung zufällige Effekte des HLM

Die zufälligen Effekte können als „a way to combine information from different levels within a grouping variable“ verstanden werden (Fox, Negrete-Yankelevich und Sosa 2015, 312). Die einbezogene Verteilung der zufälligen Effekte stabilisiert die Schätzung, da Gruppen-spezifische Effekte über ein „penalty term“ einbezogen werden. Die berechneten zufälligen Effekte schätzen den Einfluss von Gruppen-spezifischen Effekten (Clustern) zwischen zwei Extremen: Es wäre (1) möglich, Gruppierungsvariablen völlig zu ignorieren und ein lineares Modell $y_{ij} = \beta_0 + \epsilon_{ij}$ zu berechnen (*fully pooled estimation*). Eine (2) andere Möglichkeit wäre, für jede Gruppe (Cluster) i eine eigene Regression $y_{ij} = \eta_i + \epsilon_{ij}$ zu berechnen (*fully unpooled estimation*). Hier geben uns die berechneten Parameter eines Clusters keinerlei Informationen über die Parameter eines anderen Clusters (Fahrmeir u. a. 2013, 356). Ein zufälliger Effekt liegt nun zwischen diesen beiden Extremen und nimmt an, dass die geschätzten Parameter aus einer Population kommen (z.B. alle Schulen Deutschlands) und die berechneten Parameter der einzelnen Cluster (z.B. einzelne Schulen) einen gewichteten Durchschnitt zwischen dem geschätzten Verlauf eines einzelnen Clusters und der Population darstellen (vgl. Fox, Negrete-Yankelevich und Sosa 2015, 312f.). Diese Art der Berechnung der zufälligen Effekte hat entscheidende Vorteile. So werden zufällige Effekte nur hin zu dem Mittelwert angepasst, wenn diese beispielsweise einen hohen Fehleranteil aufweisen und damit unsicher geschätzt sind. Damit werden unsicher geschätzte Schuleffekte besser geschätzt, da diese in der Anpassung hin zum Mittelwert Informationen und damit statistische Stärke aus dem gesamten Datensatz beziehen. (vgl. Jones und Bullen 1994, 260).
Diese Eigenschaft der zufälligen Effekte, welche den *shrinkage* in der Schätzung der zufälligen Effekte ausdrückt, lässt sich durch folgende Gleichung darstellen und berechnen (Gleichnung nach Galwey 2014, 168f.; Sanders und Horn 1994, 307f.):

$$\mathrm{BLUP}_k = \mathrm{BLUE}_k * \text{shrinkage factor}_k = \hat{\mu} + (\hat{\mu}_k - \hat{\mu}) * \left(\frac{\hat{\sigma}^2_G}{\hat{\sigma}^2_G + \frac{\hat{\sigma}^2_E}{r_k}} \right)$$

BLUP steht für *Best Linear Unbiased Predictor* und entspricht den zufälligen Effekten. Hingegen steht BLUE für *Best Linear Unbiased Estimate*. Diese unterscheiden sich darin, dass ein BLUP zusätzlich die geschätzten Varianzen für die Berechnung der zufälligen Effekte mit einbezieht. Ein BLUP Schätzer ist der beste (*Best*) Schätzer, da dieser zu minimalen Fehlern in der Schätzung führt (Robinson 1991, 15). Der BLUE Schätzer ergibt sich aus $\hat{\mu}_k - \hat{\mu}$, also dem geschätzten Durchschnitt $\hat{\mu}_k$ des jeweiligen Clusters k abzüglich dem geschätzten Mittelwert der untersuchten Population $\hat{\mu}$. Dieser BLUE Schätzer wird durch einen *shrinkage factor* gemindert, und damit wird berücksichtigt, dass unpräzise Schätzungen eine höhere Unsicherheit in der Schätzung aufweisen. So sind beispielsweise, die Schulen mit den besten bzw. schlechtesten Schuleffekten, vermutlich unsicherer geschätzt. Dabei ist der *shrinkage factor* in folgenden Fällen groß (Galwey 2014, 168f.; Hox 2010, 30f.):

- die geschätzte Varianz der Population $\hat{\sigma}^2_G$ ist groß
- der Fehleranteil in der Gruppenvarianz $\hat{\sigma}^2_E$ ist klein
- die Gruppengrößen der Cluster k ist groß (r_k)

Diese Eigenschaft der zufälligen Effekte (= BLUP), die durch deren *shrinkage factor* bedingt ist, führt dazu, dass „BLUP is a solution to the regression to the mean problem, which has been long recognized as an impediment to the use of student data in an assessment system for teaching effectiveness“ (Sanders und Horn 1994, 307).

Graphisch ist die Eigenschaft des *shrinkage factor* auf Seite 170 in dem Buch Galwey 2014 dargestellt und eine einzelne Beispielrechnung findet sich in dem Artikel von Sanders und Horn 1994 auf Seite 307.

Oftmals werden die zufälligen Effekte nicht BLUPs, sondern *conditional modes* benannt. Dieser Begriff ist genauer, da beispielsweise in dem R-Paket lme4 die zufälligen Effekte als $\hat{\mu} = E(\mu \mid Y)$ berechnet werden. Dies bedeutet, dass die Verteilung der zufälligen Effekte μ gegeben den beobachteten Daten Y berechnet wird. Dabei stellt die Verteilung der zufälligen Effekte eine konditionale Verteilung dar und wird damit in Abhängigkeit der einbezogenen Prädiktoren berechnet. Details dazu finden sich in den Ausführungen von Bates 2010 ab Seite 22 und unter dem Link:
`http://t1p.de/how-are-random-effects-blups-predicted`.

Literatur

Bates, Douglas (2010). *lme4: Mixed-effects modeling with R.*

Fahrmeir, Ludwig u. a. (2013). *Regression Models, Methods and Applications.* Springer.

Fox, Gordon, Simoneta Negrete-Yankelevich und Vinicio Sosa (2015). *Ecological statistics: contemporary theory and application.* Oxford University Press, USA.

Galwey, Nicholas (2014). *Introduction to Mixed Modelling Beyond Regression and Analysis of Variance.* John Wiley & Sons.

Hox, Joop (2010). *Multilevel analysis: Techniques and applications.* Routledge.

Jones, Kelvyn und Nina Bullen (1994). „Contextual models of urban house prices: a comparison of fixed-and random-coefficient models developed by expansion“. In: *Economic Geography* 70.3, S. 252–272.

Robinson, George (1991). „That BLUP Is a Good Thing: The Estimation of Random Effects“. In: *Statistical science* 6.1, S. 15–32.

Sanders, William und Sandra Horn (1994). „The Tennessee value-added assessment system (TVAAS): Mixed-model methodology in educational assessment“. In: *Journal of Personnel Evaluation in education* 8.3, S. 299–311.